Handbuch

der

Geometrie

für

Praktiker

gemeinverständlich zunächst für das Selbststudium

abgefaßt

von

Dr. L. C. Schulz von Straßnitzki,

ö. o. Professor der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

Wien.

Verlag von Carl Gerold.

1850.

Druck von Carl Gerold & Sohn.

Vorwort.

Den Zweck des Buches spricht der Titel deutlich aus; die Vorkenntnisse, die dieses Buch voraussetzt, sind ungefähr diejenigen Theile der Arithmetik, die in meinem „Handbuche der Arithmetik für Praktiker" abgehandelt sind. Da der Fortschritt der Zeit größere Anforderungen an die Praktiker macht, so sucht das vorliegende Buch den gesteigerten Bedürfnissen der Neuzeit Genüge zu leisten, und enthält daher Mehreres, welches in den Elementar-Büchern der Geometrie nicht vorzukommen pflegt, ja Vieles, was man bisher nur auf dem Wege der höhern Mathematik erreichen zu können glaubte. Die Bemühungen des Verfassers in dieser Beziehung wird ein wohlwollender Kenner zu würdigen wissen, und sicherlich auch zugeben, daß die der Abfassung dieses Werkes gewidmete Anstrengung, auf rein wissenschaftlichem Wege angewendet, Erfolge erzielt hätte, die nicht verfehlt haben würden, dem Verfasser Anerkennung zu erwerben, während die Abfassung eines Werkes, wie das vorliegende, nur mit dem Bewußtseyn lohnt, seinen Mitbürgern sich nützlich ge-

macht zu haben. Mit dem Wunsche nun, diesem Endzwecke nach Möglichkeit nahe gekommen zu seyn, empfiehlt sich der Verfasser seinen freundlichen Lesern.

Wien, den 22. März 1850.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Zweites Buch.

Grundlehren des Kreises.

I. Der Kreis an und für sich.

Drittes Buch.

Konstruktionen.

I. Grundaufgaben.

II. Aufgaben über die Proportionalität.

III. Verwandlung der Figuren.

IV. Theilung der Figuren.

Viertes Buch.

Trigonometrie.

Fünftes Buch.

Anwendung der Trigonometrie auf Dreiecke, Vielecke und den Kreis.

Sechstes Buch.

Krumme Linien in einer Ebene.

Erste Abtheilung.

Linien der zweiten Ordnung, oder Kegelschnittlinien.

III. Hyperbel.

Zweite Abtheilung.

Krumme Linien höherer Ordnung, transcendente krumme Linien.

Zweiter Theil.

Die Lehre von den räumlichen Gebilden.

Erstes Buch.

Flächenlehre.

I. Gerade Linie im Raume.

Zweites Buch.

Körperlehre.

I. Prismen und Cylinder.

III. Kugel und andere durch Drehung erzeugte Körper.

Sinnstörende Druckfehler.

Seite 61, §. 79, zweite Zeile, soll statt Summe halbe Summe stehen.
» 675, §. 477, dritte » » » Höhe Drittel der Höhe stehen.

Einleitung.

Geometrie ist die Lehre von den Beziehungen und Gesetzen des Räumlichen an Sich. Der Gegenstand derselben ist eine Abstraktion vom Wirklichen, etwas bloß Gedachtes. Die Vorstellung eines **geometrischen Körpers** erhält man, wenn man sich von einem Körper in der Wirklichkeit die Farbe, Härte, Glanz, Gewicht u. s. w. alles wegdenkt, und nur den Raum, den er einnimmt, in Betrachtung ziehet. Was man also einen geometrischen Körper nennt, existirt nirgends in der Natur, und ist ein bloßer Gedanke, zu dem man am leichtesten gelangt, wenn man sich irgend einen Körper in Bewegung denkt, in den Raum, den er eben eingenommen hat, d. h. die bloße Gestalt desselben, ohne alle übrigen Eigenschaften vorzustellen sucht. Die Gränzen eines Körpers nennt man **Flächen**, es sind dieß Ausdehnungen in die Länge und Breite, ohne irgend eine Dicke; die Begränzungen der Flächen nennt man Linien, welche bloß Ausdehnungen in die Länge, ohne Breite und Dicke sind; die Gränzen der Linien heißen Punkte, die ohne alle Ausdehnung sind. Auch die geometrischen Flächen und Linien sind bloße Gedanken, und können nirgend wirklich in der Natur dargestellt werden. Sehr dünner Draht, Spinnenfäden können uns wohl die Vorstellung von Linien erleichtern, sind aber das durchaus nicht, was wir mathematische Linien nennen; denn so dünn sie immer seyn mögen, so haben sie doch immer eine, wenn auch noch so kleine Dicke, sonst könnte man dieselben weder sehen, noch greifen, was beides der Fall ist, weil sie wirkliche Körper sind. Ein noch so dünnes Papier, oder Goldblättchen ist noch keine geometrische Fläche, sondern ein wirklicher Körper, der eine Dicke hat, die sich durch künstliche Vorrichtungen sogar messen läßt. Es ist wichtig, daß die Anfänger gleich an der Schwelle einsehen, daß der Gegenstand der Geometrie bloß etwas Gedachtes sey, dem man sich durch Zeichnung oder Modellirung zwar nähern kann, den man aber vollkommen darzustellen nie im Stande ist.

Man unterscheidet die Linien in krumme und gerade. Die Vorstellung der geraden Linie, so wie überhaupt die ersten Grundbegriffe der Geometrie sind nicht Resultate eines besondern Nachdenkens, sondern sie bilden sich bei allen Menschen bei den ersten Regungen ihres Bewußtseyns auf eine bei allen gleichförmige Art, daher wir auch nicht im Stande sind eine Erklärung einer geraden Linie anzugeben, sondern diesen Begriff bei allen Menschen voraussetzen, und die Merkmale desselben, die sich im Bewußtseyn eines jeden Menschen auf gleiche Art vorfinden, herausheben.

Darin liegt die Unumstößlichkeit der Geometrie und der gesammten Mathematik, daß ihre Grundbegriffe jedem Menschen, so zu sagen, eingeboren sind, und man, um die Wahrheit irgend eines Satzes zu erweisen, nur diesen auf die von allen zugestandenen Grundbegriffe zurückzubringen braucht.

Denkt man sich eine gerade Linie nach beiden Seiten ins Unendliche verlängert, so nennt man die unendlich gedachte Ausdehnung in gerader Linie ihre Richtung.

Denkt man sich eine gerade Linie durch zwei, in ihr angenommene Punkte begränzt, so heißt das, zwischen den beiden Punkten enthaltene Stück der geraden Linie die Entfernung dieser zwei Punkte. Daß der kürzeste Weg, der von einem Punkte zum anderen möglich, die gerade Linie ist, die sie verbindet, ist unmittelbare Thatsache des Bewußtseyns, und zwar nicht bloß des menschlichen, denn selbst das Thier stürzt in gerader Linie auf seine Beute los.

Man kann sich jede Linie als durch die Bewegung eines Punktes erzeugt denken, bewegt sich der Punkt stets in derselben Richtung, so beschreibt er eine gerade Linie; bewegt sich der Punkt aber so, daß er stets eine andere Richtung nach irgend einem Gesetze annimmt, so entsteht eine krumme Linie. Kein Theil also einer krummen Linie ist gerade. Eine aus verschiedenen geraden oder verschiedenen krummen Linien oder von beiden zusammengesetzte Aufeinanderfolge von Linien ist dem Geometer nicht eine Linie, da zu dem Begriffe einer Linie ein für alle Punkte derselben geltendes Gesetz verlangt wird.

Die Flächen werden wieder in ebene und krumme unterschieden; als Merkmal einer ebenen Fläche können wir angeben, daß, wenn man was immer für zwei Punkte derselben durch eine gerade Linie verbindet, diese Verbindungslinie in der Fläche selbst liegen wird. Will man z. B. ein mit Getreide angefülltes Gefäß oben mit einer Ebene begränzen, so wird man ein Lineal, oder eine Kante, die möglichst

einer geraden Linie sich nähert, auf die Oberfläche legen, und so viel Getreide dazu geben, oder wegnehmen, bis dieses Lineal bei seiner Bewegung auf der Oberfläche immer ganz in dieser Oberfläche liegt, dadurch wird man sich einer ebenen Begränzung immer mehr und mehr nähern.

Eine Fläche kann man sich wieder durch die Bewegung einer Linie erzeugt denken. Bewegt sich eine gerade Linie längs einer andern ohne ihre Richtung zu ändern, so beschreibt sie eine ebene Fläche. Durch die Bewegung einer geraden Linie lassen sich auch krumme Flächen erzeugen, die sich von andern krummen Flächen dadurch unterscheiden, daß bei ihnen wenigstens in einem Sinne hin gerade Linien möglich sind, die ganz in der Fläche liegen.

Die geometrischen Körper sind entweder bloß von ebenen Flächen gebildet, und heißen eckige Körper, oder sie sind von ebenen und krummen, oder bloß von krummen Flächen eingeschlossen. Jede Zusammenstellung von Punkten, Linien und Flächen wollen wir Gebilde nennen.

Auch das, was der Geometer Körper nennt, wird nirgends in der Natur getroffen, denn es wird nirgends ein Körper getroffen, dessen Fläche wahre geometrische Fläche wäre, oder solche regelmäßige krummen Flächen, wie die Gesetze der Geometrie vorschreiben.

Es könnte hier leicht jemanden der Gedanke kommen, wozu nützen uns also die Gesetze von räumlichen Formen, die in solcher Einfachheit und Regelmäßigkeit nie und nirgends vorkommen? diesem wollen wir entgegnen, die Gesetze der verwickelten und unregelmäßigen räumlichen Formen der wirklichen Welt würden nie zu unserer Kenntniß gelangen, wenn wir nicht zuerst die einfachsten und regelmäßigsten unserer Betrachtung unterworfen hätten, und von diesen erst zu den zusammengesetzteren übergehen würden.

Indem wir nun die so erhaltenen unumstößlichen Gesetze der geometrischen Körper — weil sie sich auf die Thatsachen des Bewußtseyns selbst stützen — auf die Körper der wirklichen Welt anwenden, erhalten wir Methoden der Vermessung und Bestimmung des Räumlichen, von solcher Sicherheit und Entschiedenheit, daß kein Widerstreit der Erfahrung möglich ist.

Um aber Uebersicht in Aufstufung des Ganzen zu erhalten, müssen wir von den einfachsten und abgezogensten Begriffen ausgehen, und von da erst mit Hülfe des Erhaltenen zum Zusammengesetzteren und Mannigfaltigeren übergehen. Deßhalb werden wir unsere Unter-

suchungen zuerst mit geraden und krummen Linien anstellen, die in einer Ebene liegen, dann dieselben im Raume und im Zusammenhange mit Flächen und Körper betrachten, und wir theilen daher die Elementar-Geometrie, die der Gegenstand gegenwärtigen Buches ist, in zwei Theile:

Erster Theil, die Lehre von den ebenen Gebilden,

Zweiter Theil, die Lehre von den räumlichen Gebilden.

Weitere geometrische Untersuchungen, wo man sich theils der Natur selbst mehr nähert, theils das Wesen der räumlichen Stätigkeit näher auffasset, ist Gegenstand der höheren Geometrie.

Zum Schlusse der Einleitung müssen wir noch bemerken, da wir keine mathematische Linie zeichnen können (denn weder die Linien mit Kreide, noch mit Tinte sind mathematische Linien), und in der Einbildungskraft eine Reihe von Linien und Punkten nur schwer zu behalten wäre, so ziehen wir Linien, und verbinden sie zu Figuren, nicht aber in der Meinung, als ob dieses wirklich die von uns gedachten mathematischen Figuren wären, sondern bloß zur Erleichterung unserer Einbildungskraft, die die eigentliche Figur festzuhalten hat, deren Abbild wir auf der Tafel oder Papier haben, und die wir nie mit einander zu verwechseln haben. Unsere Untersuchungen sollen ferner stets den Stämpel der größten Allgemeinheit tragen; zeichnen wir nun irgend eine Figur, so müssen wir uns hüten, von einer einzelnen und zufälligen Eigenschaft derselben verführt, Schlüsse auf die von unserer Einbildungskraft getragene mathematische Figur zu machen. In jeder gezeichneten Figur werden wir also nur die Eigenschaft in Betrachtung ziehen, die wir, als ihr nothwendig zukommend, oder in einem einzelnen Falle als besonders vorausgesetzt und ausgesprochen, betrachten.

Wie Figuren zu zeichnen sind, damit sie den mathematisch gedachten so nahe wie möglich kommen, ist Gegenstand einer eigenen Wissenschaft, der sogenannten darstellenden Geometrie (Géométrie descriptive), welche die Grundlage der Wissenschaft des Zeichnens ist.

Erster Theil.

Die Lehre von den ebenen Gebilden.

zwischen durch die geraden und krummen Linien darstellen, die in einer Ebene liegen, dann dieselben im Raume und im Zusammenhange als Flächen und Körper betrachten, und wir theilen daher die Elemente der Geometrie, die der Gegenstand gegenwärtigen Buches ist, in zwei Theile:

Erster Theil, die Lehre von den ebenen Gebilden,

Zweiter Theil, die Lehre von den räumlichen Gebilden.

Weitere geometrische Untersuchungen, wo man sich theils der Natur selbst mehr nähert, theils das Wesen der räumlichen Stätigkeit näher auffaßt, ist Gegenstand der höheren Geometrie.

Zum Schlusse der Einleitung müssen wir noch bemerken, daß wir keine mathematische Linie zeichnen können (denn weder die Linien mit Kreide, noch mit Tinte sind mathematische Linien), und in der Einbildungskraft eine Reihe von Linien und Punkten nur schwer zu behalten wäre, so ziehen wir Linien und verbinden sie zu Figuren, nicht aber um die [illegible] mathematischen Figuren zu haben, sondern bloß zur Erleichterung unserer Vorstellung [illegible] deren Bild wir auf die Tafel oder Papier haben, und die wir nie mit [illegible] zu verwechseln haben. Unsere Untersuchungen sollen ferner [illegible] den Charakter der größten Allgemeinheit tragen: zeichnen wir nun irgend eine Figur, so müssen wir uns hüten, von einer einzelnen und zufälligen Eigenschaft derselben verführt, Schlüsse auf die von unserer Vorstellung [illegible] erzeugte mathematische Figur zu machen. In jeder gezeichneten Figur werden wir also nur die Eigenschaft in Betrachtung ziehen, die wir, als ihr nothwendig zukommend, oder in einem einzelnen Falle als besonders vorausgesetzt und ausgesprochen, betrachten.

Wie Figuren zu zeichnen sind, damit sie den mathematisch gedachten so nahe wie möglich kommen, ist Gegenstand einer eigenen Wissenschaft, der sogenannten darstellenden Geometrie (Géométrie descriptive), welche die Grundlage der Wissenschaft des Zeichnens ist.

Einleitung.

Bei geraden Linien treffen wir zuerst auf die Bestimmung der **Größe** von bestimmten Stücken, und auf den Unterschied ihrer **Richtung**.

§. 1. Um ein bestimmtes Stück einer geraden Linie zu bezeichnen, nennt man gewöhnlich die Buchstaben, welche zur Bezeichnung der Endpunkte dienen, und wozu man gewöhnlich die großen Buchstaben des lateinischen Alphabets wählt; so benennet man die beigezeichnete Gerade, oder besser gesagt das gerade Stück AB; oft bezeichnet man ein solches Stück kurz durch einen kleinen lateinischen Buchstaben, hier z. B. a. Will man nun zwei Längen AB und CD mit einander vergleichen, so untersucht man zuerst, wie oft die kleinere AB in der größeren CD enthalten ist; hier kann nun der Fall seyn, daß die kürzere in der längeren wirklich enthalten ist, wie hier z. B. AB in der CD dreimal enthalten ist.

Fig. 1.



Fig. 2.

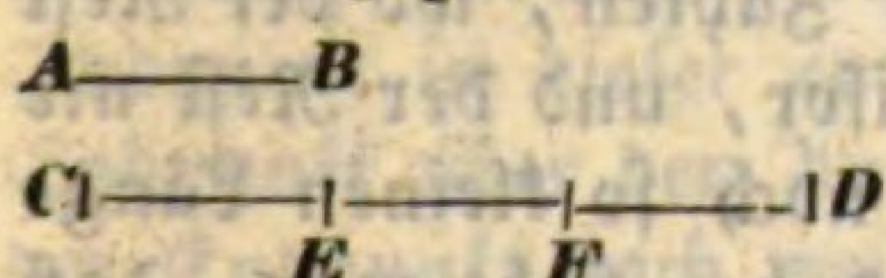
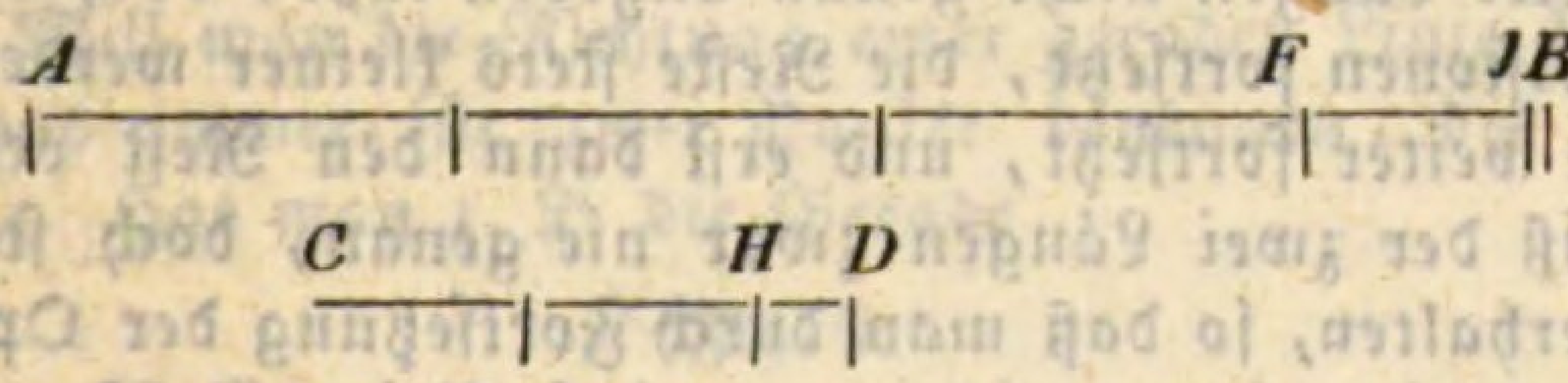


Fig. 3.



Allein nicht immer wird es der Fall seyn, daß die eine Länge gerade ein Vielfaches von der andern ist. In diesem Falle suchet man zwischen den beiden Längen das größte gemeinschaftliche Maß auf dieselbe Art wie bei Zahlen. Es seyen z. B. die Längen AB und CD. Hier läßt sich die CD auf der AB dreimal auftragen, nämlich AF = 3 CD, und es bleibt noch das Stück BF übrig; nun trage ich BF so oft auf CD, als es möglich ist; gesetzt es sey zweimal möglich, nämlich CH = 2 BF, und es bleibe noch das Stück HD übrig; nun sehe ich, wie oft HD in BF enthalten ist, und gesetzt ich finde, daß es viermal enthalten sey, nämlich FJ = 4 HD, und es bleibe mir noch

das Stück BJ übrig; nun suche ich, wie oft BJ in HD enthalten ist, und wir wollen annehmen, es sey genau $HD = 5BJ$, ohne daß ein Rest übrig bleibt. Wir haben daher:

$$AB = 3CD + BF,$$
$$CD = 2BF + HD,$$
$$BF = 4HD + JB,$$
$$HD = 5BJ.$$

Hier ist also BJ das größte gemeinschaftliche Maß, substituire ich die letzteren Werthe in den vorhergehenden, so erhalte ich:

$$BF = 21.BJ;\quad CD = 47.BJ;\quad AB = 162.BJ;$$

daher: $AB : CD = 162 : 47$;

daher: $CD = \frac{47}{162}.AB = AB.0{\cdot}29012345\ldots.$

eben so $BF = \frac{21}{162}.AB = AB.0{\cdot}1296296\ldots.$

und $HD = \frac{5}{162}.AB = AB.0{\cdot}0308641\ldots.$

Bei der Theorie des größten gemeinschaftlichen Maßes haben wir bemerkt, wenn die beiden Größen, zwischen denen das größte gemeinschaftliche Maß gesucht wird, ganze Zahlen sind, daß bei fortgesetzter Division einmal ein Rest gleich Null nothwendig kommen müsse. Ein leichter Ueberblick lehrt uns, daß diese Nothwendigkeit bei Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Maßes zwischen Linien nicht Statt findet. Es muß freilich auch hier der Rest stets kleiner seyn, als der Divisor; allein erstens ist ihm kein Unterschied vorgeschrieben, unter den er nicht kommen kann, wie bei ganzen Zahlen, wo der Rest wenigstens um 1 kleiner seyn muß als der Divisor, und der Rest nie unter 1 kommen kann, wo hingegen bei jeder noch so kleinen Länge ich mir stets wieder eine kleinere denken kann, daher sieht man, daß es möglich sey, daß die oben gebrauchten Divisionen ins Unendliche fortlaufen, und daß sich somit in diesem Falle das größte gemeinschaftliche Maß zweier Längen nicht genau angeben läßt; doch da, je weiter man diese Divisionen fortsetzt, die Reste stets kleiner werden, so wird, wenn man sie weiter fortsetzt, und erst dann den Rest vernachläßigt, das Verhältniß der zwei Längen zwar nie genau, doch stets genauer und genauer erhalten, so daß man durch Fortsetzung der Operation den Fehler kleiner machen kann, als jede noch so kleine Größe. Mit andern Worten, das Verhältniß solcher Längen ist irrational oder incommensurabel. Wendet man hier die Kettenbrüche und ihre Näherungsbrüche an, so kann man auch den Grad der Genauigkeit jedes Verhältnisses beurtheilen. Kehren die Reste periodisch zurück, so läßt sich jederzeit die dem unendlichen Kettenbruche gleiche irrationale Zahl angeben.

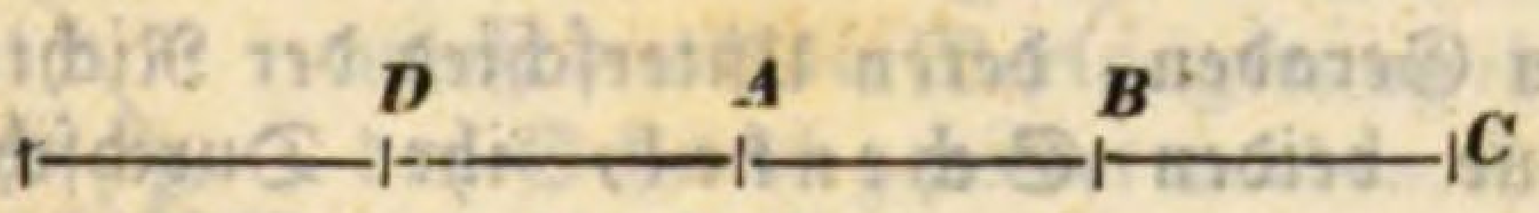
Um nun bestimmte Längen numerisch betrachten zu können, nimmt man irgend eine Länge als Einheit an, und vergleicht alle andern mit ihr, wodurch man die Zahlen erhält, die das Verhältniß zur Einheit ausdrücken. Hat z. B. ein gerades Stück AB die Einheit der

Längen m Mal in sich, so schreibt man statt A B = m Mal die Einheit der Linien, kürzer A B = m. Wie bei jeder Abkürzung, darf man auch hier die ursprüngliche Bedeutung nicht aus den Augen verlieren, da eigentlich eine Länge und eine abstracte Zahl einander nie gleich seyn können.

Der Gegenstand der reinen Geometrie ist es nur, die Möglichkeit der Messung der Längen nachzuweisen; die wirkliche Messung, die dabei zu beobachtenden Verfahrungsarten und Vorsichten gehören in das Gebiet der praktischen Geometrie.

Auch die Unterscheidung des Positiven und Negativen findet bei Bestimmung der Länge gerader Linien Statt. Nimmt man in einer Geraden irgend einen Punkt als Anfangspunkt der Messung an, und mißt alle Längen auf der einen Seite von diesem Punkte an, so muß man alle auf der andern Seite des Anfangspunktes von diesem an gemessenen Längen consequent als negativ ansehen. — Es sey in der Geraden A der Anfangspunkt, und die Messung geschehe in der

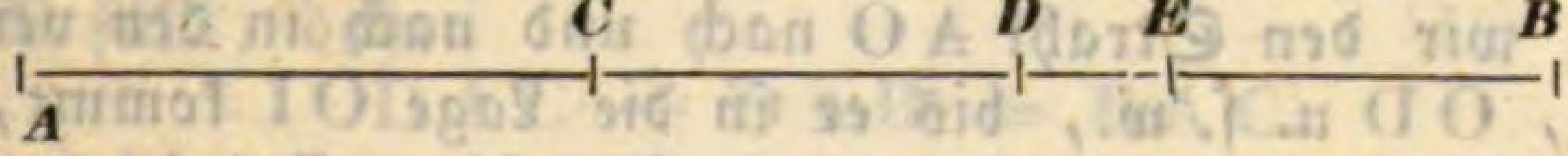
Fig. 4.



Richtung von A nach B, so wird die Länge desto größer, je weiter ich den zweiten Endpunkt in dieser Richtung hinausrücke, z. B. $AC > AB$. Rücke ich aber in entgegengesetzter Richtung den Endpunkt gegen A hin, so daß er z. B. von C nach B kommt, so wird die Länge dadurch verringert, und zwar desto mehr, je weiter ich den Endpunkt in dieser entgegengesetzten Richtung bewege; fällt nun der Endpunkt über den Anfangspunkt A, so ist dann die Länge = 0; rückt der Endpunkt noch weiter in dieser Richtung fort, also über A hinaus, so entsteht also bloß eine hinwegzunehmende, d. i. negative Länge. Ist also z. B. A D = A E, und A B = K, so muß A D = — K seyn.

§. 2. Will man die Richtung einer geraden Linie bezeichnen, so kann man was immer für zwei Punkte benennen, die in dieser Geraden liegen. Hat man z. B die Gerade

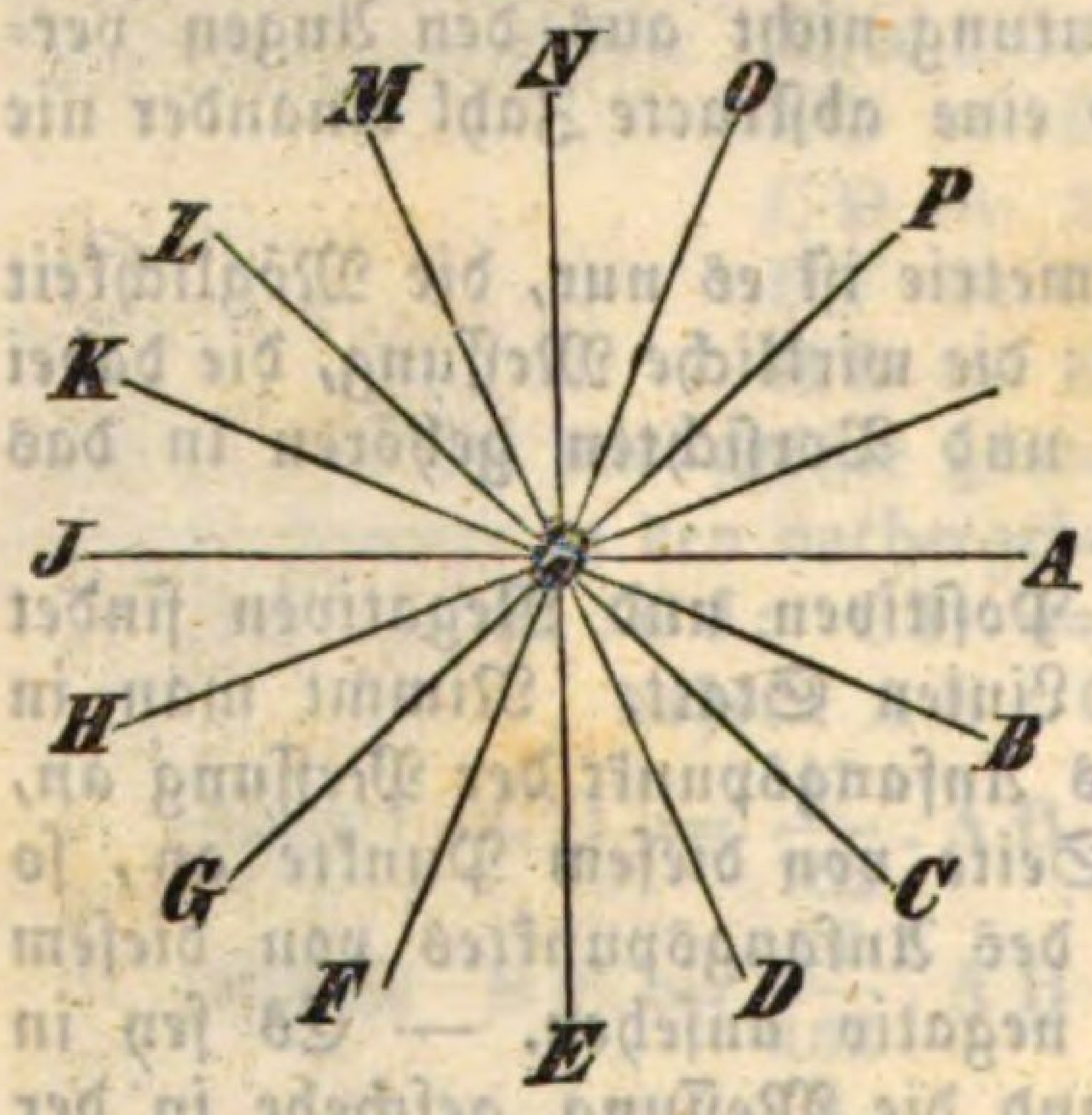
Fig. 5.



A B, so kann ich sie eben so gut A C, A D, A E, C D, C E, D E, E B u. s. w. nennen, weil zwei Punkte schon die Richtung einer Geraden vollkommen bestimmen.

Zwei Gerade haben entweder dieselbe Richtung, sind parallel oder gleichlaufend mit einander, oder sie sind es nicht, weichen in ihrer Richtung von einander. Denken wir uns von einem Punkte O eine zahllose Menge von Geraden der Strahlen ausgehend, was die neuen

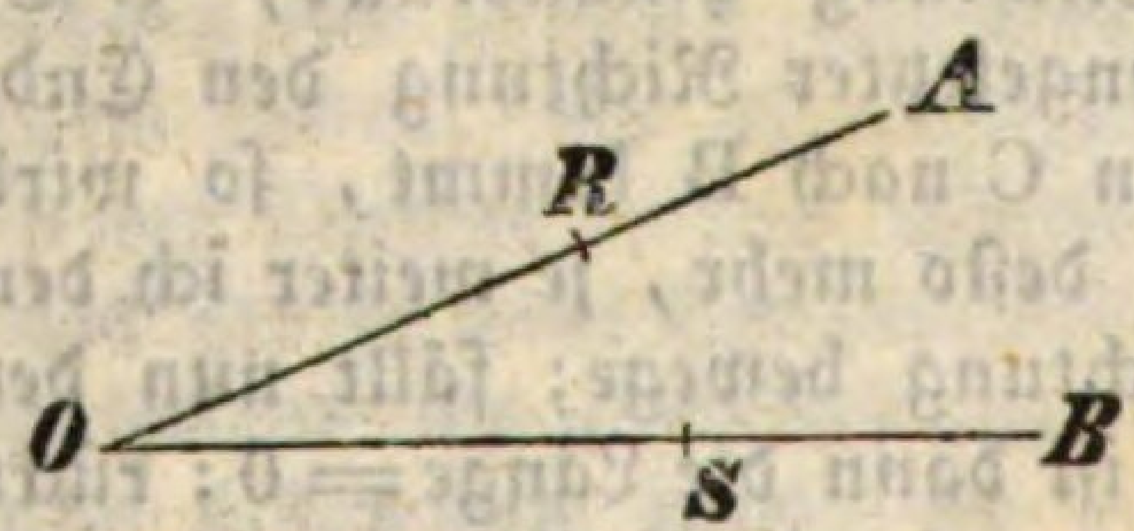
Fig. 6.



Geometer einen Strahlenbüschel nennen. So lange nun irgend ein Punkt sich so bewegt, daß er stets in demselben Strahle bleibt, so befindet er sich in fortschreitender Bewegung, er bewegt sich ohne seine Richtung zu ändern. Wenn dagegen ein Strahl z. B. OA sich so bewegt, daß er nach und nach die Lage der andern Strahlen OB, OC, OD, OE u. s. w. annimmt, so ist er in drehender Bewegung um den Mittelpunkt, und die Größe der Drehung, oder die Größe des Unterschieds der Richtung wird Winkel der beiden Strahlen, der beiden Geraden genannt.

Die beiden Geraden, deren Unterschied der Richtung der Winkel ist, heißen seine beiden Schenkel, ihr Durchschnittspunkt der Scheitel des Winkels. Aus dem Gesagten ist es klar, daß die Länge der Schenkel keinen Einfluß auf die Größe des Winkels hat; hat man daher den Winkel, der zu seinen Schenkeln die Gerade OA und OB, und zum Scheitel O hat, so kann ich eben so gut sagen, daß seine Schenkel OR und OS oder OR und OB sind.

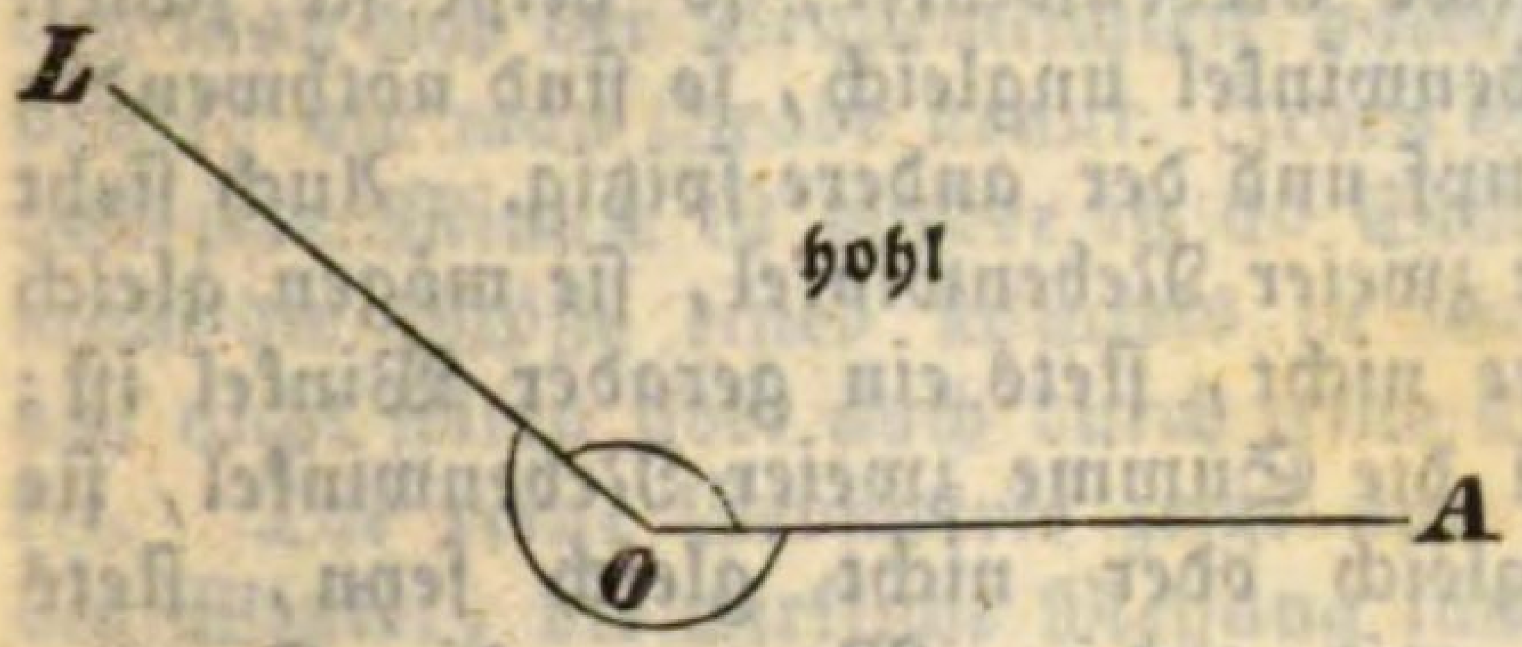
Fig. 7.



Um daher einen Winkel zu bezeichnen, spricht man zuerst einen Buchstaben aus eines Punktes, der in dem einen Schenkel liegt, dann den Buchstaben des Scheitels, dann einen Buchstaben, der einem Punkte des andern Schenkels zukommt. So kann also der Winkel AOB, auch AOS, BOA, BOR, SOA, ROS, SOR genannt werden, und immer wird man darunter den Unterschied der Richtung der Geraden AO und BO verstehen.

Fassen wir den früher betrachteten Strahlenbüschel ins Auge, und denken wir den Strahl AO nach und nach in den verschiedenen Lagen OC, OD u. s. w., bis er in die Lage OI kommt, so nennt man den Richtungsunterschied der Strahlen OA und OI einen geraden Winkel. Wie man sieht ist der Winkel AOB $<$ AOC $<$ AOD $<$ AOE $<$ AOF . . . So lange ein Winkel kleiner ist als ein gerader, heißt er ein hohler Winkel; alle Winkel AOB, AOC, AOD u. s. w. bis AOH sind hohle Winkel. Kömmt der bewegliche Schenkel über OI hinaus, während der andere Schenkel in AO bleibt, so ist ein solcher Winkel z. B. AOK größer als ein gerader Winkel, und ein solcher heißt ein erhabener Winkel.

Fig. 8.



Weder ein erhabener noch ein hohler Winkel läßt sich allein zeichnen, weil stets beide zugleich erscheinen, so hat man hier zugleich den hohlen Winkel AOL und den erhabenen Winkel AOL.

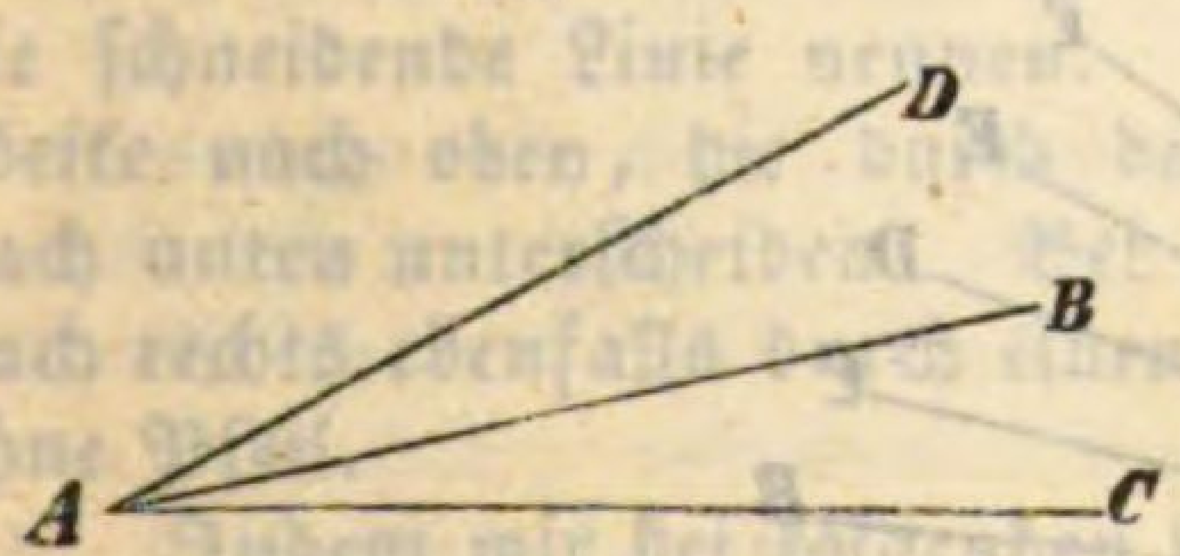
Zwei Gerade BD und CE, die sich in A schneiden, bilden eigentlich mit einander 4 Winkel, BAC, CAD, DAE, EAB. Je zwei solche Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel und einen gemeinschaftlichen Schenkel haben, und deren beide andern Schenkel in einer Geraden liegen, wie z. B. CAB und CAD, heißen Nebenwinkel. Eben so sind CAD und DAE, DAE und EAB, EAB und BAC Nebenwinkel. Je zwei Winkel, welche wechselweise durch die Verlängerung ihrer Schenkel über den Scheitel gebildet werden, heißen Scheitelwinkel, so sind z. B. CAB und DAE oder DAC und EAB Scheitelwinkel. Durch den Durchschnitt zweier Geraden entstehen jederzeit vier Paar Nebenwinkel und zwei Paar Scheitelwinkel.

Fig. 9.



Zwei Winkel, die denselben Scheitel haben, und einen gemeinschaftlichen Schenkel, lassen sich jederzeit addiren und subtrahiren, und ihre Summe sowohl, als ihr Unterschied ist ein Winkel an demselben Scheitel. Soll ich z. B. zum Winkel BAC den Winkel BAD addiren, d. h. den Winkel BAC um den Winkel BAD vergrößern, so muß ich den Schenkel AB nach auswärts drehen, und zwar so lange, bis er auf AD fällt; der so vergrößerte Winkel ist dann CAD, daher

Fig. 10.



$$BAC + DAB = DAC.$$

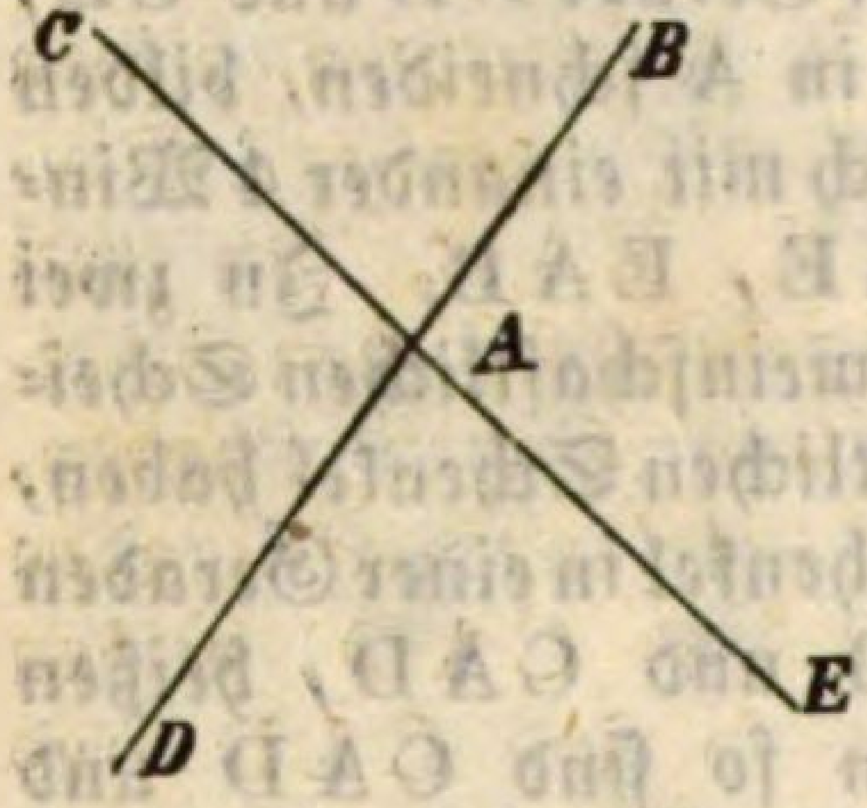
Soll ich im Gegentheil den Winkel DAC um DAB vermindern, so muß ich den Schenkel AD einwärts drehen, und zwar so lange, bis er auf AB fällt, daher

$$DAC - DAB = BAC.$$

Wenn ich den gemeinschaftlichen Schenkel zweier Nebenwinkel drehe, so wird der eine größer, der andere kleiner, es muß daher ein Stand dieses gemeinschaftlichen Schenkels möglich seyn, wo beide Nebenwinkel einander gleich sind. Zwei gleiche Nebenwinkel nennt man rechte Winkel, ein hohler, der größer ist als ein rechter, heißt ein stumpfer, ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter, ein spitziger, und allgemein ein Winkel, der kein Rechter ist, wird ein schiefer Winkel genannt. Bildet eine Gerade mit einer andern

gleiche Nebenwinkel, so heißt sie senkrecht oder perpendikulär auf diese; bildet sie aber ungleiche Nebenwinkel, so heißt sie schief. Man sieht daher, sind zwei Nebenwinkel ungleich, so sind nothwendig beide schief, und zwar einer stumpf und der andere spitzig. Auch sieht man leicht ein, daß die Summe zweier Nebenwinkel, sie mögen gleich seyn oder nicht, stets ein gerader Winkel ist; daher ist die Summe zweier Nebenwinkel, sie mögen gleich oder nicht gleich seyn, stets dieselbe, mit andern Worten, die Summe zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 11.



Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß die Summe aller Winkel um einen Punkt herum gleich zwei geraden, oder vier rechten Winkeln ist.

Sehr leicht läßt sich zeigen, daß je zwei Scheitelwinkel einander gleich sind. Da

DAC + CAB = 2R (2 rechten Winkeln),
DAC + DAE = 2R,

so ist:

DAC + CAB = DAC + DAE,

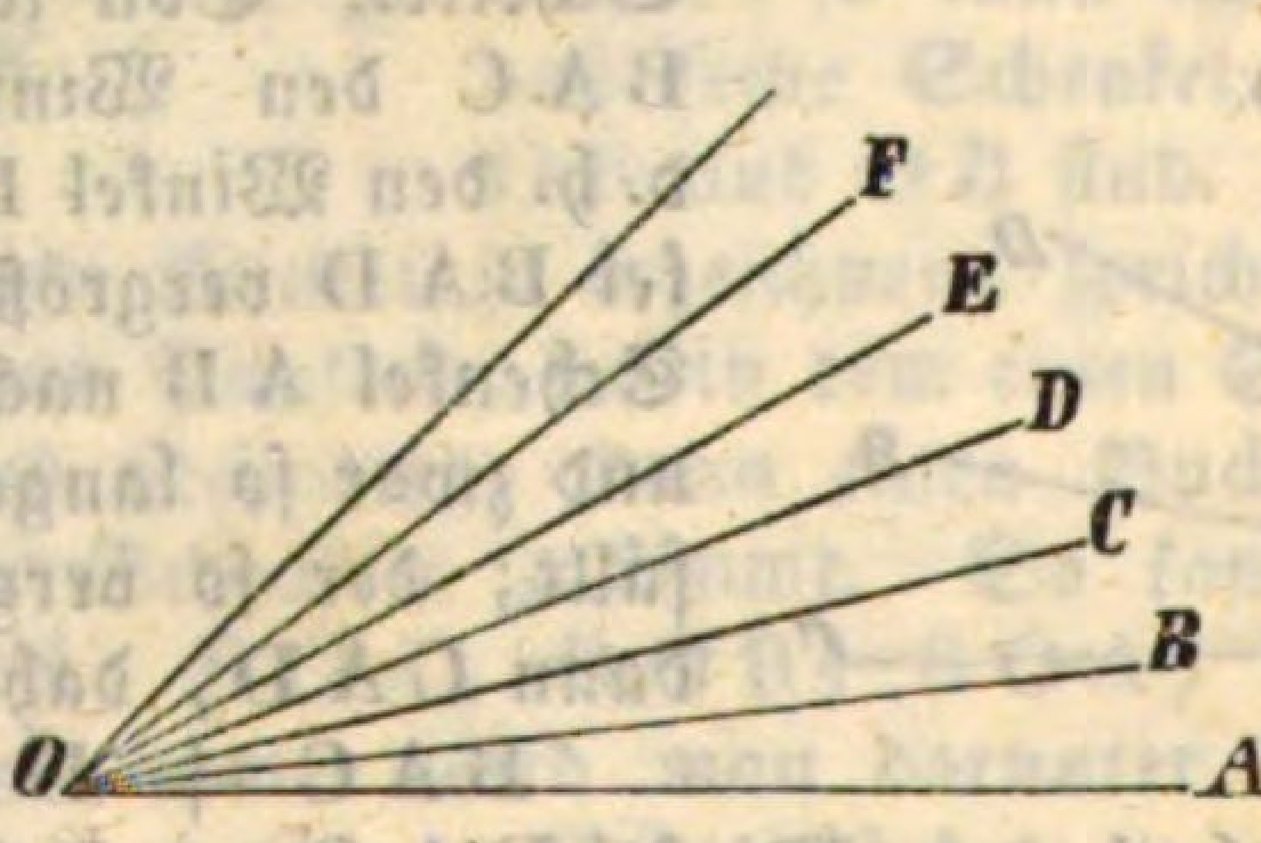
daher, wenn man beiderseits DAC wegnimmt;

CAB = DAE.

Auf gleiche Weise läßt sich zeigen, daß

DAC = EAB ist.

Fig. 12.



Gesetzt, es seyen alle Winkel um O einander gleich, so ist:

COA = BOA + COB = BOA + BOA = 2BOA,
DOA = COA + DOC = 2BOA + BOA = 3BOA,
EOA = DOA + EOD = 3BOA + BOA = 4BOA,
u. s. f.

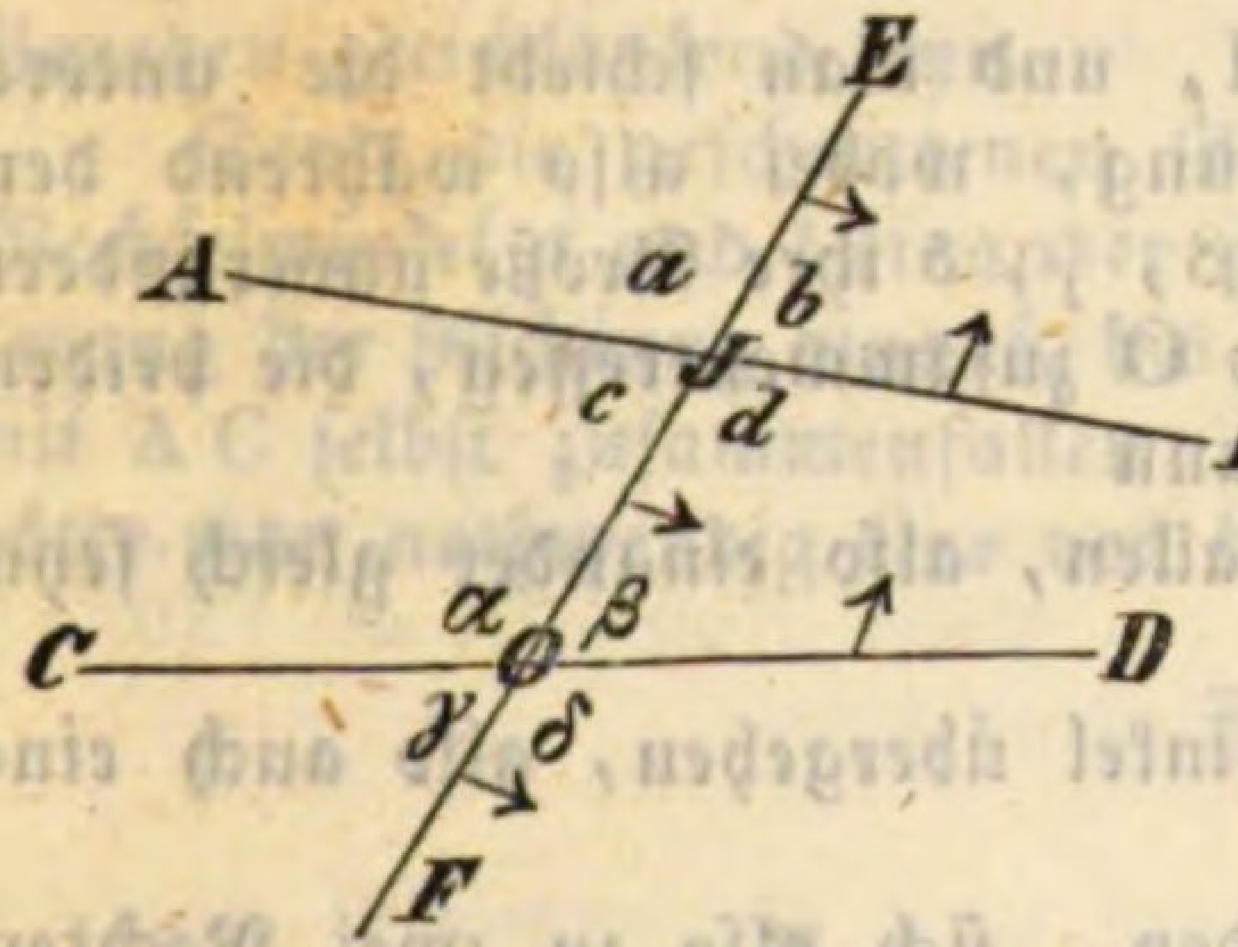
So wie sich ein Winkel denken läßt, der 2, 3, 4 . . . Mal so groß ist als der Winkel BOA, so läßt sich auch dieses von jedem andern Winkel denken, und daher kann man sich auch jeden Winkel in 2, 3, 4 . . . gleiche Winkel abgetheilt vorstellen. Genau auf dieselbe Art, wie bei geraden Linien, kann man auch bei Winkeln das Größenverhältniß untersuchen, und ihr größtes gemeinschaftliches Maß

finden. Als Maß aller Winkel nimmt man den rechten Winkel an, den man sich der Bequemlichkeit halber in 90 gleiche Winkel getheilt denkt, die man Grade nennt. Jeden Grad theilt man in 60 Minuten, und jede Minute ist wieder in 60 Sekunden getheilt. Gewöhnlich gibt man die Größe eines Winkels in Graden, Minuten und Sekunden an, nicht selten aber auch durch seine Verhältnißzahl zum rechten Winkel. Die reine Geometrie zeigt nur die Möglichkeit der Meßbarkeit der Winkel, die wirkliche Messung fällt in die praktische Geometrie.

§. 3. Denkt man sich eine gerade Linie gegen einen Punkt, der nicht in ihrer Richtung liegt, so fortbewegt, daß sie bei ihrer Bewegung keine Drehung erleidet, d. h. daß sie immer ihre Richtung beibehält, so hat man so zwei gerade Linien, die dieselbe Richtung haben, d. h. parallel oder gleichlaufend sind.

Werden was immer für zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so entstehen acht Winkel, wo immer ein Winkel des einen Scheitels, einem des andern Scheitels zugeordnet ist.

Fig. 13.



Werden so A B und C D (die gleichlaufend seyn können oder nicht, der Allgemeinheit wegen nehmen wir das letztere an) durch E F in den Punkten J und O geschnitten, so entstehen acht Winkel, die wir der Kürze halber durch kleine Buchstaben anzeigen, so daß der Winkel A J E = a, B J F = d u. s. w. ist. Wir wollen A B und C D die geschnittenen, E F die schneidende Linie nennen. Bei den geschnittenen wollen wir die Seite nach oben, die durch den Pfeil angedeutet ist, von der Seite nach unten unterscheiden. Bei der schneidenden haben wir die Seite nach rechts ebenfalls durch einen Pfeil angedeutet, die nach links ist ohne Pfeil.

Indem wir bei folgenden Benennungen immer einen Winkel am Scheitel J und einen am Scheitel O meinen, nennen

1) wir die Winkel, die dieselbe Seite der schneidenden mit den gleichen Seiten der geschnittenen bildet, die Gegenwinkel, so sind a und α beide links oben, b und β rechts oben, c und γ links unten, d und δ rechts unten Gegenwinkel;

2) die Winkel, welche die entgegengesetzten Seiten der schneidenden mit den entgegengesetzten Seiten der geschnittenen bilden, Wechselwinkel.

Hier sind:

a. (links oben) und δ (rechts unten) b. (rechts oben) und γ (links unten) c. (links unten) und β (rechts oben) d. (rechts unten) und α (links oben)	} Wechselwinkel.

3) die Winkel, welche dieselbe Seite der schneidenden, mit den entgegengesetzten Seiten der geschnittenen bildet: Anwinkel.

Hier sind:

a. (links oben) und γ (links unten)
b. (rechts oben) und δ (rechts unten)
c. (links unten) und α (links oben)
d. (rechts unten) und β (rechts oben)
} Anwinkel.

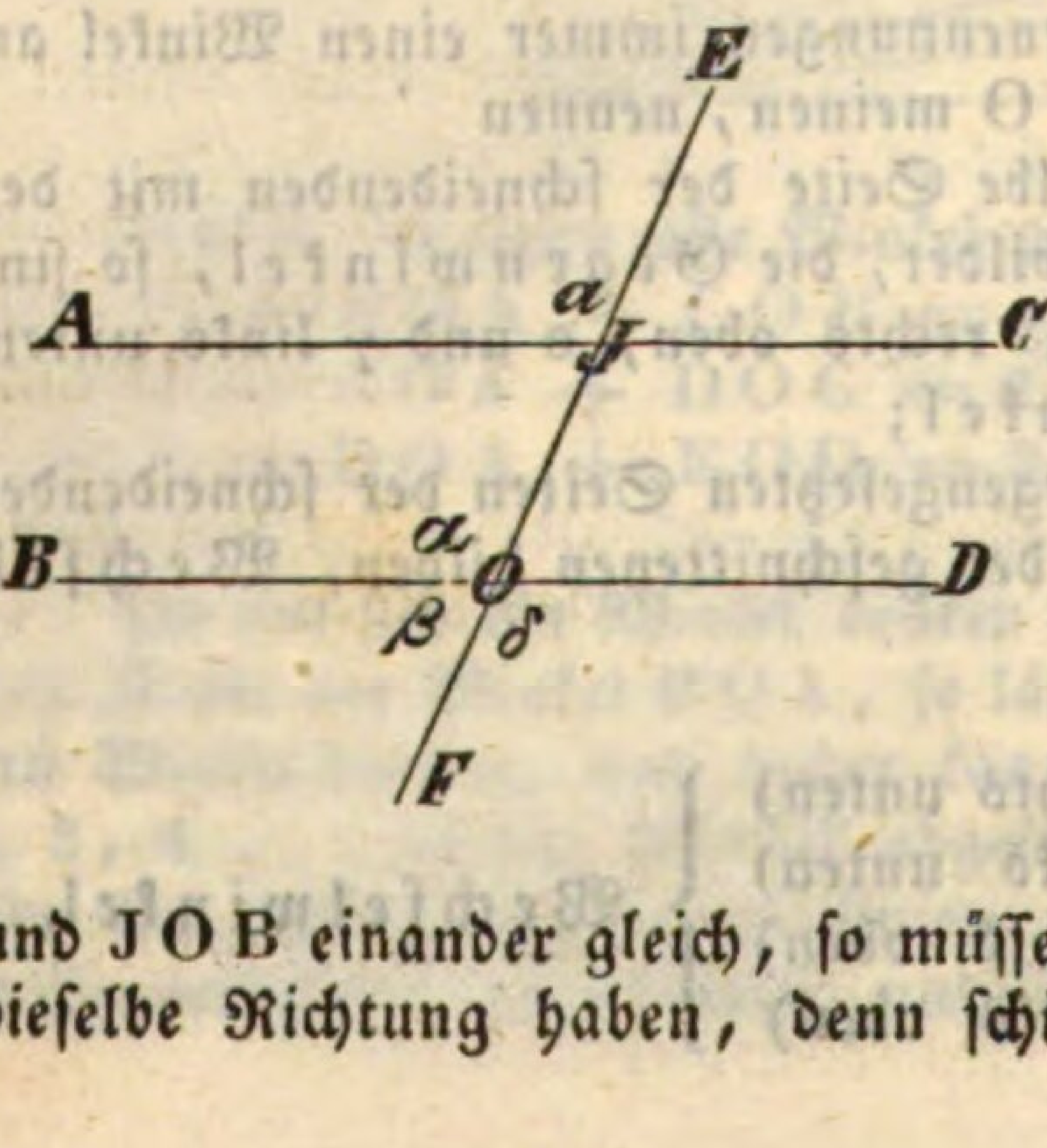
Wäre nun AB und CD gleichlaufend, und ich schiebe CD so gegen AB hinauf, daß während des Schiebens die Richtung von CD nicht geändert wird, d. h. daß durchaus keine Drehung stattfindet, so wird so bald der Punkt O der Linie CD auf den Punkt J der Linie AB trifft, beide Linien AB und CD zusammenfallen, da sie beide dieselbe Richtung haben sollen, dann fällt aber α mit a, β mit b, γ mit c, δ mit d zusammen. Die Gegenwinkel fallen über einander, da δ über d fällt, so wird δ mit a Scheitelwinkel bilden, eben so b mit γ, c mit β, d mit α, d. h. die Wechselwinkel werden Scheitelwinkel, die Anwinkel aγ, bδ, cα, dβ werden dann Nebenwinkel.

Sind also zwei Gerade parallel, und man schiebt die untere hinauf, ohne Aenderung ihrer Richtung, wobei also während der ganzen Bewegung die vier Winkel α, β, γ, δ ihre Größe unverändert beibehalten, so werden, sobald J und O zusammentreffen, die beiden Geraden über einander fallen, wobei dann

1) die Gegenwinkel über einander fallen, also einander gleich seyn müssen;
2) die Wechselwinkel in Scheitelwinkel übergehen, also auch einander gleich sind;
3) die Anwinkel Nebenwinkel werden, sich also zu zwei Rechten oder 180° ergänzen.

Sind daher zwei Gerade gleichlaufend, und sie werden durch eine dritte Gerade geschnitten, so müssen die Gegenwinkel einander gleich seyn, die Wechselwinkel einander gleich seyn, und je zwei Anwinkel zusammen 180° betragen.

Fig. 14.

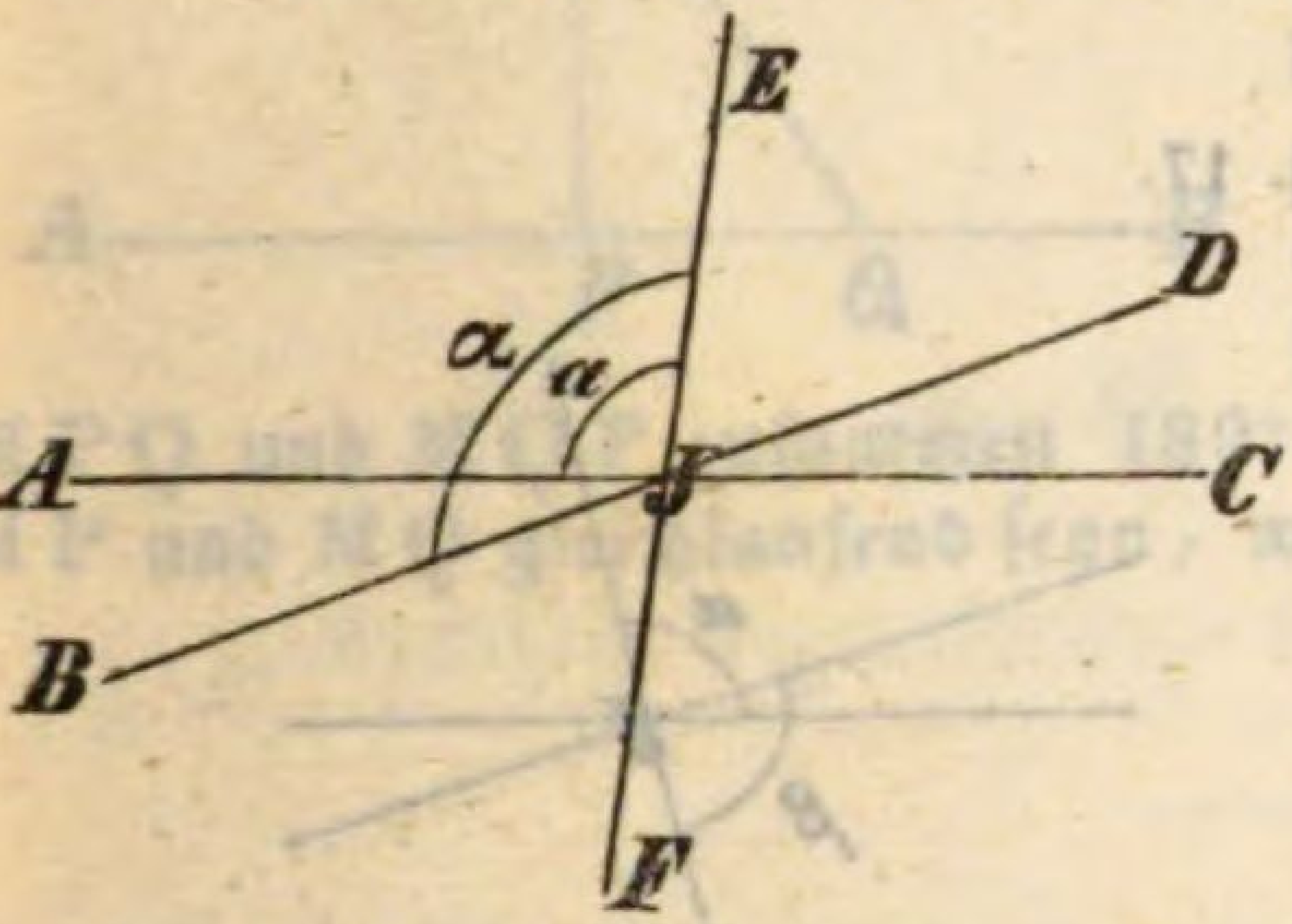


§. 4. Werden hingegen zwei Gerade durch eine dritte geschnitten, und es sind zwei Gegenwinkel einander gleich, so müssen die geschnittenen Geraden gleichlaufend seyn.

Es seyen die zwei Geraden AC und BD durch EF geschnitten in J und O, und es seyen die zwei Gegenwinkel a und α d. h. EJA und JOB einander gleich, so müssen die zwei Geraden AC und BD dieselbe Richtung haben, denn schiebe ich BD ohne Aenderung der

Richtung derselben hinauf bis O mit J zusammenfällt, so muß dann auch B D und C D zusammenfallen, d. h. beide müssen dieselbe Richtung haben; denn wäre dieses nicht der Fall, hätte man z. B. nebenstehende Stellung, wo hier E J A = a; und E J B oder E O B = α ist, so wäre ja dieses mit der Annahme, daß a = α seyn soll, im offenen Widerspruch. Damit nun wirklich a und α zusammenfalle, da der eine Schenkel E F stets unverändert bleibt, so muß nothwendig B D mit A C zusammenfallen, d. h. beide dieselbe Richtung haben, folglich A C und B D mit einander parallel seyn.

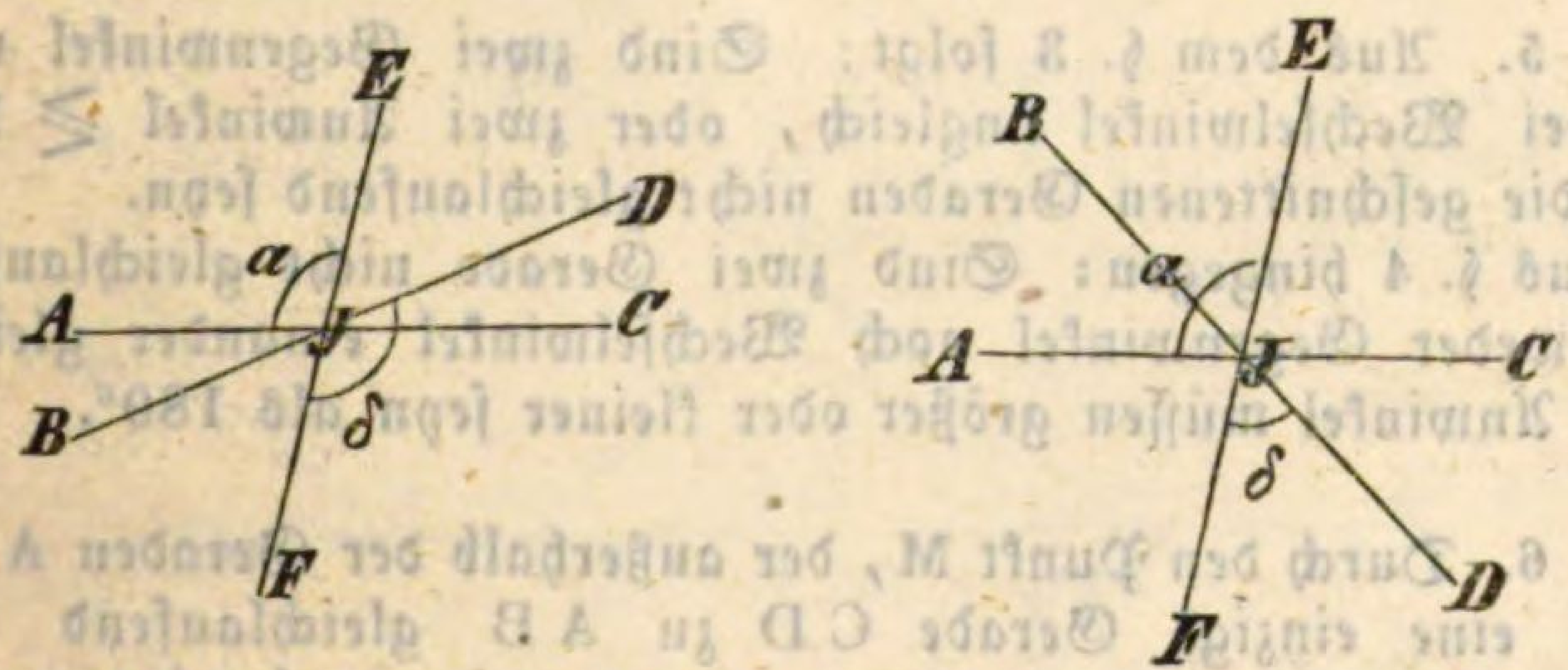
Fig. 15.



Eben so werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten und es sind zwei Wechselwinkel einander gleich, so müssen die geschnittenen Geraden gleichlaufend seyn.

Sind die geschnittenen Geraden A C und B D, und sind die Wechselwinkel a und δ einander gleich, und ich schiebe B D ohne Aenderung der Richtung hinauf, bis O mit J zusammentrifft, so muß B D mit A C selbst zusammenfallen; denn wäre dieses nicht der Fall, so hätte man nothwendig eine von beiden folgenden Stellungen:

Fig. 16.



und im ersten Falle ist:

$$\delta = DJF = EJB < a,$$

im zweiten aber:

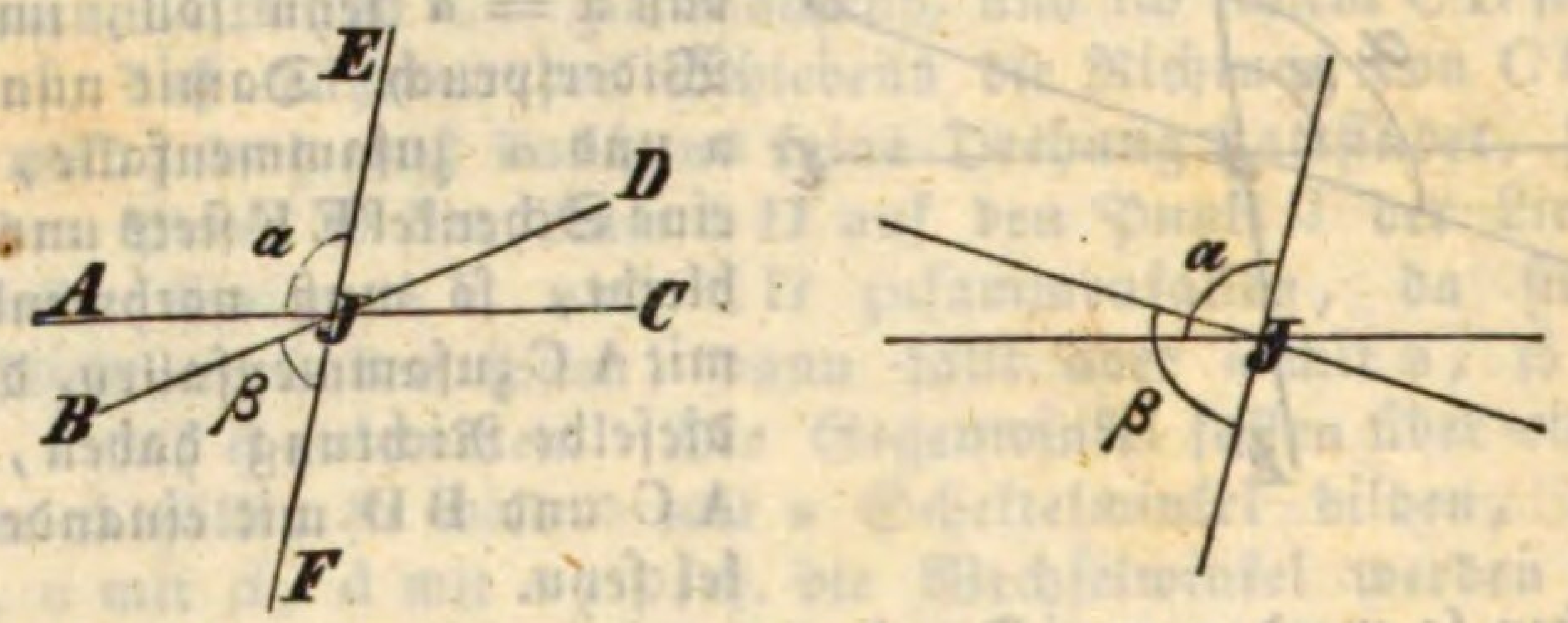
$$\delta = DJF = EJB > a,$$

was also mit der Annahme δ = a im Widerspruche steht, folglich keine dieser beiden Stellungen statthaben kann, somit diese Geraden A C und B D zusammenfallen, d. h. beide dieselbe Richtung haben müssen.

Endlich werden zwei Gerade A C und B D so von E F geschnitten, daß zwei Anwinkel a und β zusammen 180° machen, so müssen

diese Geraden A C und B D gleichlaufend seyn, dann schiebt man wieder B D ohne Aenderung der Richtung so gegen A C, bis J mit O zusammentrifft, so müssen B D und A C zusammenfallen, denn wäre dieses nicht der Fall, so müßte eine beider folgenden Stellungen Statt finden:

Fig. 17.



wobei im ersten Falle

$$a + \beta = AJE + BJF = 180^\circ - AJB,$$

im zweiten Falle

$$a + \beta = AJE + BJF = 180^\circ + AJB,$$

also im ersten $a + \beta < 180^\circ$, im zweiten $a + \beta < 180^\circ$, was beides im Widerspruche stehet mit der Annahme $a + \beta = 180^\circ$. Wir haben somit festſtehen: Sind ein Paar Gegenwinkel gleich, oder ein Paar Wechselwinkel gleich, oder ein Paar Anwinkel $= 180^\circ$, so müssen die geschnittenen Linien gleichlaufend seyn.

§. 5. Aus dem §. 3 folgt: Sind zwei Gegenwinkel ungleich, oder zwei Wechselwinkel ungleich, oder zwei Anwinkel $\gtrless 180^\circ$, so können die geschnittenen Geraden nicht gleichlaufend seyn.

Aus §. 4 hingegen: Sind zwei Gerade nicht gleichlaufend, so können weder Gegenwinkel noch Wechselwinkel einander gleich seyn, und die Anwinkel müssen größer oder kleiner seyn als 180°.

§. 6. Durch den Punkt M, der außerhalb der Geraden A B liegt, ist nur eine einzige Gerade C D zu A B gleichlaufend denkbar, denn wäre noch eine zweite E F durch M gehend zu A B gleichlaufend, so müßten, da C D und B A dieselbe Richtung haben, auch E F als mit A B gleichlaufend mit A B, folglich auch mit E F dieselbe Richtung haben, also müßten C D und E F dieselbe Richtung haben, was widersprechend ist.

Fig. 18.

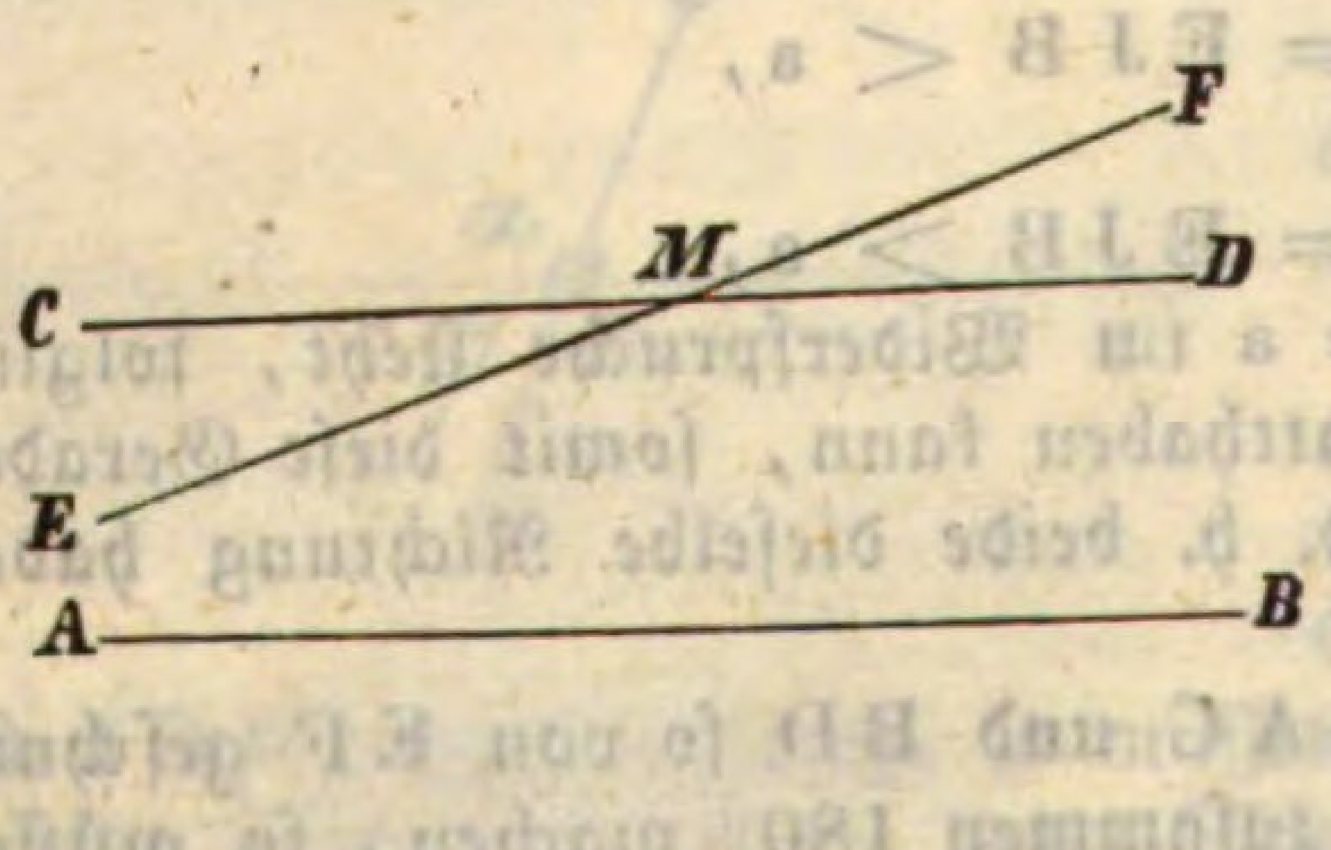
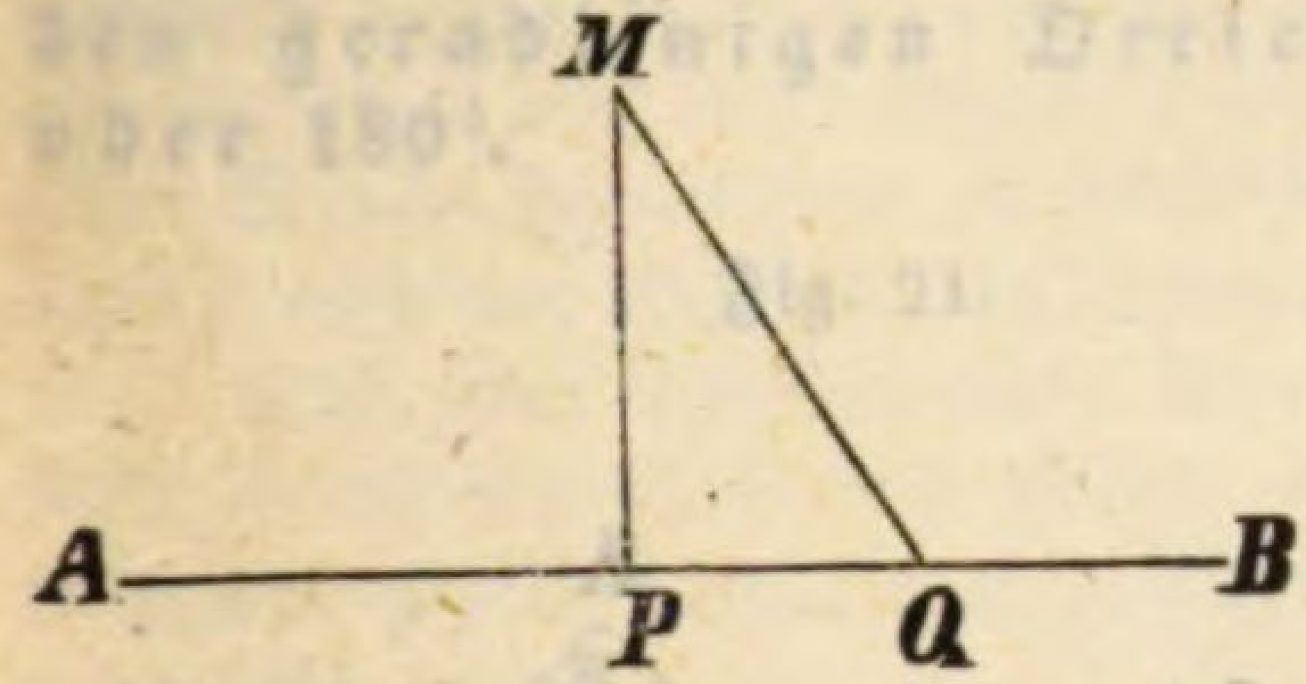


Fig. 19.



§. 7. Eben so leicht läßt sich zeigen, daß von einem Punkte M auf eine Gerade A B nur ein einziges Perpendikel möglich ist; denn wäre außer dem Perpendikel M P noch das Perpendikel M Q möglich, so müßte natürlich sowohl M P Q, als auch M Q P ein rechter Winkel seyn, folglich müßten die zwei Anwinkel M P Q und M Q P zusammen 180° seyn, also müßten die Geraden M P und M Q gleichlaufend seyn, was nicht möglich ist.

Erstes Buch.

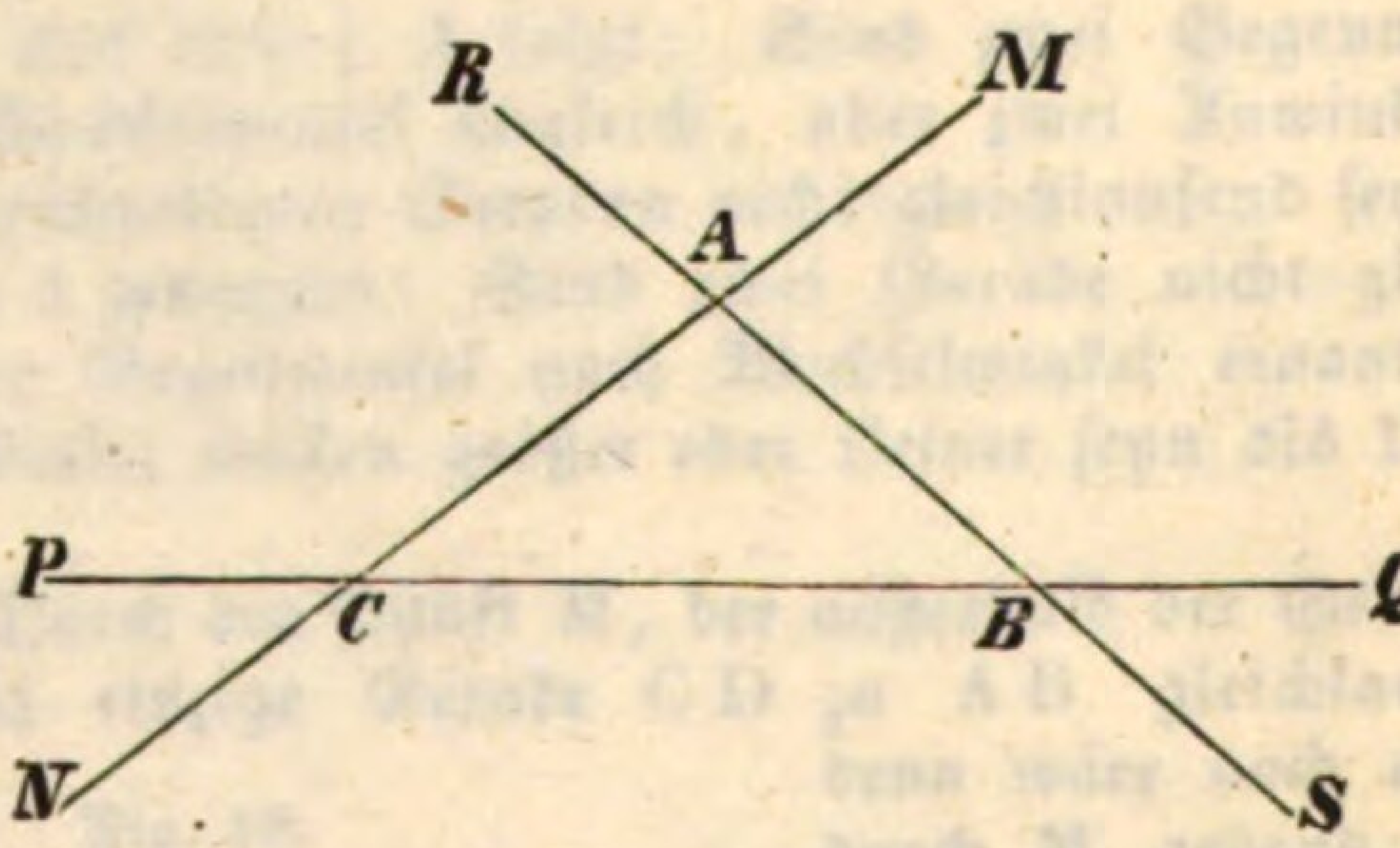
Die ersten Grundlehren geradliniger Figuren.

I. Die ersten Grundlehren über das geradlinige Dreieck.

§. 8. Die einfachst denkbar geschlossene Figur ist die von drei geraden Linien eingeschlossene Figur: das **geradlinige Dreieck**.

Die drei Stücke, die es begränzen, heißen Seiten desselben, die Winkel, die die inwendigen Seiten derselben mit einander bilden, heißen die **inneren Winkel**; die Winkel, die eine äußere Seite mit der Verlängerung der innern Seite bildet, heißen **äußere Winkel**.

Fig. 20.



Hier sind:

ABC, BCA, CAB

die innern Winkel;

ABQ = CBS, BCN = ACP, CAR = MAB

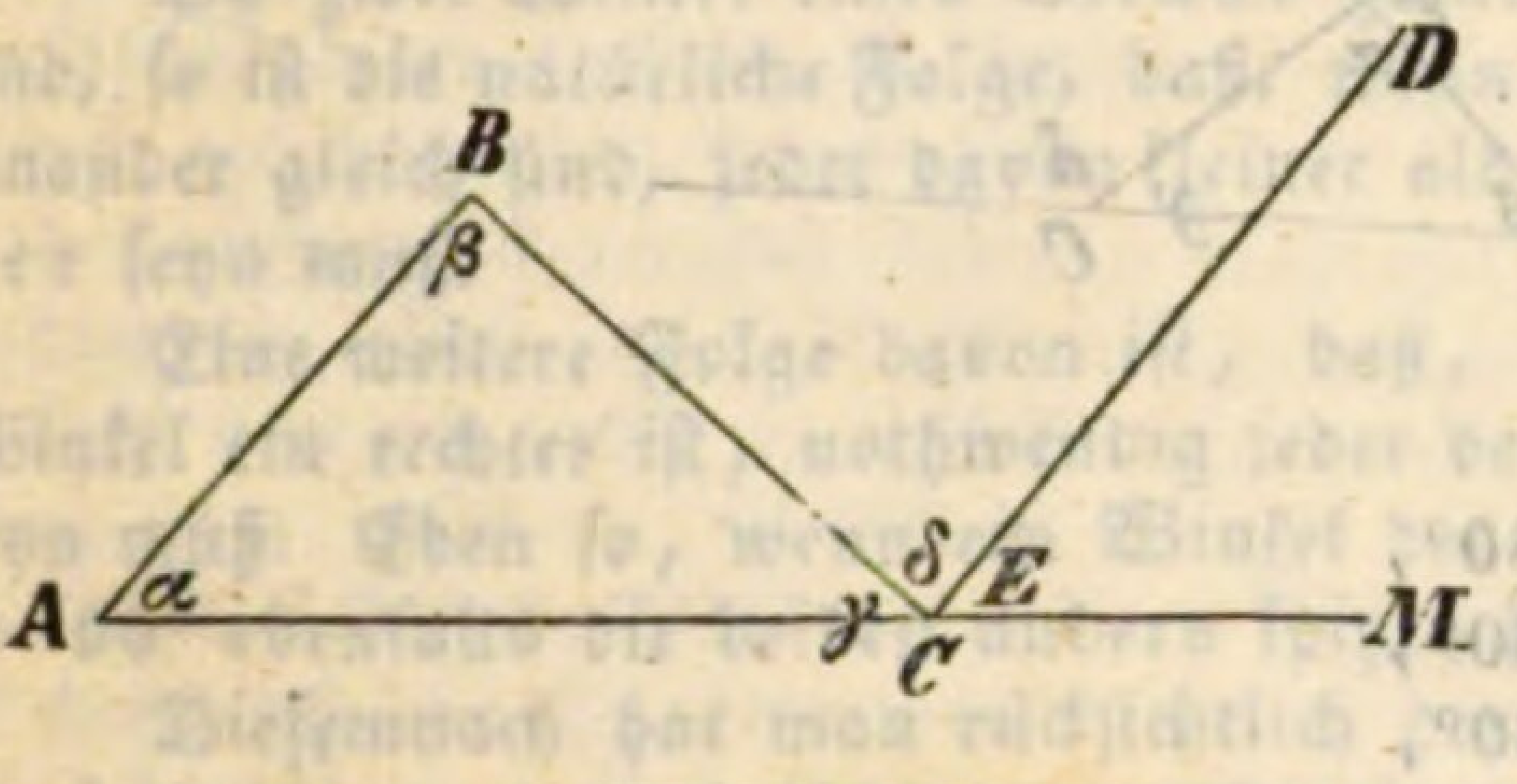
die äußern Winkel, die Winkel

QBS = ABC, NCP = ACB, RAM = CAB

sind die Scheitelwinkel der innern Winkel des Dreiecks. Wie man sieht, hat also jedes Dreieck drei innere Winkel, und drei verschiedene äußere Winkel, deren jeder doppelt vorkommt.

§ 9. **Die Summe der innern Winkel eines jeden geradlinigen Dreiecks ist gleich zwei Rechten oder 180°.**

Fig. 21.



Es sey das Dreieck A B C, ich denke mir durch den Punkt C die Gerade C D gleichlaufend mit A B, so sind die gleichlaufenden Geraden A B und C D durch A M geschnitten; es müssen also die Gegenwinkel B A C = D C M oder $\alpha = E$ seyn. Aber eben so sind die gleichlaufenden A B und C D durch die Gerade B C geschnitten, also müssen die Wechselwinkel A B C = B C D oder $\beta = \delta$ seyn; gibt man zu diesen zwei Gleichungen die ohnfehlbar sichere $\gamma = \gamma$ hinzu, so hat man:

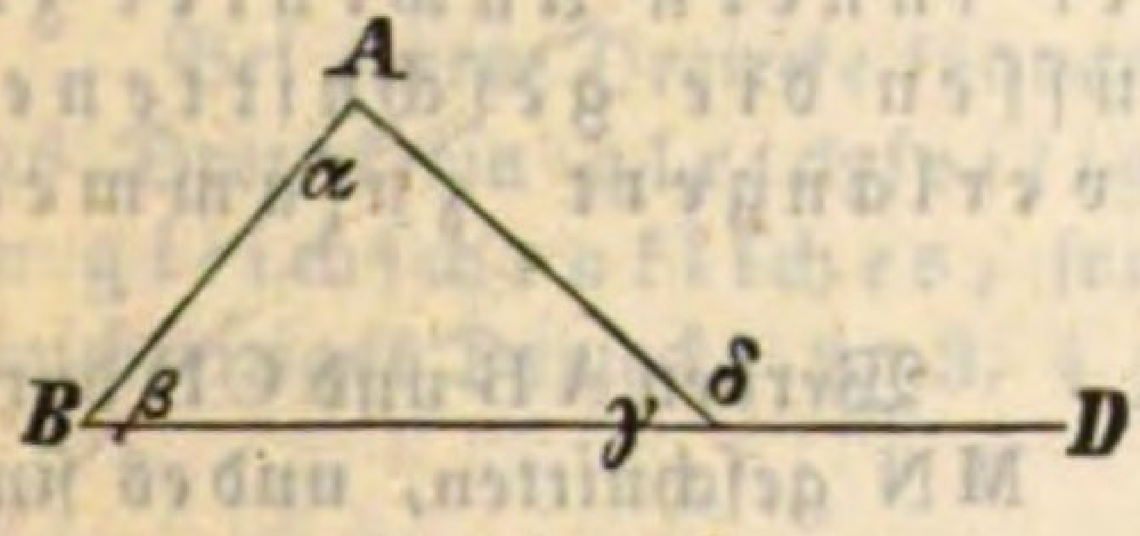
$$\alpha = E$$
$$\beta = \delta$$
$$\gamma = \gamma$$

somit $\alpha + \beta + \gamma = E + \delta + \gamma.$

Da nun die Summe der drei Winkel E, δ und γ den geraden Winkel A C M oder 2 R oder 180° gibt, so hat man:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Fig. 22.



§. 10. **Jeder äußere Winkel ist gleich der Summe der innern entgegengesetzten Winkel.**

Da $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$,
und $\gamma + \delta = 180^\circ$,
so hat man:

$$\gamma + \delta = \alpha + \beta + \gamma,$$

daher wenn man beiderseits γ wegnimmt, hat man:

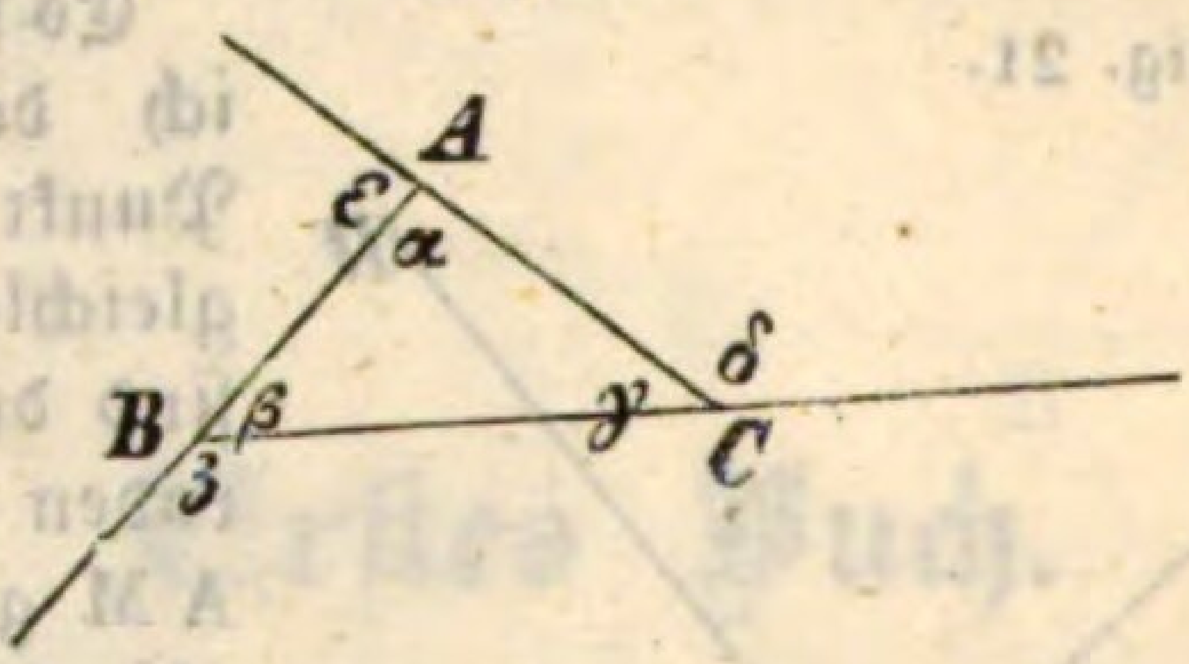
$$\delta = \alpha + \beta.$$

Durch das Wort »entgegengesetzte« will man ausdrücken, daß nicht der innere anliegende Winkel (hier γ) in die Summe genommen werden darf.

Daraus folgt, daß jeder äußere Winkel größer ist als einer der innern entgegengesetzten.

§. 11. **Die Summe der drei verschiedenen äußern Winkel eines jeden Dreiecks ist gleich 4 R oder 360°.**

Fig. 23.

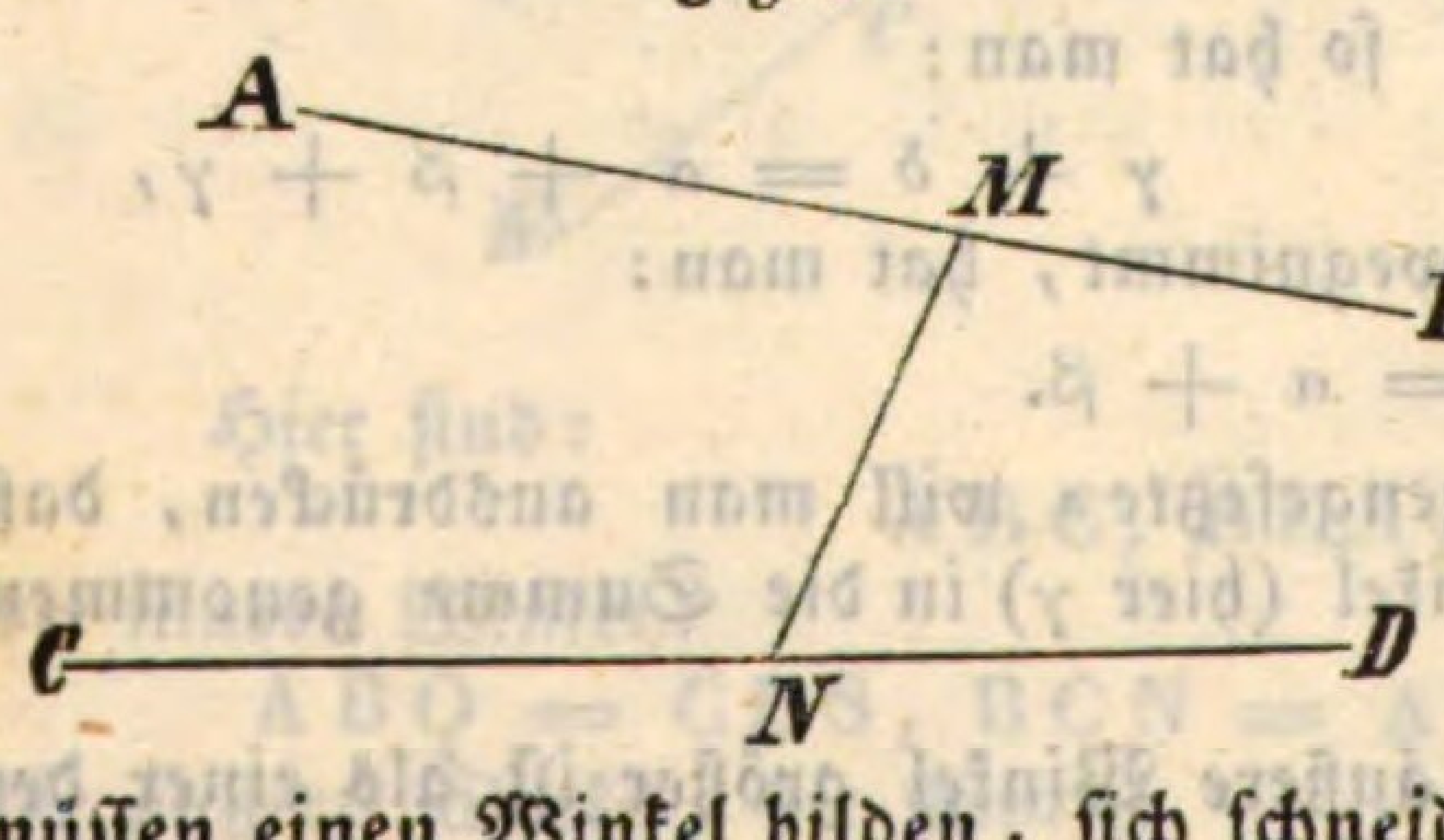


$$\begin{aligned} \text{Da}\quad & \alpha + \varepsilon = 180^\circ, \\ & \beta + \zeta = 180^\circ, \\ & \gamma + \delta = 180^\circ, \\ \hline \text{alſo}\quad & \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta = 3.180^\circ, \\ \text{und}\quad & \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ iſt, ſo hat man:} \\ & \delta + \varepsilon + \zeta = 2.180^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

Dieſer Satz läßt ſich auch auf folgende Art erläutern: Gehe ich von B gegen C, ſo ändere ich in dieſem Gange meine Richtung nicht; gehe ich aus der Linie BC in die AC über, ſo ändere ich meine Richtung um den Winkel δ, ſo lange ich mich in der AC von C bis A bewege, ändere ich meine Richtung nicht; ſobald ich aber in die AB übergehe, drehe ich mich um den Winkel ε, in B angekommen habe ich alſo meine Richtung um $\delta + \varepsilon$ geändert, drehe ich mich nun noch um den Winkel ζ, ſo habe ich meine urſprüngliche Richtung. Nachdem ich mich alſo dreimal gedreht, habe ich wieder dieſelbe Richtung, ſomit $\delta + \varepsilon + \zeta = 4R = 360^\circ$.

§. 12. **Hat man zwei Gerade von einer dritten geſchnitten, und es ſind die zwei innern Anwinkel zuſammen kleiner als 180°, ſo müſſen die geſchnittenen Geraden auf dieſer Seite verlängert zuſammentreffen.**

Fig. 24



Werden AB und CD durch MN geſchnitten, und es ſind $BMN + MND < 180^\circ$, ſo können die geſchnittenen Geraden nicht gleichlaufend ſeyn, d. h. ſie können nicht dieſelbe Richtung haben, ſie müſſen irgend einen Unterſchied der Richtung, d. h. ſie müſſen einen Winkel bilden, ſich ſchneiden. Auf der Seite von A und C kann das nicht Statt finden, weil, ſobald $BMN + MND < 180^\circ$ iſt, nothwendig dann $AMN + MNC > 180^\circ$ ſeyn muß, alſo auf der Seite von A und C die Bildung eines Dreiecks unmöglich iſt, daher ſich dieſe Geraden nach der Seite B und D ſchneiden müſſen.

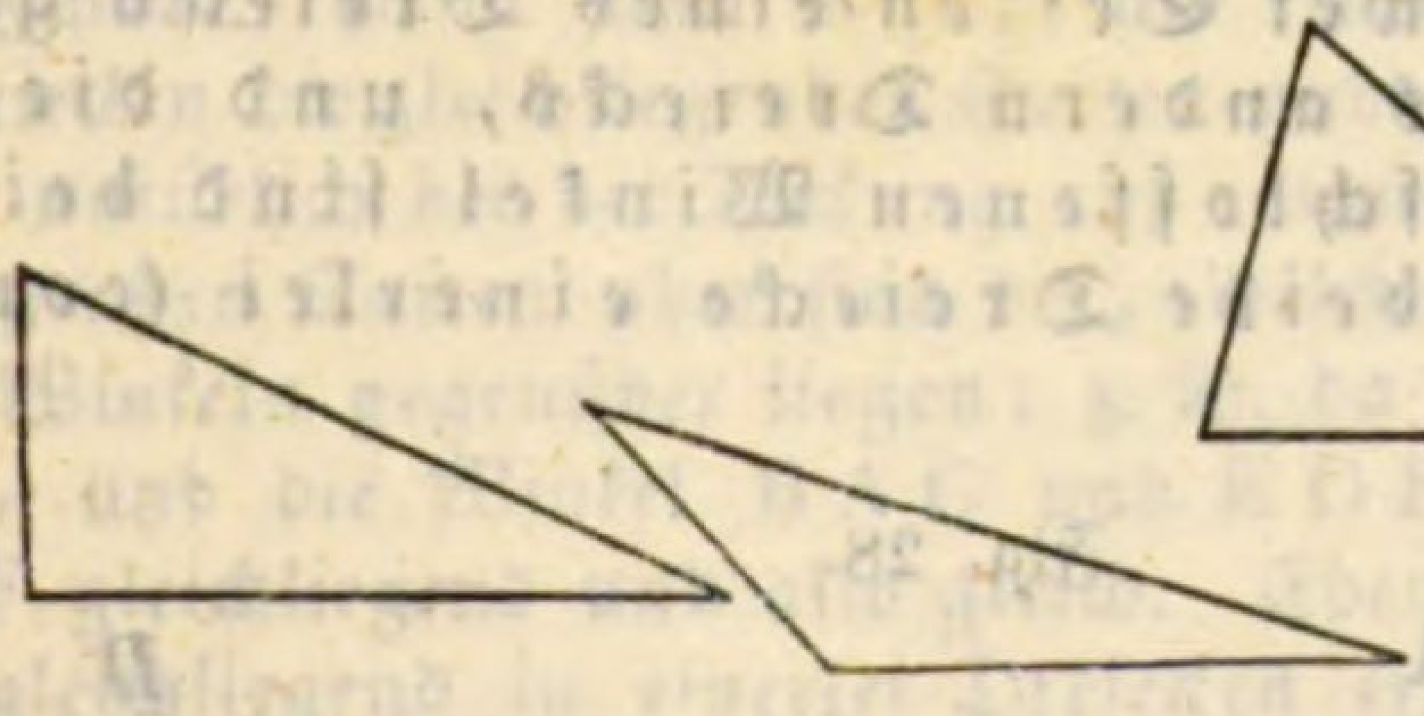
§. 13. Da die drei Winkel eines Dreiecks gleich 180° sind, so folgt natürlich daraus, daß zwei Winkel eines Dreiecks zusammen stets kleiner als 180° seyn müssen, was auch schon daraus klar ist, wären zwei Winkel zusammen = 180°, so würden zwei Seiten gleichlaufend seyn, also der Schluß des Dreiecks unmöglich werden.

Da zwei Winkel eines Dreiecks zusammen stets kleiner als 180° sind, so ist die natürliche Folge, daß, wenn zwei Winkel eines Dreiecks einander gleich sind, jeder davon kleiner als 90°, d. h. jeder ein spitziger seyn muß.

Eine weitere Folge davon ist, daß, wenn in einem Dreiecke ein Winkel ein rechter ist, nothwendig jeder der beiden andern ein spitziger seyn muß. Eben so, wenn ein Winkel des Dreiecks ein stumpfer, d. h. > 90° ebenfalls die beiden andern spitzig seyn müssen.

Diesemnach hat man rücksichtlich der Winkel dreierlei Arten von Dreiecken, rechtwinklige, wo ein rechter und zwei spitzige; stumpfwinklige, wo ein stumpfer und zwei spitzige; spitzwinklige, wo alle drei Winkel spitzig sind.

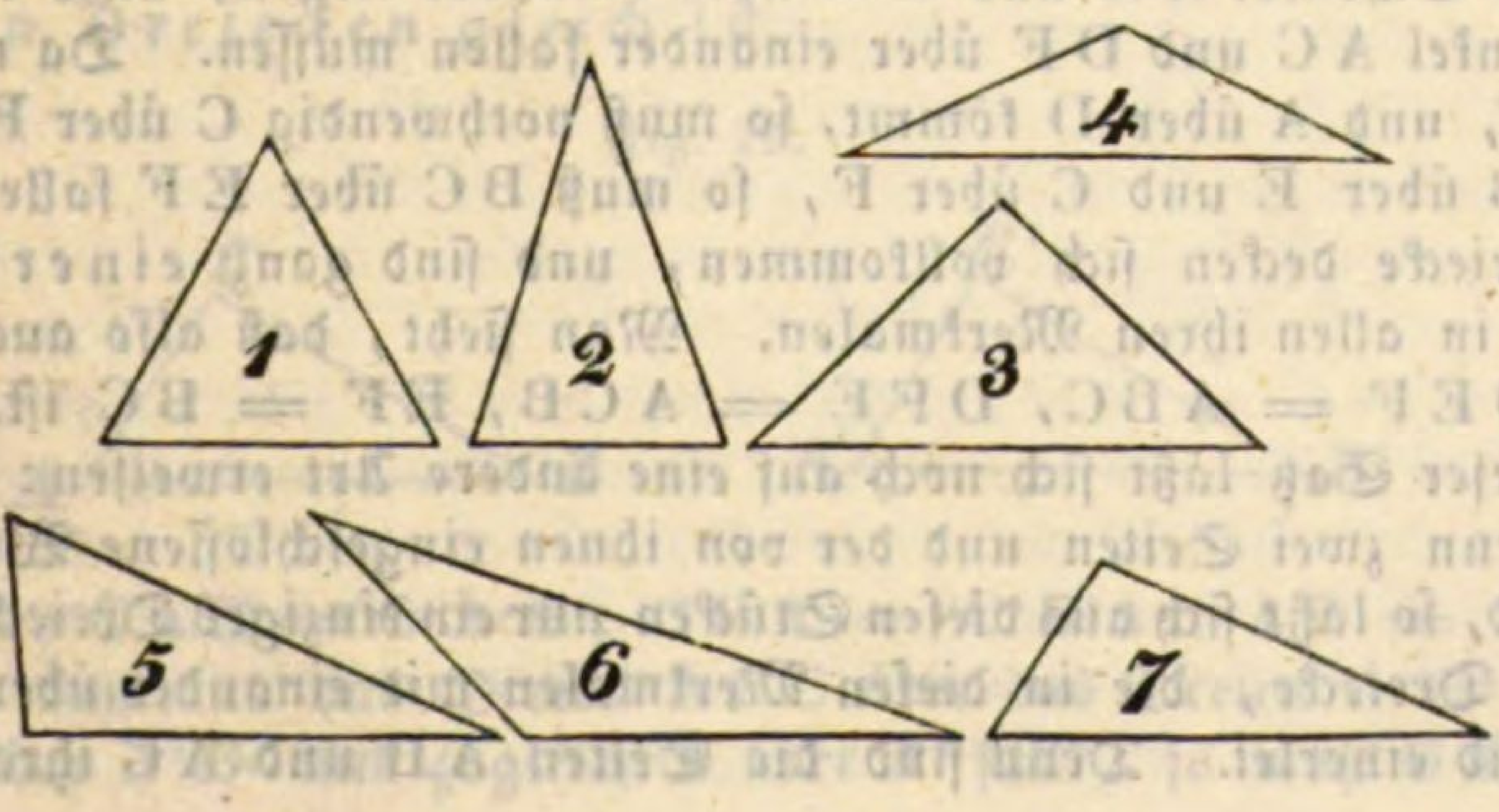
Fig. 25.



§. 14. Nach dem Begriffe einer geraden Linie bedarf es keines Beweises, daß immer die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite, und daraus folgt von selbst, daß der Unterschied zweier Seiten immer kleiner ist als die dritte Seite.

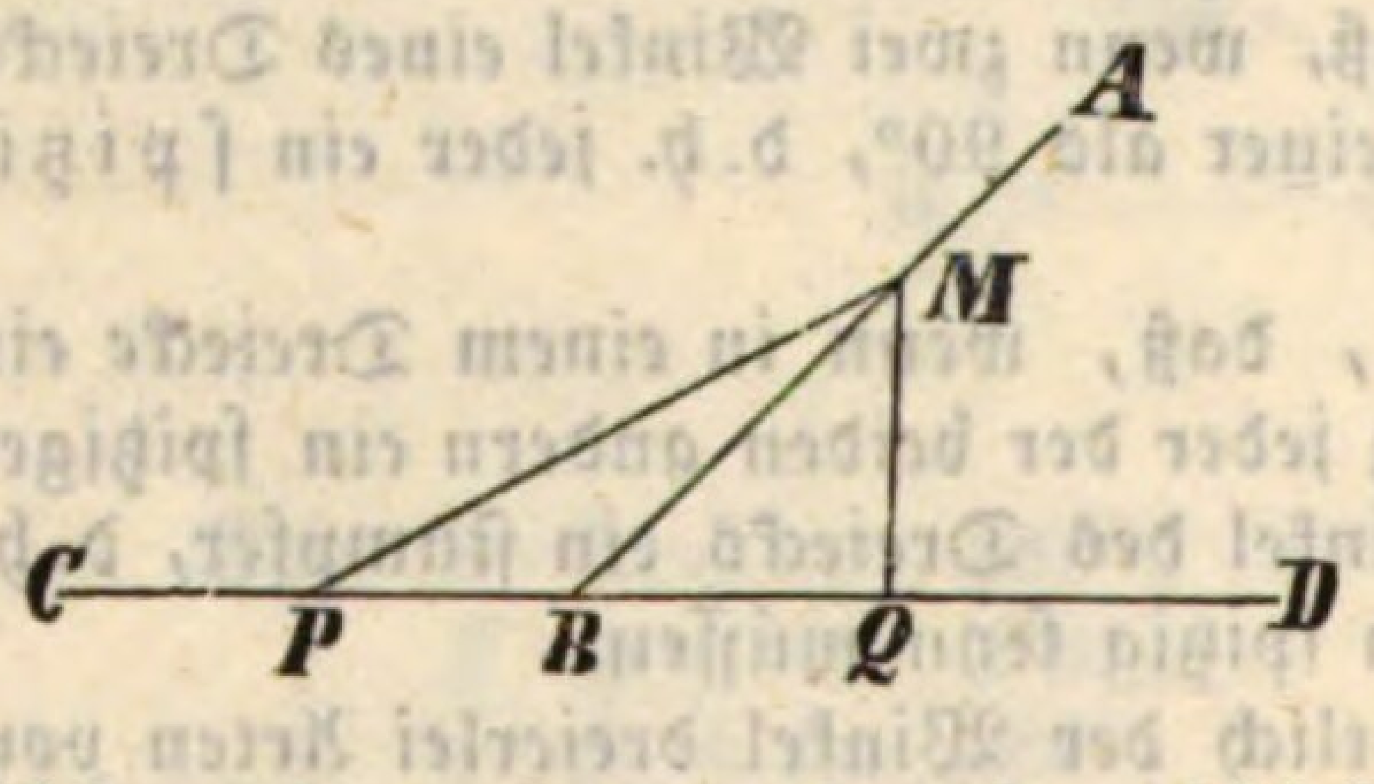
Bei einem Dreiecke können alle drei Seiten gleich seyn, dann heißt das Dreieck ein gleichseitiges; wenn nur zwei Seiten gleich sind, ein gleichschenkliches, sonst ein ungleichseitiges. 1 ist ein gleichseitiges Dreieck; 2, 3, 4 gleichschenkliche; 5, 6, 7 ungleichseitige.

Fig. 26.



§. 15. Ist eine Gerade schief gegen eine andere geneigt, und man fällt von einem Punkte der erstern ein Loth auf die zweite, so fällt das Loth stets auf die Seite des spitzigen Winkels.

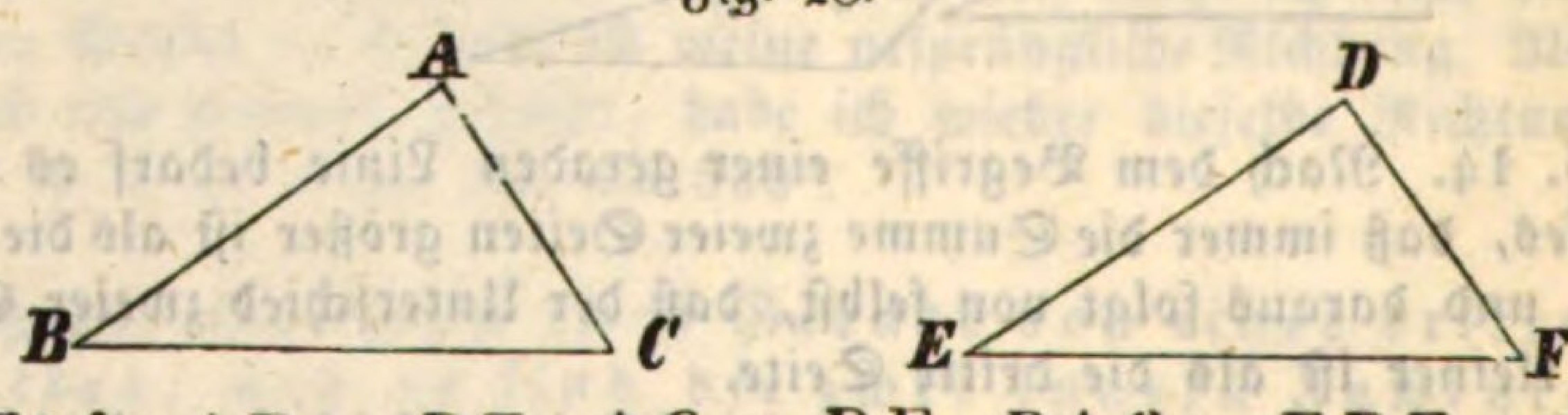
Fig 27.



Ist A B schief gegen C D, A B D $<$ 90°, und man will von M ein Loth auf C D fällen, so kann es nicht auf die Seite A B C fallen; denn wäre dieses z. B. M P das Loth, so müßte M P B $=$ 90°; da nun M B P $>$ 90° ist, so hätte man zwei Winkel M P B $+$ M B P $>$ 180°, was unmöglich ist. In die A B selbst, als nach der Annahme schief, kann das Loth von M auf C D nicht fallen, also muß das Loth in den Winkel A B D, wie es z. B. M Q anzeigt, fallen.

§. 16. Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich den zwei Seiten eines andern Dreiecks, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel sind beiderseits gleich, so müssen beide Dreiecke einerlei (congruent) seyn.

Fig. 28.



Es sey A B $=$ D E, A C $=$ D F, B A C $=$ E D F.

Denke ich mir nun das Dreieck A B C so auf das Dreieck D E F gelegt, daß der Punkt A auf D und zugleich A B auf D E kommt, so muß der Punkt B auf E fallen, weil A B $=$ D E ist; aber eben so muß A C auf D F fallen, weil da B A C und E D F gleich sind, und da die ersten Schenkel A B und D E über einander liegen, auch die zweiten Schenkel A C und D F über einander fallen müssen. Da nun A C über D F, und A über D kömmt, so muß nothwendig C über F fallen; da nun B über E und C über F, so muß B C über E F fallen, und beide Dreiecke decken sich vollkommen, und sind ganz einerlei mit einander in allen ihren Merkmalen. Man sieht, daß also auch

D E F $=$ A B C, D F E $=$ A C B, E F $=$ B C ist.

Dieser Satz läßt sich noch auf eine andere Art erweisen:

Wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind, so läßt sich aus diesen Stücken nur ein einziges Dreieck bilden, und alle Dreiecke, die in diesen Merkmalen mit einander übereinstimmen, sind einerlei. Denn sind die Seiten A B und A C ihrer Länge

nach gegeben, so läßt sich AC um den Punkt A herumdrehen, und somit sind mit den zwei gegebenen Stücken AB und AC unzählige Dreiecke möglich; sobald aber der von ihnen einzuschließende Winkel BAC in seiner Größe bestimmt ist, hört alle Willkür auf, und die Zusammenstellung wird fest; die dritte Seite ist unabänderlich fest in ihrer Größe gesetzt. So oft ich also und wo immer dasselbe Spiel beginne, so erhalte ich stets dasselbe Dreieck, wenn auch in den verschiedensten Lagen und Orten.

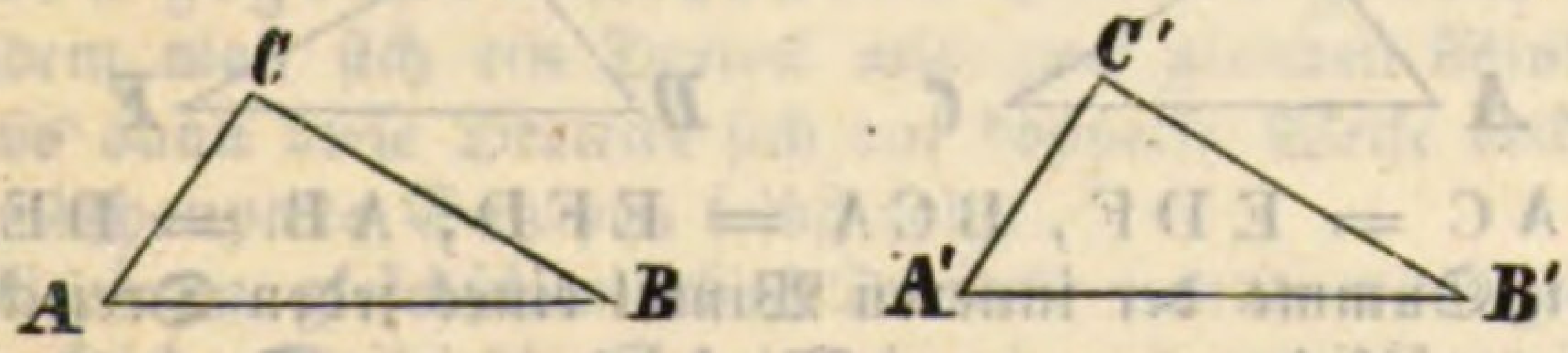
Gleichseyn und Einerleiseyn muß gut von einander unterschieden werden. Ein Dreieck und Viereck können wohl gleich, aber nie einerlei seyn. Als Zeichen der Einerleiheit wollen wir $\equiv$ annehmen.

§. 17. Kennzeichen der Einerleiheit sind für die Folge sehr wichtig, denn hat man so aus der Gleichheit gewisser Stücke zweier Dreiecke auf ihre Einerleiheit geschlossen, so folgt, daß auch die andern Stücke einander gleich sind, nur frägt es sich, welche? Es würde eine ermüdende Weitläufigkeit mit sich bringen, die Dreiecke immer im Gedanken über einander zu legen oder sie zur Deckung zu bringen. Man kommt kürzer zum Zwecke, wenn man in zwei als einerlei erklärten und bewiesenen Dreiecken die gleichliegenden Seiten und gleichliegenden Winkel aufsucht, die natürlich bei der Deckung auf einander zu liegen kommen. Die gleichliegenden Seiten aber sind die, welche in einerlei Dreiecken den gleichen Winkeln gegenüber liegen; z. B. da hier ABC und EDF einerlei sind, und die Winkel BAC und EDF gleich sind, so sind BC und EF gleichliegend und also gleich. Eben so können diejenigen Seiten als gleichliegend in einerlei Dreiecken erklärt werden, welche beiderseits an den gleichen Winkeln liegen.

Winkel sind gleichliegend in einerlei Dreiecken, welche von den gleichen Seiten eingeschlossen sind. Diesemnach wird uns in der Folge der Grundsatz leiten: *In einerlei Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten und gleichliegenden Winkel einander gleich.*

§. 18. *Zwei Dreiecke sind einerlei, wenn zwei Winkel des einen Dreiecks gleich sind zwei Winkeln des andern Dreiecks und die sie verbindende Seite in beiden Dreiecken gleich ist.*

Fig. 29.



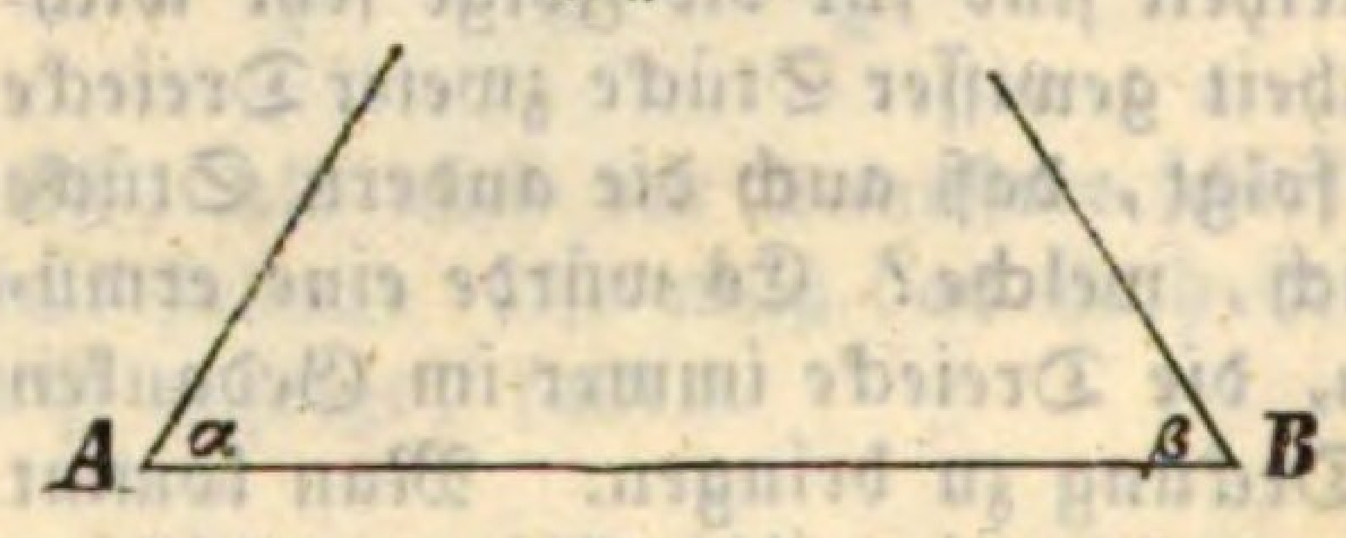
Es sey $CAB = C'A'B'$, $CBA = C'B'A'$; $AB = A'B'$.

Legt man nun das Dreieck ABC über das Dreieck A′B′C′, so daß AB über A′B′ und zugleich A über A′ fällt, so muß B über B′

fallen, da A B = A′B′ ist. Weil aber C A B = C′A′B′ ist, und A über A′, A B über A′B′ fällt, so muß nothwendig A C über A′C′, und weil B über B′, A B über A′B′ fällt, so muß, da C B A = C′B′A′ ist, nothwendig C B über C′B′ fallen. Da nun A C über A′C′ und C B über C′B′ fällt, so muß auch der einzige Durchschnittspunkt von A B und A C, d. h. C über den einzigen Durchschnittspunkt von A′C′ und C′B′, d. h. C′ fallen, folglich beide Dreiecke einander decken und somit ganz einerlei seyn.

Wissen wir nun, daß beide Dreiecke einerlei sind, so können wir, ohne sie gerade über einander zu legen, nach §. 8 schließen, daß A C B = A′C′B′, A C = A′C′, B C = B′C′ sey.

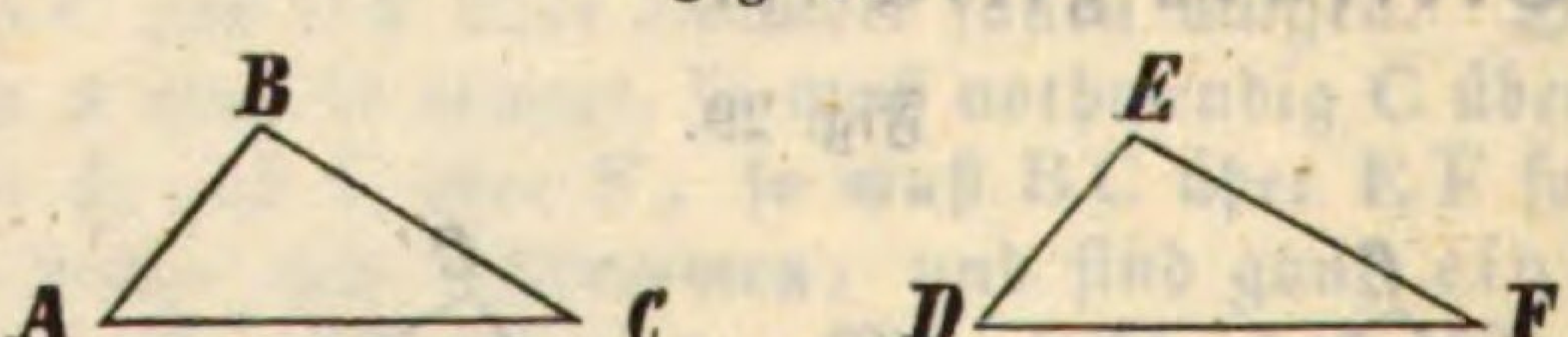
Fig. 30.



Auch dieser Satz läßt sich auf eine andere Weise erläutern. Ist die Gerade A B und die zwei Winkel α und β gegeben, wo natürlich $\alpha + \beta < 180^\circ$ ist, so läßt sich mit diesen Stücken nur ein einziges Dreieck bilden; denn jede mögliche verschiedene Bildungsweise ist in der einen Zusammenstellung hier erschöpft. Denn wollte Jemand den Winkel α statt links, rechts anbringen, so besteht dieses schon hier; denn für Jemand, der von der entgegengesetzten Seite unsere Zusammenstellung betrachtet, ist ja α rechts und β links. Wollte Jemand α und β statt oben unten verzeichnen, so erhalte ich ja dasselbe, wenn ich das hier schon bestehende Dreieck umkehre. Wir sehen also, aus einer Seite und den zwei anliegenden Winkeln ist nur eine Bildungsweise und nur ein Dreieck möglich, also alle Dreiecke, wo diese Stücke sich gleichen, müssen einerlei mit einander seyn, folglich auch die andern gleichliegenden Stücke einander gleich seyn.

§. 19. **Zwei Dreiecke sind einerlei, wo zwei Winkel des einen Dreiecks gleich sind zwei Winkeln im andern Dreiecke, und eine Seite des einen Dreiecks gleich ist der Seite im andern Dreiecke, welche dem gleichen Winkel gegenüber stehet.**

Fig 31.



BAC = EDF, BCA = EFD; AB = DE.

Da die Summe der inneren Winkel eines jeden Dreiecks = 180° ist, so muß natürlich, wenn zwei Winkel des einen Dreiecks gleich sind den zwei Winkeln des andern Dreiecks, natürlich der dritte Winkel des einen Dreiecks gleich seyn dem dritten Winkel des andern; daher muß A B C = D E F seyn, und wir haben somit:

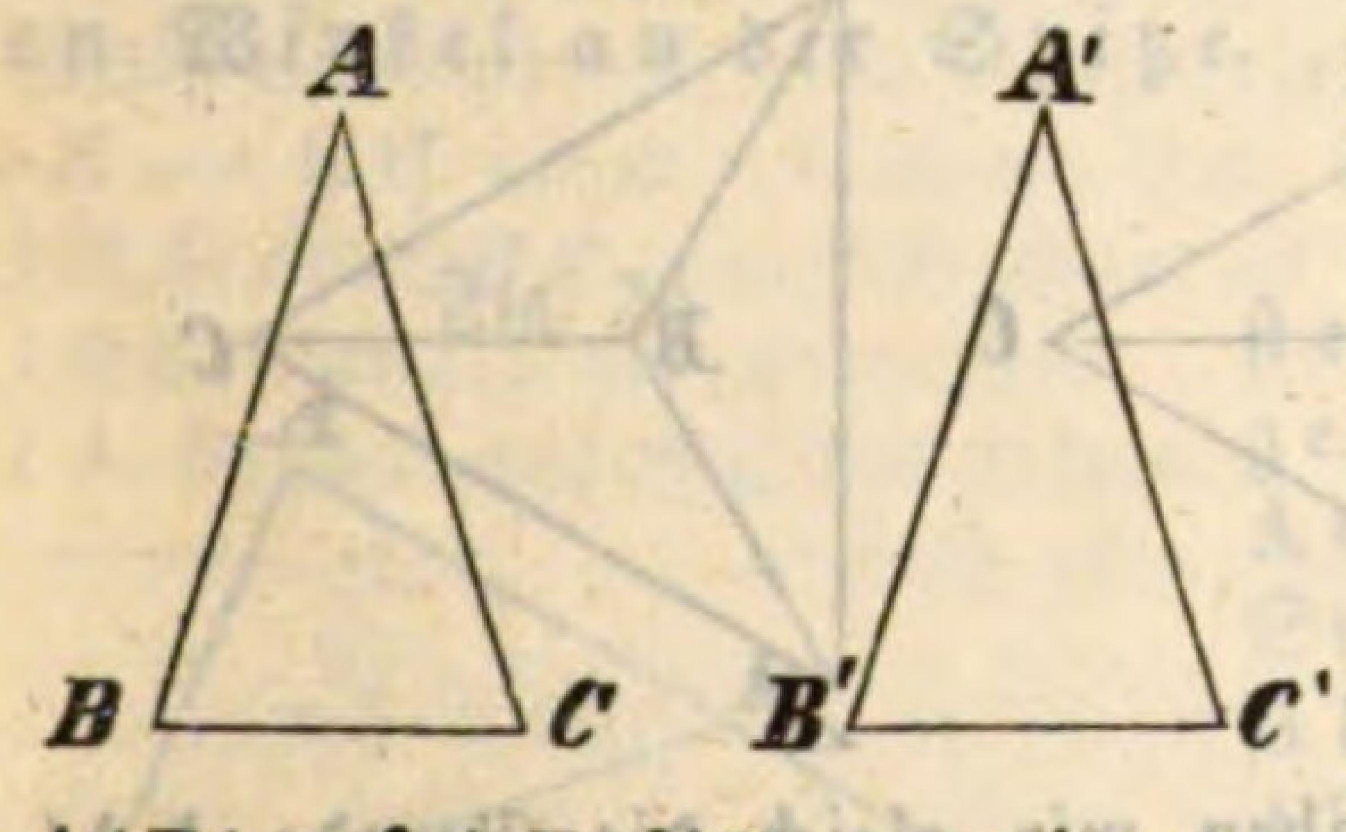
AB = DE, ABC = DEF; BAC = EDF,
d. h. eine Seite des einen Dreiecks und die zwei an ihr liegenden Winkel sind gleich einer Seite des andern Dreiecks und den zwei an ihr liegenden Winkeln, daher diese Dreiecke nach §. 18 einerlei sind.

§. 20. Die Sätze in §. 18 und §. 19 lassen sich in einen zusammenziehen:

Zwei Dreiecke sind einerlei, wenn zwei Winkel des einen Dreiecks gleich sind zwei Winkeln im andern Dreiecke, und beiderseits eine gleichliegende Seite gleich ist. Das Wort gleichliegend ist hier wesentlich, und darf durchaus nicht weggelassen werden, und wir werden in der Folge sehen, daß der Fall möglich ist, daß drei Winkel des einen Dreiecks gleich sind drei Winkeln im andern Dreiecke, und eine Seite des einen Dreiecks gleich einer Seite im andern Dreiecke; und doch die Dreiecke nicht einerlei sind, sobald diese gleichen Seiten nicht zugleich gleichliegend sind.

§. 21. Wenn zwei Seiten eines Dreiecks einander gleich sind, so sind auch die Winkel, die diesen Seiten gegenüber stehen, einander gleich.

Fig. 32.



Es sey das Dreieck ABC, wo AB = AC; denken wir uns dasselbe Dreieck nochmals, so daß A'B'C' ≡ ABC, zu diesem Behufe muß A'B' = AB, A'C' = AC und BAC = B'A'C' seyn, daher auch BC = B'C' ist.

Das Dreieck A'B'C' kann nun auf doppelte Art das Dreieck ABC decken; erstens, wenn A' auf A und A'B' auf AB fällt; zweitens, wenn A' auf A und A'C' auf AB fällt. Auf beide Arten müssen sich beide Dreiecke vollkommen decken.

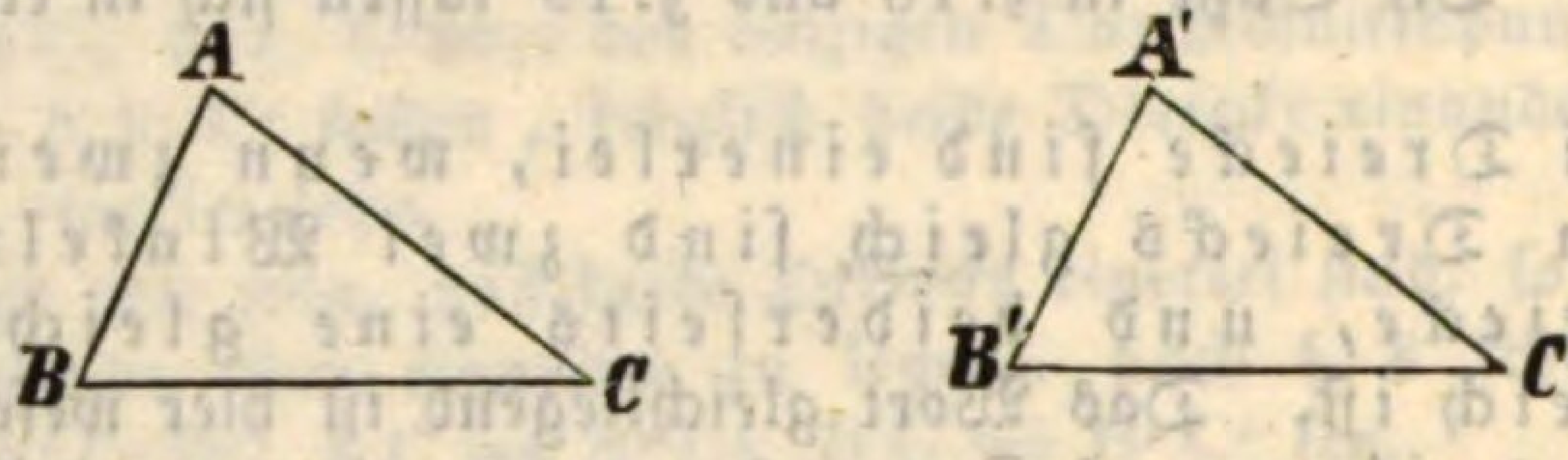
Bei der ersten Art deckt der Winkel A'B'C' den Winkel ABC, bei der zweiten der Winkel A'B'C den Winkel ACB, daher müssen ABC und ACB einander gleich seyn.

§. 22. Ganz auf dieselbe Art läßt sich beweisen, daß wenn in einem Dreicke zwei Winkel einander gleich sind, auch die ihnen gegenüberstehenden Seiten gleich seyn müssen, indem man sich ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln doppelt denkt, wo dann diese Dreiecke sich auf doppelte Weise decken, woraus dann der behauptete Satz von selbst folgt.

Bei einem gleichschenklichen Dreiecke nennt man gewöhnlich die dritte ungleiche Seite die Grundlinie, wiewohl, wie wir später sehen werden, jede Seite diesen Namen zu führen berechtiget ist. Wo die zwei gleichen Seiten zusammentreffen, diesen Endpunkt nennt man zunächst die Spitze des gleichschenklichen Dreiecks.

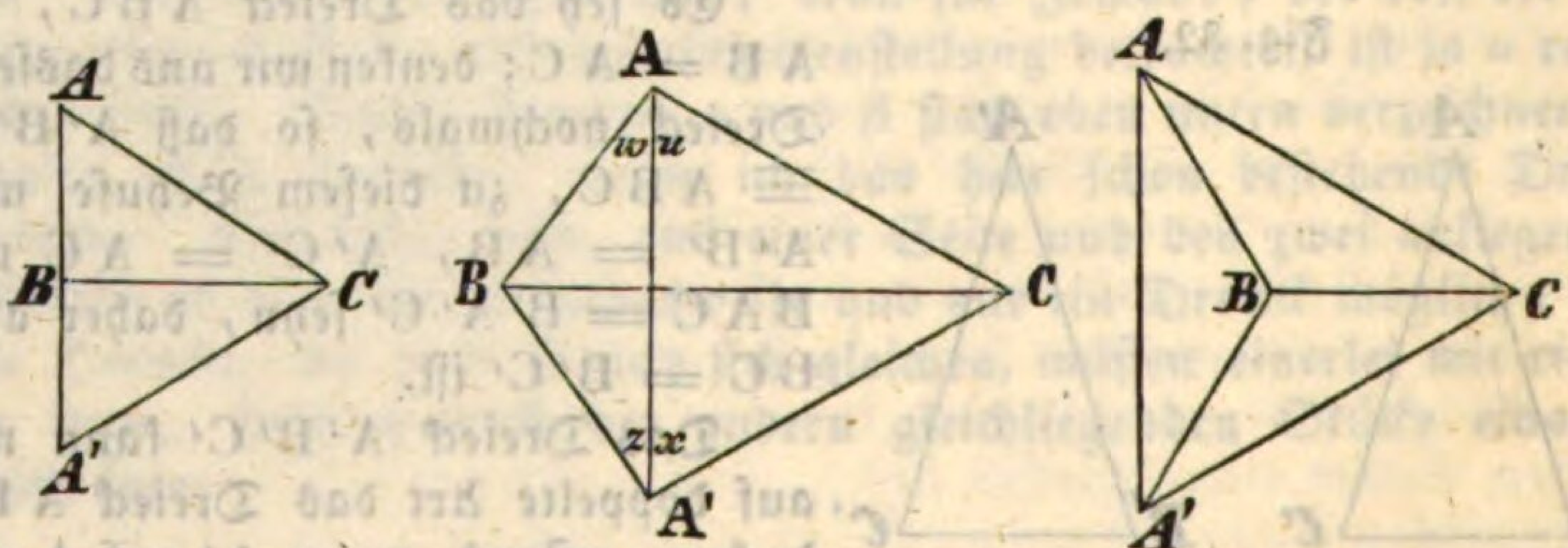
§. 23. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gleich sind den drei Seiten eines andern Dreiecks, so sind diese beiden Dreiecke einerlei.

Fig. 33.



Es sey A B = A′B′; A C = A′C′; B C = B′C′; ich denke mir nun das Dreieck A′B′C an das Dreieck A B C unten so angelegt, daß B′C′ auf B C und zwar B′ auf B, folglich C′ auf C fällt, und A′ nach abwärts kommt, so sind hier, wo wir was immer für Dreiecke im Gedanken haben müssen, dreierlei Fälle möglich, nämlich die Seite, A B und A′B′ bilden einen geraden Winkel, oder sie bilden einen erhabenen oder hohlen Winkel, was in den drei folgenden Figuren veranschaulicht ist:

Fig. 34.



In den zwei letzten Figuren haben wir gleich die Gerade A A′ gezogen. — Im ersten Falle habe ich ein Dreieck C A A′, wo zwei Seiten A C = A′C, also auch C A B = C A′B sind, daher sind A C B ≡ A′C B, weil A′B = A B, A′C = A C und C A B = C A′B ist, nach § 16.

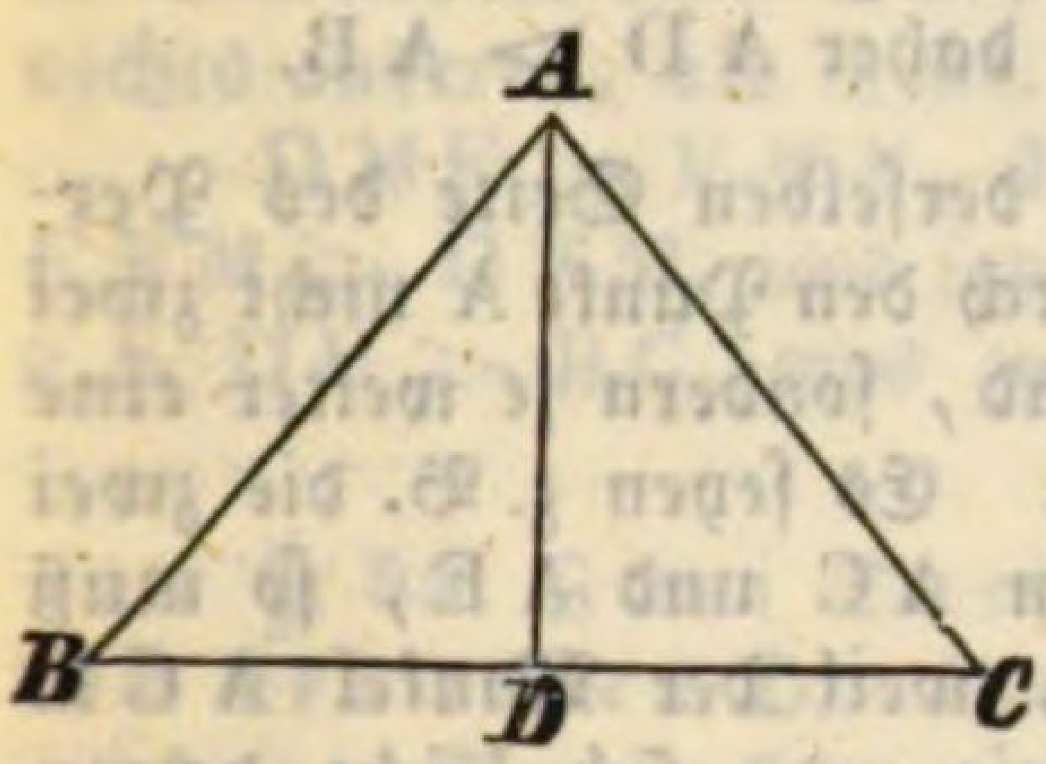
Im zweiten Falle ist im Dreiecke A C A′ die A C = A′C, daher u = x, und im Dreiecke A B A′, A B = A′B, daher w = z, und somit u + w = z + x, d. h. B A C = B A′C, daher weil A B = A′B und A C = A′C sind, hat man A B C ≡ A′B C.

Im dritten Falle ist im Dreiecke A C A′ die A C = A′C. daher C A A′ = C A′A, im Dreiecke A B A′, aber A B = A′B, daher B A A′ = B A′A, und somit auch C A A′ — B A A′ = C A′A — B A′A, d. h B A C = B A′C, und da A B = A′B und A C = A′C sind, daher A B C ≡ A′B C.

§. 24. Wenn man in einem gleichschenklichen Dreiecke die Spitze desselben mit der Mitte der Grund-

linie verbindet, so stehet diese Verbindungslinie auf der Grundlinie senkrecht und hälftet den Winkel an der Spitze.

Fig. 35.

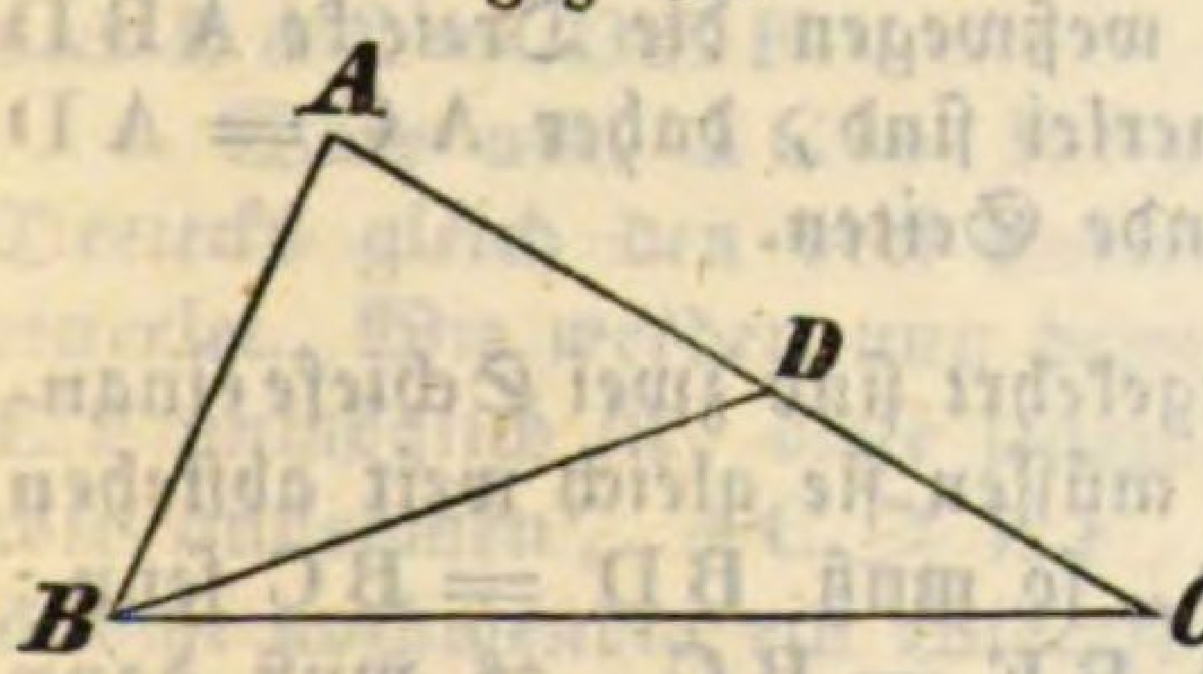


AB = AC; BD = DC; AD = AD, also ABD ≡ ACD, daher ADB = ADC, daher jeder = 90°, also AD ⊥ BC, eben so ist BAD = DAC.

Da der Winkel in A nur auf eine Art gehälftet werden kann, so kann man auch sagen: *jede Gerade, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks hälftet, hälftet auch die Grundlinie, und ist auf ihr senkrecht.*

Da von dem Punkte A auf BC nur ein Perpendikel möglich ist, und dieses hier AD ist, so kann man auch sagen: *das Loth von der Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks auf die Grundlinie hälftet diese und den Winkel an der Spitze.* Da in dem Punkte D auf die BC nur ein Loth möglich ist, und dieses AD ist, so kann man sagen: *Wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenklichen Dreiecks ein Loth errichtet, so gehet dieses durch die Spitze und hälftet den Winkel an der Spitze.*

Fig. 36.



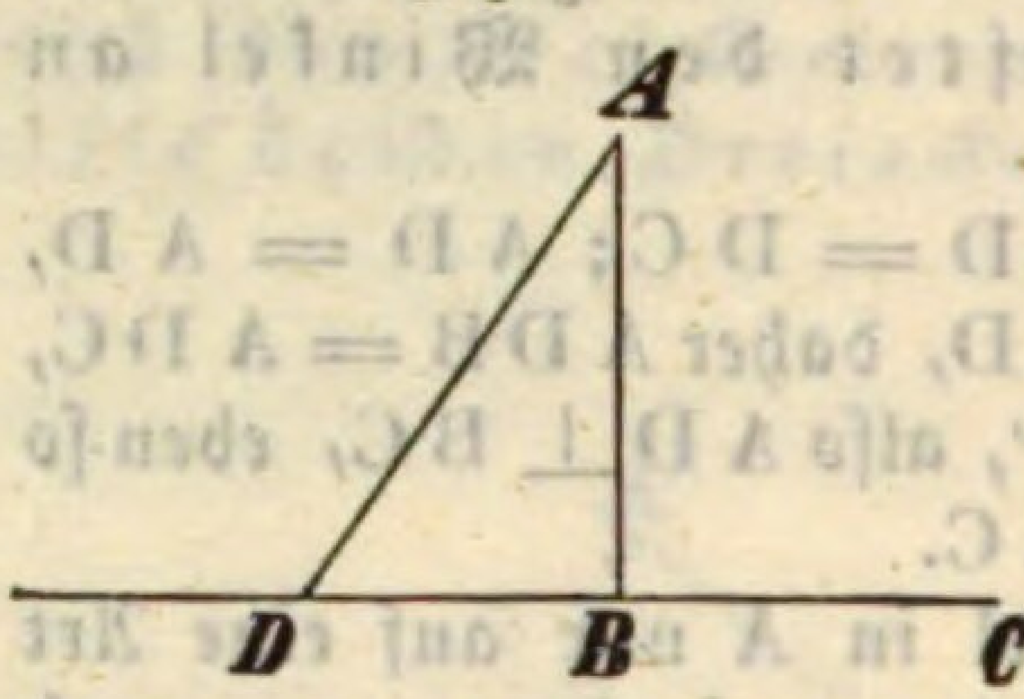
§. 25. *Der größeren Seite steht ein größerer Winkel gegenüber.* Es sey im Dreiecke ABC, AC > AB, ich schneide von AC ein Stück ab, AD = AB, und ziehe BD. Da im Dreiecke ABD die AB = AD, so ist auch ABD = ADB; da nun ABC > ABD, so ist auch ABC > ADB; weil ferner ADB ein äußerer Winkel des Dreiecks BCD ist, so ist auch ADB > DCB, daher ABC > DCB, oder ABC > ACB, wie z. b. w.

§. 26. *Dem größern Winkel steht auch eine größere Seite gegenüber.* Im Dreiecke ABC soll ABC > ACB, so muß auch AC > AB seyn; denn wäre AC $\overline{\overline{<}}$ AB, so müßte nach dem Vorigen ABC $\overline{\overline{<}}$ ACB, was dem Obigen widerspricht, daher AC > AB.

§. 27. *Folgesätze.* a) Im rechtwinkligen Dreiecke ist die dem rechten Winkel gegenüberstehende Seite (Hypotenuse) größer als jede der anderen Seiten (Katheten).

b) Im stumpfwinkligen Dreiecke ist die dem stumpfen Winkel gegenüber stehende die größte Seite.

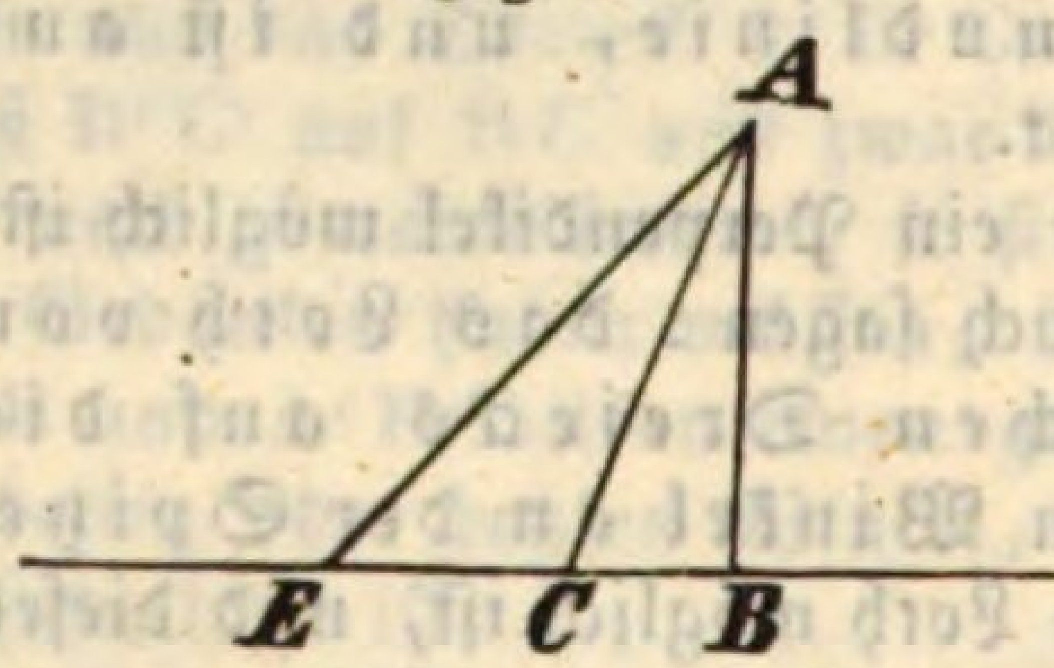
Fig. 37.



c) Das Perpendikel ist die kürzeste Gerade, welche man von einem Punkte, z. B. A auf eine Gerade, z. B. DC, ziehen kann; denn jede andere Gerade, z. B. AD, bildet ein rechtwinkliges Dreieck, wo AB eine Kathete ist, daher AD > AB.

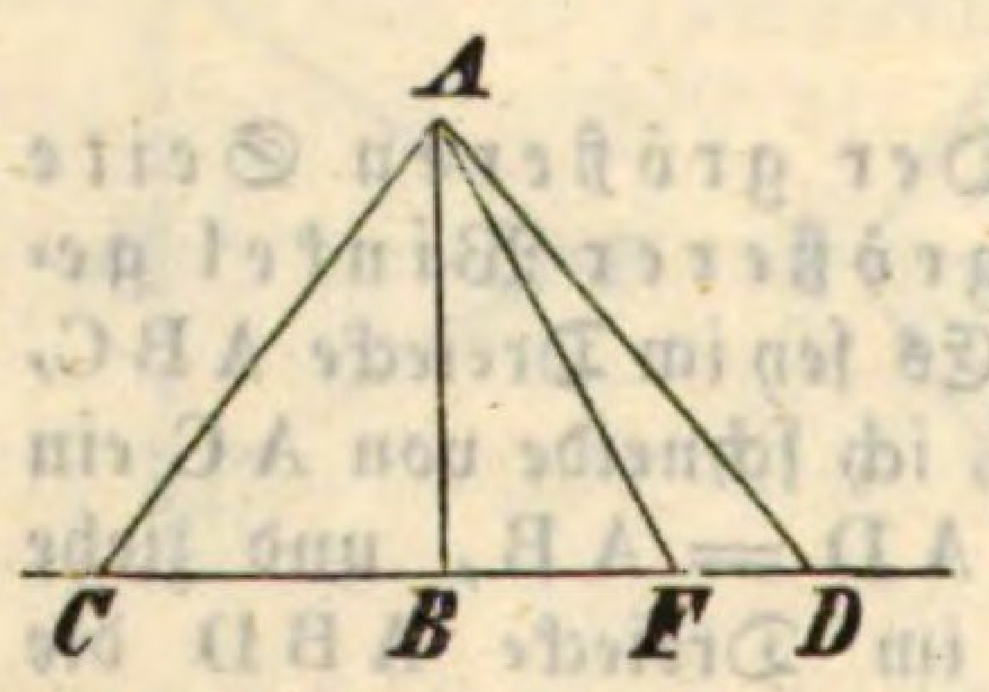
§. 28. Auf derselben Seite des Perpendikels sind durch den Punkt A nicht zwei schiefe Linien möglich, die einander gleich sind, sondern je weiter eine vom Perpendikel absteht, desto größer ist sie. Es seyen z. B. die zwei schiefen Linien AC und AE, so muß AE > AC, weil der Winkel ACE stumpf ist, wie man sich leicht davon überzeugt, weil ACB spitzig seyn muß. Und so läßt sich allgemein einsehen, daß jedes Dreieck, welches durch zwei schiefe Gerade auf derselben Seite des Perpendikels entsteht, ein stumpfwinkliges ist, daher nie zwei solche Schiefe einander gleich seyn können, sondern nothwendig die Entferntere größer seyn muß.

Fig. 38



§. 29. Zwei Schiefe, die gleichweit vom Perpendikel entfernt sind, sind einander gleich; so ist z. B. AC = AD, wenn DB = BC ist, weil da noch AB = AB und ABD = ABC ist, weßwegen die Dreiecke ABD und ABC einerlei sind, daher AC = AD als gleichliegende Seiten.

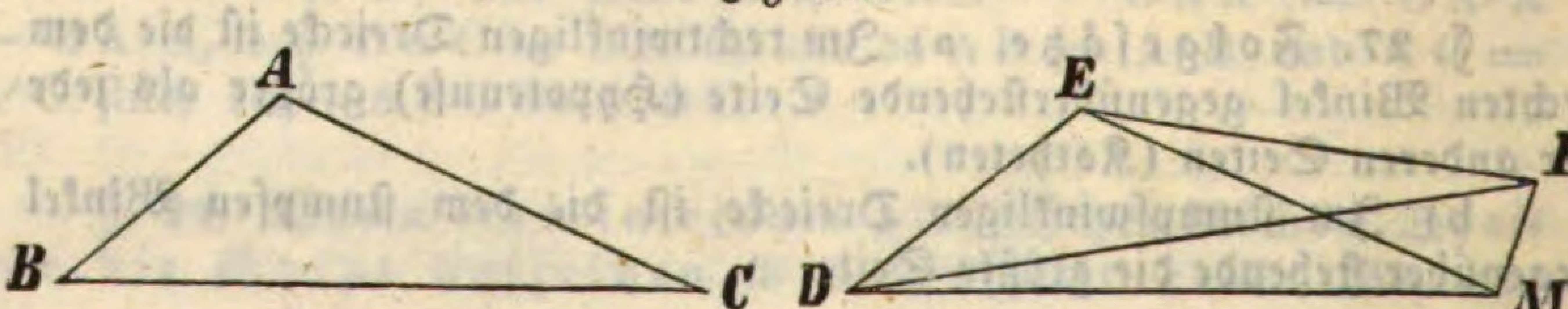
Fig. 39.



§. 30. Umgekehrt sind zwei Schiefe einander gleich, so müssen sie gleich weit abstehen vom Perpendikel; z. B. ist AC = AD, so muß BD = BC seyn; denn wäre z. B. DB > BC, so sey BF = BC, es muß dann AC = AF, daher AF = AD seyn, was nicht seyn kann.

§. 31. **Wenn in zwei Dreiecken die zwei Seiten des einen Dreiecks gleich sind den zwei Seiten des anderen Dreiecks, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind ungleich, so sind auch die dritten Seiten ungleich, und zwar ist die dritte Seite, welche dem größern Winkel gegenüber steht, die größere.**

Fig. 40.

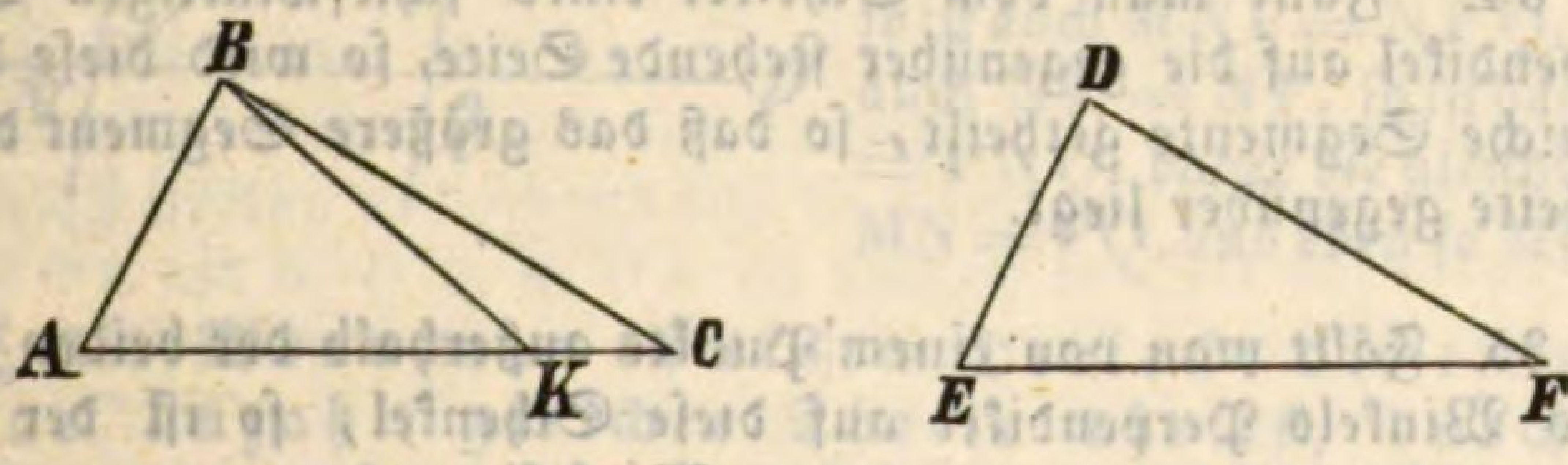


Es sey AB = DE, AC = EF, und BAC < DEF, so legt man das Dreieck BAC so über das Dreieck DEF, daß A über E, AB über DE kommt, so wird, weil BAC < DEF ist, die AC zwischen DE und EF fallen, es sey EM die Lage der AC, und somit BAC = DEM, AC = EM, BC = DM, mit einem Worte DEM sey nichts anderes, als ABC in anderer Lage, so hat man:

DMF > EMF, EMF = EFM (weil EM = EF); EFM > DFM, und somit DMF > DFM, und somit DF > DM, d. h. DF > BC, was zu beweisen war.

§. 32. **Zwei Dreiecke sind einerlei, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks gleich sind den zwei Seiten des andern Dreiecks, und die den größeren Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich sind.**

Fig. 41.



AB = DE; BC = DF; BC > AB, daher auch DF > DE und BAC = DEF.

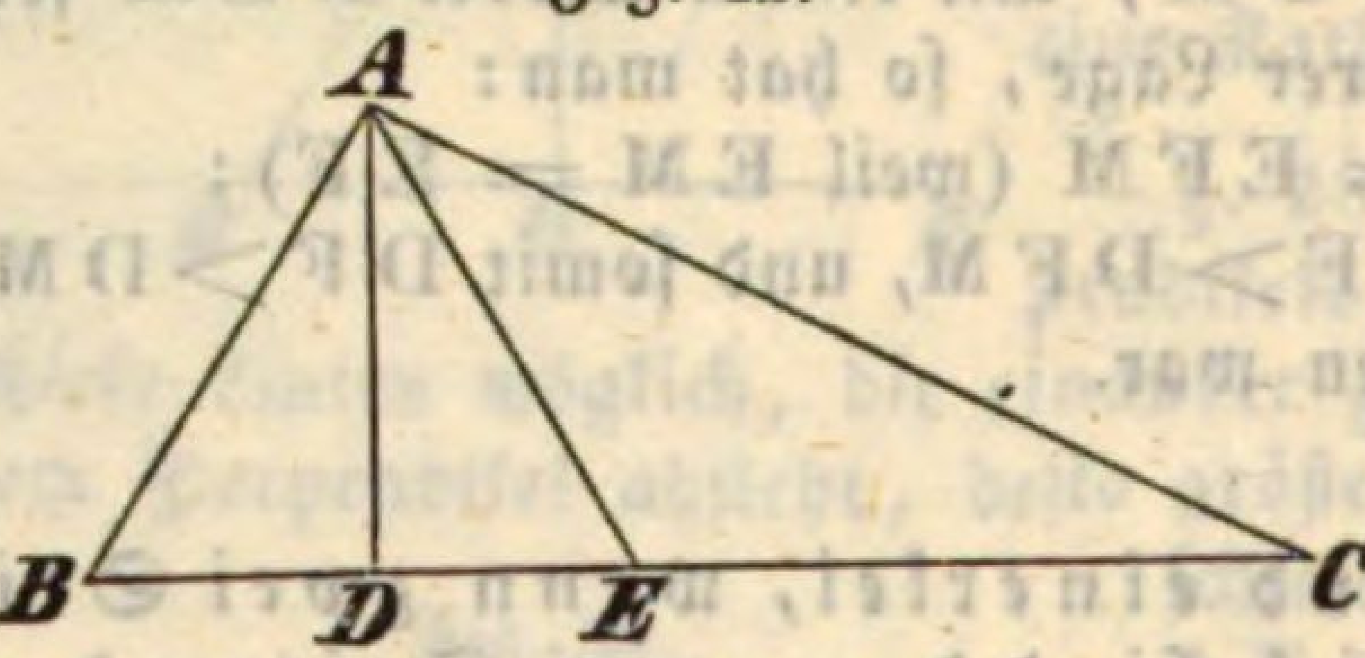
Wäre nun AC = EF, so wären die drei Seiten des einen Dreiecks gleich den drei Seiten des andern, und somit die Dreiecke einerlei. Wir werden nun beweisen, daß die Ungleichheit von AC und EF unmöglich ist, diese Unmöglichkeit weisen wir dadurch nach, daß wir annehmen, AC $\gtrless$ EF, und nachweisen, daß aus dieser Annahme nothwendig ein Widerspruch folge, daher die Annahme unstatthaft sey.

Wäre AC > EF, so könnte ich von AC ein Stück AK = EF abschneiden, verbindet man nun K mit B, so hat man ein Dreieck ABK, wo AB = DE, AK = EF, BAK = DEF wäre; man hätte somit die Dreiecke ABK ≡ DEF, und da in einerlei Dreiecken die gleichliegenden Seiten gleich sind, hätte man DF = BK, folglich da nach der Annahme DF = BC ist; hätte man BC = BK, folglich die Winkel BKC = BCK einander gleich, folglich jeder ein spitziger, dann müßte aber da BKC < 90, auch BKA > 90 seyn, folglich müßte der Winkel BKA der größte Winkel im Dreiecke ABK seyn, also auch die Seite AB die größte, und somit wäre AB > BK, folglich AB > BC, was der Voraussetzung widerstreitet.

Man sieht also, die Annahme AC > EF widerstreitet der Voraussetzung BC > AB. Genau auf dieselbe Art läßt sich nachweisen, daß auch die Setzung AC < EF ebenfalls den Voraussetzungen wider-

spricht. Da nun somit weder $AC > EF$ noch $AC < EF$ seyn kann, so muß nothwendig $AC = EF$ seyn, wodurch das Einerleiseyn der beiden betrachteten Dreiecke von selbst sich ergibt.

Fig. 42.

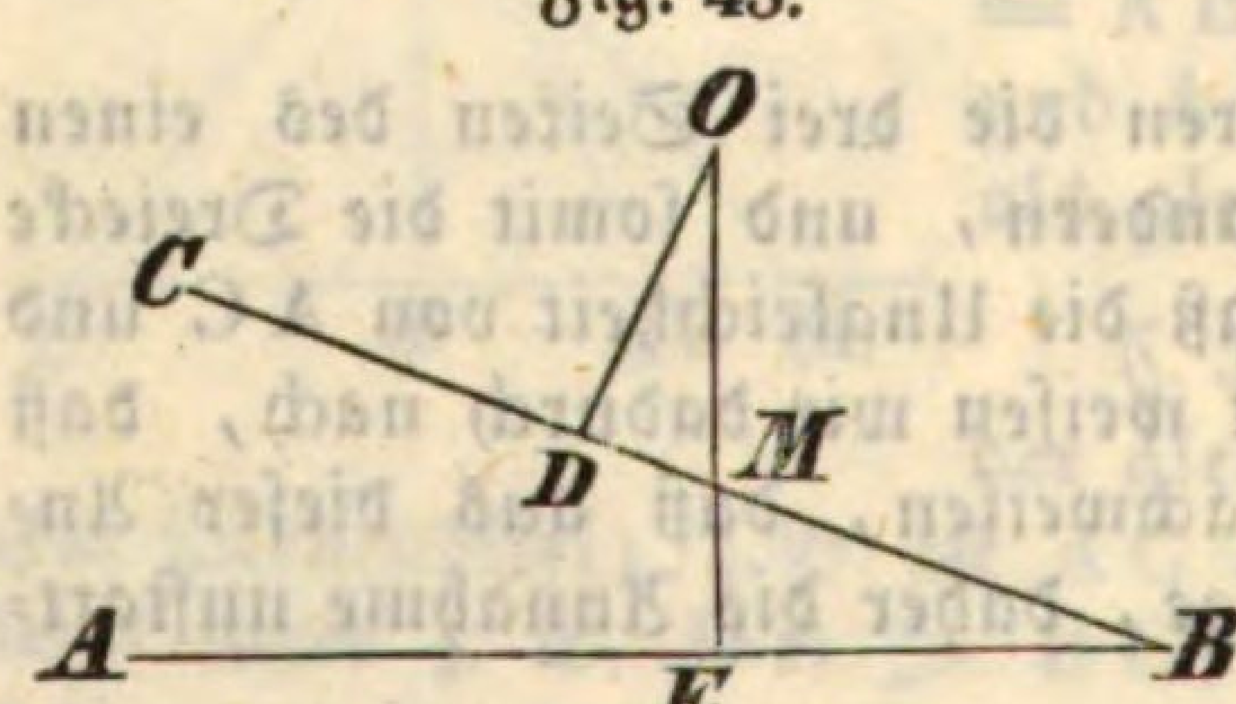


§. 33. Sind zwei Seiten des einen Dreiecks gleich zweien Seiten des andern Dreiecks und die den kleineren Seiten gegenüber stehenden Winkel einander gleich, so ist es möglich, daß die Dreiecke nicht einerlei sind. Z. B. es sey das Dreieck ABC; ich fälle das Perpendikel AD, mache $DE = BD$, so ist $AB = AE$. In den zwei Dreiecken ABC und AEC ist also $AB = AE$, $AC = AC$ und $ACE = ACB$, und doch sind die Dreiecke, wie man sieht, nicht einerlei.

§. 34. Fällt man vom Scheitel eines schiefwinkligen Dreiecks ein Perpendikel auf die gegenüber stehende Seite, so wird diese dadurch in ungleiche Segmente getheilt, so daß das größere Segment der größeren Seite gegenüber liegt.

§. 35. Fällt man von einem Punkte außerhalb der beiden Schenkel eines Winkels Perpendikel auf diese Schenkel, so ist der Winkel der Perpendikel gleich dem gegebenen Winkel.

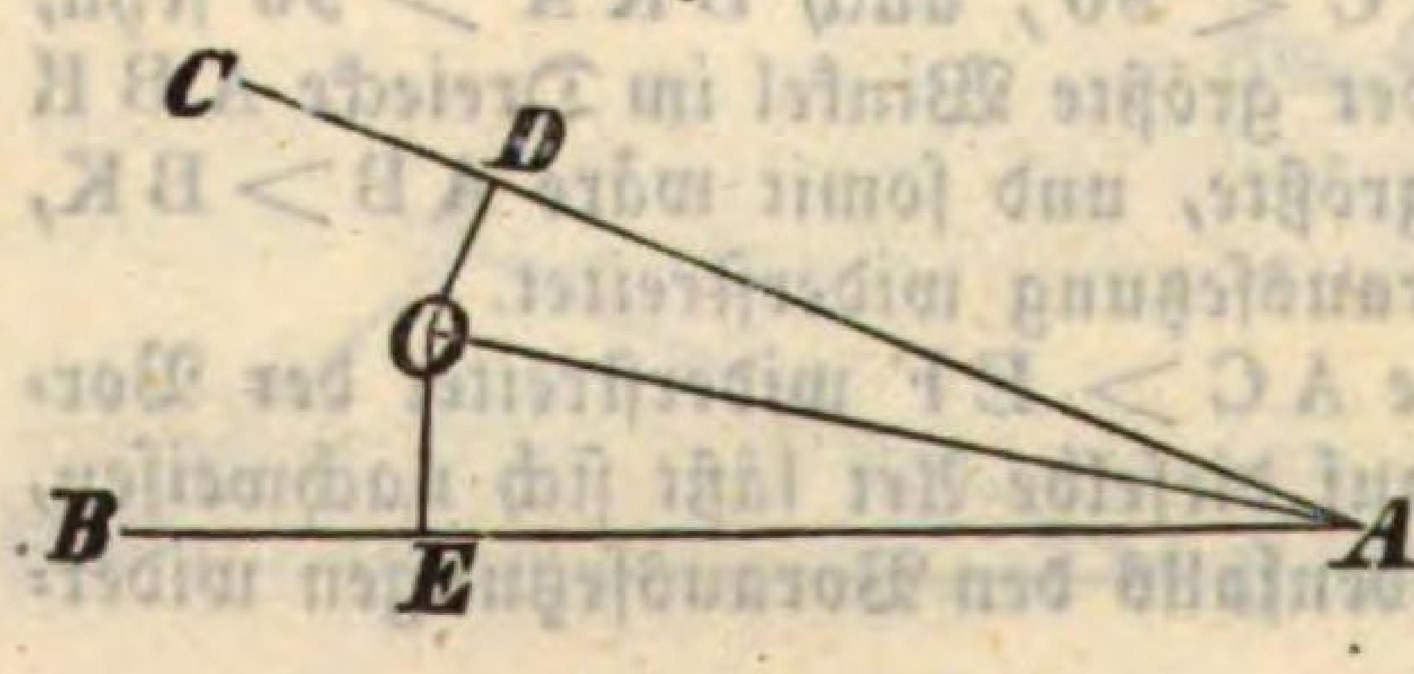
Fig. 43.



Es sey der Winkel ABC, von dem außerhalb des Winkels liegenden Punkte O fälle ich die Perpendikel OE und OD auf die Schenkel AB und BC, und ich behaupte, daß der Winkel $EOD = ABC$ ist; denn ich finde in den zwei Dreiecken MOD und MBE die Winkel $OMD = BME$ und $ODM = OEB$, daher müssen auch die dritten Winkel $MOD = MBE$ seyn, wie z. b. w.

§. 36. Fällt man von einem Punkte innerhalb der beiden Schenkel eines Winkels Perpendikel auf diese beiden, so ist der Winkel, den diese Perpendikel bilden, die Ergänzung zu zwei Rechten vom gegebenen Winkel.

Fig. 44.



Es sey der Winkel BAC; O ein Punkt innerhalb der Schenkel, OE und OD die Perpendikel auf AB und AC, so behaupte ich, daß:

$$EAD + EOD = 2R$$

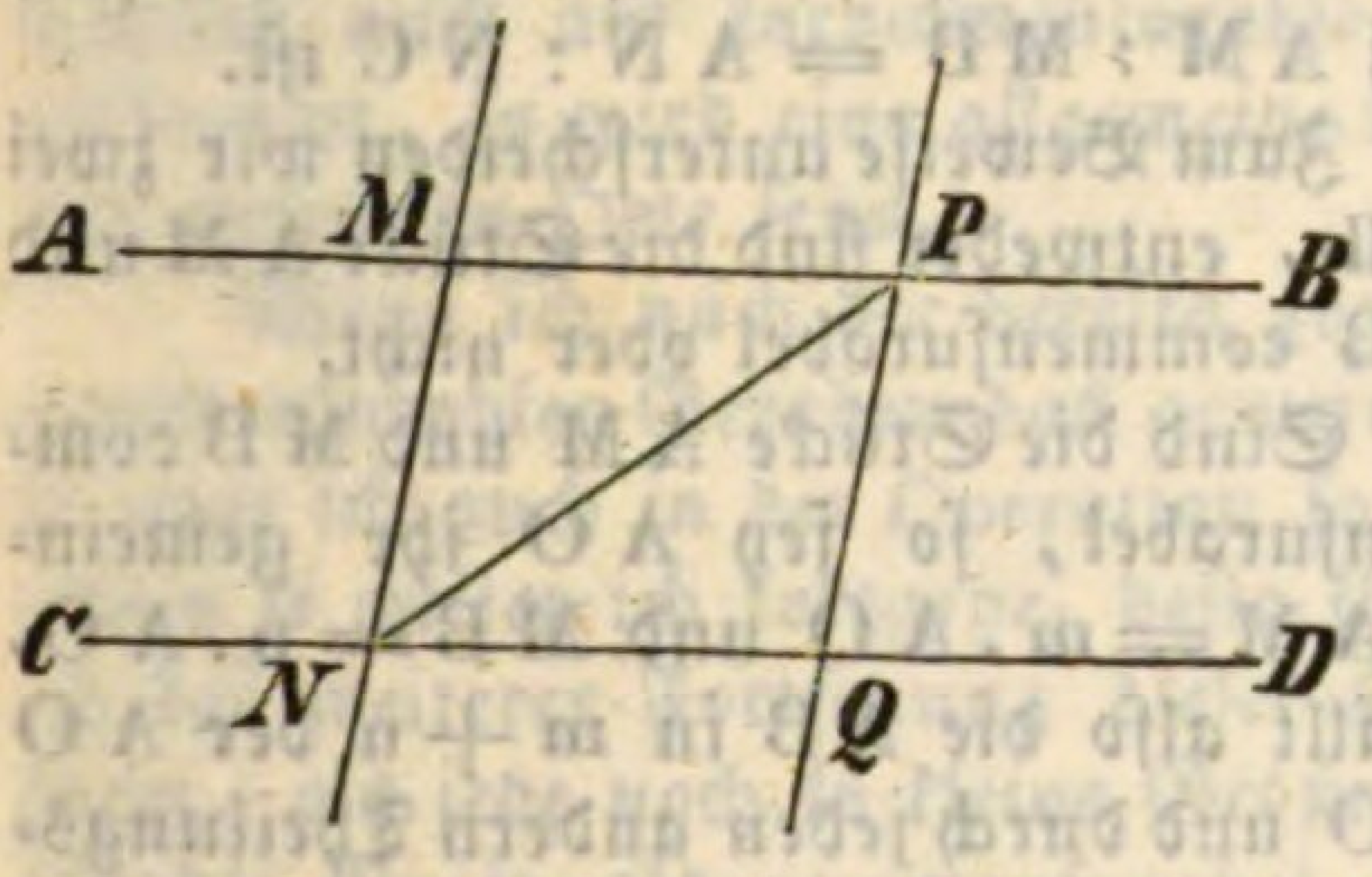
ist. Ich ziehe AO, so ist $EOA + EAO = R$, und

OAD + AOD = R, daher entsteht durch Addition EOA + AOD + EAO + OAD = 2R, daher EAD + EOD = 2R, w. z. b. w.

II. Aehnlichkeit der Dreiecke.

§. 37. Bisher haben wir vorzugsweise die Perpendikel zur Darstellung der Eigenschaften des Dreiecks angewendet; nehmen wir nun auch die Parallelen zu Hülfe. Zu diesem Behufe wollen wir zuerst den Satz beweisen, daß Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind.

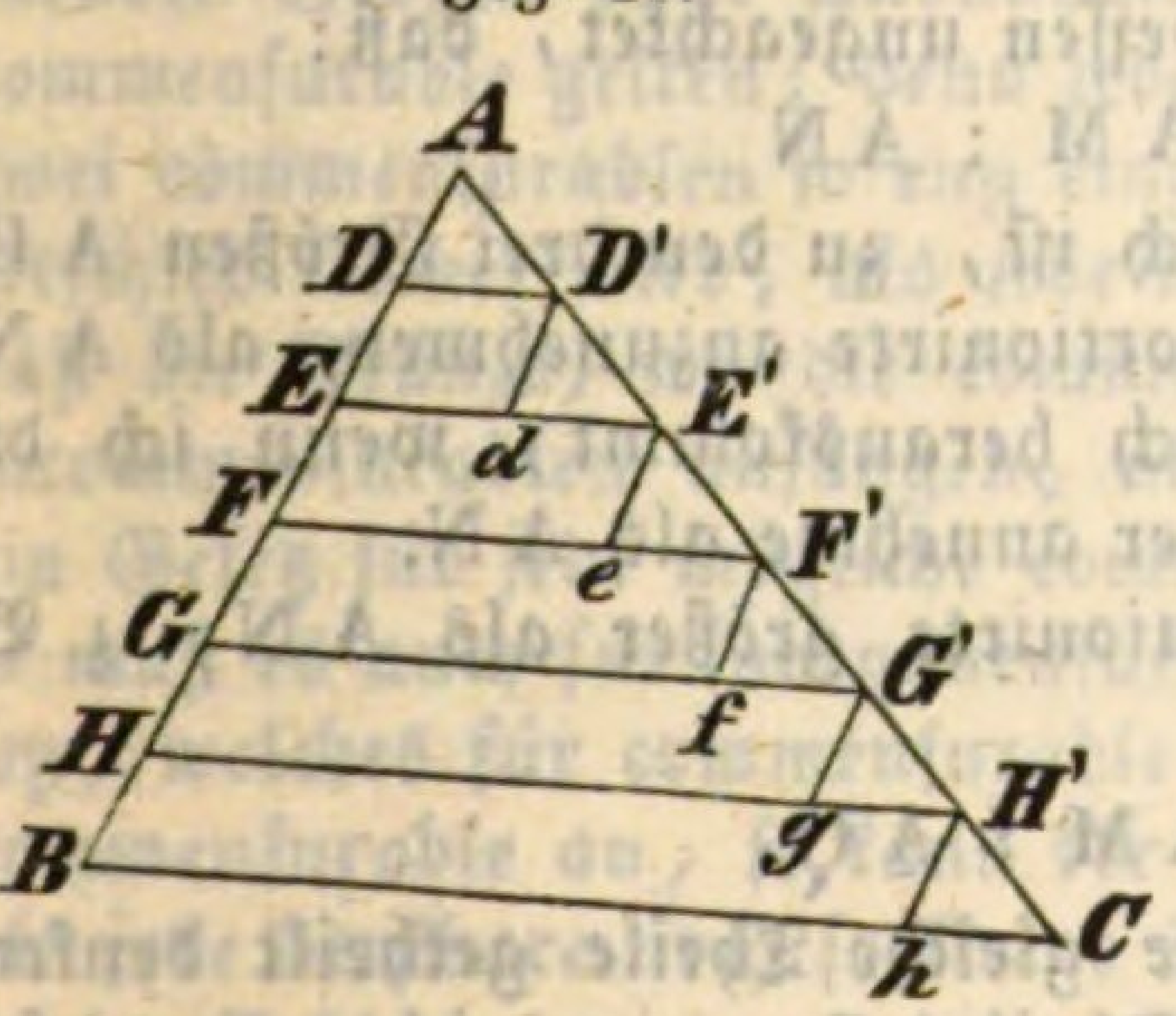
Fig. 45.



Es seien BA ∥ CD, in den Punkten M und P ziehe ich die Parallelen MN ∥ PQ; ich werde nun beweisen, daß diese Stücke einander gleich sind. Ich ziehe NP; da BA ∥ CD, so ist MPN = PNQ, da nun auch MN ∥ PQ, so ist auch MNP = NPQ, weil nun auch NP = NP, so ist dann MNP ≡ PNQ, daher die gleichliegenden MN = PQ, und eben so MP = NQ.

§. 38. Wenn man in einem Dreiecke die eine Seite in eine Anzahl gleicher Theile theilt, durch jeden Theilungspunkt zu einer Seite des Dreiecks Parallele zieht, so wird die dritte Seite dadurch in eben so viele gleiche Theile getheilt.

Fig. 46.



Theilen wir die AB z. B. in sechs gleiche Theile, ziehen wir durch jeden Theilungspunkt Parallele zu BC, so wird die AC auch in sechs Theile zertheilt; wir wollen zeigen, daß diese sechs Theile auch unter einander gleich sind.

Es sey also AD = DE = EF = FG = GH = HB; ich ziehe durch jeden Theilungspunkt Parallele zur BC, nämlich DD′, EE′, FF′, GG′, HH′; ich ziehe ferners durch die Punkte D′, E′ u. s. f. die D′d, E′e, F′f u. s. w. parallel zur AB, so finde ich, da dD′ = DE, eE′ = EF ꝛc. ist: AD = dD′ = eE′ = fF′ = gG′ = hH′; da nun ferners noch die Winkel:

AD′D = D′E′d = E′F′e = ꝛc. und

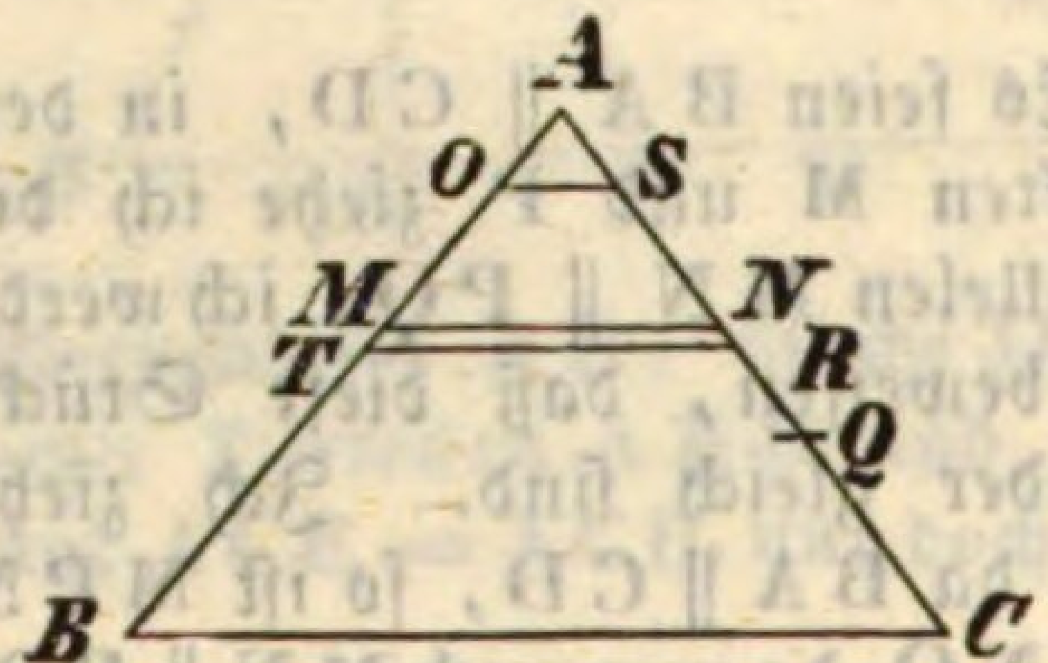
ADD′ = D′dE′ = E′eF′ = ꝛc. sind, so sind die Dreiecke ADD′, D′E′d, E′F′e ꝛc. unter einander congruent, daher die gleichliegenden Seiten

AD′ = D′E′ = E′F′ = F′G′ = G′H′ = H′C.

Es braucht wohl nicht erst bemerkt zu werden, daß dasselbe Statt finden würde, wenn man die Seite AB in eine andere Anzahl gleicher Theile theilen würde.

§. 39. **Wenn man in einem Dreiecke zu irgend einer Seite eine parallele Linie zieht, so werden die beiden andern Seiten dadurch proportionirt geschnitten.**

Fig. 47.



Es sey das Dreieck ABC, ich nehme in der AB irgend einen Punkt, z. B. M an, und ziehe durch M eine Parallele zur BC, nämlich MN, und behaupte, daß AM : MB = AN : NC ist.

Zum Beweise unterscheiden wir zwei Fälle, entweder sind die Stücke AM und MB commensurabel oder nicht.

Sind die Stücke AM und MB commensurabel, so sey AO ihr gemeinschaftliches Maß, und es sey z. B. AM = m . AO und MB = n . AO, daher AM : MB = m : n. Es zerfällt also die AB in m + n der AO gleiche Theile; ziehe ich nun durch O und durch jeden andern Theilungspunkt Parallele zur BC, so zerfällt die AC in m + n der AS gleiche Theile, von welchen AN, m und NC, n solcher enthält, daher AN : NC = m : n, somit auch AM : MB = AN : NC, und daher AM + BM : MA = AN + NC : AN, d. h.

AB : MA = AC : AN, oder auch
AB : AC = MA : NA.

Sind aber die Stücke AM und MB incommensurabel, so sind es auch AM und AB, ich behaupte dessen ungeachtet, daß:

AB : AC = AM : AN

ist, indem ich zeige, daß es unmöglich ist, zu den drei Größen AB, AC und AM eine andere vierte Proportionirte anzunehmen, als AN, daß nämlich jedenfalls ein Widerspruch herauskommt, wenn ich die vierte Proportionirte größer oder kleiner annehme als AN.

Nehmen wir die vierte Proportionirte größer als AN, z. B. AQ an, so daß wir haben:

AB : AC = AM : AQ,

so können wir uns die AC in kleinere gleiche Theile getheilt denken, als NQ ist. Es sey z. B. ein solcher Theil AS; trage ich nun diesen Theil AS auf der AC so oft auf, als es möglich ist, so muß ein Theilungspunkt, z. B. R, zwischen N und Q fallen, so daß also AR und AC commensurabel sind; ziehe ich nun durch R eine Parallele RT zur BC, so ist:

AB : AC = AT : AR, daher
AM : AQ = AT : AR, oder
AM : AT = AQ : AR.

Da nun AM $<$ AT, so ist AM : AT $<$ 1, und da AQ $>$ AR ist, so ist AQ : AR $>$ 1; also kann AM : AT unmöglich gleich seyn AQ : AR; woraus folgt, daß AQ unmöglich die vierte Proportionirte seyn kann. Was ich aber hier von AQ zeigte, kann ich von jeder andern zeigen, die größer ist als AN, daher kann die vierte Proportionirte nicht größer seyn als AN.

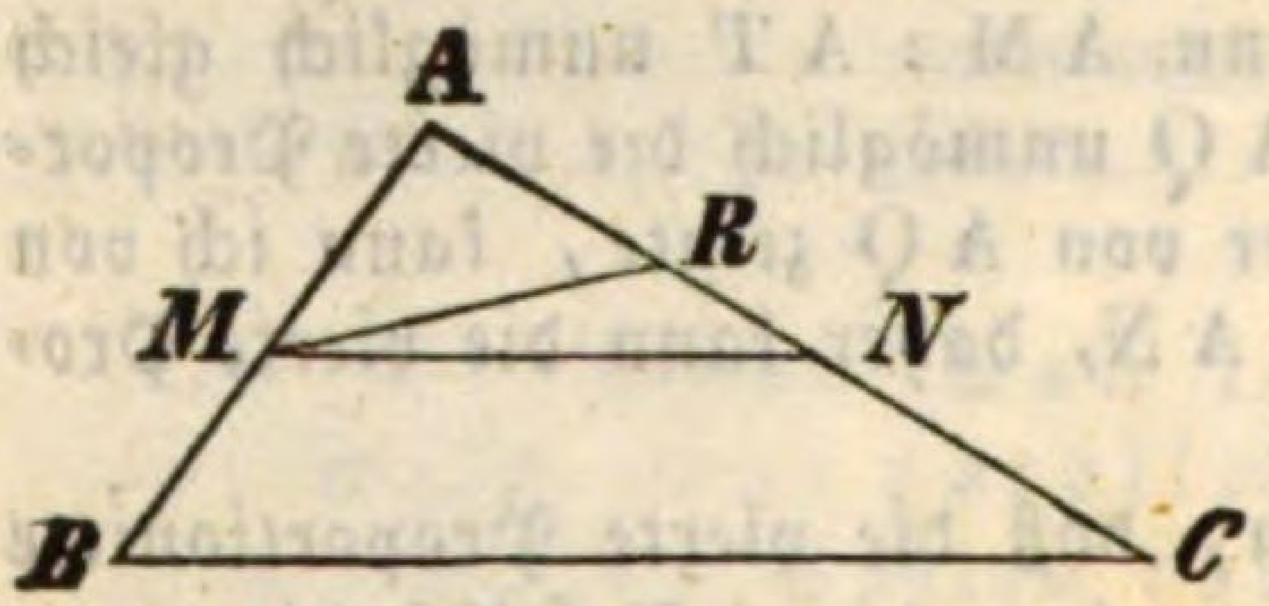
Auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß die vierte Proportionirte nicht kleiner seyn kann als AN, daher nothwendig AN selbst die vierte Proportionirte seyn muß, und stets die Proportion richtig seyn wird: AB : AC = AM : AN.

Hier haben wir zuerst einen für commensurable Größen bewiesenen Lehrsatz auch auf incommensurable ausgedehnt. Da dieses noch oft vorkommt, so wird eine allgemeine Betrachtung dieses Falles hier nicht am unrechten Orte seyn.

Wenn ich nach der bereits gegebenen Methode zwischen zwei incommensurablen Geraden das gemeinschaftliche Maß suche, so wird mir, so weit ich auch in der Operation fortgehe, stets ein Rest übrig bleiben; allein je weiter ich fortgehe, desto kleiner wird der Rest werden, so daß ich bei weiterer Fortsetzung dieser Operation den Rest kleiner machen kann, als jede noch so kleine Größe Nehme ich daher zwei incommensurable Linien als commensurabel an, so begehe ich jedenfalls einen Fehler, der jedoch desto kleiner ist, je kleiner ich das gemeinschaftliche Maß annehme; da ich nun das gemeinschaftliche Maß immer kleiner und kleiner annehmen kann, so wird auch der Fehler, wenn ich incommensurable Größen als commensurable ansehe, immer kleiner und kleiner, und kann kleiner gemacht werden, als jede denkbare noch so kleine Größe. — Gilt also irgend eine entwickelte Relation für alle commensurable Größen ohne Ausnahme, so muß sie nothwendig auch für incommensurable gelten; denn jede incommensurable Größe kann zwischen zwei commensurablen so eng eingeschlossen gedacht werden, daß der Unterschied kleiner wird, als jede denkbare noch so kleine Größe, so also, daß die Gränze, wo die commensurablen Größen aufhören, und die incommensurablen anfangen, nie angegeben werden kann. Gilt also ein Gesetz für jede mögliche commensurable Größe ohne Unterbrechung, so muß es auch für incommensurable gelten. — Oder nehme ich ein Gesetz, welches für commensurable Größen entwickelt wird, auch für incommensurable an, so kann der Fehler, den ich dabei begehe, kleiner als jede denkbare noch so kleine Größe gemacht werden, d. h. ich begehe keinen Fehler.

§. 40. Wenn man in einem Dreiecke in zwei Seiten desselben zwei Punkte so annimmt, daß die vier dadurch entstehenden Stücke zu einander gerade proportionirt sind, so ist die Verbindungslinie dieser Punkte zur dritten Seite parallel.

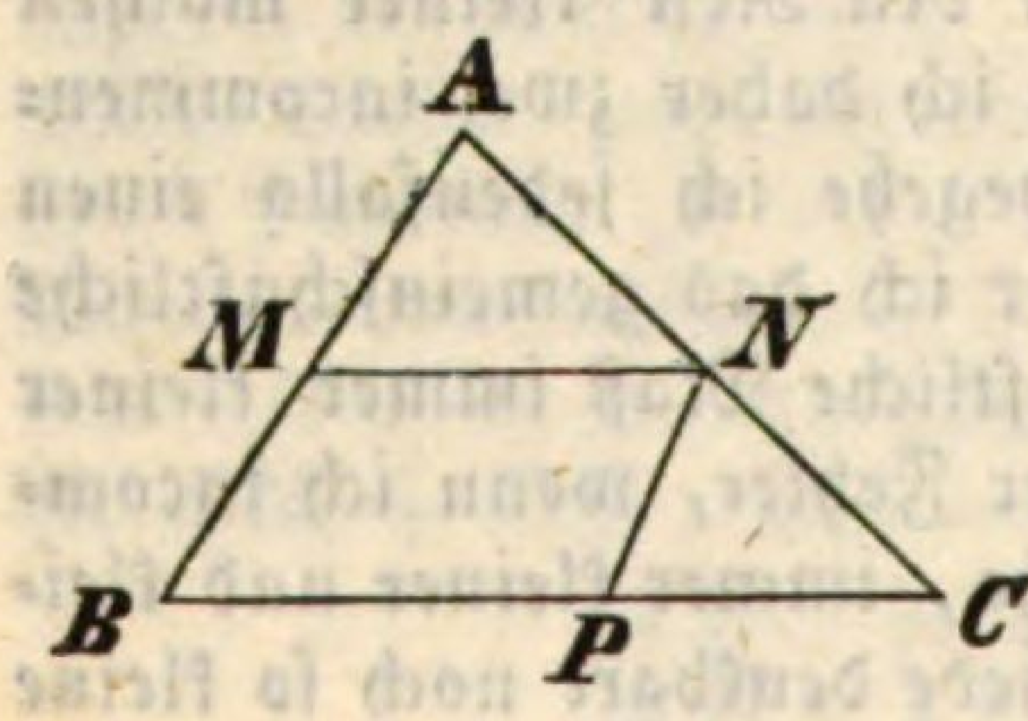
Fig. 48.



Sind die Punkte M und N so angenommen, daß AM:MB = AN:NC, oder was dasselbe ist, AM : AB = AN : AC, so muß MN gleichlaufend mit BC seyn; denn wäre dieses nicht der Fall, so kann ich mir immer durch M eine Gerade MR gleichlaufend zu BC denken; dann wäre AM : AB = AR : AC, folglich dieses mit der Annahme verglichen, gibt den Schluß: AN : AC = AR : AC, woraus AN = AR folgt, d. h. der Punkt, wo die durch M zu BC gleichlaufend gezogene Gerade die AC trifft, ist der Punkt N, und folglich MN gleichlaufend mit BC.

§. 41. **Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite desselben eine Parallele zieht, so sind die Seiten des neu entstandenen Dreiecks proportionirt zu den Seiten des alten Dreiecks.**

Fig. 49.



Es sey ein Dreieck ABC, die MN parallel zu BC, so ist:

AB : AM = AC : AN = BC : MN.

Ich ziehe durch den Punkt N die NP ∥ AB, so ist:

AC : AN = BC : BP;

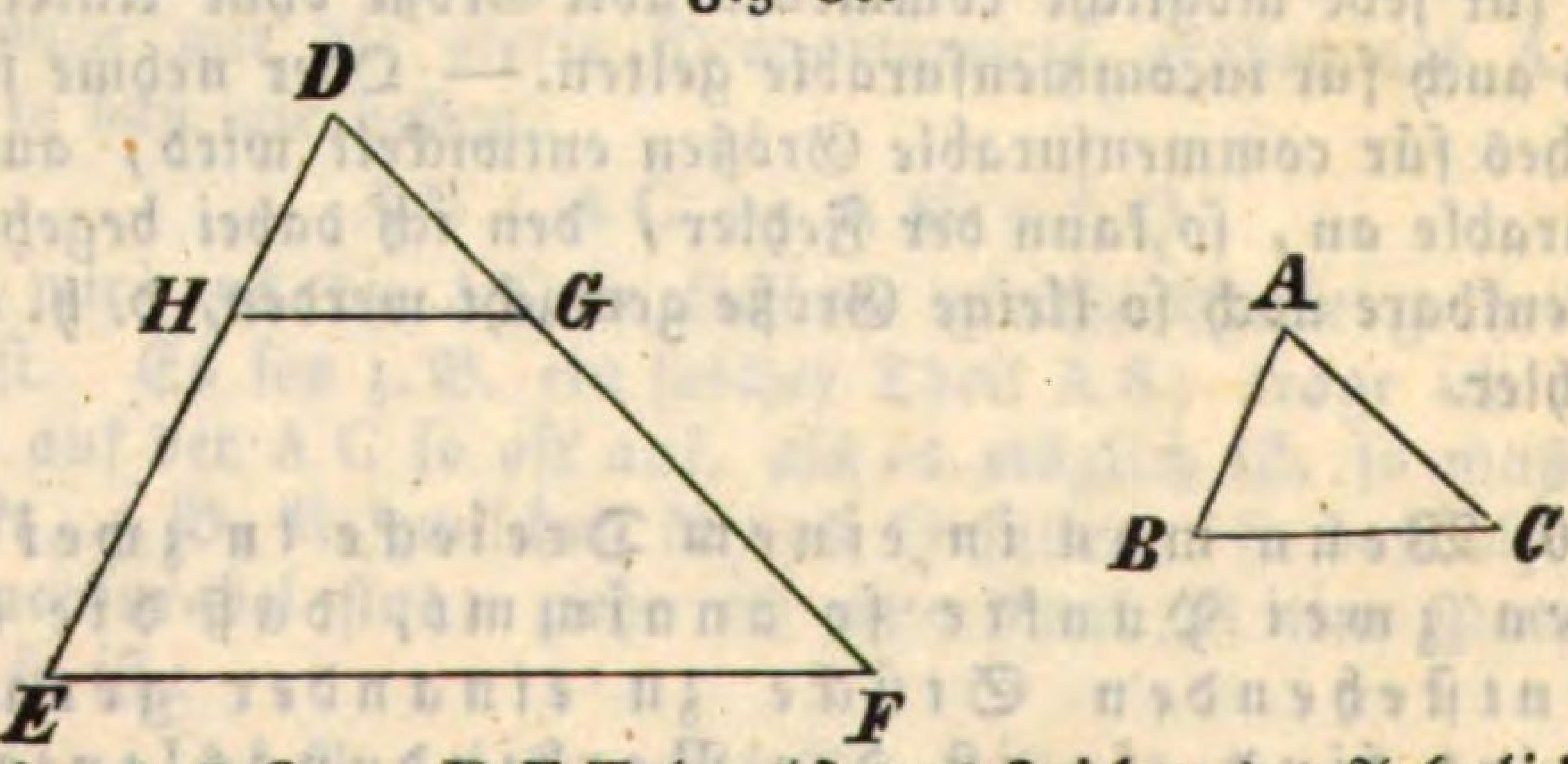
da aber Parallele zwischen Parallelen einander gleich sind, so ist BP = MN, daher

AC : AN = BC : MN,

also auch $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$.

§. 42. **Dreiecke, wo die drei Winkel des einen gleich sind den drei Winkeln des andern Dreiecks, heißen ähnlich. — In ähnlichen Dreiecken sind die gleichliegenden Seiten proportionirt.**

Fig. 50.



Es sey ABC ∼ DEF (∼ ist das Zeichen der Aehnlichkeit), und zwar A = D, B = E, F = C.

Wäre nun AB = ED, so wären die beiden Dreiecke congruent, und alle gleichliegenden Seiten beider Dreiecke würden sich verhalten

wie 1 : 1, und somit der ausgesprochene Lehrsatz sofort von selbst sich ergeben. Setzen wir nun aber ED > AB, so mache man DH = AB, und ziehe HG ∥ EF, so ist:

$$H = E = B, \ G = F = C;$$

daher die Dreiecke ABC und DHG identisch, und AB = DH, AC = DG, BC = HG; da nun

$$\frac{DH}{DE} = \frac{DG}{DF} = \frac{HG}{EF} \text{ ist,}$$

so hat man auch:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}, \text{ w. z. b. w.}$$

§. 43. Wir wollen nun die Bedingungen untersuchen, unter welchen noch Dreiecke ähnlich sind.

1. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten eines Dreiecks proportionirt sind zu den drei Seiten des andern.** (Siehe Fig. 50.)

Es sey $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$, so behaupte ich, daß die gleichliegenden (homologen) Winkel gleich sind.

Ich schneide von der DE ein Stück ab, DH = AB, und ziehe durch den Punkt H eine Parallele HG zu EF, so ist:

$$\frac{DE}{DH} = \frac{DF}{DG} = \frac{EF}{HG}.$$

Da nun DH = AB, so ist:

$$\frac{DE}{DH} = \frac{DE}{AB},$$

und man hat daher auch:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{DF}{DG} \text{ und } \frac{EF}{BC} = \frac{EF}{HG};$$

daher AC = DG, und BC = HG, und die Dreiecke ABC und DGH sind congruent, daher die homologen Winkel gleich, nämlich A = D, ABC = DHG, ACB = DGH; da nun DHG = E, und DGH = F ist, so hat man auch B = E, und C = F; und somit sind die drei Winkel des Dreiecks ABC gleich den drei Winkeln des Dreiecks DEF, also beide ähnlich.

§. 44. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen proportionirt sind zu den zwei Seiten des andern Dreiecks, und die eingeschlossenen Winkel gleich sind.** Fig. 50.

Es sey $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC}$ und A = D, so werden auch die zwei andern Winkel des einen Dreiecks gleich seyn den zwei andern Winkeln des anderen Dreiecks. Ich schneide DH = AB ab, und ziehe HG parallel zur EF, so ist:

$$\frac{DE}{DH} = \frac{DF}{DG} = \frac{EF}{HG},$$

weil aber $\frac{DE}{AB} = \frac{DE}{HD}$, so muß auch $\frac{DF}{AC} = \frac{FD}{DG}$, daher ist $AC = DG$, und $ABC \equiv DHG$, also $B = DHG = E$, $C = DGH = F$, folglich: $ABC \sim DEF$.

§. 45. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks proportionirt sind zu zwei Seiten des andern Dreiecks, und die den größern Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich sind.** Fig. 50.

Es sey $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC}$, $BC > AB$ und $A = D$. Ich schneide $DH = AB$ ab, und ziehe HG parallel zur EF, so ist:

$$\frac{DE}{HD} = \frac{EF}{HG}, \text{ daher } \frac{EF}{BC} = \frac{EF}{HG};$$

also ist $BC = HG$; da nun $HD = AB$, $HG = BC$, $BC > AB$ und $A = D$ ist, so folgt, daß $ABC \equiv DGH$, daher $ABC = DHG = E$; $ACB = DGH = F$, und die Dreiecke ABC und DEF sind ähnlich.

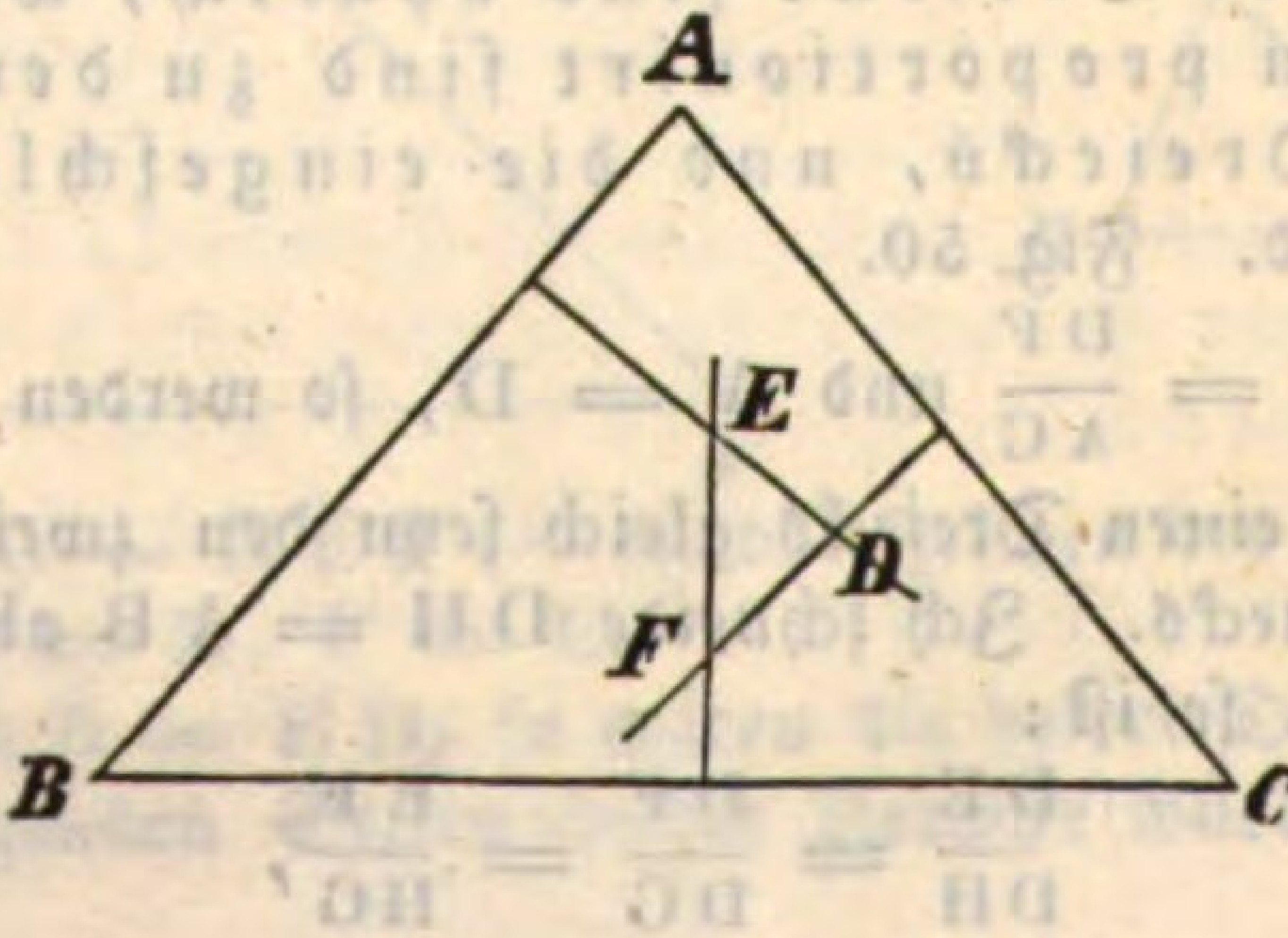
§. 46. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen Dreiecks parallel sind zu den Seiten des andern Dreiecks,** weil Winkel, deren Schenkel parallel sind, einander gleich sind.

§. 47. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks senkrecht stehen auf den drei Seiten des andern Dreiecks.**

Im Beweise wollen wir zwei Fälle unterscheiden: entweder liegt das eine Dreieck innerhalb des andern, oder es ist dieses nicht der Fall.

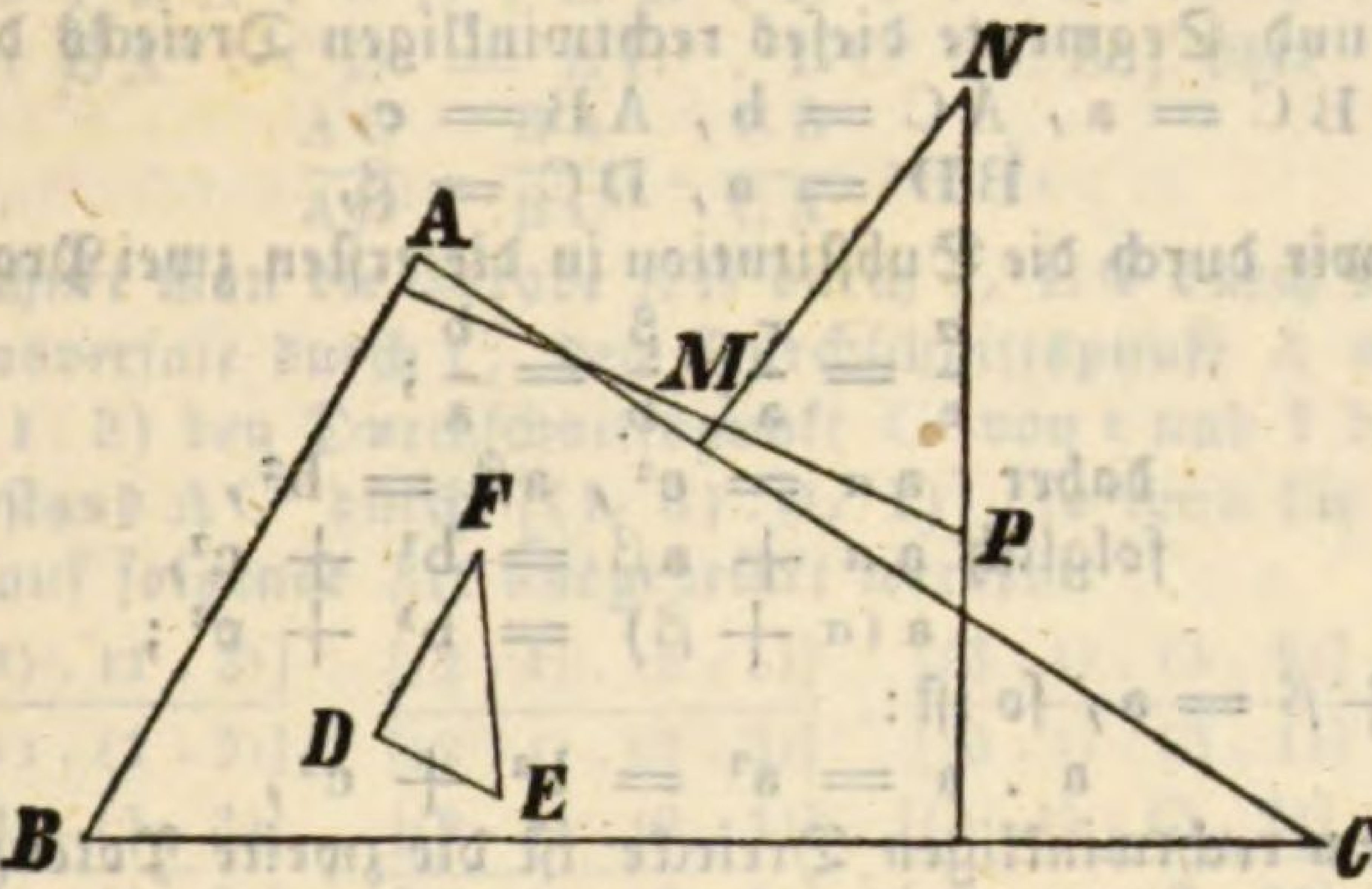
Für den ersten Fall sey das Dreieck DEF innerhalb des Dreiecks ABC und $DE \perp AB$, $DF \perp AC$, $FE \perp BC$, so sind die äußeren Winkel des Dreiecks DEF die Ergänzungen zu zwei Rechten von den innern des Dreiecks ABC, daher die einzelnen Winkel des Dreiecks DEF gleich den einzelnen Winkeln des Dreiecks ABC.

Fig. 51.



Ist zweitens das Dreieck MNP nicht innerhalb des Dreiecks ABC und MN ⊥ AC, MP ⊥ AB, NP ⊥ BC, so nehme ich

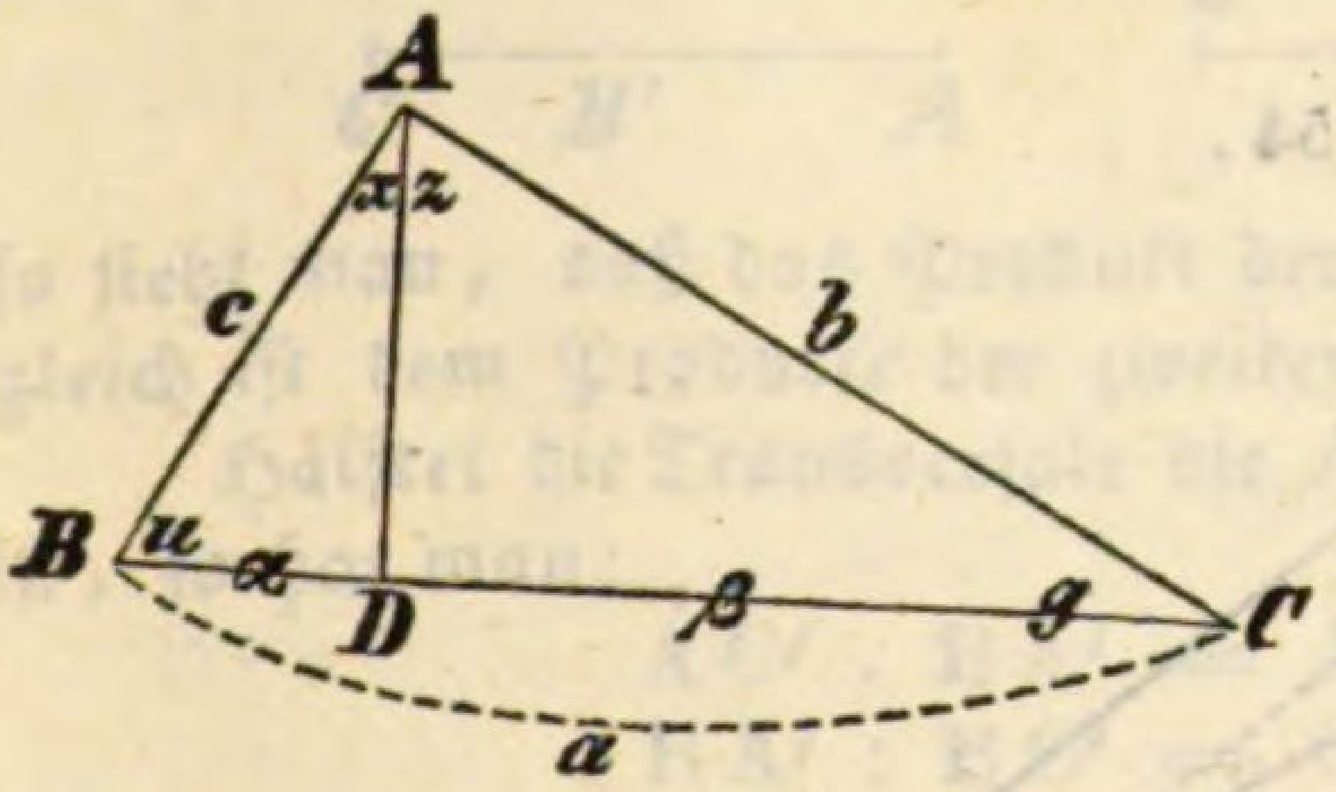
Fig. 52.



innerhalb des Dreiecks ABC einen Punkt F an, ziehe durch F die FD und FE parallel zu MN und NP, und in irgend einem Punkte E der EF eine Parallele DE zu MP; so ist FDE ∼ MNP; da aber FDE ∼ ABC, so ist auch nach dem ersten Theile dieses Beweises ABC ∼ MNP.

§. 48. Es sey das rechtwinklige Dreieck ABC; ich fälle nun von A das Perpendikel AD auf die Hypotenuse, so wird das Dreieck ABD ∼ ABC; denn ABD = ABC, ADB = BAC, daher auch der dritte Winkel BAD = ACB, d. h. x = g, daher sind die gleichliegenden Seiten proportionirt, nämlich:

Fig. 53.



$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}.$$

Eben so ist ADC ∼ ABC, weil ACB = ACD, ADC = BAC, und z = u, folglich:

$$\frac{DC}{AC} = \frac{AC}{BC}.$$

Endlich ist noch ABD ∼ ACD; daher

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC}.$$

Die ersten zwei Proportionen drücken den Lehrsatz aus:

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels ein Perpendikel auf die Hypotenuse fällt, so ist jede Kathete die mittlere Proportionirte zwischen dem anliegenden Segment der Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse.

Die dritte Proportion lehrt, daß in einem rechtwinkligen Drei-

ecke das Perpendikel vom Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällt, die mittlere Proportionirte zwischen den beiden Segmenten der Hypotenuse sey.

Nehmen wir irgend eine Einheit der Linien an, und messen wir die Seiten und Segmente dieses rechtwinkligen Dreiecks dadurch aus. Es sey nun $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

$$BD = \alpha,\ DC = \beta,$$

so erhalten wir durch die Substitution in die ersten zwei Proportionen:

$$\frac{\alpha}{c} = \frac{c}{a};\ \frac{\beta}{b} = \frac{b}{a};$$

daher $a\alpha = c^2,\ a\beta = b^2,$

folglich $a\alpha + a\beta = b^2 + c^2,$

$$a(\alpha + \beta) = b^2 + c^2;$$

da nun $\alpha + \beta = a$, so ist:

$$a \,.\, a = a^2 = b^2 + c^2,$$

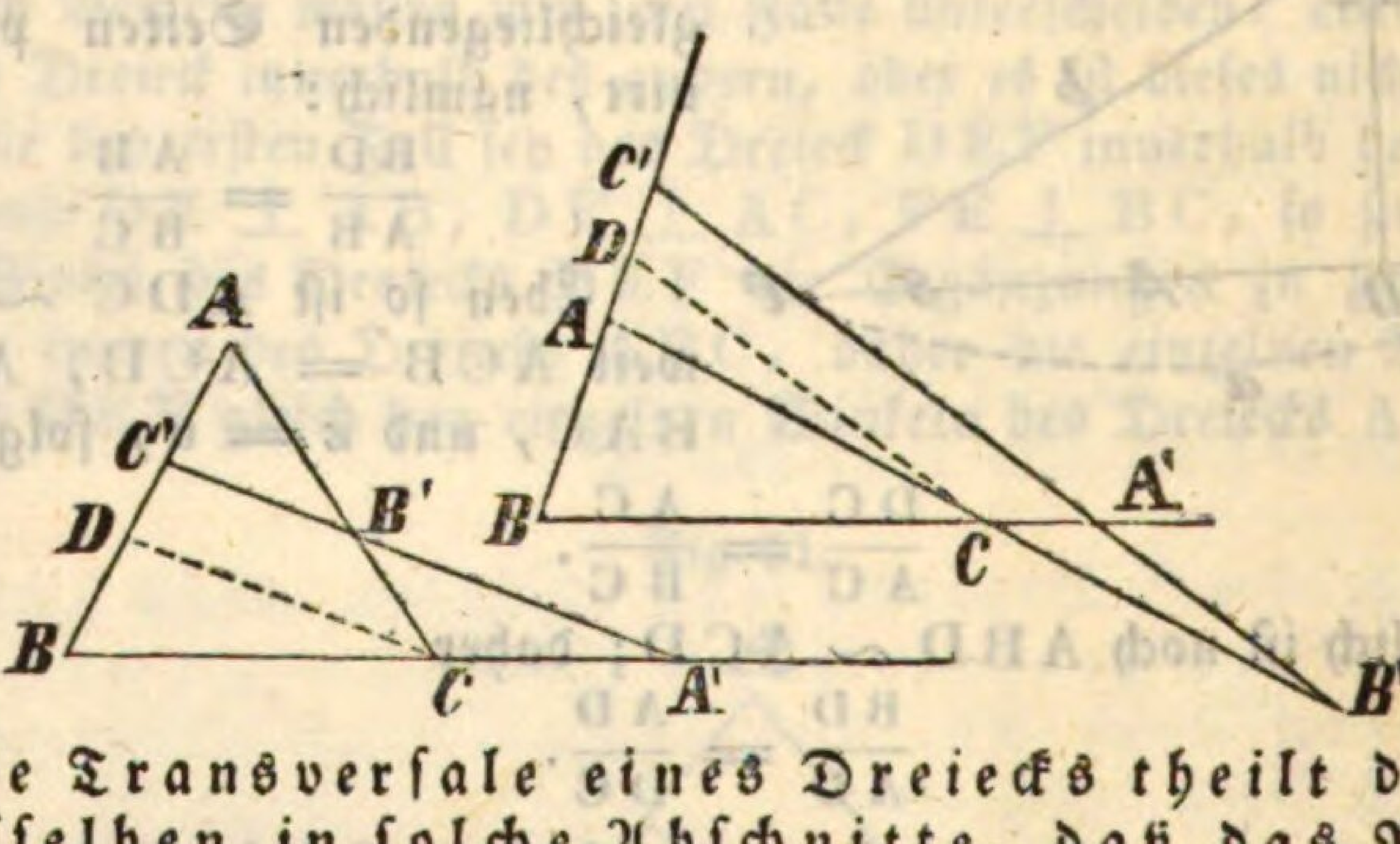
d. h. in jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die zweite Potenz der Größe der Hypotenuse gleich der Summe der zweiten Potenzen der Größen der Katheten.

Eine Linie kann nicht zur zweiten Potenz erhoben werden, wohl aber die Größe dieser Linie; der Kürze halber läßt man aber das Wort Größe aus, indem man doch dasselbe meint.

III. Anwendungen der Lehre der Aehnlichkeit.

§. 49. **Transversale** eines Dreiecks nennt man jede Gerade, welche die drei Seiten eines Dreiecks durchschneidet, wobei eine oder alle drei Seiten desselben verlängert werden.

Fig. 54.



Die Transversale eines Dreiecks theilt die Seiten desselben in solche Abschnitte, daß das Produkt aus drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkte der drei andern, d. h. es ist:

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = A'C \,.\, B'A \,.\, C'B.$$

Ich ziehe zum Behufe des Beweises beiderseits CD gleichlaufend mit der Transversale, so folgt, weil $CD \parallel A'C'$ ist,

$$A'C : A'B = C'D : C'B$$
$$B'A : B'C = C'A : C'D$$
$$C'B : C'A = C'B : AC', \text{ woraus}$$
$$\overline{A'C \,.\, B'A \,.\, C'B : A'B \,.\, B'C \,.\, C'A = 1 : 1;}$$

daher $AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = AB' \,.\, BC' \,.\, CA'$, oder

$$\frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'} = 1.$$

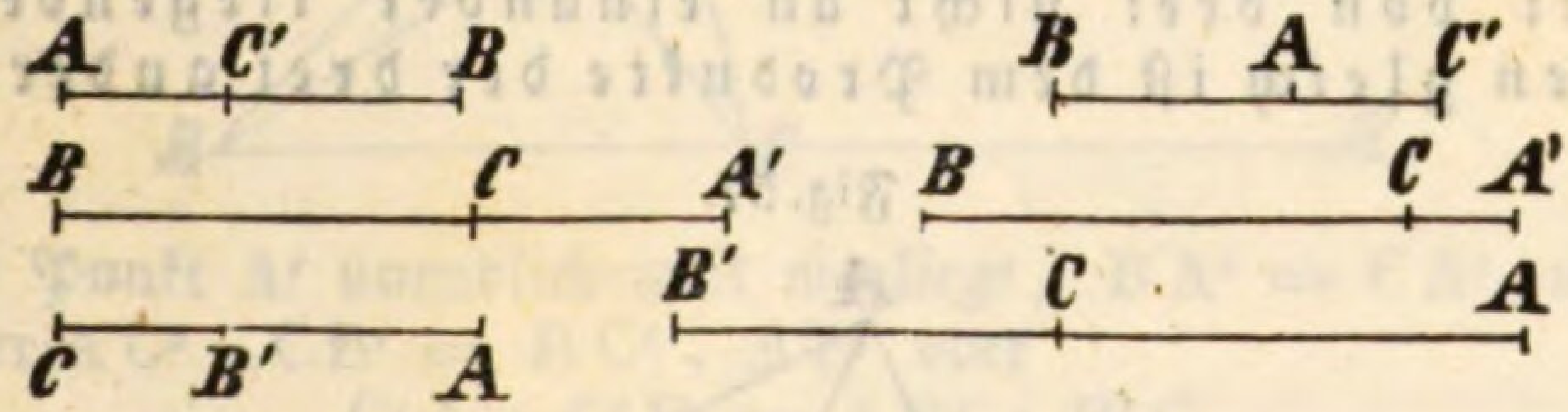
Bezeichnet man die Gerade AB durch 1, BC durch 2, CA durch 3, die Transversale durch t, den Durchschnittspunkt A von AB und AC durch (1 . 3) den Durchschnittspunkt C' von t und 1 durch (t, 1), und den Abstand AC' durch [(1, 3) . (t, 1)], so kann die letzte Beziehung auch auf folgende Art ausgedrückt werden:

$$\frac{[(1 \cdot t) \cdot (1 \cdot 3)]}{[(1 \cdot t) \cdot (1 \cdot 2)]} \cdot \frac{[(2 \cdot t) \cdot (2 \cdot 1)]}{[(2 \cdot t) \cdot (2 \cdot 3)]} \cdot \frac{[(3 \cdot t) \cdot (3 \cdot 2)]}{[(3 \cdot t) \cdot (3 \cdot 1)]} = 1, \text{ oder}$$

$$\frac{[(1 \cdot t) \cdot (1 \cdot 3)]}{[(3 \cdot t) \cdot (1 \cdot 3)]} \cdot \frac{[(2 \cdot t) \cdot (2 \cdot 1)]}{[(1 \cdot t) \cdot (2 \cdot 1)]} \cdot \frac{[(3 \cdot t) \cdot (3 \cdot 2)]}{[(2 \cdot t) \cdot (3 \cdot 2)]} = 1.$$

Um sich die Stücke, die zu einem Produkte gehören, noch auf eine andere Art zu merken, denken wir uns die drei Seiten, wie sie auf einander folgen, sammt ihren Durchschnittspunkten neben einander gelegt: so hat man:

Fig. 55.



so sieht man, daß das Produkt der ersten Abschnitte AC', BA', CB' gleich ist dem Produkte der zweiten Abschnitte BC', CA', B'A.

Hälftet die Transversale die AC in B', so daß also $AB' = CB'$ ist, so hat man:

$$AC' \,.\, BA' = A'C \,.\, C'B, \text{ oder}$$
$$BA' : BC' = CA' : AC', \text{ oder}$$
$$BA' : CA' = BC' : AC',$$

d. h. die beiden anderen Seiten des Dreiecks werden in gleichem Verhältnisse getheilt.

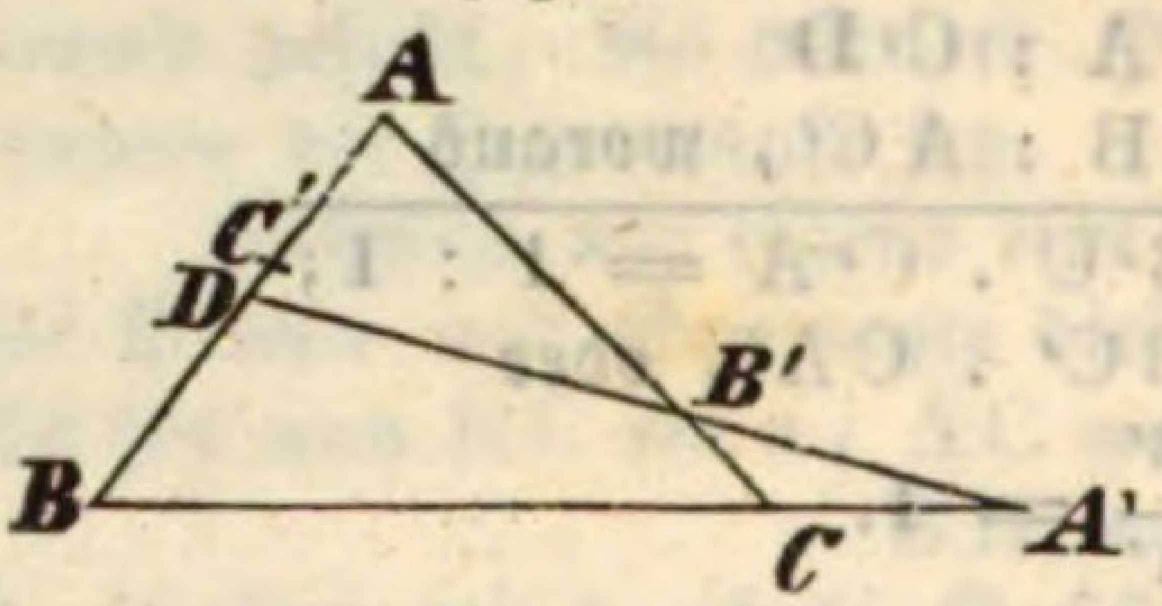
Wäre hier nun auch $BC' = AC'$, so müßte $BA' = CA'$ seyn, d. h. die Transversale muß mit BC parallel seyn.

§. 50. Umgekehrt werden auf zwei Seiten eines Dreiecks ABC und der Verlängerung der dritten Seite, oder auf den Verlängerungen aller drei Seiten die Punkte A', B', C' so bestimmt, daß die Gleichung

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = AB' \,.\, BC' \,.\, CA'$$

Statt findet, so liegen die Punkte A', B', C' in einer geraden Linie.

Fig. 56.



Verbindet man A' und B', und gesetzt, die verlängerte A'B schneidet die AB in D, so hat man nach § 42

$AD.BA'.CB' = AB'.BD.CA'$

nach der Voraussetzung

$AC'.BA'.CB' = AB'.BC'.CA'$;

beide Gleichungen durch einander dividirt geben:

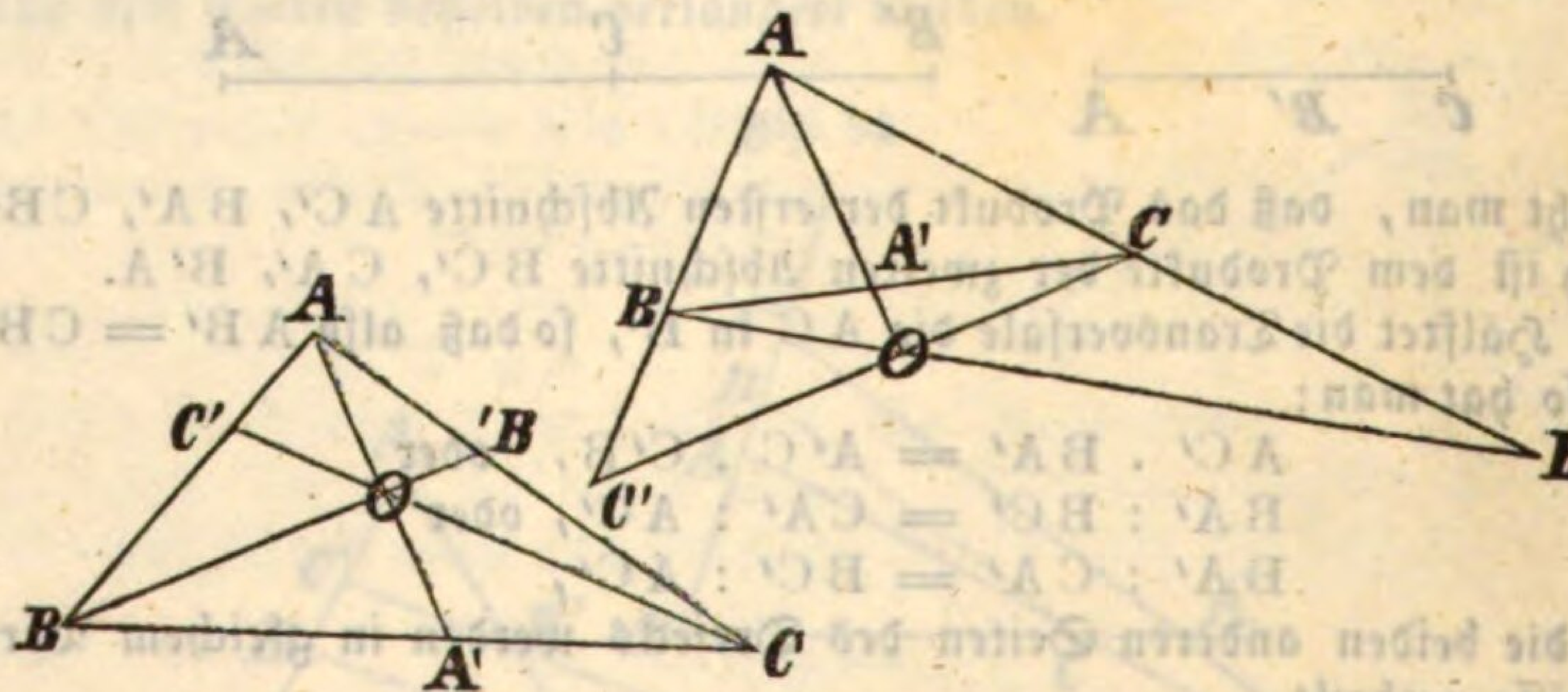
$$\frac{AD}{AC'} = \frac{BD}{BC'}, \text{ oder } \frac{AD}{BD} = \frac{AC'}{BC'},$$

$$\text{woraus } \frac{AD}{AD+BD} = \frac{AC'}{AC'+BC'}, \text{ oder } \frac{AD}{AB} = \frac{AC'}{AB},$$

daher nothwendig $AD = AC'$, d. h. der Punkt D, d. h. der Punkt, wo die Gerade A'B' die AB schneidet, muß mit C' zusammenfallen, d. h. A', B', C' in einer Geraden liegen.

§. 51. Wenn man durch einen innerhalb oder außerhalb eines Dreiecks ABC liegenden Punkt O, von der Ecke des Dreiecks Gerade AO, BO, CO ziehet, bis sie die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks treffen, so entstehen auf jeder Seite zwei Abschnitte, welche eine solche Beziehung zu einander haben, daß das Produkt von drei nicht an einander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkte der drei andern.

Fig. 57.



Die Gerade CC' ist eine Transversale des Dreiecks AA'B. Eben so ist BB' eine Transversale des Dreiecks AA'C, daher hat man:

$AC'.BC.A'O = BC'.A'C.AO$

$AO.BA'.CB' = OA'.BC.AB'$, woraus durch Multiplication:

$AC'.BA'.CB' = BC'.A'C.AB'$ folgt.

Gehet eine Transversale, z. B. AA', durch die Mitte der Seite BC, so daß $BA' = A'C$ ist, so hat man:

$AC'.CB' = BC'.AB'$, woraus

$AC' : C'B = AB' : B'C$,

d. h. die beiden anderen Seiten werden durch die entsprechenden Transversalen in gleichem Verhältnisse geschnitten. Würde man B′ mit C′ verbinden, so ist dann B′C′ gleichlaufend mit B C.

Und umgekehrt: Ist AC′ : C′B = AB′ : B′C, und man verbindet B mit B′, C mit C′, und den Durchschnittspunkt der B B′ und C C′ mit A, so wird die A O verlängert die B C in A′ halbiren; denn vermöge der so eben angeführten Proportion ist

$$AC' \,.\, B'C = C'B \,.\, AB',$$

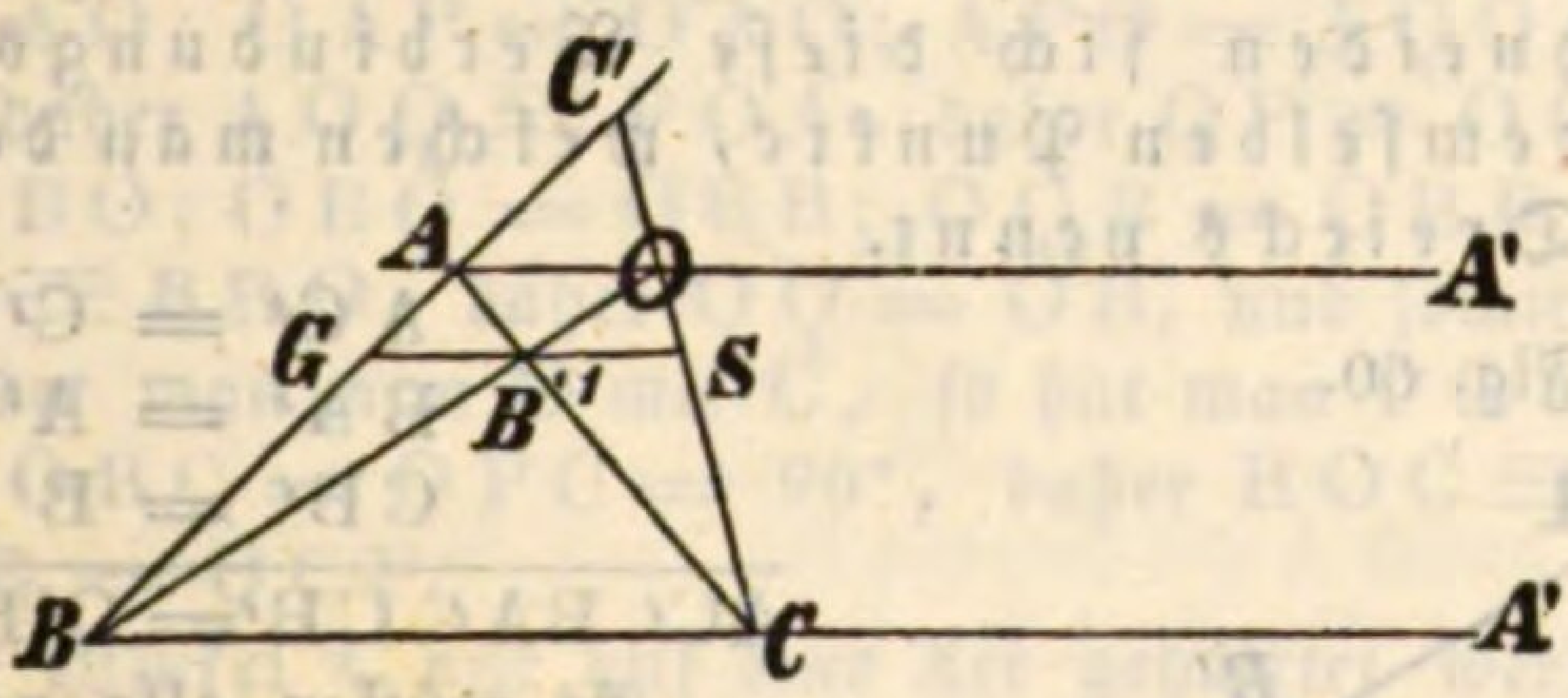
und in Folge des so eben bewiesenen Lehrsatzes

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = BC' \,.\, A'C \,.\, AB'.$$

Dividirt man die letzte Gleichung durch die vorletzte, so hat man BA′ = A′C, d. i. B C wird in der Mitte getroffen.

§. 52. Würde der Punkt O so liegen, daß er, mit einem Eckpunkte verbunden, eine zur gegenüberstehenden Seite des Dreiecks gleichlaufende Gerade gebe, so hätte man:

Fig. 58.



weil der Punkt A′ unendlich weit wegliegt, B A′ = C A′, und man hat daher A C′ . CB′ = B C′ . AB′ oder

$$C'A : C'B = AB' : B'C.$$

Ziehet man durch B′ die G S gleichlaufend mit B C, so hat man

$AB' : B'C = AG : BG$ aus beiden Proportionen also

$AG : BG = C'A : C'B$ oder

$C'A : AG = BC' : BG.$

Die Gerade B C′ heißt hier getheilt in harmonischer Proportion.

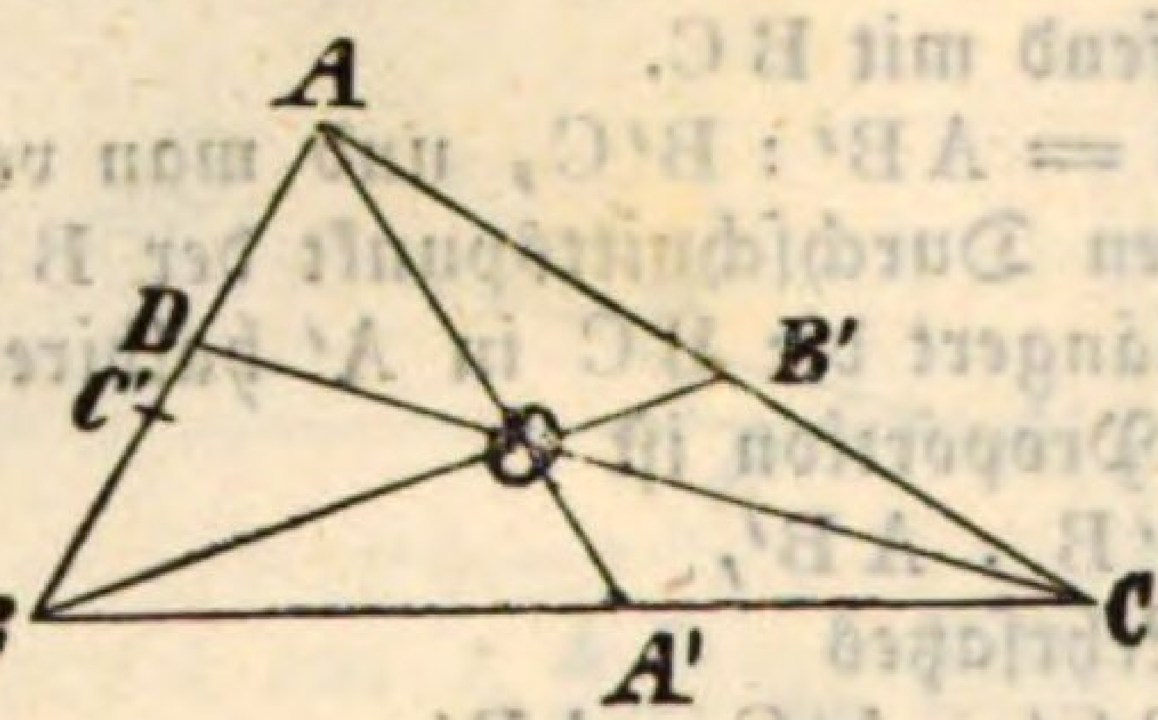
Eine Linie heißt nämlich harmonisch getheilt, wenn die ganze Linie sich zu dem einen äußeren Abschnitt verhält, wie der andere äußere Abschnitt zum mittleren; die vier Punkte hiebei heißen harmonische Punkte.

§. 53. Werden auf den drei Seiten eines Dreiecks A B C, oder auch auf eine Seite und den Verlängerungen der beiden andern drei Punkte A′, B′, C′ so bestimmt, daß die Beziehung

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = C'B \,.\, A'C \,.\, AB'$$

Statt findet, so schneiden sich die drei Geraden AA′, BB′, CC′ in einem und demselben Punkte.

Fig. 59



Ich ziehe A A′, B B′, die sich in O schneiden, ziehe C O, welche verlängert die A B in D schneiden soll, so habe ich nach der Annahme

$AC' . BA' . CB' = C'B . A'C . AB'$

aber nach §. 51

$AD . BA' . CB' = DB . A'C . AB'$,

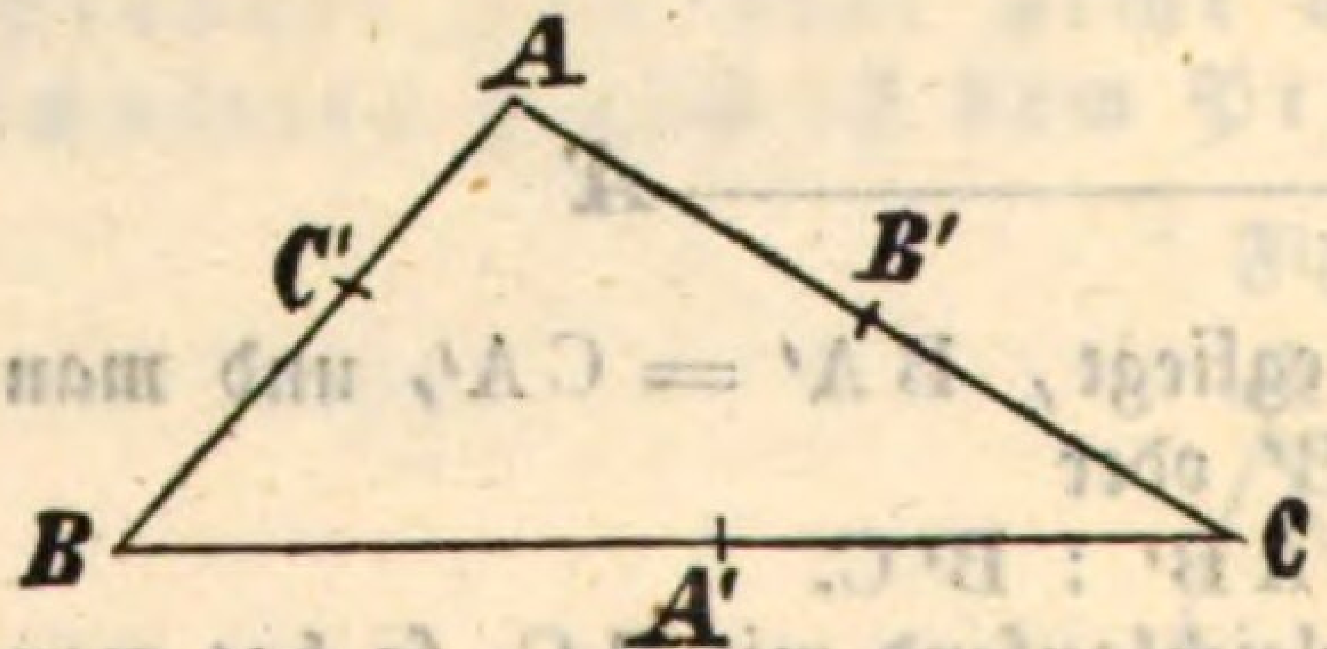
woraus durch Division

$$\frac{AC'}{AD} = \frac{C'B}{DB},$$

oder $AC' : C'B = AD : DB$, woraus $\frac{AC'}{AB} = \frac{AD}{AB}$, daher $AC' = AD$; es muß daher der Durchschnittspunkt D, wo O C die A B schneidet, mit C′ zusammenfallen, daher schneiden sich A A′, B B′, C C′ in einem und demselben Punkte O.

§. 54. **Verbindet man in einem Dreiecke die Endpunkte mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem und demselben Punkte, welchen man den Schwerpunkt des Dreiecks nennt.**

Fig. 60.



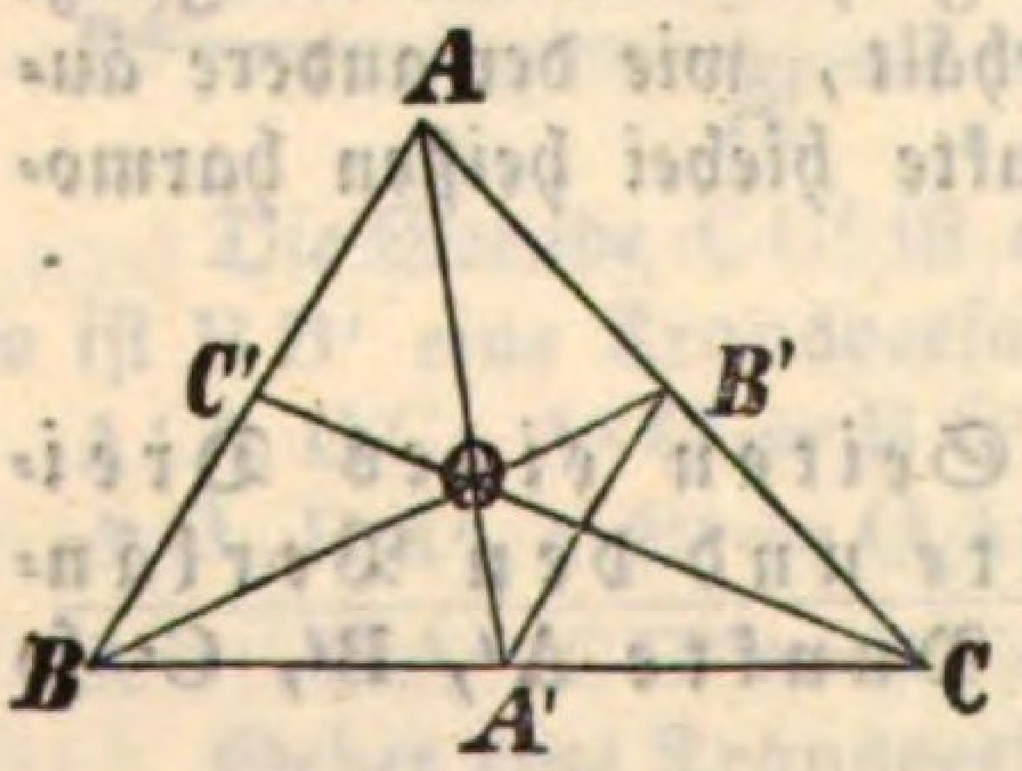
$AC' = C'B$
$BA' = A'C$
$CB' = B'A$ daher

$AC' . BA' . CB' = C'B . A'C . B'A.$

Es müssen also nach §. 53 die Geraden A A′, B B′, C C′ sich in in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 55. **Ziehet man durch den Schwerpunkt eines Dreiecks eine Transversale eines Eckpunktes, so ist der Abstand des Schwerpunktes in dieser Transversale vom Ecke doppelt so groß als von der Seite,**

Fig. 61.



weil $AB' = B'C$, und $BA' = A'C$, also $AB' : B'C = BA' : A'C$ ist, so muß A′B′ gleichlaufend mit A B seyn nach § 40, daher die Winkel $OB'A' = OBA$, $OA'B' = OAB$, somit die Dreiecke A B O und A′B′O einander ähnlich; daher

$AO : OA' = BO : OB' = AB : A'B'$;

da aber

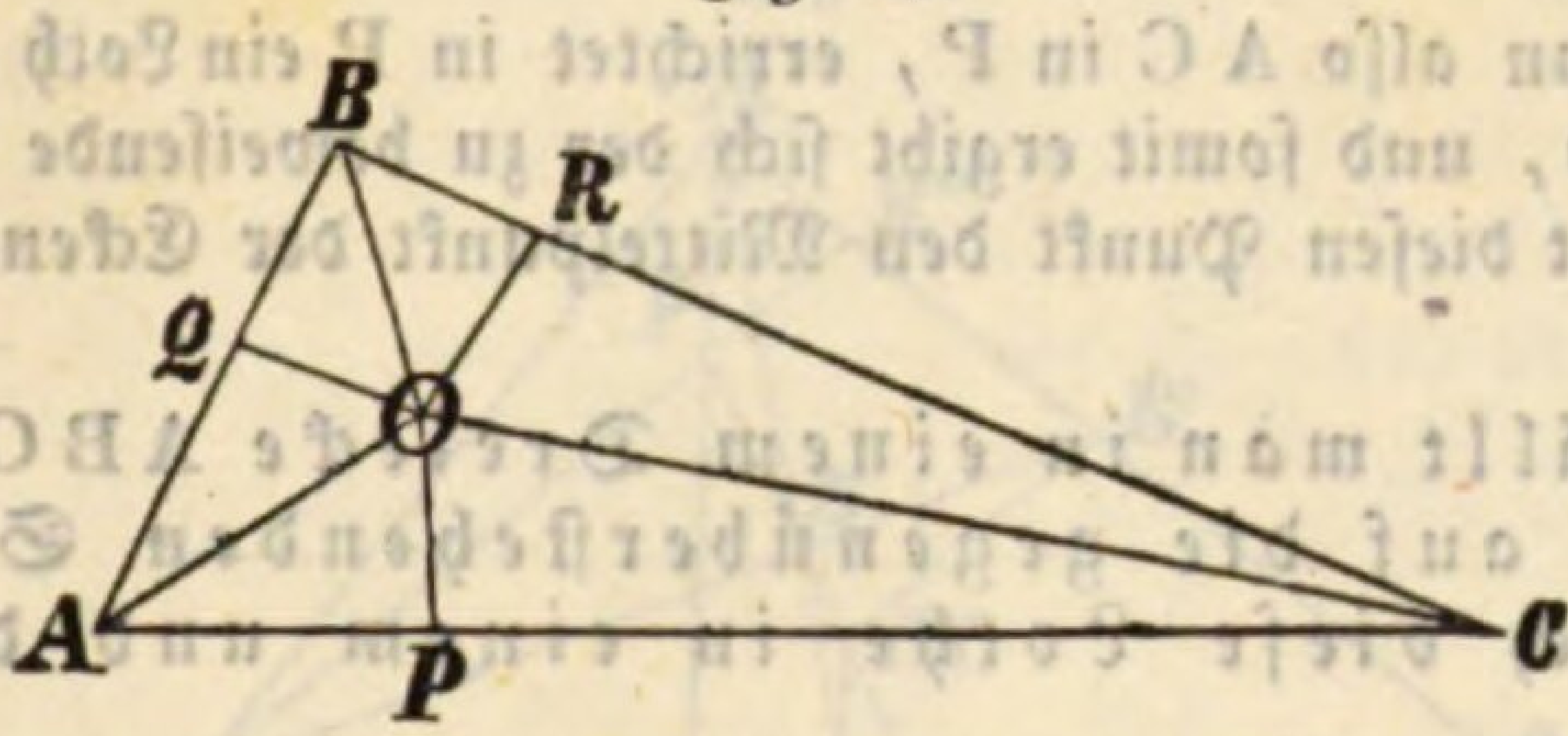
$AB : A'B' = AC : B'C = 2 : 1$,

so hat man

$AO : OA' = 2 : 1$; $BO : OB' = 2 : 1$; daher $OA = 2OA'$; $OB = 2BO'$.

§. 56. **Wenn man die drei Winkel eines Dreiecks hälftet; so schneiden sich die drei Hälftungslinien in einem und demselben Punkte.**

Fig. 62.



Hälftet man den Winkel A durch AO, so daß OAB = OAC und eben so der Winkel B, so daß OBA = OBC ist, so schneiden sich die beiden Hälftungslinien AO und BO in einem Punkte O; fällt man nun von O die Lothe OP, QO, OR auf die Seiten AC, AB und BC, so hat man:

AO = AO; OAP = OAQ; APO = AQO = 90°,
daher AOQ ≡ POA, daher OP = OQ,
BO = BO; OBQ = OBR; OQB = ORB = 90°,
daher BOQ ≡ BRO, daher OQ = OR, und somit OP = OR.

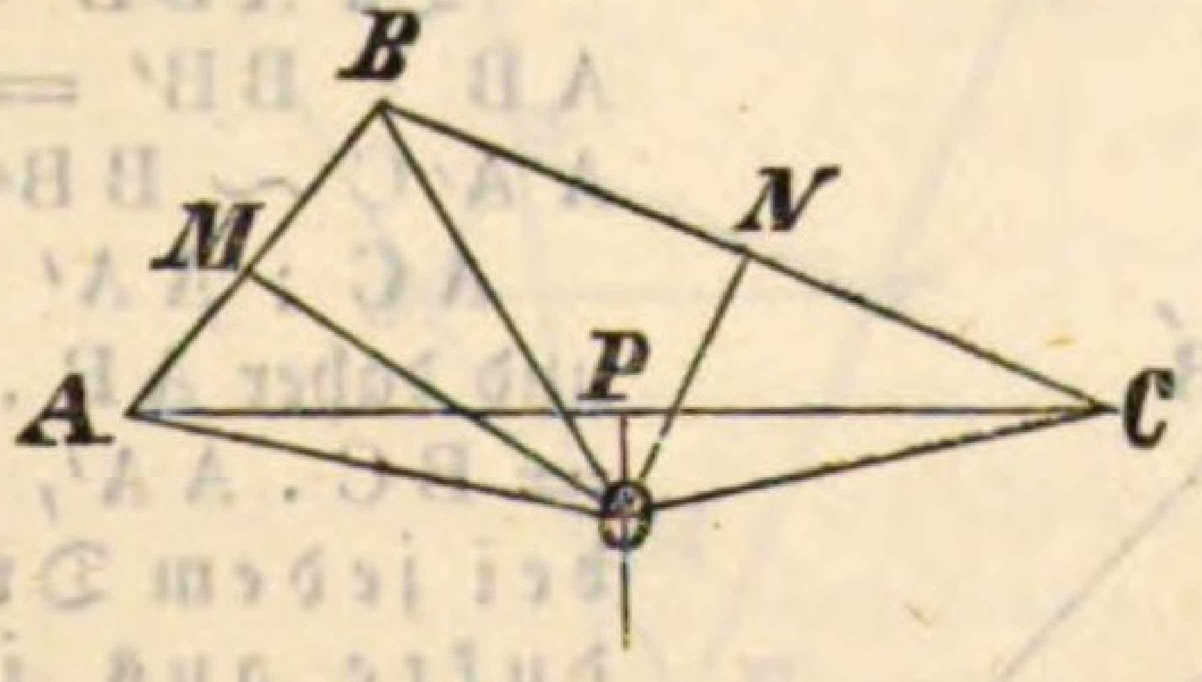
Verbindet man nun O mit C, so hat man PO = OR; OC = OC und ORC = OPC = 90°, daher ROC ≡ OPC, und folglich OCR = OCP.

Da der Winkel C nur auf eine Art gehälftet werden kann, so wird, wenn man den Winkel C hälftet, die Hälftungslinie durch O durchgehen.

Der Punkt O, der von allen drei Seiten gleich weit absteht, heißt der Mittelpunkt der Seiten des Dreiecks.

§. 57. **Wenn man die drei Seiten eines Dreiecks hälftet, und in den Hälftungspunkten Lothe errichtet, so schneiden sich diese drei Lothe in einem und demselben Punkte, der von allen drei Ecken gleich weit absteht.**

Fig. 63.



AM = BM; CN = BN; MO ⊥ AB; NO ⊥ BC; MO und NO schneiden sich in O; man ziehe AO, BO, CO, so ist AM = BM; AMO = BMO = 90°; MO = MO, daher AMO ≡ BMO;

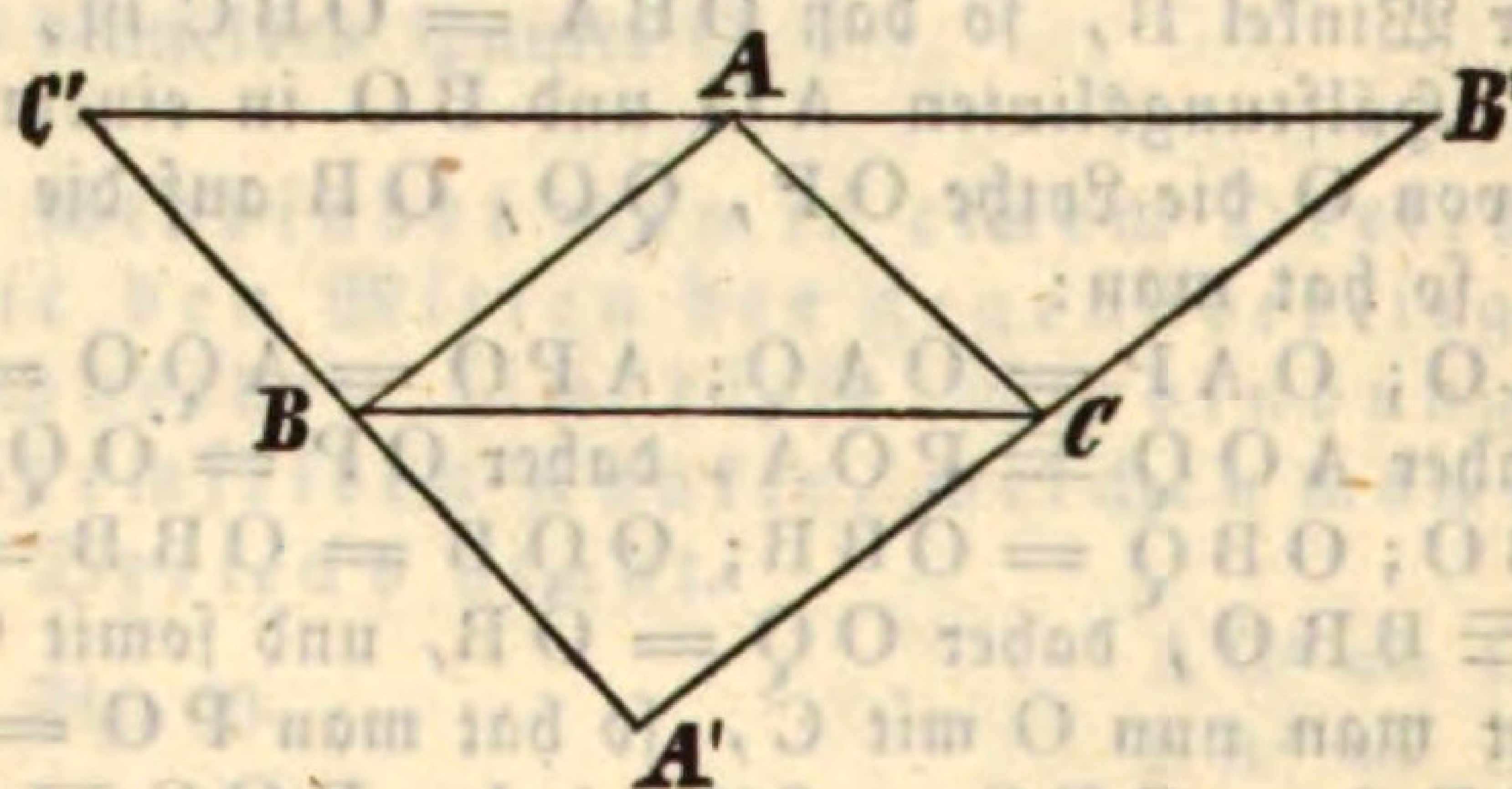
also AO = BO; eben so BN = NC; BNO = CNO = 90°; NO = NO, daher BNO ≡ CNO, also BO = CO, und somit AO = CO; fällt man nun OP senkrecht auf AC, so hat man PO = PO; AO = CO; APO = CPO, daher APO ≡ CPO, also AP = PC.

Halbirt man also AC in P, errichtet in P ein Loth auf AC, so gehet es durch O, und somit ergibt sich der zu beweisende Satz.

Man nennt diesen Punkt den Mittelpunkt der Ecken.

§. 58. **Fällt man in einem Dreiecke ABC aus den Ecken Lothe auf die gegenüberstehenden Seiten, so schneiden sich diese Lothe in einem und demselben Punkte.**

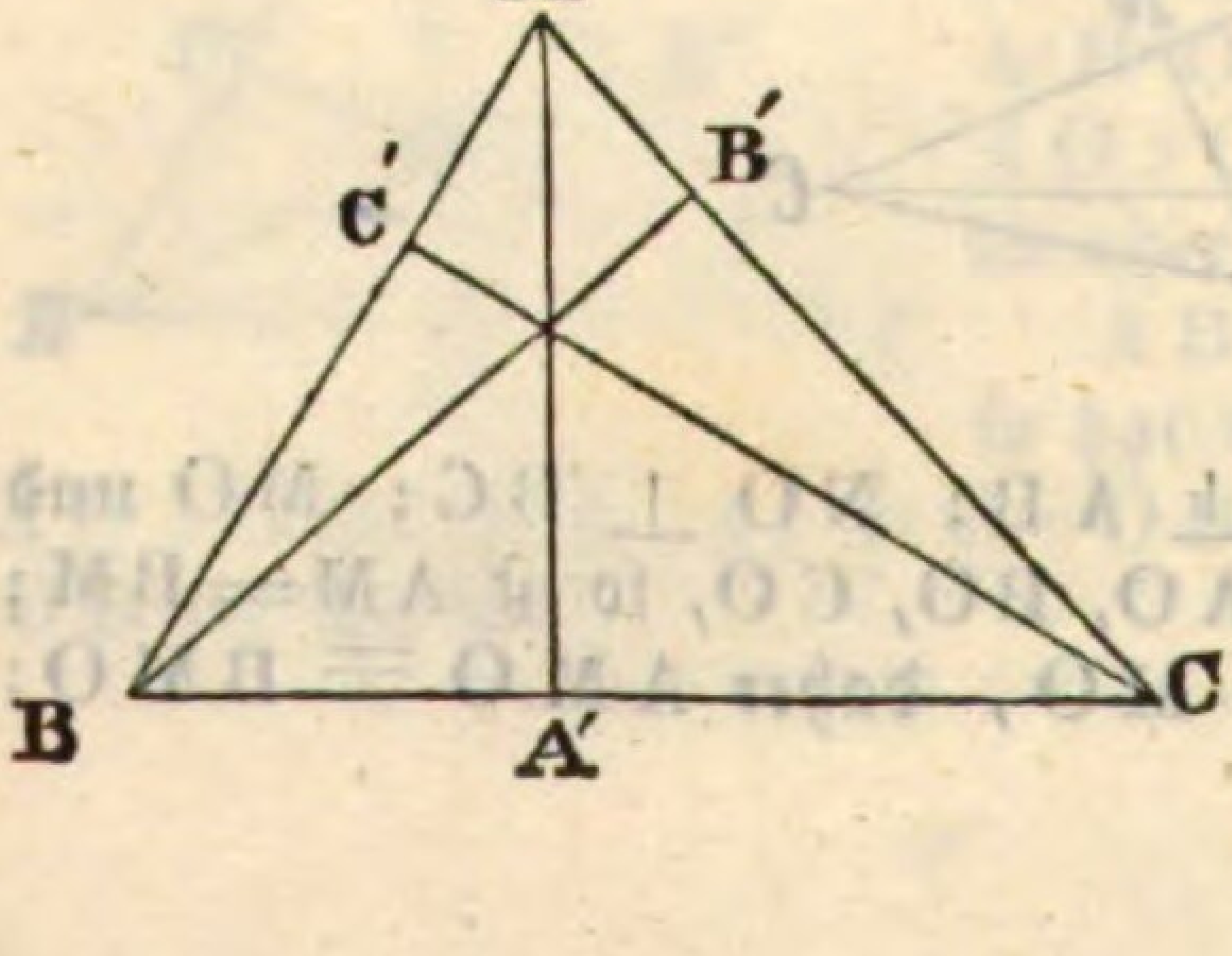
Fig. 64.



Ich ziehe durch A die Gerade B′C′, ∥ BC, durch B, A′C′ ∥ A C und durch C die A′B′ ∥ AB, so ergibt sich AC′ = BC = AB′, weil gleichlaufende Stücke zwischen gleichlaufenden gleich sind; daher AC′ = AB′; eben so beweiset man BC′ = BA′ und CA′ = CB′, also sind A, B, C die Mitten der Seite B′C′, A′C′ und A′B′; errichtet man also in A, B, C Lothe auf B′C′, A′C′, A′B′, d. h. fällt Lothe auf BC, AC, AB, so müssen sich diese drei Lothe nach §. 57 in einem einzigen Punkte O schneiden.

§. 59. Die Lothe AA′, BB′, CC′, die man von den Punkten ABC auf die gegenüberstehenden Seiten fällt, nennt man die Höhenlothe eines Dreiecks. Aus den Aehnlichkeiten der Dreiecke ergeben sich folgende Proportionen:

Fig. 65.



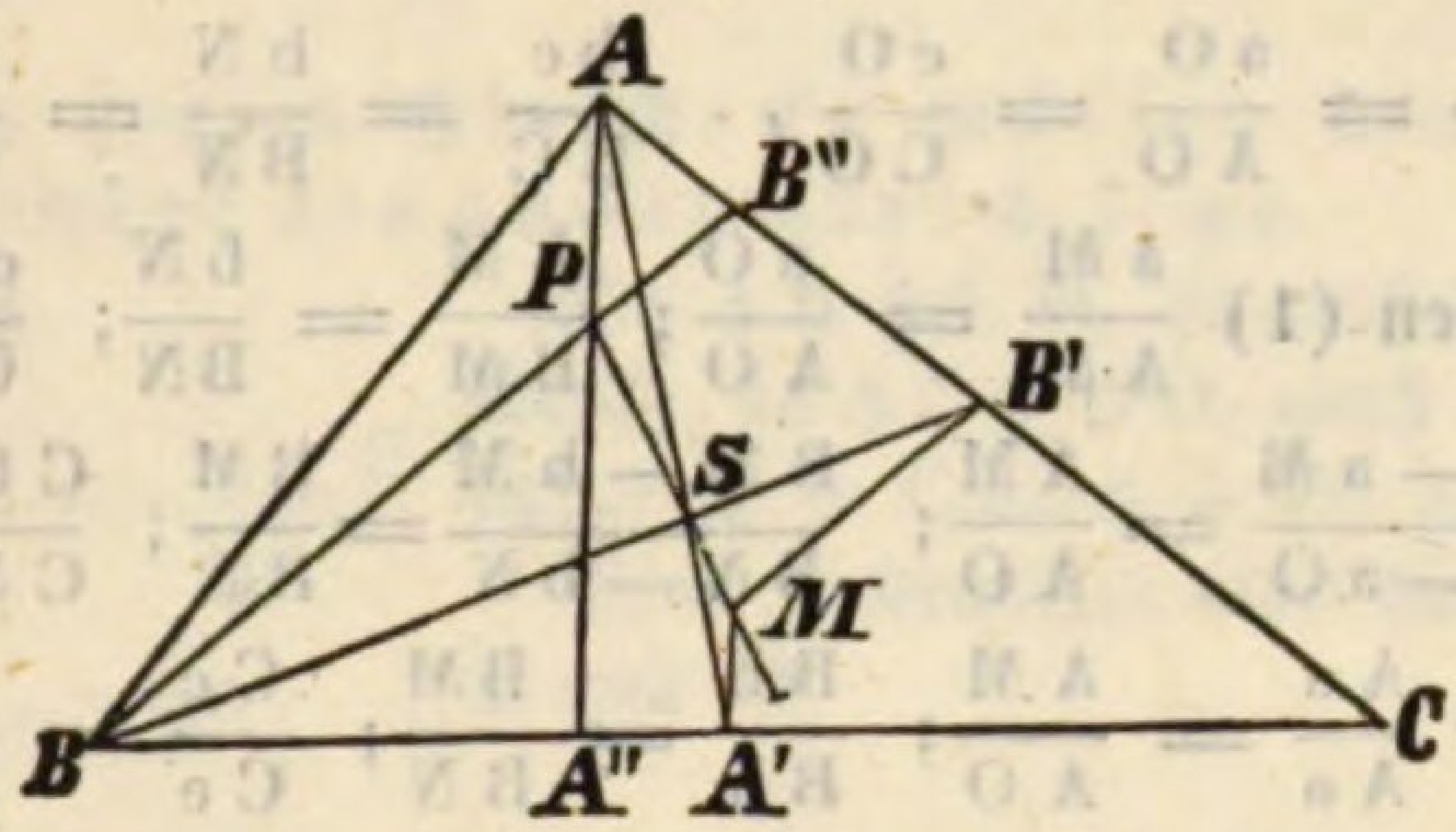
Da ABB′ ∼ ACC′, so ist AB : BB′ = AC : CC′, da AA′C ∼ BB′C, so ist

AC : AA′ = BC : BB′,

und daher AB . CC′ = AC . BB′ = BC . AA′, und somit geben bei jedem Dreiecke die Produkte aus jeder Seite in ihr Höhenloth dasselbe Resultat.

§. 60. **Der Mittelpunkt der Ecken, der Schwerpunkt und der Durchschnittspunkt der Höhenlothe eines jeden Dreiecks liegen in einer Geraden.**

Fig. 66.

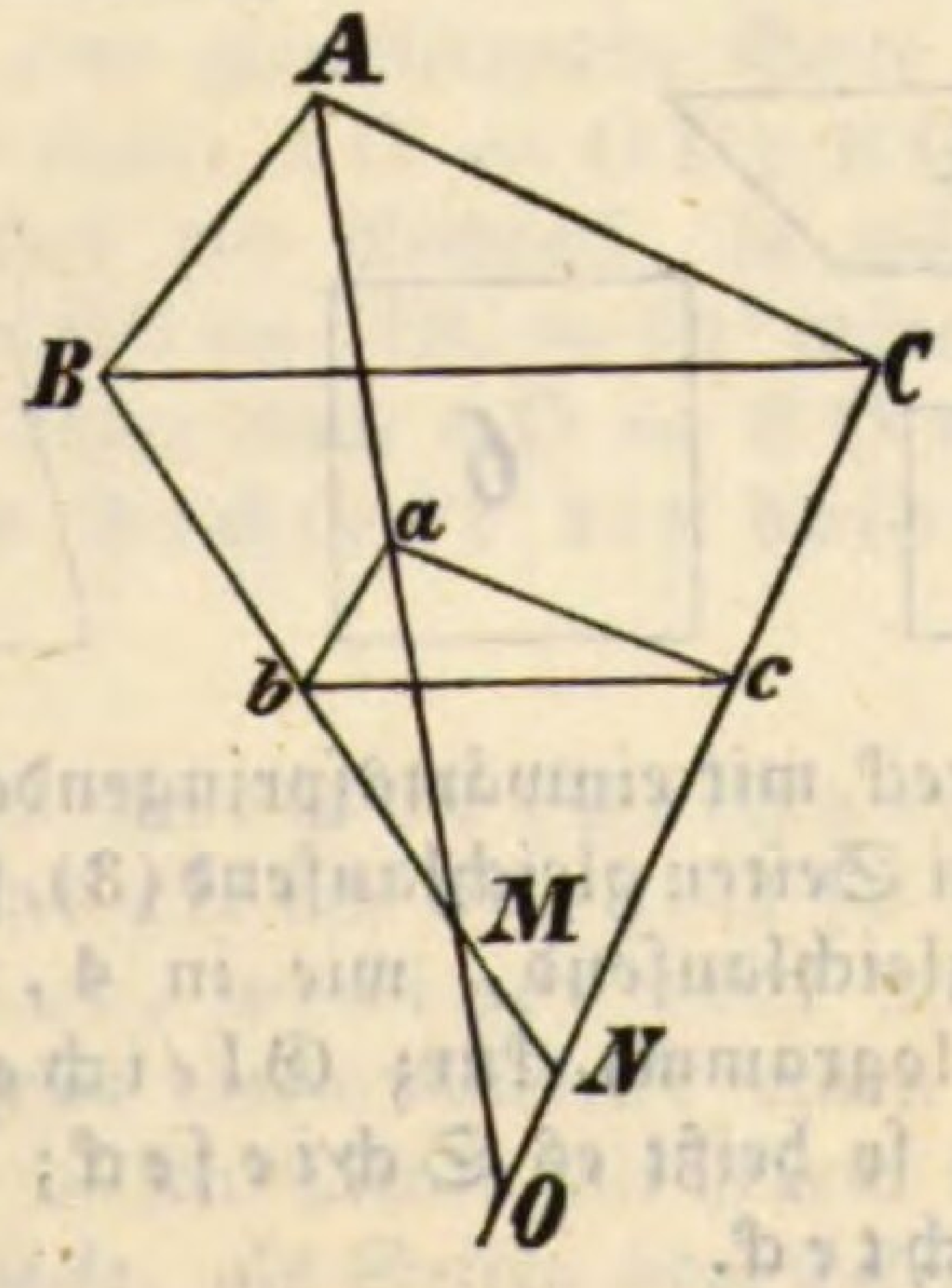


$AB' = B'C$, $BA' = A'C$, $MA' \perp BC$; $MB' \perp AC$, also M Mittelpunkt der Ecke; $AA'' \perp BC$; $BB'' \perp AC$, also P Durchschnittspunkt der Lothe; $AS = 2A'S$, also S Schwerpunkt; zieht man nun $A'B'$, so ist $A'B' \parallel AB$, da nun $MB' \parallel BP$, $A'M \parallel AP$, so ist $ABP \sim MA'B'$, also $AP : A'M = AB : A'B' = 2 : 1$, also $A'M : AP = 1 : 2$; da nun $A'S : AS = 1 : 2$ und $PAS = SA'M$, weil $AP \parallel A'M$, so muß $APS \sim SA'M$, und daher $ASP = MSA'$, damit aber dieses sey, muß, da ASA' eine gerade Linie ist, auch P, S und M in einer Geraden seyn.

Wie man leicht sieht, hat man $PS = 2SM$.

§. 61. **Wenn zwei ähnliche Dreiecke so gestellt werden, daß ihre gleichliegenden Seiten mit einander gleichlaufend sind, und man verbindet die gleichliegenden Punkte durch Gerade, so müssen diese Geraden sich in einem und demselben Punkte schneiden.**

Fig. 67.



Es sey also $ABC \sim abc$, daher $\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{bc}{BC}$ (1)
ferner $ab \parallel AB$, $ac \parallel AC$, $bc \parallel BC$ (2),

so hat man wegen (2) $\frac{ab}{AB} = \frac{aM}{AM} = \frac{bM}{BM}$,

$$\frac{ac}{AC} = \frac{aO}{AO} = \frac{cO}{CO}, \quad \frac{bc}{BC} = \frac{bN}{BN} = \frac{cN}{CN};$$

folglich wegen (1) $\frac{aM}{AM} = \frac{aO}{AO}$; $\frac{bM}{BM} = \frac{bN}{BN}$; $\frac{cO}{CO} = \frac{cN}{CN}$,

und somit $\frac{AM - aM}{AO - aO} = \frac{AM}{AO}$; $\frac{BM - bM}{BN - bN} = \frac{BM}{BN}$; $\frac{CO - cO}{CN - cN} = \frac{CO}{CN}$,

oder $\frac{Aa}{Aa} = \frac{AM}{AO}$; $\frac{Bb}{Bb} = \frac{BM}{BN}$; $\frac{Cc}{Cc} = \frac{CO}{NC}$;

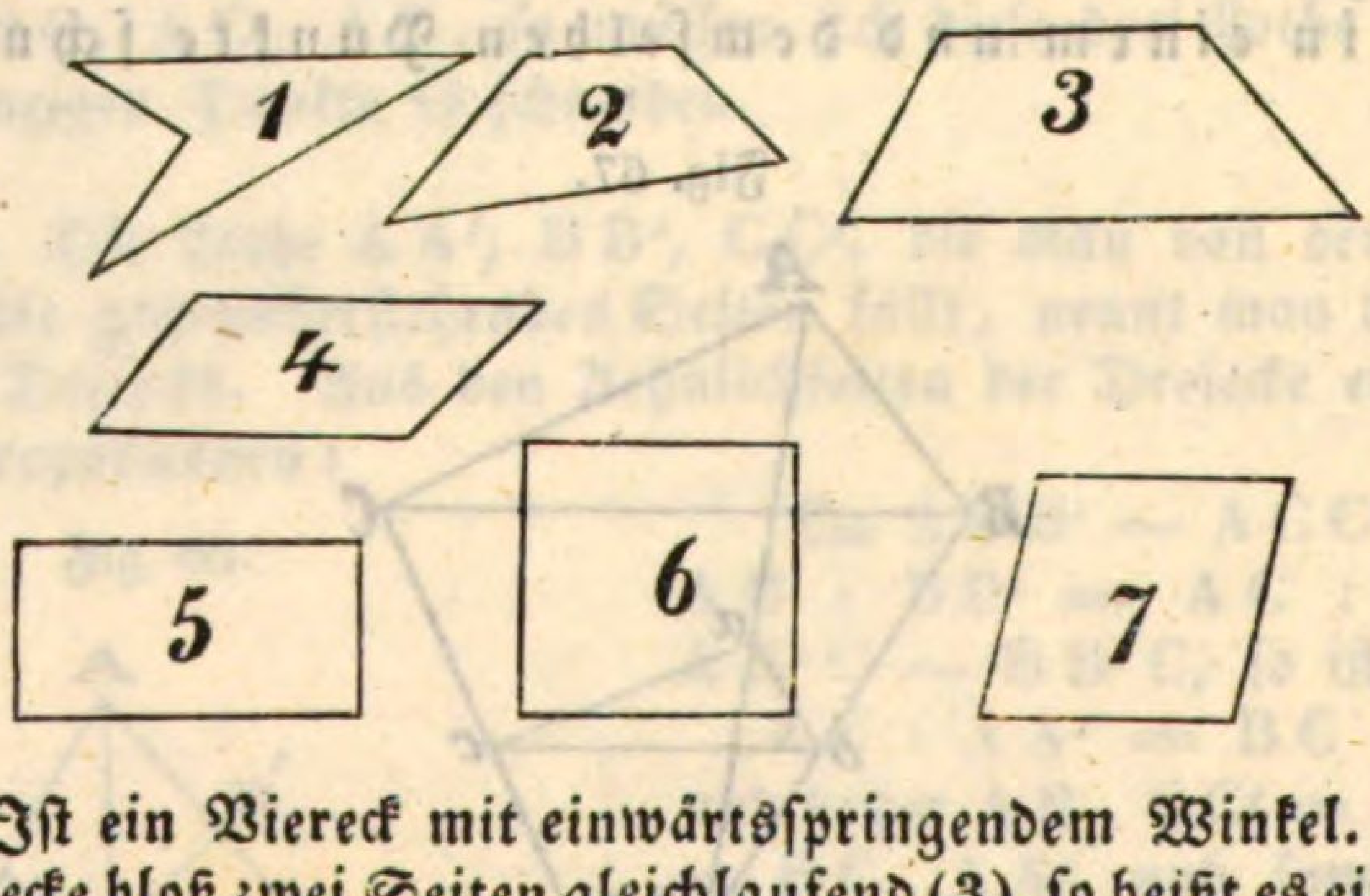
folglich $AM = AO$; $BM = BN$; $CO = CN$, d. h. es müssen M und O, M und N, O und N zusammenfallen, also die drei Geraden Aa, Bb, Cc in einem Punkte sich treffen.

Wir bemerken nun, daß man diesen Satz nicht gerade umkehren darf; denn zwei ähnliche Dreiecke können so gestellt seyn, daß, wenn ihre gleichliegenden Eckpunkte durch Gerade verbunden werden, diese Geraden sich in einem Punkte schneiden, ohne deßhalb nothwendig die gleichliegenden Seiten auch nothwendig gleichlaufend seyn müßten.

IV. Vierecke und Vielecke.

§. 62. Jede von vier Geraden eingeschlossene Figur heißt ein Viereck, deren es verschiedene Arten gibt.

Fig. 68.

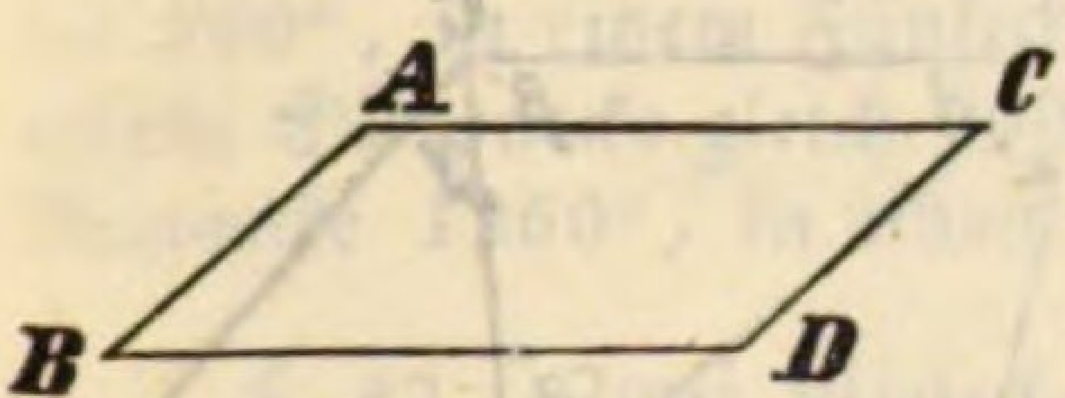


(1) Ist ein Viereck mit einwärtsspringendem Winkel. Sind bei einem Vierecke bloß zwei Seiten gleichlaufend (3), so heißt es ein Trapez; sind je zwei Seiten gleichlaufend, wie in 4, 5, 6, 7, so heißt es Gleichlaufeck (Parallelogramm), kurz Gleicheck. Sind die Winkel schief, wie in 4 und 7, so heißt es Schiefeck; sind die Winkel rechte, wie in 5 und 6, Rechteck.

Da Stücke gleichlaufender Geraden zwischen gleichlaufender Geraden stets einander gleich sind, so sind stets in jedem Gleichecke die gegenüberstehenden Seiten gleichlaufend und gleich. Sind aber alle vier Seiten einander gleich, so heißt dann das **Schieferk** (7) eine **Raute**, das gleichseitige Rechteck aber (6) ein **Quadrat**.

§. 63. **In jedem Gleichecke müssen die gegenüberstehenden Winkel einander gleich seyn.**

Fig. 69.



Da AB ∥ CD, so muß $A + C = 180^\circ$, ebenso, da AC ∥ BD, muß $A + B = 180^\circ$, daher $A + C = A + B$, daher $B = C$.

Eben so beweiset man die Gleichheit von A und D.

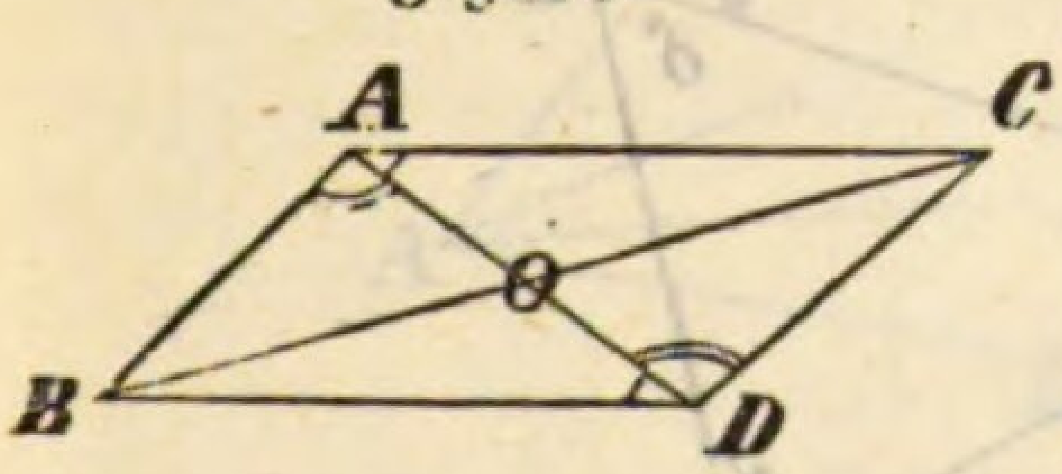
§. 64. **Wenn in einem Gleichecke ein Winkel ein rechter ist, so müssen alle übrigen Winkel rechte seyn.**

Wäre z. B. oben $A = 90^\circ$, so muß doch dem so eben bewiesenen $D = 90^\circ$ seyn, da aber sowohl $A + B = 180^\circ$, als auch $A + C = 180^\circ$, so muß sowohl B als C ebenfalls ein jeder 90° seyn.

§. 65. Jede Gerade, welche zwei Ecken eines Vierecks oder Vielecks verbindet, heißt **Winkellinie** (Diagonale).

Ziehet man in einem Gleichecke die Winkellinien, so hälftet jede das Gleicheck, und beide Winkellinien hälften sich gegenseitig.

Fig. 70.



Weil AC ∥ BD, so sind die Wechselwinkel $DAC = ADB$, und weil AB ∥ CD, so sind die Wechselwinkel $BAD = ADC$, und weil $AD = AD$, so hat man $ABD \equiv ACD$, woraus dann wieder $AC = BD$; $AB = CD$ folgt. Eben so ist $ABC \equiv BCD$.

Weil nun $BAO = ODC$; $AOB = COD$; $AB = CD$, also zwei Winkel und eine gleichliegende Seite gleich sind, hat man $AOB \equiv COD$, und daher $AO = OD$; $BO = OC$.

Wäre das Gleicheck ein Rechteck, so wäre, da $AB = CD$, $BD = BD$, und wenn $ABD = BDC = 90^\circ$ wäre, dann $ABD \equiv BCD$; folglich $BC = AD$, daher auch $AO = BO = CO = DO$. **Es sind also in jedem Rechtecke die beiden Winkellinien einander gleich.**

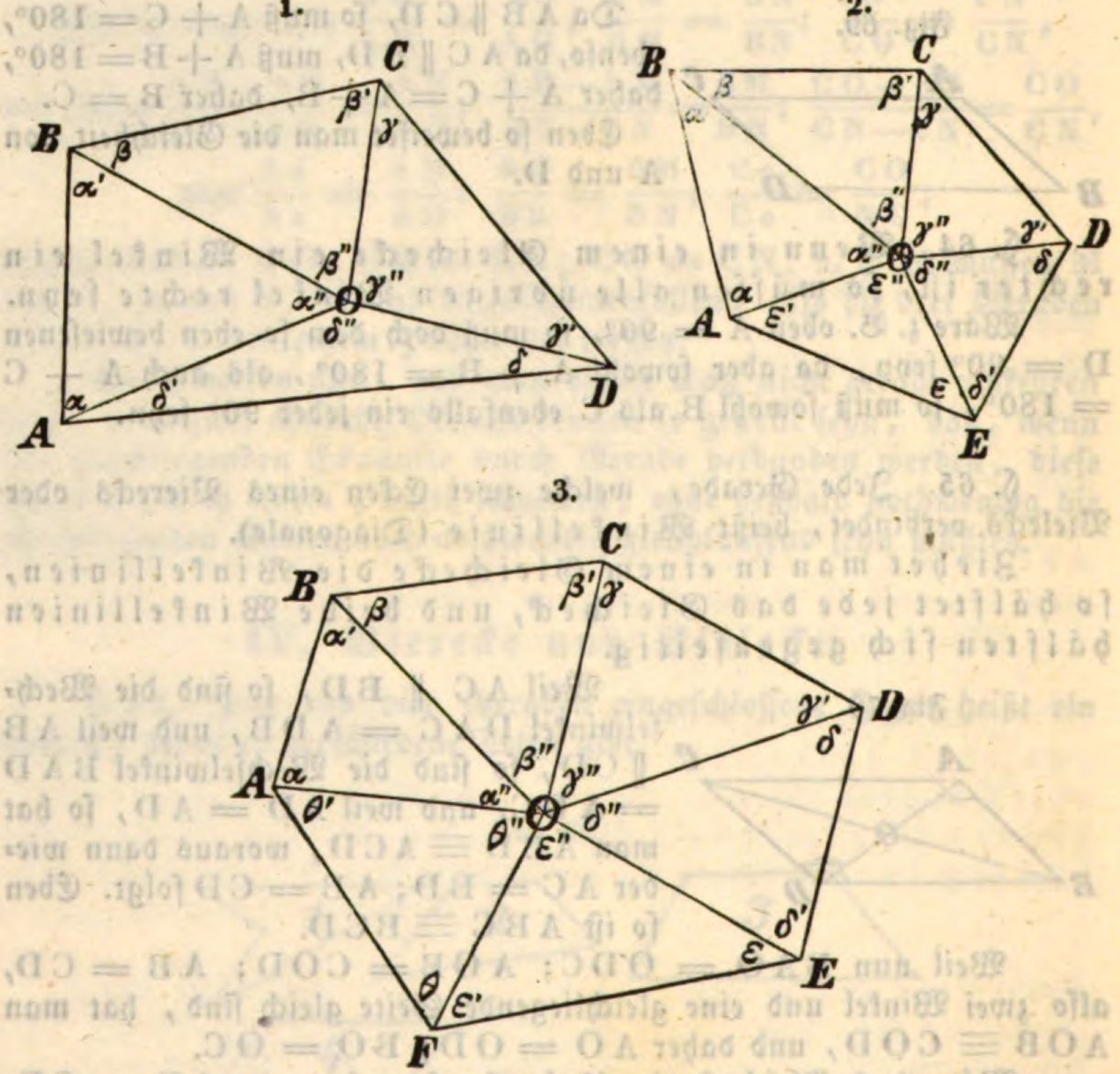
§. 66. **In jedem Vielecke (Polygone) ist die Summe der inneren Winkel gleich doppelt so viel rechten Winkeln, als Ecken sind, weniger vier Rechten.**

Wenn ich in irgend einem Vielecke einen Punkt willkürlich innerhalb annehme, und diesen Punkt mit jedem Eckpunkte verbinde, so erhalte ich so viele Dreiecke, als Seiten oder Ecken da sind; die Summe

aller Winkel dieser Dreiecke ist so oft zwei Rechten, als Dreiecke oder Ecke da sind.

Von diesen Winkeln aber gehören die um den willkürlichen Punkt herum nicht zu den Vieleckswinkeln; ziehet man daher die Summe derselben, d. h. 4 R, von obiger Summe ab, so hat man als Summe aller Vieleckswinkel die oben angegebene Summe.

Fig. 71.



$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 2\,R,$$
$$\beta + \beta' + \beta'' = 2\,R,$$
$$\gamma + \gamma' + \gamma'' = 2\,R,$$
$$\delta + \delta' + \delta'' = 2\,R,$$
$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' = 2\,R, \quad \text{u. s. w.}$$

In 1. nun hat man $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' + \delta + \delta' + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' = 4 \,.\, 2R$; da nun

$$\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' = 4\,R$$

$\alpha' + \beta = B$; $\beta' + \gamma = C$; $\gamma' + \delta = D$, $\delta' + \alpha = A$ ist, so hat man: $B + C + D + A + 4R = 4 \,.\, 2R$; daher

$$A + B + C + D = 4 \,.\, 2R - 4R.$$

In 2. hat man fünf Dreiecke, daher

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \ldots \varepsilon + \varepsilon' + \alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' + \varepsilon'' = 5 \,.\, 2\,R.$$

Da nun $\alpha'' + \beta'' + \gamma'' + \delta'' + \varepsilon'' = 4\,R$, so ist

$$A + B + C + D + E = 5 \,.\, 2R - 4R.$$

Eben so findet man in (3.)

$$A + B + C + D + E + F = 6 \,.\, 2R - 4R,$$

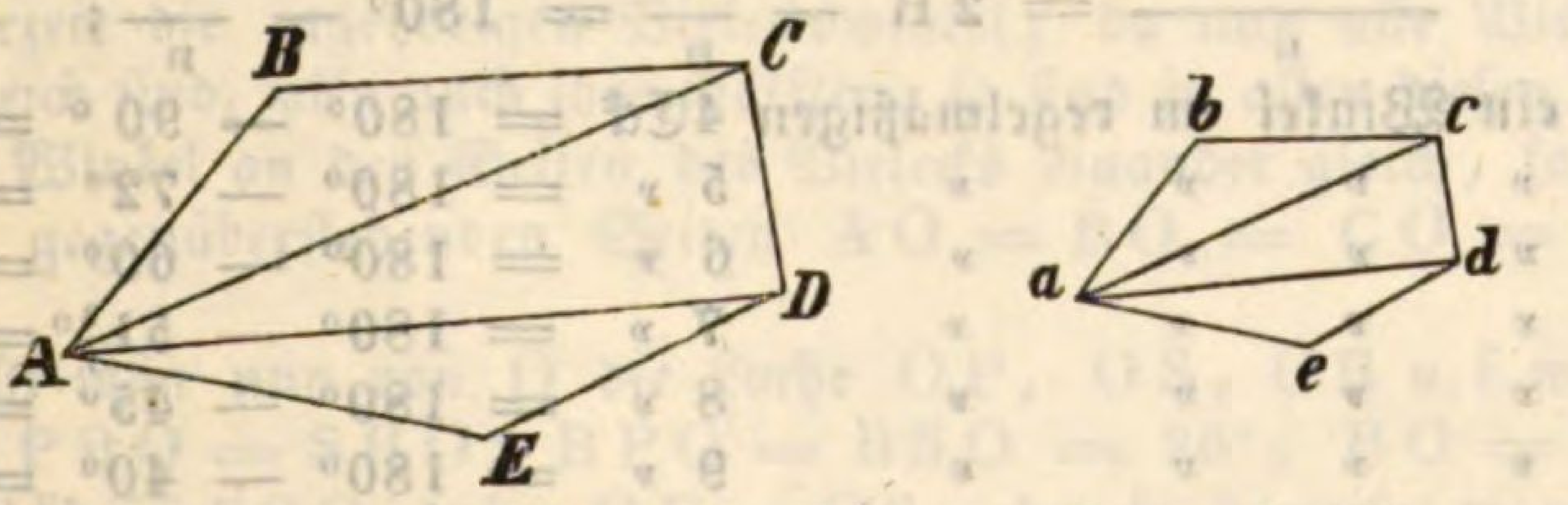
und allgemein in einem n Ecke, d. h. Vielecke, welches n Seiten hat, hat man die Summe aller inneren Winkel $= n \,.\, 2\,R - 4\,R$.

Diesemnach ist die Summe der inneren Winkel in einem Vierecke $= 360°$, in einem Fünfecke 540, in einem Sechsecke gleich 720°, in einem Siebenecke gleich 900°, in einem Achtecke gleich 1080°, in einem Neunecke 1260°, in einem Zehnecke gleich 1440° u. s. w.

§. 67. Zwei Vielecke heißen **ähnlich**, wenn die Winkel des einen in derselben Ordnung gleich sind den Winkeln des andern, und wenn zugleich die gleichliegenden Seiten in beiden Vielecken zu einander gerade proportionirt sind.

Wenn zwei Vielecke einander ähnlich sind, und man ziehet in beiden die gleichliegenden Winkellinien, so werden die gleichliegenden Dreiecke einander ähnlich, und die gleichliegenden Winkellinien eben so zu einander proportionirt seyn.

Fig. 72.



Es sey nun A = a; B = b; C = c; D = d; E = e.

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de} = \frac{EA}{ea},$$

so sind die beiden Vielecke mit einander ähnlich.

Ziehet man nun die gleichliegenden Winkellinien AC, AD, ac, ad, so hat man:

$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}$; B = b, daher ABC $\sim$ abc, folglich die Winkel

$$BCA = bca; \; \frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}.$$

Da nun $\frac{BC}{bc} = \frac{CD}{cd}$; daher auch $\frac{AC}{ac} = \frac{CD}{cd}$, da nun, weil C = c und BCA = bca, daher auch C — BCA = c — bca oder ACD = acd, so hat man ACD $\sim$ acd, daher $\frac{AD}{ad} = \frac{CD}{cd}$ und ADC = adc.

Da nun $\frac{CD}{cd} = \frac{DE}{de}$, daher $\frac{AD}{ad} = \frac{DE}{de}$; ferners D — ADC = d — adc oder ADE = ade, so hat man ADE $\sim$ ade.

Aus der Erklärung ähnlicher Vielecke folgt von selbst, daß sich ihre Umfänge wie ihre gleichliegenden Seiten verhalten.

Sind nämlich a, a', a'' ... die Seiten des einen Vielecks, b, b', b'' die gleichliegenden des andern u, und U ihre Umfänge, d. h.

$$a + a' + a'' + \ldots = u$$
$$b + b' + b'' + \ldots = U.$$

So hat man wegen der Aehnlichkeit der Vielecke

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots; \text{ daher}$$

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots,$$

$$\text{d. h. } \frac{u}{U} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots$$

§. 68. Regelmäßige Vielecke nennt man jene, wo alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind.

Da in jedem nEck die Summe aller inneren Winkel = 2nR — 4R, so ist die Größe eines jeden Winkels im regelmäßigen nEcke gleich

$$\frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4R}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n};$$

daher ein Winkel im regelmäßigen 4Eck $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
» » » » » 5 » $= 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$
» » » » » 6 » $= 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$
» » » » » 7 » $= 180^\circ - 51\frac{3}{7}{}^\circ = 128\frac{4}{7}{}^\circ$
» » » » » 8 » $= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$
» » » » » 9 » $= 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$
» » » » » 10 » $= 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ$

Wie man sieht, nähert sich jeder Winkel eines regelmäßigen Vielecks desto mehr 180°, je größer die Anzahl der Seiten ist, ohne aber je 180° zu erreichen, so ist:

der Winkel im regelm. 100Eck gleich $180^\circ - 3^\circ 36' = 176^\circ 24'$
» » » » 1000 » » $180^\circ - 21'36'' = 179^\circ 38' 24''$
» » » » 10000 » » $180^\circ - 2' 9''.6 = 179^\circ 57' 50''.4$
» » » » 100000 » » $180^\circ - 12''.96 = 179^\circ 59' 47''.04$,

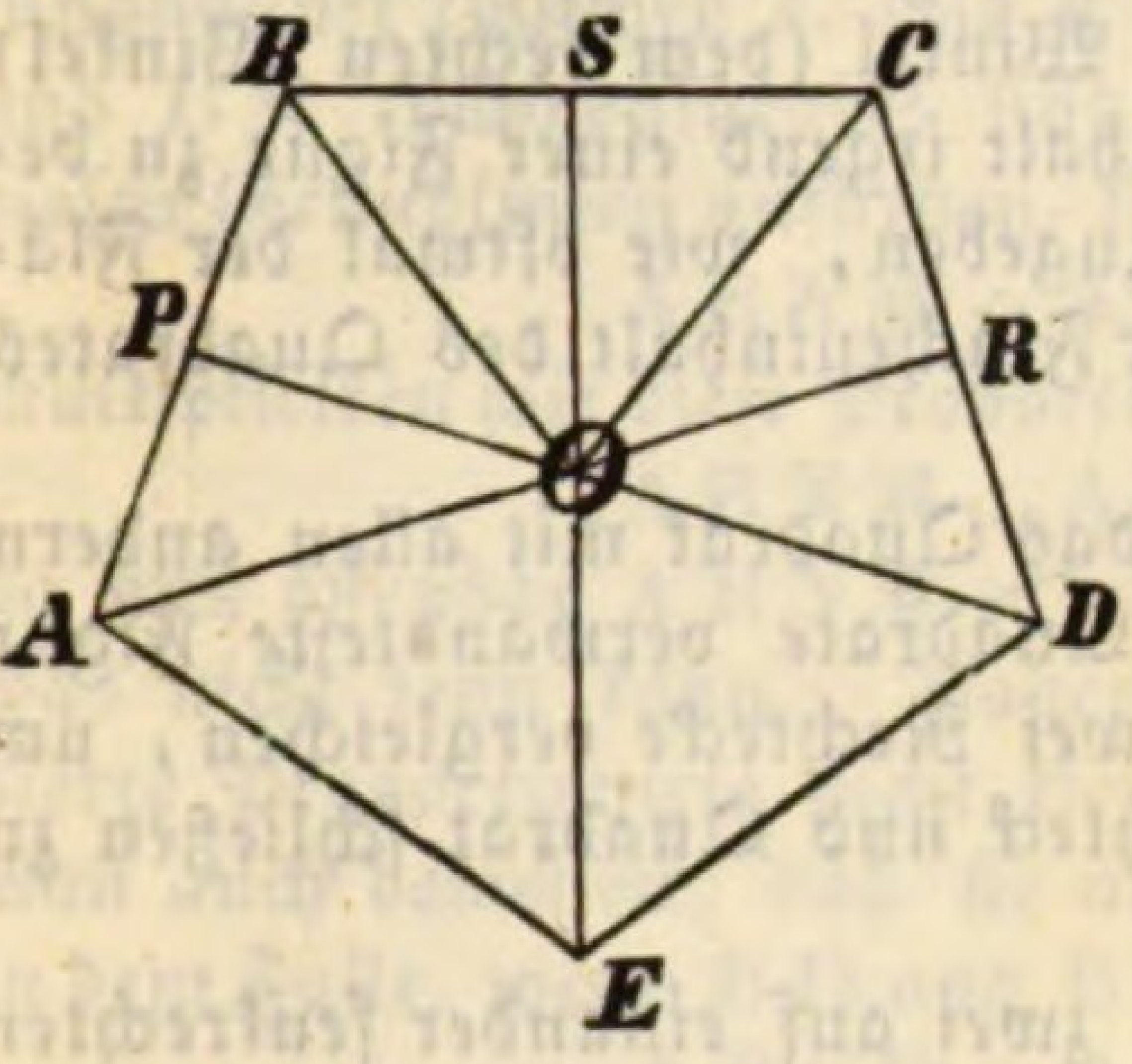
dadurch, daß die Winkel immer stumpfer und stumpfer werden, und sich immer mehr und mehr geraden Winkeln nähern, nähert sich das Vieleck immer mehr und mehr dem Kreise.

In jedem regelmäßigen Polygon gibt es einen Punkt, der von allen Seiten und Ecken desselben gleich weit absteht.

Wir können nicht ein ganz allgemeines regelmäßiges Vieleck zeichnen, aber dieselben Gründe, die wir hier bei einem regelmäßigen Fünfecke

entwickeln werden, gelten eben so gut für ein regelmäßiges Sechseck, Siebeneck u. s. w. für was immer für ein regelmäßiges Vieleck.

Fig. 73.



$AB = BC = CD = DE = EA$
$EAB = ABC = BCD = CDE = DEA$, d. h. das Vieleck ist regelmäßig. Hälften wir die Winkel A und B, so schneiden sich die Hälftungslinien AO und BO in O. Von diesem Punkte behaupte ich, daß er von allen Ecken gleich weit absteht.

Da $ABO = OBC$, $AB = BC$; $BO = BO$, so ist $ABO \equiv BOC$, daher $BCO = BAO = \frac{1}{2} BAE$; da nun $BAE = BCD$, also $\frac{1}{2} BAE = \frac{1}{2} BCD$, so ist auch $BCO = \frac{1}{2} BCD$, also auch $BCO = OCD$; da nun $BC = CD$; $CO = CO$, so ist $BOC \equiv COD$, daher $CDO = CBO = \frac{1}{2} ABC$.

Da aber $ABC = CDE$, daher $\frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} CDE$, so ist $CDO = \frac{1}{2} CDE$, daher $CDO = ODE$; da nun $CD = DE$, $OD = OD$, also $COD \equiv ODE$, so hat man $OED = OCD = \frac{1}{2} BCD$; da aber $BCD = DEA$, also $\frac{1}{2} BCD = \frac{1}{2} DEA$, also $OED = \frac{1}{2} DEA$, daher $OED = OEA$.

Wie man also sieht, hälften die Verbindungslinien CO, DO, EO jederzeit die zugehörigen Vieleckswinkel; da nun alle Vieleckswinkel gleich sind, also auch ihre Hälften, so sind in allen diesen Dreiecken die Winkel an den Seiten des Vielecks einander gleich, folglich auch die gegenüberstehenden Seiten $AO = BO = CO = DO = EO$.

Fällt man nun von O die Lothe OP, OS, OR u. s. w., so hat man $PBO = SBO$; $BPO = BSO = 90°$; $BO = BO$, daher $BPO \equiv BSO$, daher $OP = OS$; eben so beweiset man $OS = OR$ u. s. w., so daß also der Punkt O von allen Seiten des Vielecks gleichweit absteht.

V. Flächeninhalt.

§. 69. Bisher haben wir zwei Gattungen geometrischer Größen kennen gelernt, Längen und Winkel; nun wollen wir uns mit einer dritten Gattung, nämlich mit der Größe des Flächeninhaltes einer geschlossenen ebenen Figur beschäftigen.

Wie bei allen Messungen irgend eine Größe derselben Gattung als Maßstab zum Grunde liegen muß, so muß dieses natürlich auch bei der Bestimmung des Flächeninhaltes seyn. So wie bei geraden Linien eine bestimmte Länge, die man Einheit des Längenmaßes nennt, bei Winkeln ein bestimmter Winkel, nämlich der Rechte, als Vergleichungsgröße dient, so muß bei Bestimmung der Größe des Flächeninhaltes irgend ein bestimmter Flächeninhalt als Maßstab dienen, obwohl

es übrigens ganz willkürlich ist, welchen Flächeninhalt man dazu auswählen will.

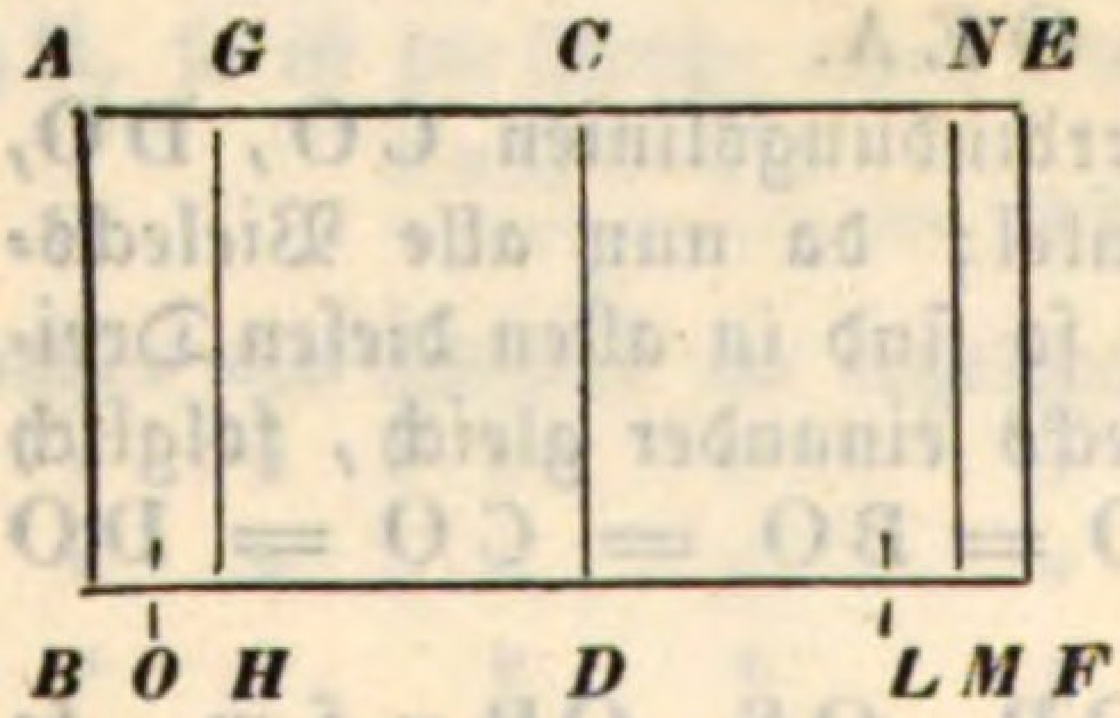
Man hat allgemein als Einheit der Flächenräume ein Quadrat angenommen, dessen Seite der Lineneinheit gleich ist, weil in dieser Figur alle Winkel auch der Einheit der Winkel (dem rechten Winkel) gleich sind. Die Aufgabe, den Flächeninhalt irgend einer Figur zu bestimmen, wird also darauf reducirt: anzugeben, wie oftmal der Flächeninhalt dieser Figur größer sey als der Flächeninhalt des Quadrates über die Einheit der Linien beschrieben.

Zu diesem Behufe müssen wir also das Quadrat mit allen andern Figuren vergleichen. Da aber die dem Quadrate verwandteste Figur das Rechteck ist, so wollen wir zuerst zwei Rechtecke vergleichen, um dadurch auf das Verhältniß zwischen Rechteck und Quadrat schließen zu können.

Bei einem Rechtecke heißt von den zwei auf einander senkrechten Seiten die eine die **Höhe**, die andere die **Grundlinie**.

§. 70. **Die Flächeninhalte zweier Rechtecke, welche dieselbe Höhe haben, verhalten sich wie ihre Grundlinien.**

Fig. 74.



Es seyen zwei Rechtecke von derselben Höhe ABCD und ABEF, so behaupten wir, daß ABCD : ABEF = BD : BF.

Im Beweise wollen wir zwei Fälle unterscheiden, und zwar, daß BD und BF commensurabel sind, und wenn dieses nicht Statt findet.

a) Es seyen BD und BF commensurabel, und zwar sey BH ihr gemeinschaftliches Maß, so zwar, daß BD = m . BH, und BF = n . BH, daher BD : BF = m : n. Ich trage nun BH auf der BD auf, welches m Mal angehen wird, und auf der BF, welches n Mal geschehen wird; nun ziehe ich durch jeden Theilungspunkt Parallele zur AB, so daß dadurch ABCD in m und ABEF in n Rechtecke zerfallen wird; alle diese Rechtecke sind mit dem Rechtecke ABHG identisch, weil alle vier Seiten und Winkel einander gleich sind; daher hat man:

ABCD = m . ABGH, ABEF = n . ABGH, daher

ABCD : ABEF = m : n, und somit ist:

ABCD : ABEF = BD : BF.

b) Es seyen BD und BF nicht commensurabel, so behaupte ich dennoch, daß

ABCD : ABEF = BD : BF sey.

Denn wäre dieß nicht der Fall, so müßte es zu den drei Größen ABCD, ABEF und BD eine andere vierte Proportionirte geben, die größer oder kleiner als FB wäre. Wir werden zeigen, daß in jeder dieser beiden Annahmen ein Widerspruch liege; denn ist die vierte Proportionirte kleiner als BF, z. B. gleich BL, so daß:

$ABCD : ABEF = BD : BL$ ist,

so können wir uns immer die BF in eine Anzahl gleicher Theile getheilt denken, wo ein einzelner Theil kleiner als FL ist, z. B. BO; tragen wir die BO auf die BF auf, so muß nothwendiger Weise ein Theilungspunkt zwischen L und F fallen, z. B. auf M, so daß dann BD und BM commensurabel sind, und daher die Rechtecke, welche auf diesen Grundlinien aufstehen, sich so wie diese nach (a) verhalten, nämlich:

$$ABNM : ABCD = BM : BD;$$

multipliciren wir diese Proportion mit der nächstvorhergegangenen, so ist:

$$ABNM : ABEF = BM : BL;$$

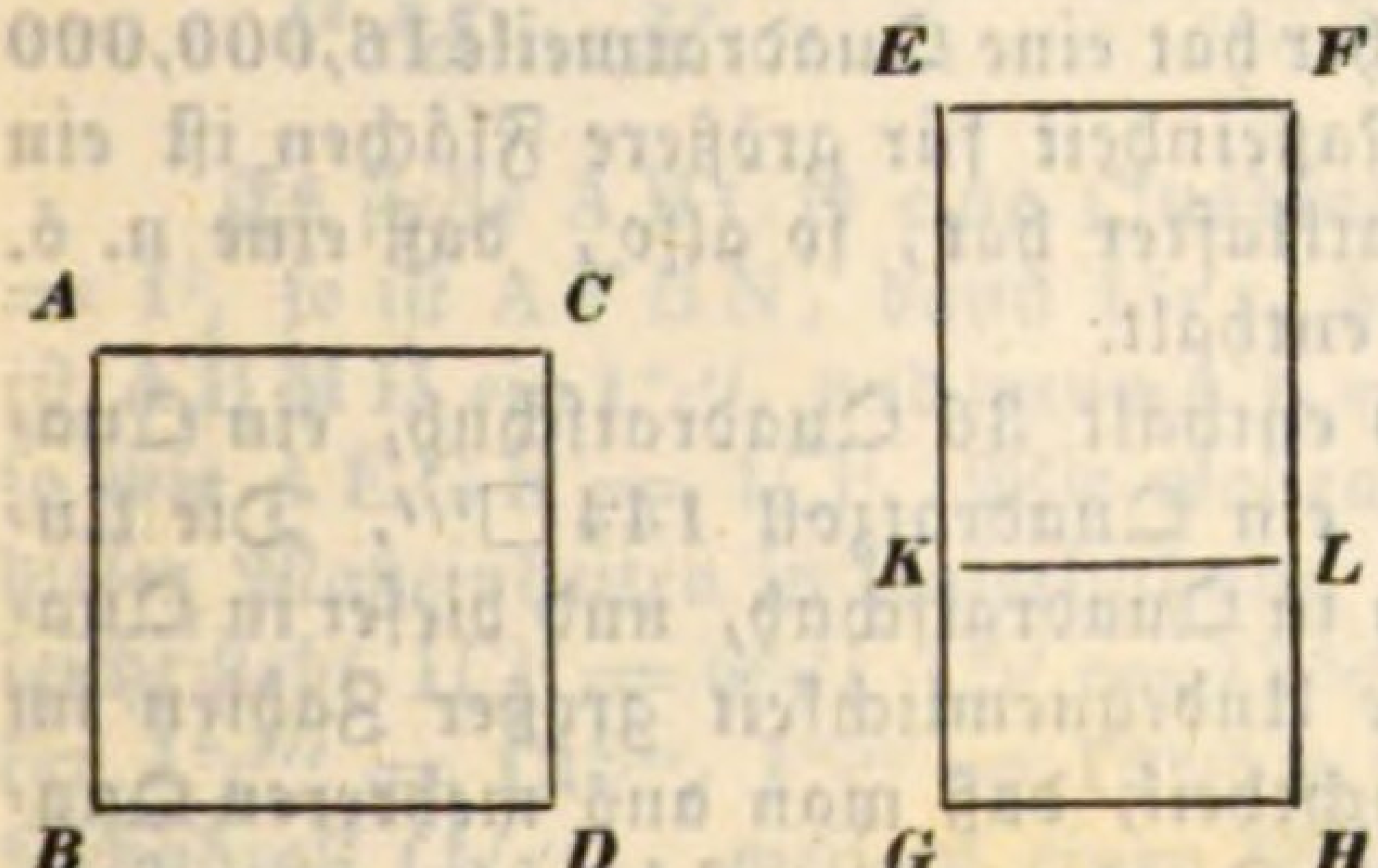
da nun offenbar $ABNM < ABEF$ ist, so müßte auch $BM < BL$, was nicht seyn kann. Daher kann in unserer obigen Proportion die vierte Proportionirte nicht kleiner als BF seyn. Auf dieselbe Art kann man auch beweisen, daß sie nicht größer seyn kann. Daher gilt auch in dem Falle, wenn BD und BF incommensurabel sind, die Proportion:

$$ABCD : ABEF = BD : BF.$$

§. 71. Mittelst des Vorhergehenden werden wir leicht folgenden Lehrsatz ableiten:

Die Flächeninhalte zweier Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus der Höhe und der Grundlinie.

Fig. 75.



Es seyen zwei Rechtecke ABCD und EFGH. Ich schneide von EG, welche größer als AB ist, ein Stück $EK = AB$ ab, und ziehe durch K eine Parallele KL zu EF, so ergibt sich aus dem Vergleiche der zwei Rechtecke ABCD und KLEF, welche dieselbe Höhe $AB = KE$ haben,

$$ABCD : KLEF = BD : EF.$$

Vergleichen wir die Rechtecke KLEF und EFGH, welche dieselbe Höhe EF haben, so ergibt sich:

$$KLEF : EFGH = EK \,.\, EG;$$

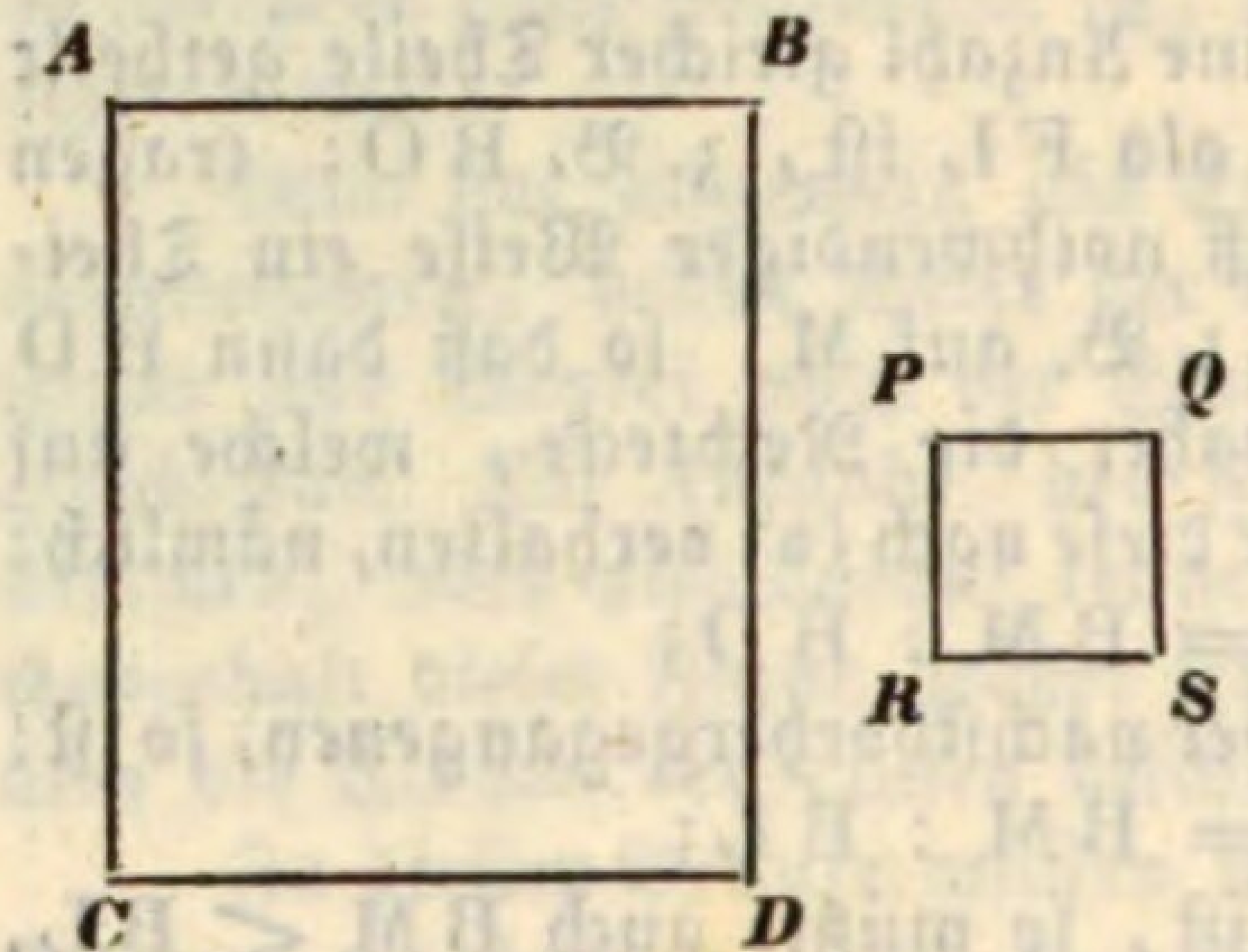
daher folgt durch Multiplication beider Proportionen:

$$ABCD : EFGH = BD \,.\, EK : EF \,.\, EG$$
$$= BD \,.\, AB \,.\, EF \,.\, EG.$$

Es versteht sich wohl von selbst, daß man bei diesen Produkten die Zahlen zu verstehen hat, welche die Größe der Seiten ausdrücken.

§. 72. Vergleichen wir nun das Rechteck ABCD mit dem Quadrate PQRS, wo $PQ = 1$ ist, so haben wir:

Fig. 76.



$ABCD : PQRS = AB . BD : PQ . QS$; daher

$$ABCD = \frac{AB}{PQ} . \frac{BD}{QS} . PQRS,$$

hat nun AB die Größe m, d. h. ist

$$AB = m . PQ,$$

BD die Größe n, d. h. ist

$$BD = n . QS,$$ so ist

$$ABCD = m . n . PQRS,$$

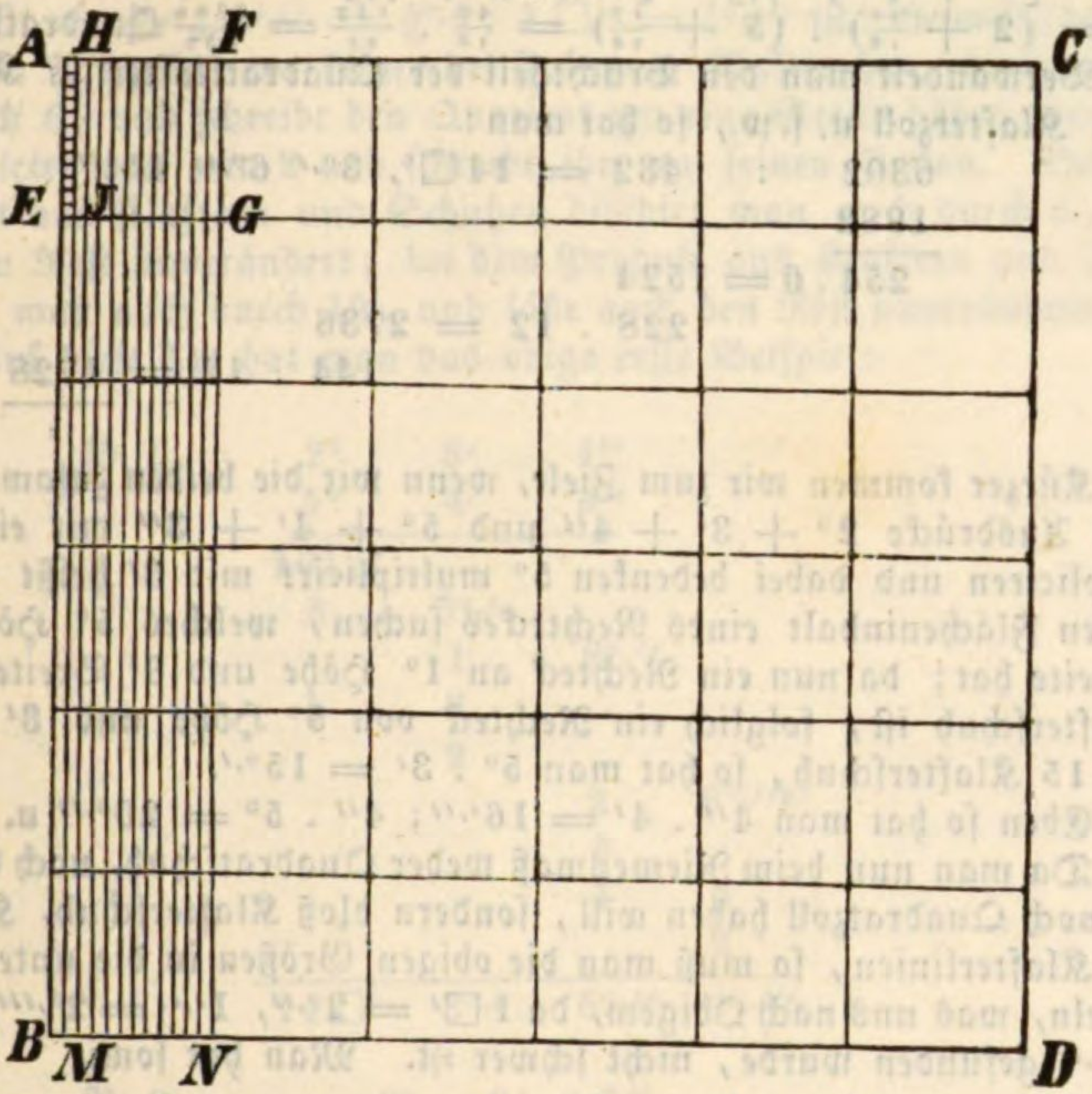
d. i. gleich m n Mal der Einheit des Flächenmaßes, daher drückt mn die Größe des Flächeninhaltes aus, und es folgt daher unter den vorhergehenden Bedeutungen.

Der Flächeninhalt eines Rechteckes ist gleich der Höhe, multiplicirt mit der Grundlinie (Basis).

§. 73. Bei den gewöhnlichen Rechnungen des praktischen Lebens sind die Einheiten der Länge eine Klafter (1° zu 6 Schuh), ein Schuh ($1'$ zu 12 Zoll), ein Zoll ($1''$ zu 12 Linien $= 12'''$). Für größere Längen eine n. ö. Meile $= 4000^{\circ}$. Eben so hat man als Einheiten des Flächenmaßes eine Quadratklafter, d. h. ein Quadrat ist eine Klafter hoch und eine Klafter breit, eben so Quadratschuh, Quadratzoll, Quadratlinie, und für größere Flächen eine Quadratmeile, die also 4000° lang und 4000° breit ist; daher hat eine Quadratmeile 16,000,000 Quadratklafter. Eine kleinere Maßeinheit für größere Flächen ist ein n. ö. Joch, welches 1600 Quadratklafter hat, so also, daß eine n. ö. Quadratmeile 10,000 n. ö. Joch enthält.

Eine Quadratklafter ($1\,\square^{\circ}$) enthält 36 Quadratschuh, ein Quadratschuh ($1\,\square'$) enthält $144\,\square''$, ein Quadratzoll $144\,\square'''$. Die Unterabtheilung von Quadratklaftern in Quadratschuh, und dieser in Quadratzoll u. s. w. hat nicht bloß die Unbequemlichkeit großer Zahlen im Allgemeinen, sondern auch den Nachtheil, daß man aus mehreren Quadratklaftern, Quadratschuhen und Quadratzollen sich nicht ein zusammenhängendes Ganzes, nicht ein Rechteck vorzustellen im Stande ist. Die Praktiker haben deßhalb eine zweckmäßigere Unterabtheilung der Quadratklafter angenommen Sie theilen die Quadratklafter in sechs gleiche Rechtecke, die alle eine Klafter hoch und einen Schuh breit sind, und nennen ein solches Rechteck einen Klafterschuh, was man durch $1^{\circ,\prime}$ bezeichnet. Der Klafterschuh wird in 12 gleichlange Rechtecke (Riemen) getheilt, deren jeder eine Klafter Höhe und einen Zoll Breite hat, und deren jeder ein Klafterzoll ($1^{\circ,\prime\prime}$) benannt wird. Ein Klafterzoll hat wieder 12 Klafterlinien, eine Klafterlinie ($1^{\circ,\prime\prime\prime}$) hat eine Klafter Höhe und eine Linie Breite. Eben so ist $1^{\circ,\prime\prime\prime} = 12^{\circ,IV}$ u. s w. Diese Art der Unterabtheilung nennt man das Riemenmaß.

Fig. 77.



Es stelle ABCD eine Quadratklafter vor, $AF = BN = \frac{1}{6} AC = 1'$, so ist AFBN, dann $1^{\circ,\prime}$; $AH = BM = \frac{1}{12} AF = 1''$, so ist ABMH ein $1^{\circ,\prime\prime}$, und wenn $AK = \frac{1}{12} AE$, so ist $AKHL = 1\square''$, so wie $AEGF = 1\square'$. Wir wollen nun die wechselseitige Beziehung dieser Maßeinheiten in Untersuchung ziehen. Zuerst hat man, wie man leicht sieht, $1\square^{\circ} = 6^{\circ,\prime}$; $1^{\circ,\prime} = 12^{\circ,\prime\prime}$, und eben so leicht läßt sich denken $1^{\circ,\prime\prime\prime} = 12^{\circ,\mathrm{iv}}$, $1^{\circ,\mathrm{iv}} = 12^{\circ,\mathrm{v}}$ u. s. w. Das Rechteck AEJH heißt Schuhzoll ($1^{\prime,\prime\prime}$), weil es einen Schuh hoch und einen Zoll breit ist. Wie man sieht, ist ein Schuhzoll gleich dem sechsten Theile von einem Klafterzoll, auch ist der Schuhzoll $= 12\square''$; da nun der Klafterzoll $= 72\square''$, so kommen auf die Klafterlinie, welche der zwölfte Theil von einem Klafterzoll ist, daher $6\square''$, d. h. $1^{\circ,\prime\prime\prime} = 6\square''$, und daher $1^{\prime,\prime\prime} = 2^{\circ,\prime\prime\prime}$.

Da nun $1\square'' = \frac{1}{12}\, 1^{\prime,\prime\prime} = \frac{2}{12}\, 1^{\circ,\prime\prime\prime} = \frac{1}{6} \cdot 1^{\circ,\prime\prime\prime}$, so hat man:

$$1\square'' = 2^{\circ,\mathrm{iv}}, \text{ weil } 1^{\circ,\prime\prime\prime} = 12^{\circ,\mathrm{iv}}.$$

Aus Obigem folgt nun somit $1\square' = \frac{1}{6}{}^{\circ,\prime}$; $1\square' = 2^{\circ,\prime\prime}$;

$$1^{\prime,\prime\prime} = \tfrac{1}{6}{}^{\circ,\prime\prime} \quad \text{oder} \quad 1^{\prime,\prime\prime} = 2^{\circ,\prime\prime\prime},$$

$$1\square'' = \tfrac{1}{6}{}^{\circ,\prime\prime\prime} \text{ oder } 1\square'' = 2^{\circ,\mathrm{iv}}.$$

§. 74. Diese Ergebnisse setzen uns in den Stand, den Flächeninhalt eines jeden Rechtecks im Riemenmaß anzugeben.

Gesetzt, ein Rechteck habe die Höhe $2^{\circ}\ 3'\ 4'$ und die Breite $5^{\circ}\ 4'\ 3''$, so müßte man ohne Anwendung des Riemenmaßes sagen: der Flächeninhalt dieses Rechteckes ist gleich

$$\left[2 + \tfrac{3}{6} + \tfrac{4}{72}\right] \cdot \left[5 + \tfrac{4}{6} + \tfrac{3}{72}\right] \text{ Quadratklafter,}$$

oder $= \left(2 + \frac{10}{18}\right) \cdot \left(5 + \frac{17}{24}\right) = \frac{46}{18} \cdot \frac{137}{24} = \frac{6302}{432}$ Quadratklafter.

Verwandelt man den Bruchtheil der Quadratklafter in Klafterschuh, Klafterzoll u. s. w., so hat man:

$$\begin{array}{l}
6302 \;:\; 432 = 14\square^{\circ},\ 3^{\circ,\prime}\ 6^{\circ,\prime\prime}\ 4^{\circ,\prime\prime\prime} \\
\underline{1982} \\
254 \cdot 6 = 1524 \\
\qquad\qquad 228 \cdot 12 = 2736 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 144 \cdot 12 = \underline{1728}
\end{array}$$

Kürzer kommen wir zum Ziele, wenn wir die beiden zusammengesetzten Ausdrücke $2^{\circ} + 3' + 4''$ und $5^{\circ} + 4' + 3''$ mit einander multipliciren und dabei bedenken 5° multiplicirt mit $3'$ heißt so viel als den Flächeninhalt eines Rechteckes suchen, welches 5° Höhe und $3'$ Breite hat; da nun ein Rechteck an 1° Höhe und $3'$ Breite gewiß 3 Klafterschuh ist, folglich ein Rechteck von 5° Höhe und $3'$ Breite sicher 15 Klafterschuh, so hat man $5^{\circ} \cdot 3' = 15^{\circ,\prime}$.

Eben so hat man $4'' \cdot 4' = 16^{\prime,\prime\prime}$; $4'' \cdot 5^{\circ} = 20^{\circ,\prime\prime}$ u. s. w.

Da man nun beim Riemenmaß weder Quadratschuh, noch Schuhzoll, noch Quadratzoll haben will, sondern bloß Klafterschuh, Klafterzoll, Klafterlinien, so muß man die obigen Größen in die untern verwandeln, was uns nach Obigem, da $1\square' = 2^{\circ,\prime\prime}$, $1^{\prime,\prime\prime} = 2^{\circ,\prime\prime\prime}$, $1\square'' = 2^{\circ,\text{IV}}$ gefunden wurde, nicht schwer ist. Man hat somit

B. 1.					
	2°	$3'$	$4''$		
	5°	$4'$	$3''$		
	$10\square^{\circ}$	$15^{\circ,\prime}$	$20^{\circ,\prime\prime}$		
		$8^{\circ,\prime}$	$24^{\circ,\prime\prime}$	$32^{\circ,\prime\prime\prime}$	
			$6^{\circ,\prime\prime}$	$18^{\circ,\prime\prime\prime}$	$24^{\circ,\text{IV}}$
	$10\square^{\circ}$	$23^{\circ,\prime}$	$50^{\circ,\prime\prime}$	$50^{\circ,\prime\prime\prime}$	$24^{\circ,\text{IV}}$
		4	4	2	
	4	27	54	52	
	$14\square^{\circ}$	$3^{\circ,\prime}$	$6^{\circ,\prime\prime}$	$4^{\circ,\prime\prime\prime}$	

Wie man sieht, ist der Hergang der Rechnung höchst einfach, die Multiplication geht so fort, wie überhaupt bei der Multiplication zusammengesetzter Ausdrücke, nur so oft keiner der Faktoren Klafter heißt, nimmt man das Produkt doppelt.

B. 2.					
	6°	$2'$	$3''$		
	3°	$3'$	$4''$		
	$18\square^{\circ}$	$6^{\circ,\prime}$	$9^{\circ,\prime\prime}$		
		$18^{\circ,\prime}$	$12^{\circ,\prime\prime}$	$18^{\circ,\prime\prime\prime}$	
			$24^{\circ,\prime\prime}$	$16^{\circ,\prime\prime\prime}$	$24^{\circ,\text{IV}}$
	$18\square^{\circ}$	$24^{\circ\prime}$	$45^{\circ,\prime\prime}$	$34^{\circ,\prime\prime\prime}$	$24^{\circ,\text{IV}}$
		4	3	2	
	4	28	48	36	
	$22\square^{\circ}$	$4^{\circ\prime}$			

Etwas kürzer kömmt man zum Ziele, wenn man sich erinnert, daß $1\square' = \frac{1}{6}{}^{0,\prime}$; $1^{\prime,\prime\prime} = \frac{1}{6}{}^{0,\prime\prime}$; $1\square'' = \frac{1}{6}{}^{0,\prime\prime\prime}$ ist. Beim Bilden der einzelnen Produkte, wo keiner der Faktoren Klafter hat, dividirt man sie durch 6, und schreibt den Quotient um eine Stelle höher, den Rest multiplicirt man mit 2 und schreibt ihn an seinen Posten. Bei dem Produkt aus Klaftern und Schuhen dividirt man auch durch 6, läßt aber den Rest unverändert; bei dem Produkt aus Klaftern und Zollen dividirt man auch durch 12, und läßt auch den Rest unverändert.

Auf diese Art hat man das obige erste Beispiel:

B. 1.				
	2^0	$3'$	$4''$	
	5^0	$4'$	$3''$	
	$10\square^0$	.		
	2	$3^{0,\prime}$		
		1	$8^{0,\prime\prime}$	
	1	2	.	
		2	.	
			2	$8^{0,\prime\prime\prime}$
			6	
			1	6
	.			2
	$14\square^0$	$3^{0,\prime}$	$6^{0,\prime\prime}$	$4^{0,\prime\prime\prime}$

B. 2.				
	6^0	$2'$	$3''$	
	3^0	$3'$	$4''$	
	$18\square^0$	.	.	
	1	.	.	
	.	.	$9^{0,\prime\prime}$	
	3	.		
		$1^{0,\prime}$	.	.
		.	1	$6^{0,\prime\prime\prime}$
		2	.	.
			1	4
				2
	$22\square^0$	$4^{0\prime}$		

§. 75. Ist der Flächeninhalt eines Rechtecks und die Höhe gegeben, so findet man die Grundlinie, wenn man den Flächeninhalt durch die Höhe dividirt. Bei dieser Division leisten uns dieselben Ergebnisse $1\square' = \frac{1}{6}{}^{0,\prime} = 2^{0,\prime\prime}$; $1^{\prime,\prime\prime} = \frac{1}{6}{}^{0,\prime\prime} = 2^{0,\prime\prime\prime}$; $1\square'' = \frac{1}{6}{}^{0,\prime\prime\prime} = 2^{0,IV}$ dieselben Vortheile.

Es sey der Flächeninhalt $14^{0,0}$ $3^{0,\prime}$ $6^{0,\prime\prime}$ $4^{0,\prime\prime\prime}$ und die Höhe 2^0 $3'$ $4''$, wie groß ist die Grundlinie? Man hat:

B. 1. $14^{0,0}\ \ 3^{0,\prime}\ \ 6^{0,\prime\prime}\ \ 4^{0,\prime\prime\prime} : 2^{0}\ 3'\ 4'' = 5^{0}\ 4'\ 3''$
$10^{0,0}\ \ 15^{0,\prime}\ \ 20^{0,\prime\prime}$
$10^{0,\prime}\ \ 10^{0,\prime\prime}\ \ 4^{0,\prime\prime\prime}$
$8^{0,\prime}\ \ 24^{0,\prime\prime}\ \ 32^{0,\prime\prime\prime}$
$7^{0,\prime\prime}\ \ 8^{0,\prime\prime\prime}$
$6^{0,\prime\prime}\ \ 18^{0,\prime\prime\prime}\ \ 24^{0,iv}$
. . .

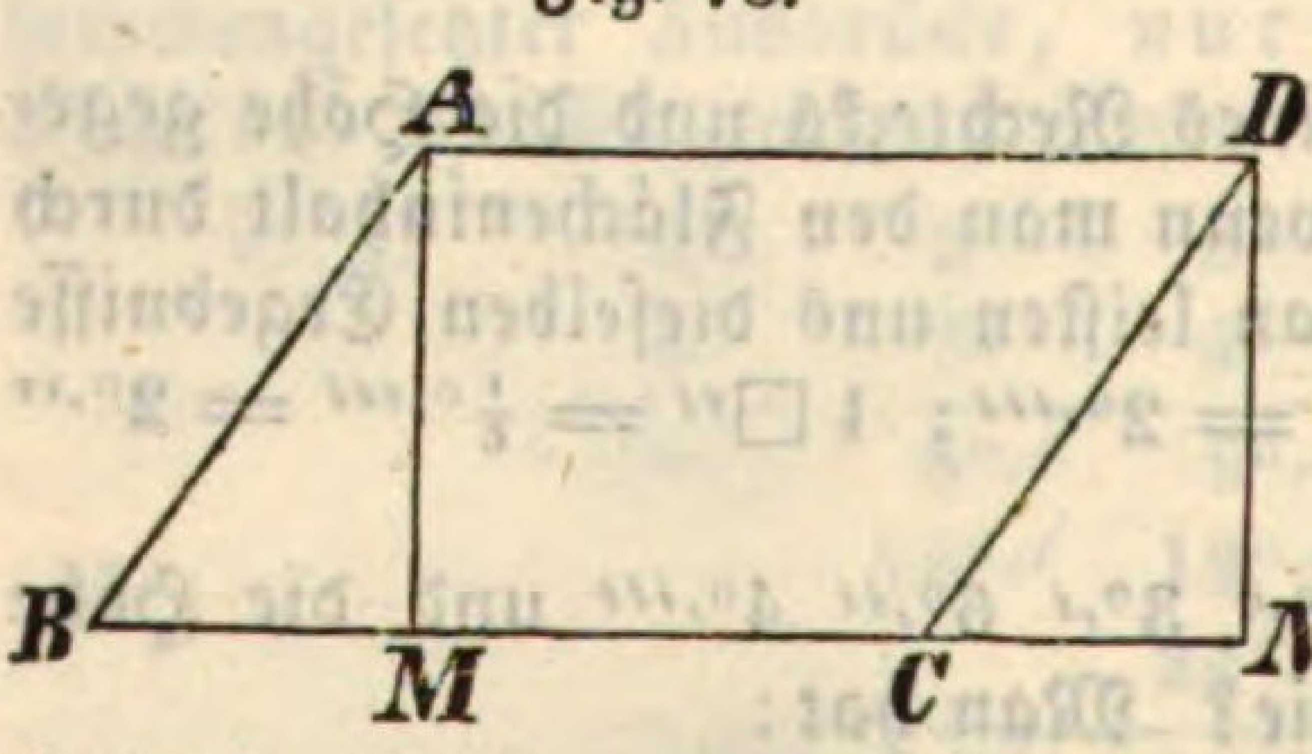
B. 2. $11\,\square^{0} : 4^{0} = 2^{0}\ 4'\ 6''$
8
$3^{0,0} = 18^{0,\prime}$
$16^{0,\prime}$
$2^{0,\prime} = 24^{0,\prime\prime}$
$24^{0,\prime\prime}$
.

B. 3. $14^{0,0}\ \ 5^{0,\prime}\ \ 11^{0,\prime\prime} : 3^{0}\ 5'\ 7'' = 3^{0}\ 4'\ 10''\ 6'''\ 2^{iv} \ldots$
$9^{0,0}\ \ 15^{0,\prime}\ \ 21^{0,\prime\prime}$
$19^{0,\prime}\ \ 2^{0,\prime\prime}$
$12^{0,\prime}\ \ 40^{0,\prime\prime}\ \ 56^{0,\prime\prime\prime}$
$41^{0,\prime\prime}\ \ 4^{0,\prime\prime\prime}$
$30^{0,\prime\prime}\ \ 100^{0,\prime\prime\prime}\ \ 140^{0,iv}$
$24^{0,\prime\prime\prime}\ \ 4^{0,iv}$
$18^{0,\prime\prime\prime}\ \ 60^{0,iv}\ \ 84^{0,v}$
$9^{0,iv}\ \ 0^{0,v}$
$6^{0,iv}\ \ 20^{0,v}\ \ 28^{0,vi}$
$13^{0,v}\ \ 8^{0,vi}$ u. s. w.

§. 76. **Der Flächeninhalt eines jeden Gleichecks (Parallelogramms) ist gleich der Grundlinie, multiplicirt mit der Höhe.**

Die Höhe eines Gleichecks ist ein Loth, welches man von einem Punkte einer der Seiten auf die gegenüberstehende gleichlaufende fällt. Die Seite dann, auf welche das Loth fällt, heißt die **Grundlinie**.

Fig. 78.

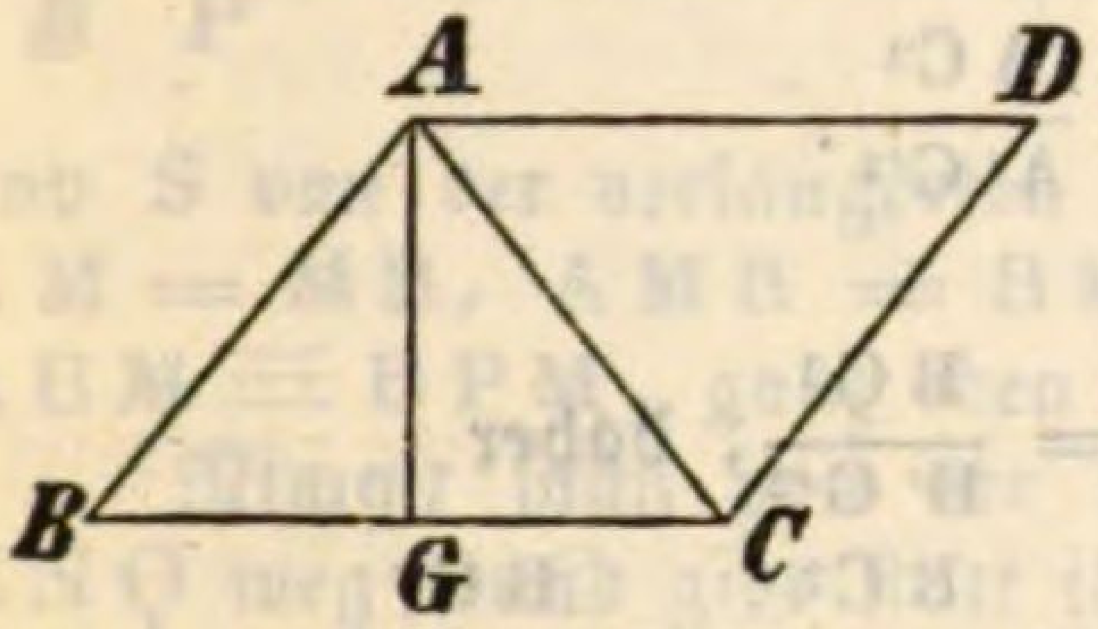


Es sey das Gleicheck ABCD; ich nehme BC als Grundlinie an, und fälle von A das Loth AM auf BC, so daß also AM die Höhe des Gleichecks ist. Fällen wir nun auch DN senkrecht auf BC, so daß dadurch das Rechteck AMND entsteht, und wir wollen nun nachweisen, daß das Rechteck AMND denselben Flächeninhalt habe, wie das Schiefeck ABCD, denn da AB = CD, AM = DN als gleichlaufende zwischen gleichlaufenden und BAM = CDN, da ihre Schenkel gleichlaufend sind, so hat man die Dreiecke

BAM ≡ CDN; nimmt man also vom Schiefecke vorn das Dreieck BAM weg, und gibt statt dessen hinten das Dreieck CDN dazu, so hat man ABCD gleich groß mit dem Rechteck AMND; da nun der Flächeninhalt von AMND = AM . MN = AM . BC ist, so hat man ABCD = AM . AD oder ABCD = AM . BC.

§. 77. **Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Höhe und Grundlinie.**

Fig. 79.



Die Höhe eines Dreiecks nennt man das Loth, welches man von einem Endpunkte desselben auf die gegenüberstehende Seite fällt. Diese gegenüberstehende Seite heißt dann die **Grundlinie**.

Man kann somit jede Seite als Grundlinie annehmen.

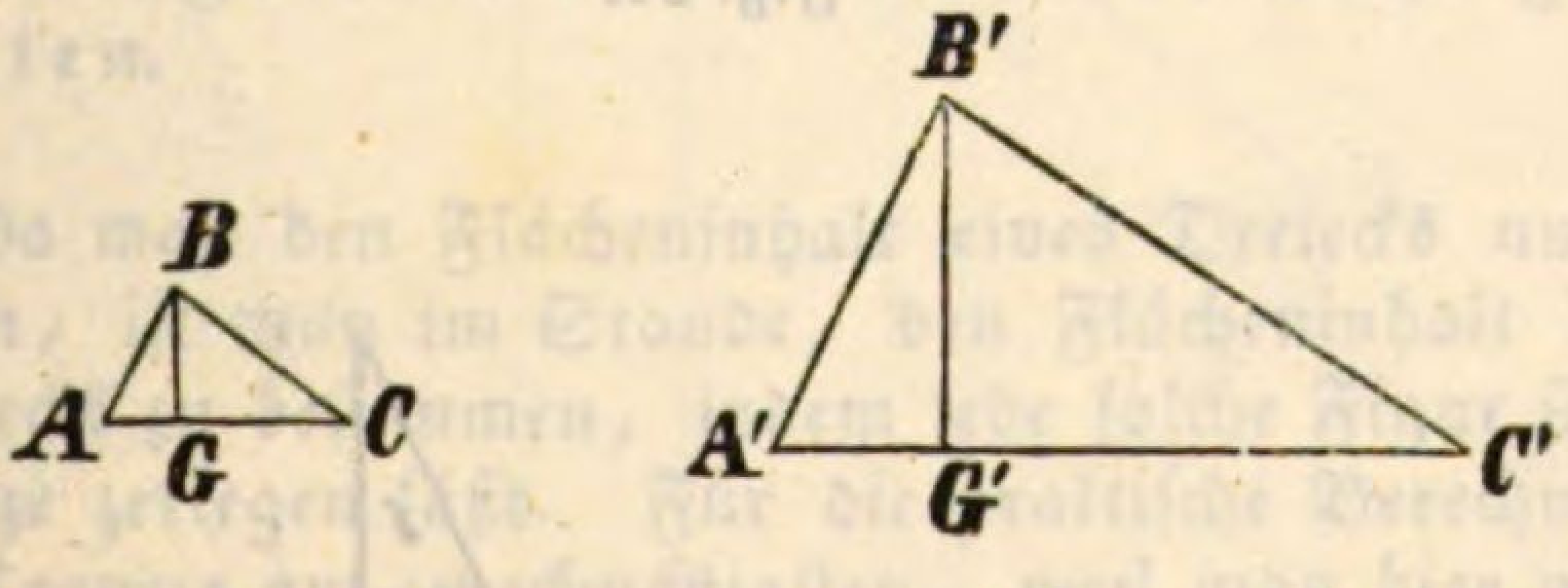
Ich denke mir durch A eine Gerade gleichlaufend mit BC, und eben so durch C eine Gerade gleichlaufend mit AB; beide Geraden schneiden sich in D, so daß dadurch das Gleicheck ABCD entsteht, welches durch die Winkellinie AC in zwei Dreiecke ABC und ACD, die ganz einerlei mit einander sind, getheilt wird. Daher ist ABC die Hälfte von ABCD, da nun ABCD = AG . BC, so hat man:

$$ABC = \tfrac{1}{2} . AG . BC.$$

Vermöge §. 59 wissen wir, daß wir dasselbe Resultat erhalten, wir mögen welch immer für eine Seite des Dreiecks als Grundlinie desselben annehmen.

§. 78. **Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten, oder wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Höhen.**

Fig. 80.



Es sey ABC ∼ A′B′C′, daher $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ (1)
A = A′, B = B′, C = C′. Fällen wir von B und B′ die gleichliegenden Lothe BG und B′G′ auf AC und A′C′, so hat man, da A = A′ und AGB = A′G′B′ = 90°, ABG ∼ A′B′G′, daher

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'};$$

$$\text{daher auch } \frac{BG}{B'G'} = \frac{AC}{A'C'} \quad (2).$$

Da nun $\triangle ABC = \frac{1}{2} AC . BG$; $\triangle A'B'C' = \frac{1}{2} A'C' . B'G'$, so hat man

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{AC . BG}{A'C' . B'G'}.$$

Multiplicirt man die Proportion (2) beiderseits mit $\frac{AC}{A'C'}$, so hat man:

$$\frac{AC . BG}{A'C' . B'G'} = \frac{AC^2}{A'C'^2};$$

$$\text{daher } \frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{AC^2}{A'C'^2}.$$

Vermöge (1) und (2) hat man

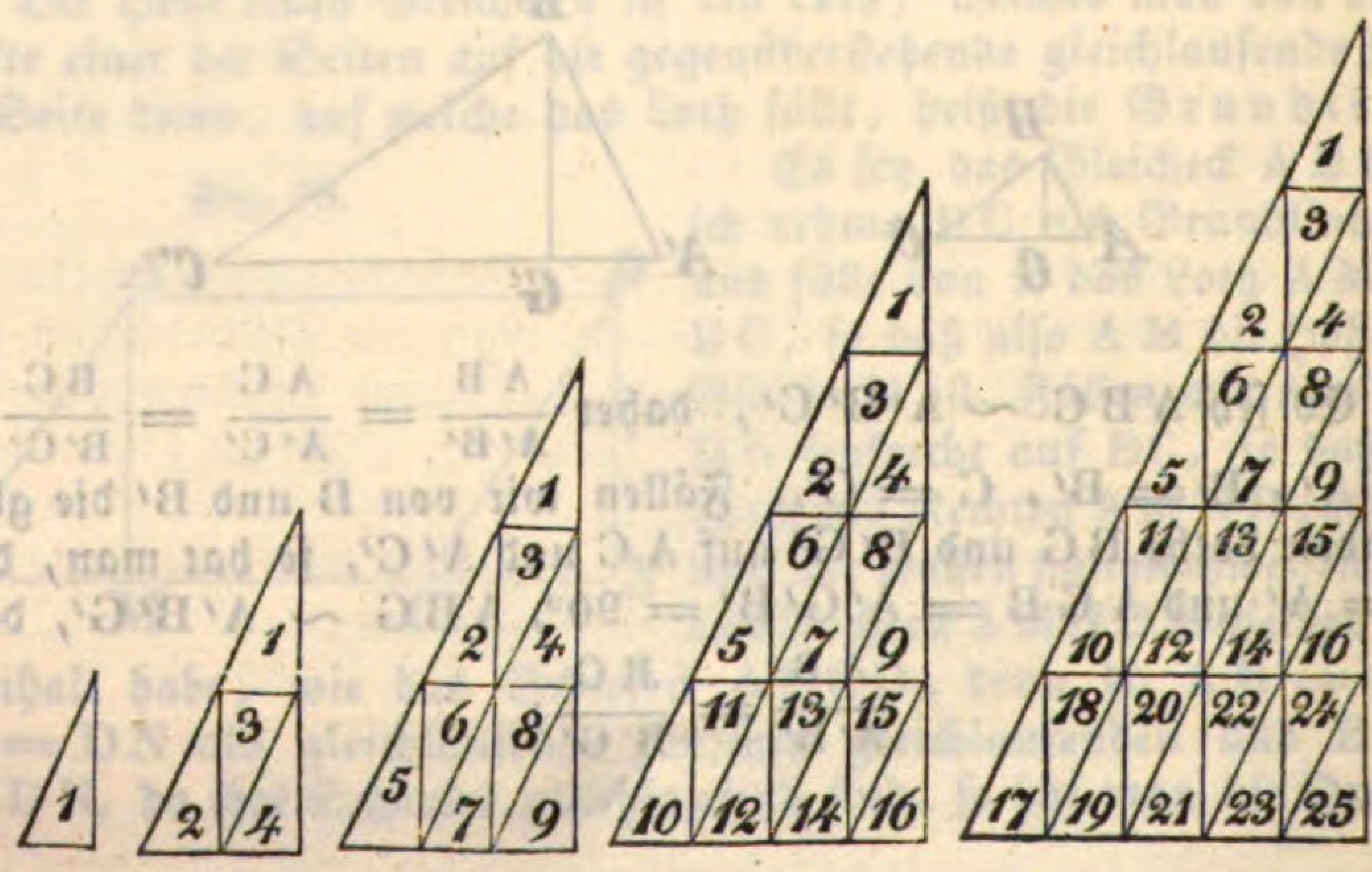
$$\frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{AC^2}{A'C'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{BG^2}{B'G'^2}; \text{ daher}$$

$$\frac{\Delta ABC}{\Delta A'B'C'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{AC^2}{A'C'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{BG^2}{BG'^2}.$$

Dieser Satz ist für das praktische Leben von hoher Wichtigkeit. Zeichnet man nämlich auf dem Papier ein Dreieck, welches einem Dreiecke auf dem Felde ähnlich ist, so ist das Dreieck auf dem Papier $\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25} \ldots \frac{1}{100}, \frac{1}{10000}$. Von dem auf dem Felde, wenn eine Seite des Dreiecks auf dem Papier $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \frac{1}{10} \ldots \frac{1}{100}$ von der gleichliegenden Seite auf dem Felde ist.

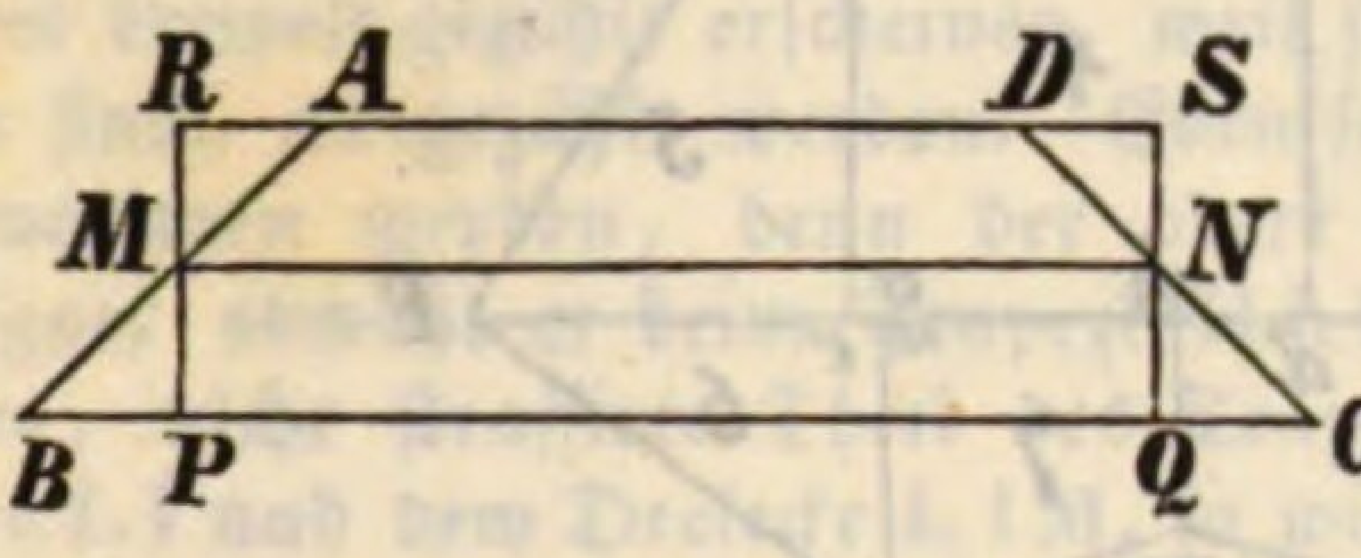
Vorstehender Satz läßt sich noch auf folgende Art erläutern. Nehmen wir ein Dreieck ABC, und zeichnen wir uns Dreiecke $A_1 B_1 C_1$, $A_2 B_2 C_2$, $A_3 B_3 C_3$ u. s. w., welche alle dem Dreiecke ABC ähnlich sind, und zwar sey $A_1 B_1 = 2 AB$, $A_2 B_2 = 3 AB$; $A_3 B_3 = 4 AB$ u. s. w. Ziehen wir durch alle Theilungspunkte gleichlaufende Geraden zu den andern Seiten des Dreiecks, so sieht man leicht, daß lauter mit ABC einerlei Dreiecke entstehen.

Fig. 81.



§. 79. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der Summe der Grundlinien, multiplicirt mit der Höhe.

Fig. 82.



Bei einem Trapeze nennt man die gleichlaufenden Seiten die Grundlinien, ihren senkrechten Abstand die Höhe.

Es seyen M und N die Mitten von AB und CD; man fällt von M und N Lothe auf BC, und verlängert diese Lothe, bis sie in R und S von der verlängerten AD getroffen werden. Man hat somit $AM = MB$, $AMR = BMP$, $MPB = ARM = 90°$; daher $ARM \equiv BPM$, ganz eben so $DNS \equiv CNQ$.

Nimmt man von der Figur ABCD die Dreiecke BMP und CNQ weg, und gibt statt ihrer die ihnen gleichgeltenden AMR und DSN hinzu, so sieht man, daß ABCD gleich ist dem Rechtecke RPQS; da nun $RPQS = RP \cdot PQ$, so hat man auch $ABCD = RP \cdot PQ$.

Aber wegen $ARM \equiv BMP$ ist $AR = BP$, und wegen $DSN \equiv CQN$ ist $DS = CQ$. Da nun $BC = BP + PQ + QC$; $AD = RS - AR - SD = PQ - BP - CQ$, so hat man $BC + AD = 2PQ$ oder $PQ = \frac{1}{2}(BC + AD)$, und somit $ABCD = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot RP$, w. z. b. w.

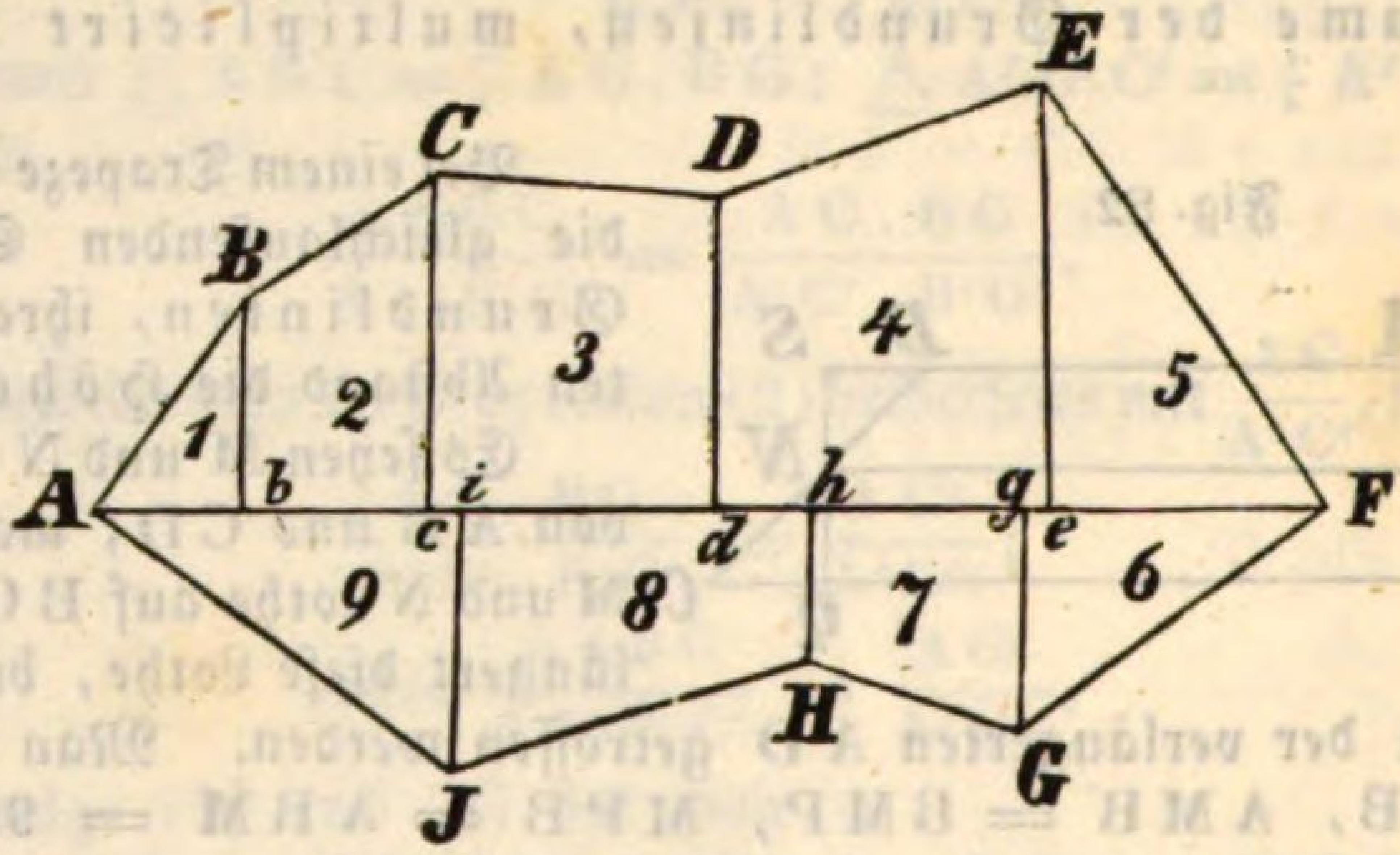
Da $AD \parallel BC$ und $RP \parallel SQ$, so ist $RP = SQ$; da nun $RM = MP$, $SN = NQ$, also $RM = \frac{1}{2} RP$; $SN = \frac{1}{2} SQ$, so ist wegen $RP = SQ$, auch $RM = SN$, und somit $MN \# RS \parallel BC$, und somit $MN = PQ = \frac{1}{2}(AD + CB)$, daher auch

$$ABCD = RP \cdot MN;$$

daher man auch sagen kann: der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich der Höhe desselben, multiplicirt mit der Verbindungslinie der Mitten der nicht gleichlaufenden Seiten.

§. 80. Da man den Flächeninhalt eines Dreiecks und Trapezes bestimmen kann, ist man im Stande, den Flächeninhalt was immer für eines Vielecks zu bestimmen, indem jede solche Figur sich in Dreiecke und Trapeze zerlegen läßt. Für die praktische Berechnung ist die Zerlegung in Trapeze am zweckmäßigsten, weil man hier weniger Gefahr läuft, größere Fehler zu begehen, die aus der natürlichen Unvollkommenheit der Zeichnung entstehen, und die unvermeidlicheren sich leichter bemerken lassen. Zu diesem Behufe ziehet man die längste Winkellinie, und fällt auf diese Lothe von allen Eckpunkten, wodurch die ganze Figur in Trapeze und einige wenige Dreiecke zerfällt.

Fig. 83.

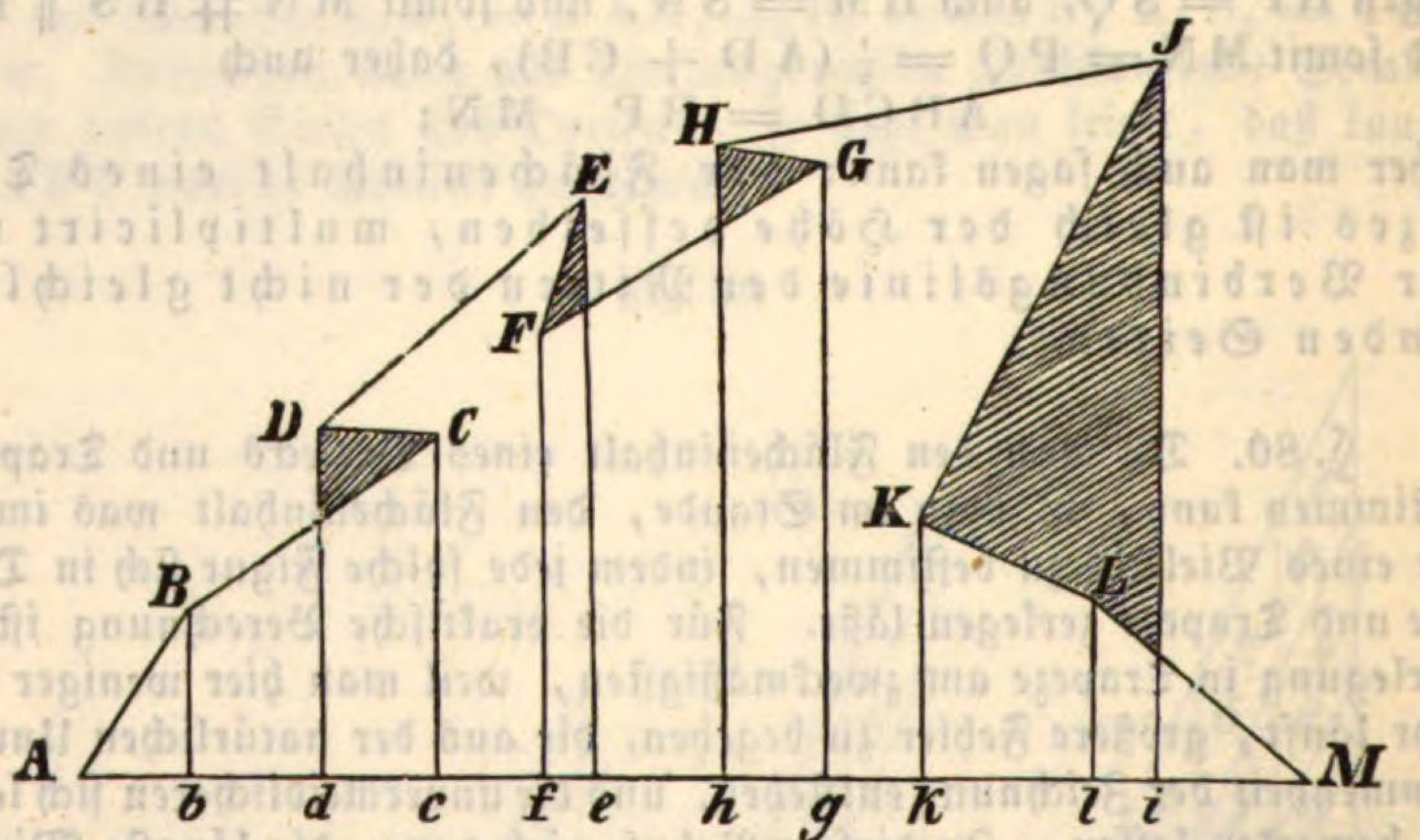


Der Flächeninhalt dieser Figur, welche aus den vier rechtwinklichten Dreiecken 1, 5, 6, 9, sonst aus lauter Trapezen besteht, ist gleich der Hälfte der nachfolgenden Summe:

$$Ab \,.\, Bb + (Bb + Cc) \,.\, bc + (Cc + Dd) \,.\, cd$$
$$+ (Dd + Ee) \,.\, de + Ee \,.\, eF + gF \,.\, Gg$$
$$+ (Gg + Hh) \,.\, hg + (Hh + Ji) \,.\, hi + Ai \,.\, Ji.$$

Eine Besonderheit, auf die wir hier aufmerksam machen' wollen, ist, daß diese Trapeze nicht immer zusammengezählt werden, sondern oft einige von ihnen abgezogen werden müssen. Nehmen wir z. B. folgende Figur, wo nur der ober der längsten Winkellinie vorkommende Theil des Vielecks gezeichnet ist.

Fig. 84.



Man sieht leicht, daß die Trapeze CcDd, EeFf, GgHh' IiKk negativ zu nehmen sind; denn der obere straffirte Theil von CcDd wird beim Trapeze DdEe, dessen Theil er ist, mitgezählt, obgleich er gar nicht ins Vieleck hinein gehört, der untere nicht straffirte Theil von CcDd würde doppelt gezählt, da er sowohl in BbCc als

in DdEe vorkömmt, daher man ihn ein Mal wegnehmen muß, und so sieht man, daß man das ganze Trapez DdCc wegnehmen muß.

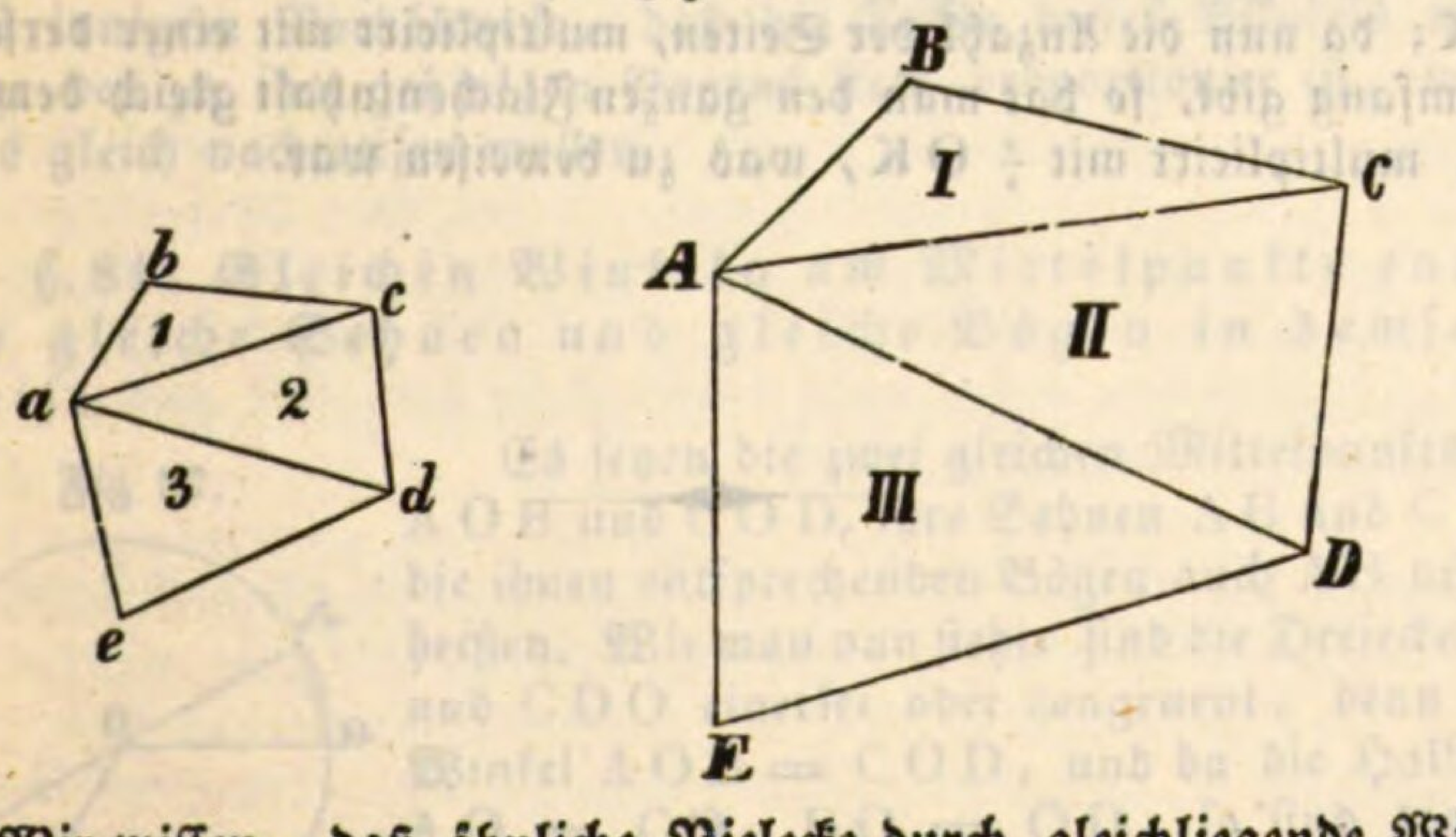
Dasselbe gilt von EeFf und GgHh, wo die straffirten oberen Theile nicht zur Figur gehören, obschon sie bei den Trapezen DdEe und HhIi mitgezählt sind; die untern nicht straffirten Theile würden aber doppelt gezählt erscheinen, weil sie bei zwei Trapezen, deren Theile sie sind, mitgezählt werden. Eben so muß das Trapez IiKk negativ genommen werden, denn der obere straffirte Theil gehört nicht zur Figur, obwohl er beim Trapeze HhIi mitgezählt wird, und der untere, nicht straffirte Theil des Trapezes ist ja schon in dem Trapeze KkLl und dem Dreiecke LlM, so wie im Trapeze HhIi, also doppelt mitgezählt. Der Flächeninhalt also der Figur ober AM ist gleich der Hälfte der nachfolgenden Summe:

$$Ab \, . \, Bb + (Bb + Cc) \, . \, bc - (Cc + Dd) \, . \, cd + (Dd + Ee) \, . \, de - (Ee + Ff) \, . \, ef + (Ff + Gg) \, . \, fg - (Gg + Hh) \, . \, gh + (Hh + Ii) \, . \, hi - (Ii + Kk) \, . \, ki + (Kk + Ll) \, . \, kl + Ll \, . \, lM.$$

Ohne erst lang Untersuchungen anzustellen, welche Trapeze positiv, welche negativ sind, erkennt man die letzteren leicht daran, daß, wenn man ein Loth auf die Winkellinie AM durch alle Eckpunkte durch den ganzen Umfang sich fortschreitend denkt, dasselbe, so oft es zurück geht, ein negatives, so oft es vorwärts geht, ein positives Trapez beschreibt. So gehet dieses Loth vorwärts von A bis C, von C bis D rückwärts, von D bis E vorwärts, von E bis F rückwärts u. s. w. Daher sind BbCc positiv, CcDd negativ, DdEe positiv, EeFf negativ u. s. w.

§. 81. **Die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten oder gleichliegenden Winkellinien.**

Fig. 85.



Wir wissen, daß ähnliche Vielecke durch gleichliegende Winkellinien ac, ad, AC, AD in ähnliche Dreiecke getheilt werden; daher $1 \sim I$, $2 \sim II$, $3 \sim III$; wir haben daher vermöge §. 67:

$$\frac{1}{I} = \frac{ab^2}{AB^2};\ \frac{2}{II} = \frac{cd^2}{CD^2};\ \frac{3}{III} = \frac{de^2}{DE^2}.$$

Da aber vermöge der Aehnlichkeit beider Figuren

$$\frac{ab}{AB} = \frac{cd}{CD} = \frac{de}{DE} = \text{u. s. w., also auch}$$

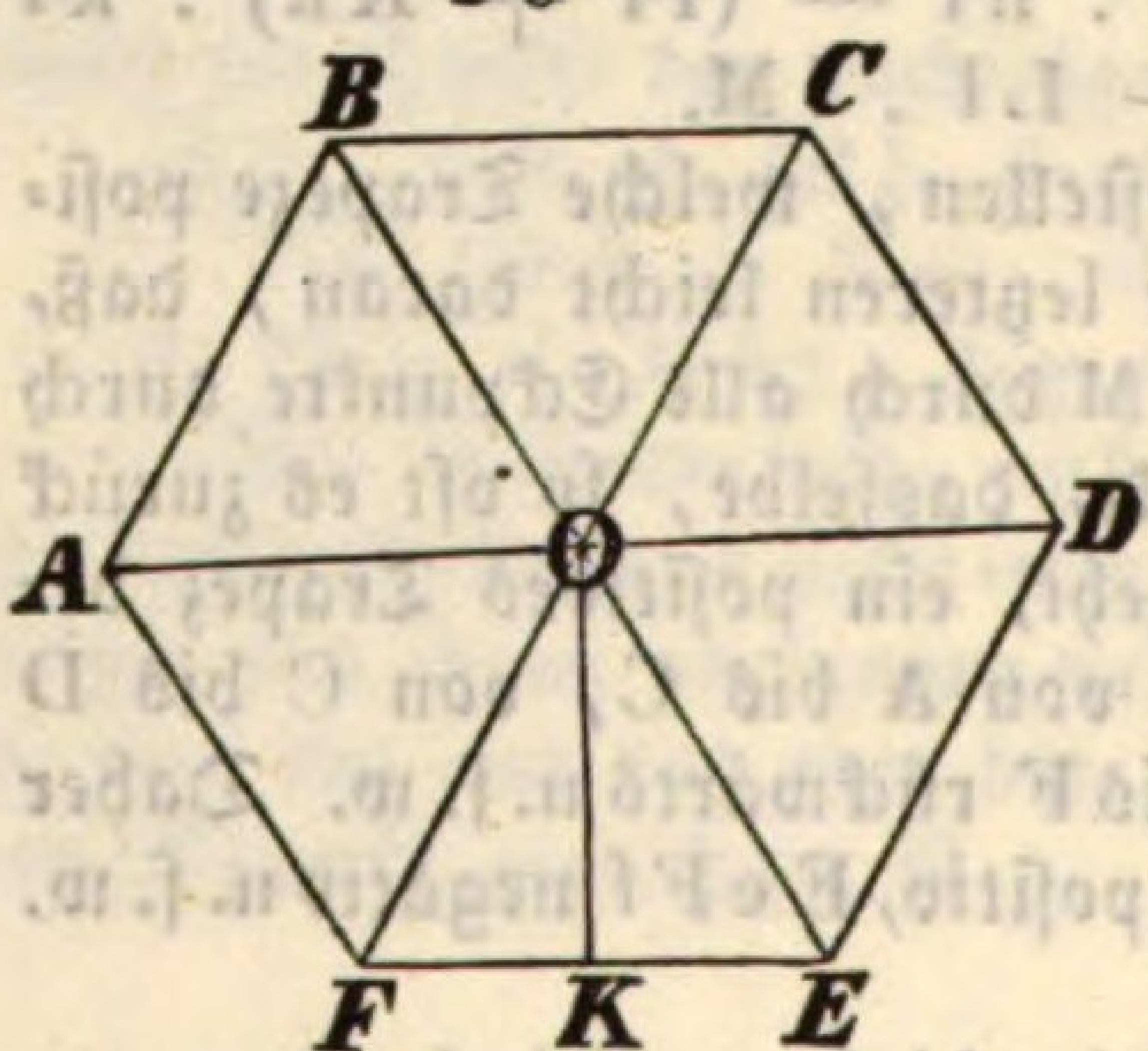
$$\frac{ab^2}{AB^2} = \frac{cd^2}{CD^2} = \frac{de^2}{DE^2} = \text{u. s. w., hat man:}$$

$$\frac{1}{I} = \frac{2}{II} = \frac{3}{III} = \frac{ab^2}{AB^2}, \text{ und folglich}$$

$$\frac{1+2+3}{I+II+III} = \frac{1}{I} = \frac{ab^2}{AB^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{abcde}{ABCDE} = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{bc^2}{BC^2} = \frac{cd^2}{CD^2} = \text{u. s. w.}$$

Fig. 86.



§. 82. **Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Umfange desselben, multiplicirt mit dem halben Lothe, welches man vom Mittelpunkte auf eine der Seiten fällt.**

Es sey das regelmäßige Vieleck ABCDE, O der Mittelpunkt, den ich mit allen Eckpunkten verbinde, wodurch lauter einerlei Dreiecke entstehen, und zwar so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Es ist daher der Flächeninhalt eines Vielecks gleich einem dieser Dreiecke FOE, multiplicirt mit der Anzahl der Seiten. Ist nun OK $\perp$ FE, so ist OFE = FE . $\frac{1}{2}$ OK, daher der Flächeninhalt des ganzen Vielecks gleich der Anzahl der Seiten, multiplicirt mit FE und $\frac{1}{2}$ OK; da nun die Anzahl der Seiten, multiplicirt mit einer derselben, den Umfang gibt, so hat man den ganzen Flächeninhalt gleich dem Umfang, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$ OK, was zu beweisen war.

Zweites Buch.

Grundlehren des Kreises.

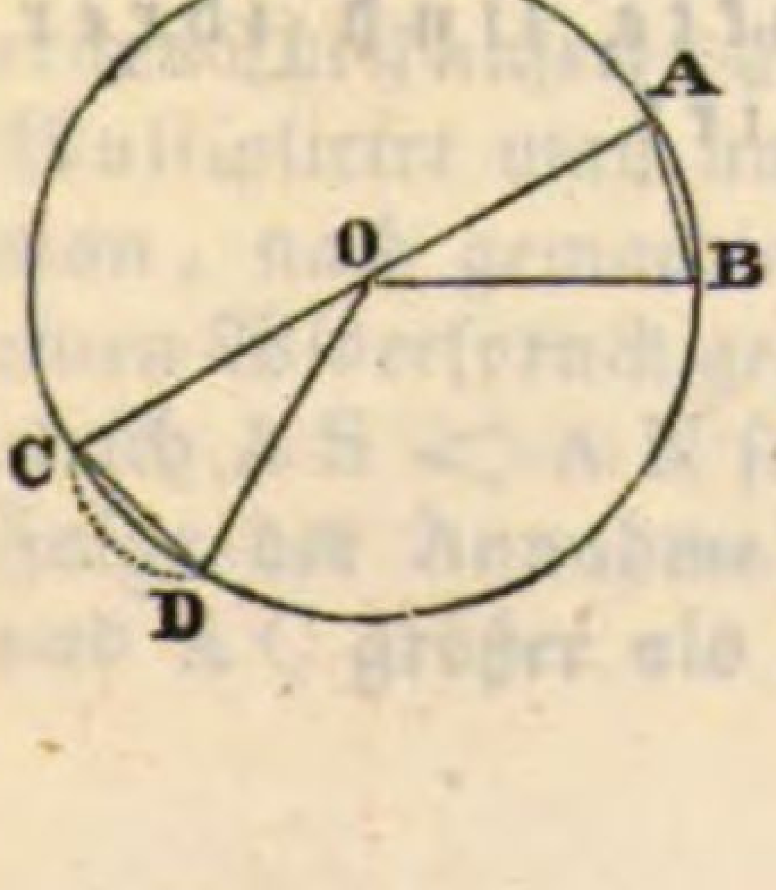
I. Der Kreis an und für sich.

§. 83. Der Kreis ist diejenige krumme Linie, wo jeder Punkt von einem in der Mitte gelegenen Punkte, Mittelpunkt (Centrum), gleichweit absteht. Jede Gerade, die den Mittelpunkt mit einem Punkte des Umfanges verbindet, heißt Halbmesser (radius). Jede Gerade, die zwei Punkte des Umfanges verbinder, heißt Sehne (chorda); die Sehne, die durch den Mittelpunkt geht, Durchmesser (diameter) des Kreises. Jedes Stück der Kreislinie heißt ein Bogen (arcus); ein durch eine Sehne abgeschnittenes Stück der Kreisfläche heißt ein Kreisabschnitt (Segment). Ein durch zwei Halbmesser und den dazwischen liegenden Bogen begrenztes Stück der Kreisfläche heißt ein Kreisausschnitt (sector).

Der Kreis steht mit den Winkeln in der innigsten Beziehung; wenn man sich von dem Schenkel eines Winkels ein bestimmtes Stück abschneidet, und diesen Schenkel um den Scheitel herumdreht, bis er wieder in seine vorige Lage kömmt, so beschreibt der Endpunkt dieses beweglichen Schenkels einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Scheitel ist; der jedesmalige Winkel steht mit dem auf diese Art erzeugten Bogen in so innigem Verhältnisse, daß die Größe dieses Winkels mit der Länge des zu ihm gehörigen Bogens stets proportionirt ist, wie wir dieses gleich nachweisen wollen.

§. 84. Gleichen Winkeln am Mittelpunkte entsprechen gleiche Sehnen und gleiche Bögen in demselben Kreise.

Fig. 87.



Es seyen die zwei gleichen Mittelpunktswinkel AOB und COD, ihre Sehnen AB und CD, wo die ihnen entsprechenden Bögen auch AB und CD heißen. Wie man nun sieht, sind die Dreiecke AOB und CDO einerlei oder congruent; denn da die Winkel AOB = COD, und da die Halbmesser AO = CO, BO = OD, so sind hier zwei Seiten des einen Dreiecks gleich zwei Seiten des andern, und die eingeschlossenen Winkel eben-

falls. Legt man nun den ganzen Kreisausschnitt A O B über den Kreisausschnitt C O D, so daß die beiden Dreiecke A O B und C O D sich decken, so müssen nicht nur die dritten Seiten beider Dreiecke A B und C D, sondern auch die Bögen A B und C D sich decken; denn würde A B so fallen, wie es der punktirte Bogen andeutet, so müßten die Punkte des Bogens A B vom Mittelpunkte O weiter entfernt seyn, als die des Bogens C D, was gegen die Voraussetzung streitet, daß die Punkte des Bogens A B in demselben Kreise liegen, wie die des Bogens C D; daher auch die Bögen A B und C D einander decken und gleich seyn müssen.

§. 85. **In demselben Kreise entsprechen gleichen Bögen auch gleiche Winkel am Mittelpunkte, und gleiche Sehnen.**

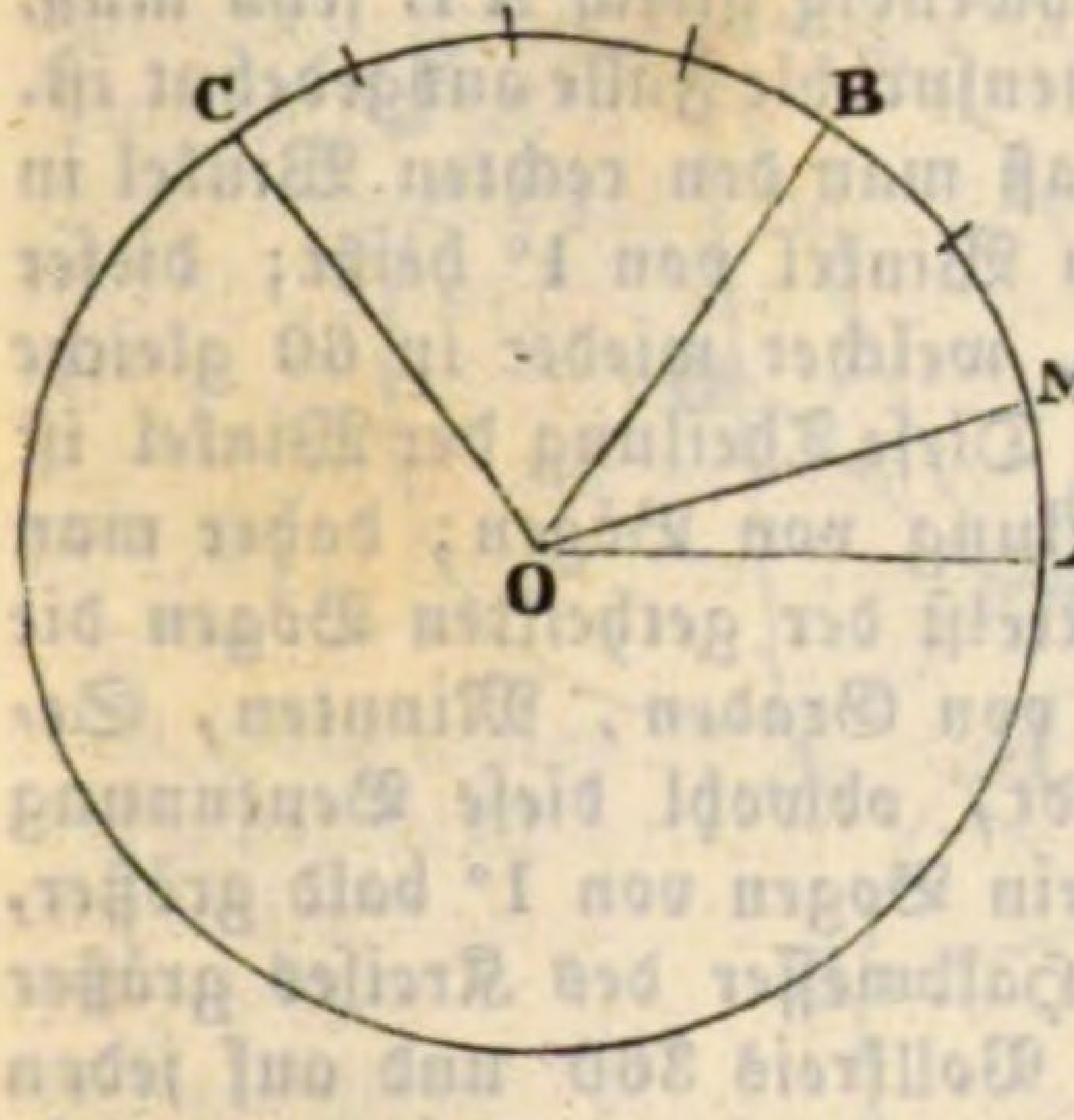
Behalten wir dieselbe Figur. Sind nun die Bögen A B und C D gleich, und ich lege den Kreisausschnitt A O B über den Kreisausschnitt C O D, so daß O über O kömmt, und O A über O C, so muß natürlich A über C fallen, da O A = O C ist, aber eben so der Bogen A B über den Bogen C D; denn würde A B die Lage des punktirten Bogens haben, oder eine andere Lage, so würden ja die Punkte des Bogens A B eine andere Entfernung von O haben, als die des Bogens C D, also nicht Punkte desselben Kreisumfanges, was der Voraussetzung widerstreitet. Fällt nun der Bogen A B über den Bogen C D, so müssen nun, da die Anfänge A und C über einander liegen, auch die Endpunkte B und D über einander fallen, da die Bögen A B und C D einander gleich sind; fällt nun B über D, so liegt natürlich O B über O D. Aus diesem Uebereinanderfallen folgt natürlich die Gleichheit der Winkel A O B und C O D, und Gleichheit ihrer Sehnen A B und C D.

§. 86. **Sind zwei Sehnen eines und desselben Kreises einander gleich, so sind auch die ihnen entsprechenden Winkel am Mittelpunkt, und die ihnen entsprechenden Bögen einander gleich.**

Denn indem wir dieselbe Figur beibehalten, sehen wir: sind die Sehnen A B und C D einander gleich, so hat man zwei congruente Dreiecke A O B und C O D, da die Halbmesser A O = C O, B O = D O sind; daher müssen die Winkel A O B und C O D einander gleich seyn, und folglich nach dem ersten unserer drei Sätze her, sind auch die entsprechenden Bögen einander gleich.

§. 87. **Die Winkel am Mittelpunkte sind ihrer zugehörigen Bögen gerade proportionirt.**

Fig. 88.

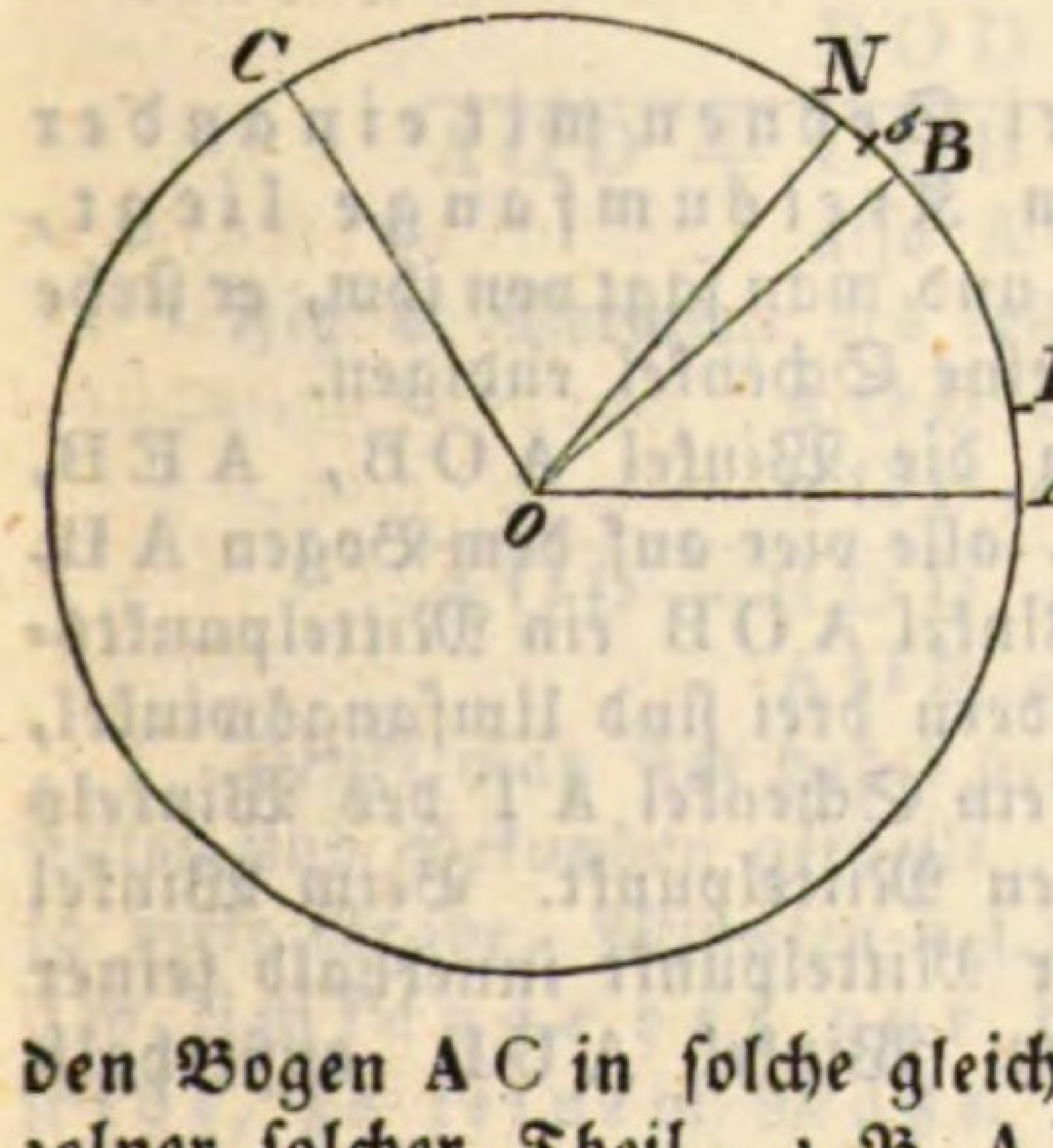


Es seyen die zwei Winkel AOB und AOC, und nehmen wir zuerst an, die Bögen AB und AC hätten das gemeinschaftliche Maß AM, so daß beispielhalber AM in AB drei Mal, in AC sieben Mal enthalten sey, daher AB = 3 AM und AC = 7 . AM; folglich AB : AC = 3 : 7. Würde man alle die Theilungspunkte dieser Bögen mit dem Mittelpunkte O verbinden, so zerfällt AOB in drei Winkel, deren Bögen jeder gleich AM ist; daher diese drei Winkel jeder gleich AOM ist. Eben so zerfällt AOC in sieben Winkel gleich AOM, und somit hat man AOB = 3 . AOM und AOC = 7 . AOM, und folglich AOB : AOC = 3 : 7, und somit

AOB : AOC = AB : AC.

Daß dieselbe Proportionalität auch Statt findet, wenn die Bögen nicht commensurabel sind, d. h. kein gemeinschaftliches Maß haben, läßt sich auf dieselbe Art nachweisen, wie man alle Sätze, die für alle commensurablen Fälle gelten, auch auf die incommensurablen erweitert.

Fig. 89.



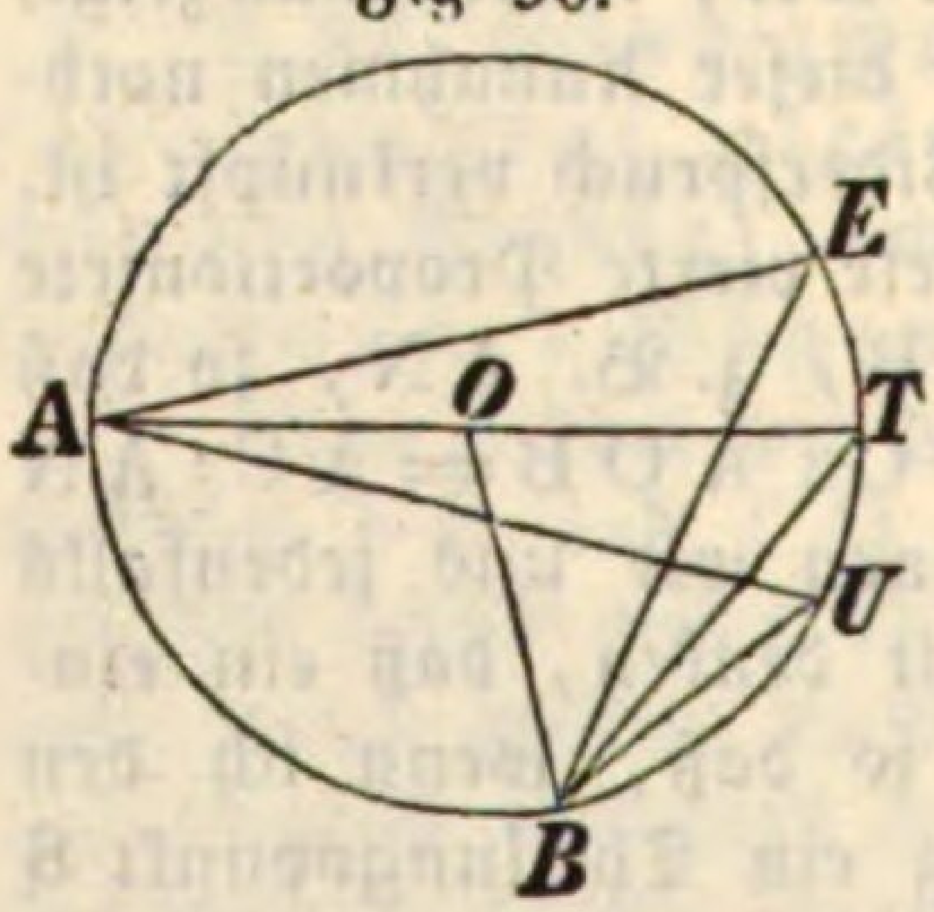
Wären nämlich die zwei Verhältnisse AOC : AOB = AC : AB nicht gleich, so suchen wir zu AOC, AOB und AC irgend eine andere vierte Proportionirte. Es läßt sich nun nachweisen, daß diese vierte Proportionirte weder größer noch kleiner seyn kann, als AB, indem man zeigt, daß mit jeder dieser Annahmen nothwendig ein Widerspruch verknüpft ist. Denn wird diese vierte Proportionirte größer als AB, z. B. AN, so daß man also AOC : AOB = AC : AN hätte, so können wir uns jedenfalls den Bogen AC in solche gleiche Theile getheilt denken, daß ein einzelner solcher Theil, z. B. AR < BN ist, so daß, wenn ich den Bogen AC in solche Theile theile, nothwendig ein Theilungspunkt S zwischen B und N fällt, so daß die Bögen AS und AC mit einander commensurabel sind, man also, wenn O mit S verbunden wird, nach dem ersten Theil unseres Beweises nothwendig hat: AOS : AOC = AS : AC. Multiplicirt man nun diese Proportion mit der vorhergehenden, so hat man, nach gemachter Abkürzung: AOS : AOB = AS : AN, was einen Widerspruch gegen sich selbst enthält; da AOS > AOB und zugleich AS < AN seyn müßte. Dieser Widerspruch ist die nothwendige Folge der Annahme, daß die vierte Proportionirte zu AOC, AOB und AC größer als AB wäre, daher diese Annahme unstatthaft ist.

Eben so läßt sich beweisen, daß diese vierte Proportionirte nicht kleiner als A B seyn kann, daher sie nothwendig gleich A B seyn muß, und unsere Behauptung auch auf incommensurable Fälle ausgedehnt ist.

Wir haben im Früheren gesagt, daß man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile theilt, deren einer ein Winkel von 1° heißt; dieser Winkel wird wieder in 60 Winkel zu 1′, welcher wieder in 60 gleiche Theile oder Winkel zu 1″ getheilt wird. Diese Theilung der Winkel ist schwieriger in der Praxis, als die Theilung von Bögen; daher man in der Praxis die Bögen theilt, und mittelst der getheilten Bögen die Winkel mißt. Dieselben Benennungen von Graden, Minuten, Sekunden werden für die Bögen angewandt, obwohl diese Benennung eigentlich den Winkeln zukömmt, da ja ein Bogen von 1° bald größer, bald kleiner seyn kann, je nachdem der Halbmesser des Kreises größer oder kleiner ist. Es kommen so auf jeden Vollkreis 360° und auf jeden Halbkreis 180°. Um die Größe eines Bogens bestimmt zu haben, reicht daher nicht hin, bloß die Grade, Minuten, Sekunden desselben anzugeben, da dadurch eigentlich bloß sein Mittelpunktswinkel bestimmt ist, sondern man muß auch die Größe des Halbmessers dazu angeben. So wie also nach dem Winkel am Mittelpunkt der Bogen benannt wird, so wird sehr oft die Länge eines Bogens für den Halbmesser = 1 als Maßstab der Größe des Winkels genommen, zu Folge der von uns so eben aus einander gesetzten Proportionalität der Winkel am Mittelpunkt und der ihnen entsprechenden Bögen.

§. 88. Ein Winkel, den zwei Sehnen mit einander bilden, und dessen Scheitel am Kreisumfange liegt, heißt ein Winkel am Umfange, und man sagt von ihm, er stehe auf dem Bogen auf, auf welchem sich seine Schenkel endigen.

Fig 90.



So stehen die Winkel A O B, A E B, A T B, A U B, alle vier auf dem Bogen A B, davon ist der Winkel A O B ein Mittelpunktswinkel, die andern drei sind Umfangswinkel, und zwar geht ein Schenkel A T des Winkels A T B durch den Mittelpunkt. Beim Winkel A E B liegt der Mittelpunkt innerhalb seiner Schenkel, beim Winkel A U B außerhalb derselben.

§. 89. Wenn ein Winkel am Umfang und ein Winkel am Mittelpunkte, beide auf demselben Bogen aufstehen, so ist stets der Winkel am Mittelpunkte doppelt so groß als der am Umfange.

Nach der so eben betrachteten Figur ergeben sich drei Fälle. 1. Entweder geht ein Schenkel des Umfangswinkels durch den Mittelpunkt, oder 2. liegt der Mittelpunkt zwischen den Schenkeln, oder 3. außerhalb der Schenkel der Umfangswinkel.

Fig. 91

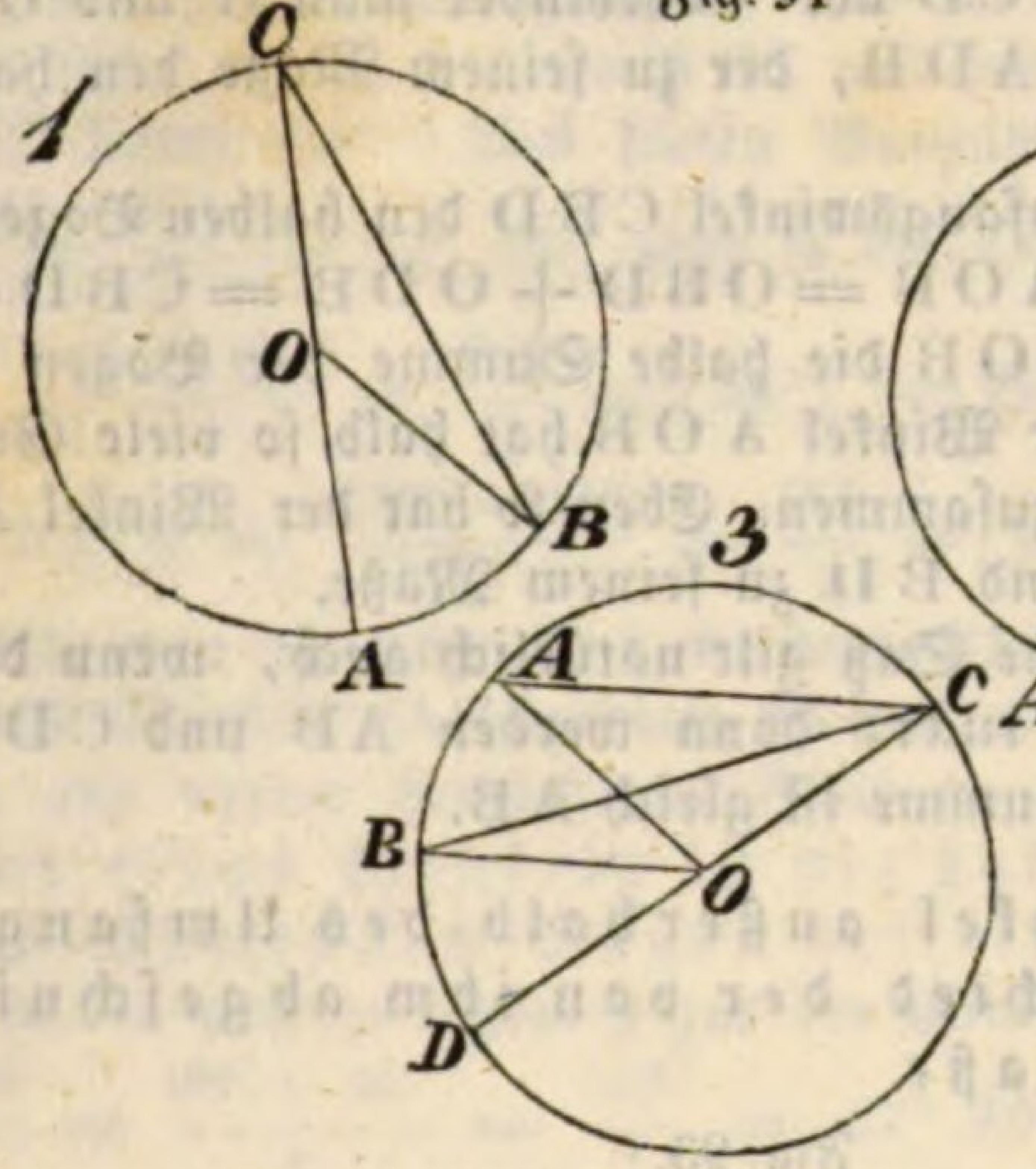


Fig. 1. AOB, als äußerer Winkel des Dreiecks BOC, ist gleich der Summe der inneren entgegengesetzten, daher $AOB = OCB + CBO$, aber $OCB = OBC$, weil $OC = OB$, daher

$$AOB = 2\,OCB.$$

Fig. 2. Vermöge des ersten Theils des Beweises ist sowohl

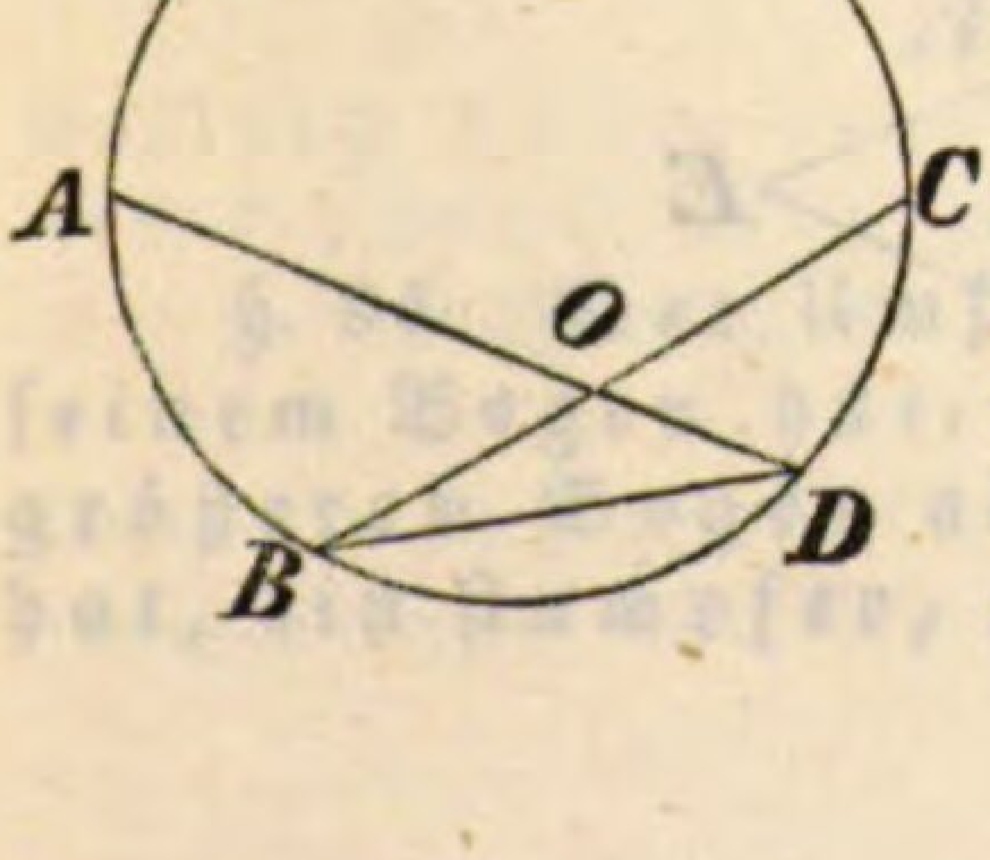
$$AOD = 2\,ACD, \text{ als}$$
$$BOD = 2\,DCB; \text{ daher}$$
$$AOD + DOB = 2\,(ACD + DCB),$$
$$\text{also } AOB = 2\,ACB.$$

Fig. 3. Vermöge des ersten Theils des Beweises ist: sowohl

$$AOD = 2\,ACD, \text{ als}$$
$$BOD = 2\,BCD; \text{ daher}$$
$$AOD - BOD = 2\,(ACD - BCD), \text{ somit}$$
$$AOB = 2\,ACB.$$

Denkt man sich daher den Umfang eines Kreises in Grade, Minuten und Sekunden getheilt so hat ein Winkel am Umfange nur halb so viele Grade, Minuten u. s. f., als sein Bogen, oder **der Winkel am Umfange hat nur den halben Bogen, auf dem er steht, zu seinem Maße.**

Fig. 92.



§. 90. **Ein Winkel innerhalb des Umfanges hat die halbe Summe der Bögen, die er spannt, zu seinem Maße**

Ein solcher Winkel, der seinen Scheitel innerhalb des Umfangs und doch nicht im Mittelpunkte hat, heißt ein Winkel innerhalb des Umfanges, wie z. B. AOB. Seine Schenkel AO und BO, so wie die Verlängerungen CO und DO über den Scheitel hinaus schnei-

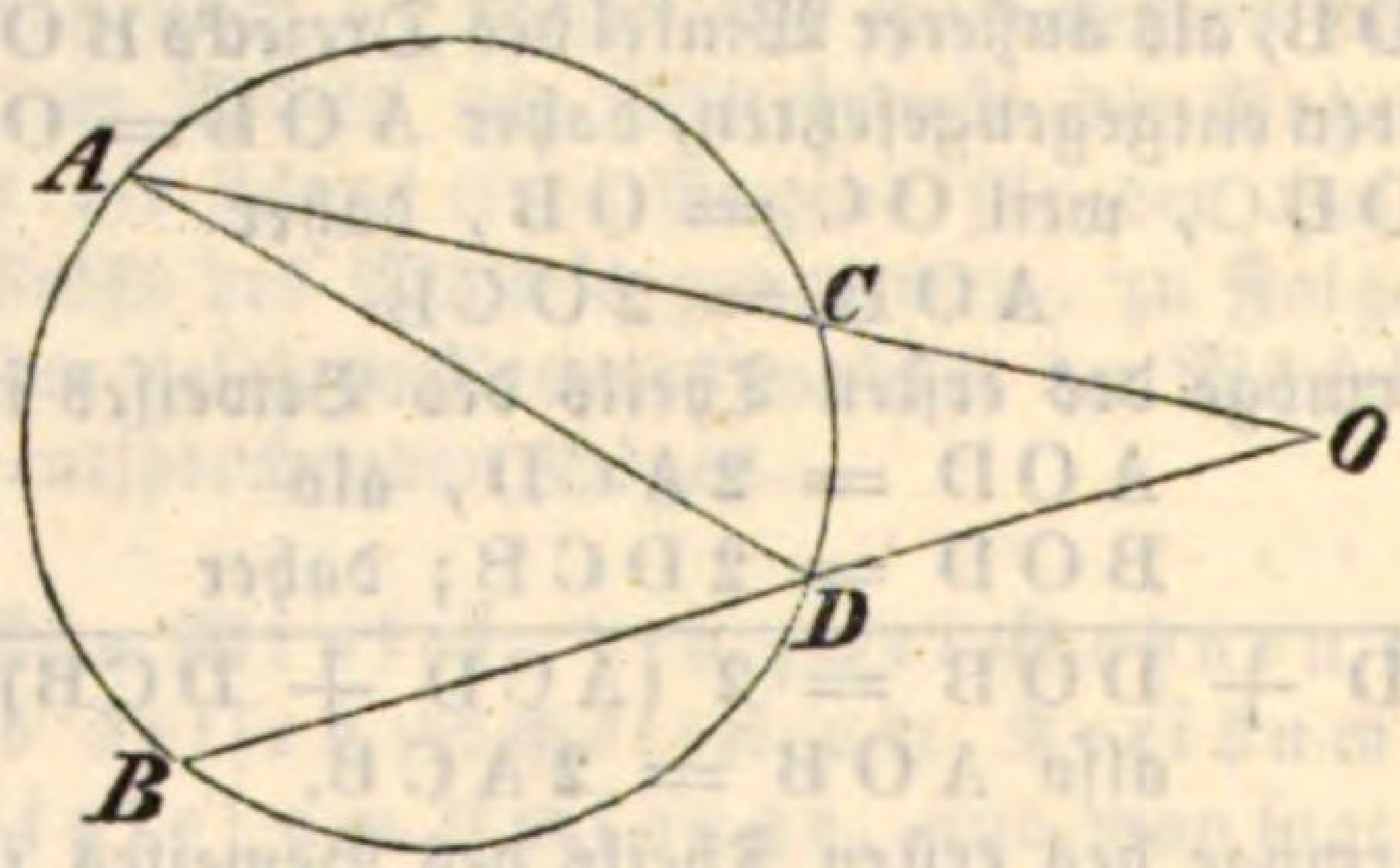
den die Bögen AB und CD ab. Verbindet man B und D, so hat man den Umfangswinkel ADB, der zu seinem Maße den halben Bogen AB hat.

Eben so hat der Umfangswinkel CBD den halben Bogen CD zu seinem Maße. Da nun AOB = OBD + ODB = CBD + ADB ist, so hat der Winkel AOB die halbe Summe der Bögen AB und CD zum Maße, oder der Winkel AOB hat halb so viele Grade, als die Bögen AB und CD zusammen. Eben so hat der Winkel AOC die halbe Summe von AC und BD zu seinem Maße.

Dieser hier bewiesene Satz gilt natürlich auch, wenn der Scheitel O in den Mittelpunkt rückt; dann werden AB und CD einander gleich, und ihre halbe Summe ist gleich AB.

§. 91. **Ein Winkel außerhalb des Umfanges hat den halben Unterschied der von ihm abgeschnittenen Bögen zu seinem Maße.**

Fig. 93.

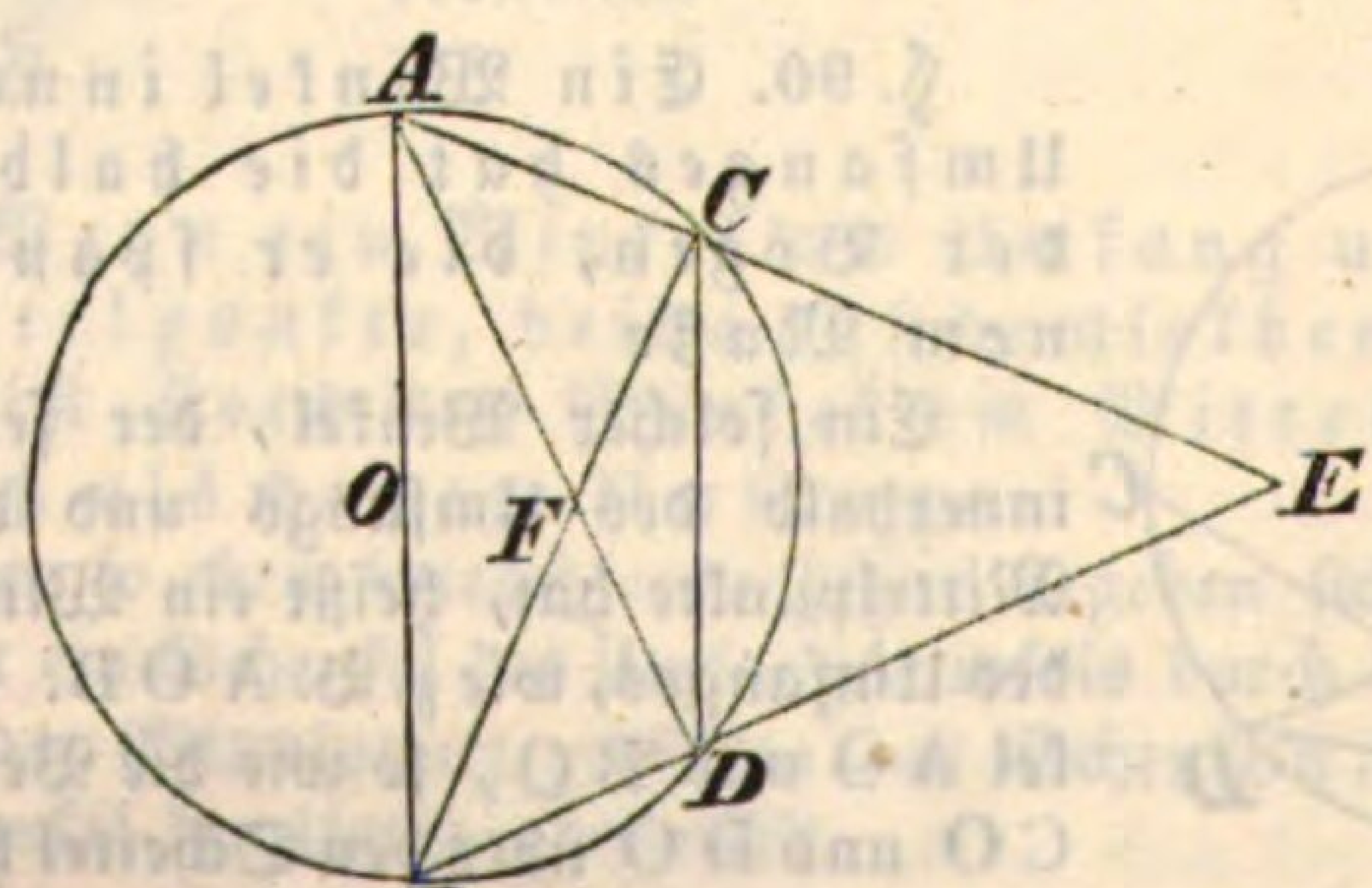


Der Winkel AOB außerhalb des Umfanges schneidet die Bögen AB und CD vom Umfange ab. Ich ziehe die Linie AD; so hat man ADB = DAC + AOB, also AOB = ADB — DAC.

Nun hat ADB den halben Bogen AB, DAC den halben Bogen CD zu seinem Maße, also AOB hat $\frac{AB - CD}{2}$ zu seinem Maße.

§. 92. Als Beispiel für die vorhergehenden Sätze möge folgende Figur dienen.

Fig. 94.



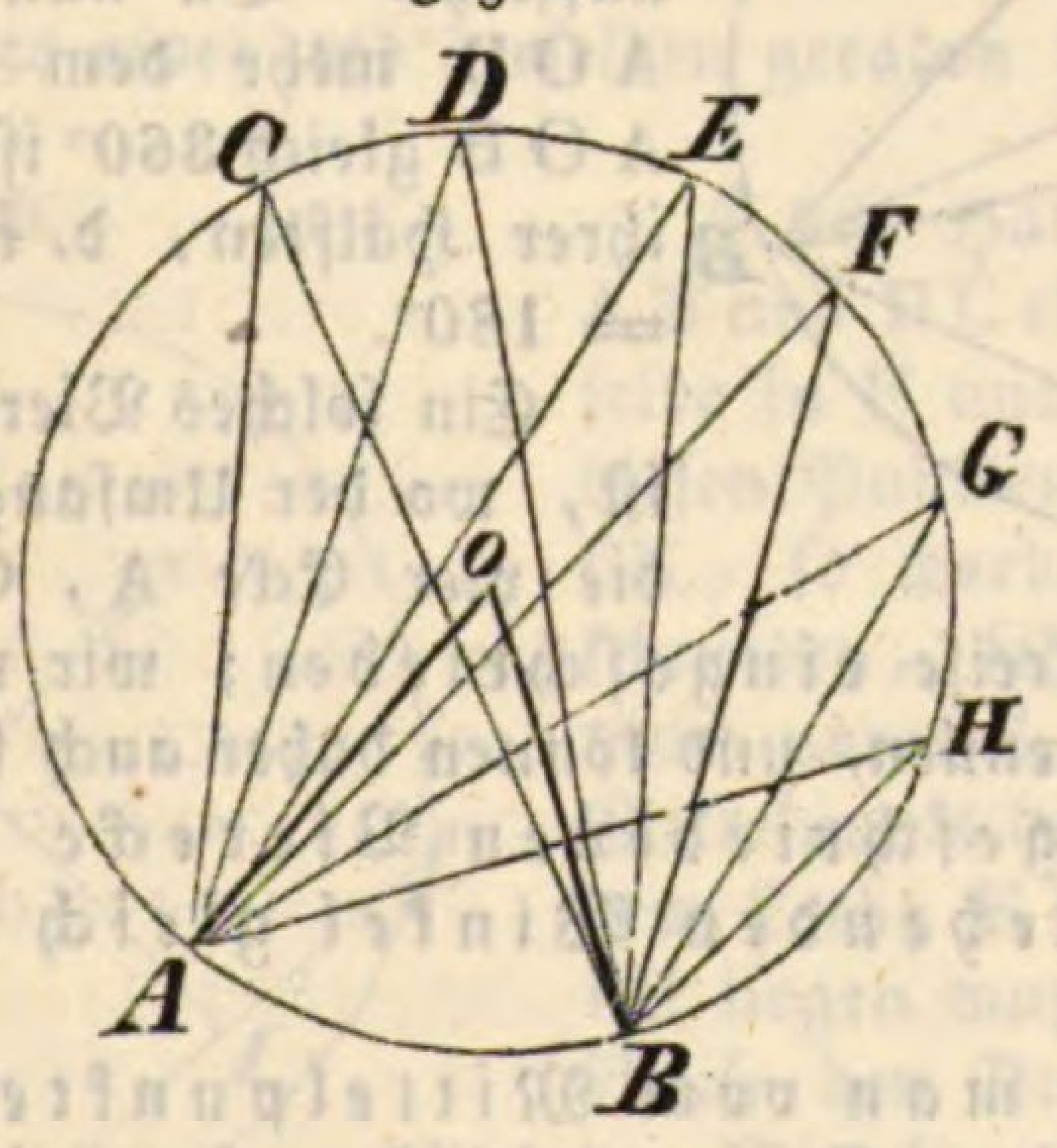
Es sey AB der Durchmesser, also ACDB der Halbkreis, der somit 180° hat; es sey AC = BD, und jeder habe 45°, so hat der Bogen CD somit 90° Aus diesen Voraussetzungen folgt der Winkel $ABC = \frac{45^\circ}{2} = 22^\circ\ 30'$, eben so $BCD = 22^\circ\ 30'$, der Winkel $AFB = \frac{180^\circ + 90^\circ}{2} = \frac{270}{2} = 135^\circ$; der Winkel $AFC = \frac{45^\circ + 45^\circ}{2} = 45^\circ$; $AEB = \frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.

Indem man bei dem im §. 91 betrachteten Falle den gegen den Scheitel des Winkels O converen Bogen als negativ betrachtet, so lassen sich alle vorher betrachteten Fälle in einem Satze ausdrücken: Das Maß eines Winkels ist die halbe Summe der von ihm abgeschnittenen Bögen desselben Kreises.

So hat in unserer letzten Figur der Winkel CDE zu seinem Maße $\frac{CD + DB}{2} = \frac{90^\circ + 45^\circ}{2} = \frac{135^\circ}{2} = 67^\circ\ 30'$, was auch dadurch klar ist, weil $CDE = CBD + BCD$, welche Winkel $\frac{CD}{2}$ und $\frac{BD}{2}$ zu ihren Maßen haben.

§. 93. Weil jeder Umfangswinkel den halben Bogen, auf dem er steht, zu seinem Maße hat, so sind alle Umfangswinkel, die auf demselben Bogen aufstehen, einander gleich; so sind hier die Winkel ACB, ADB, AEB, AFB, AGB, AHB alle einander gleich, weil jeder auf dem Bogen AB aufsteht, und daher der Hälfte des Winkels AOB gleich ist.

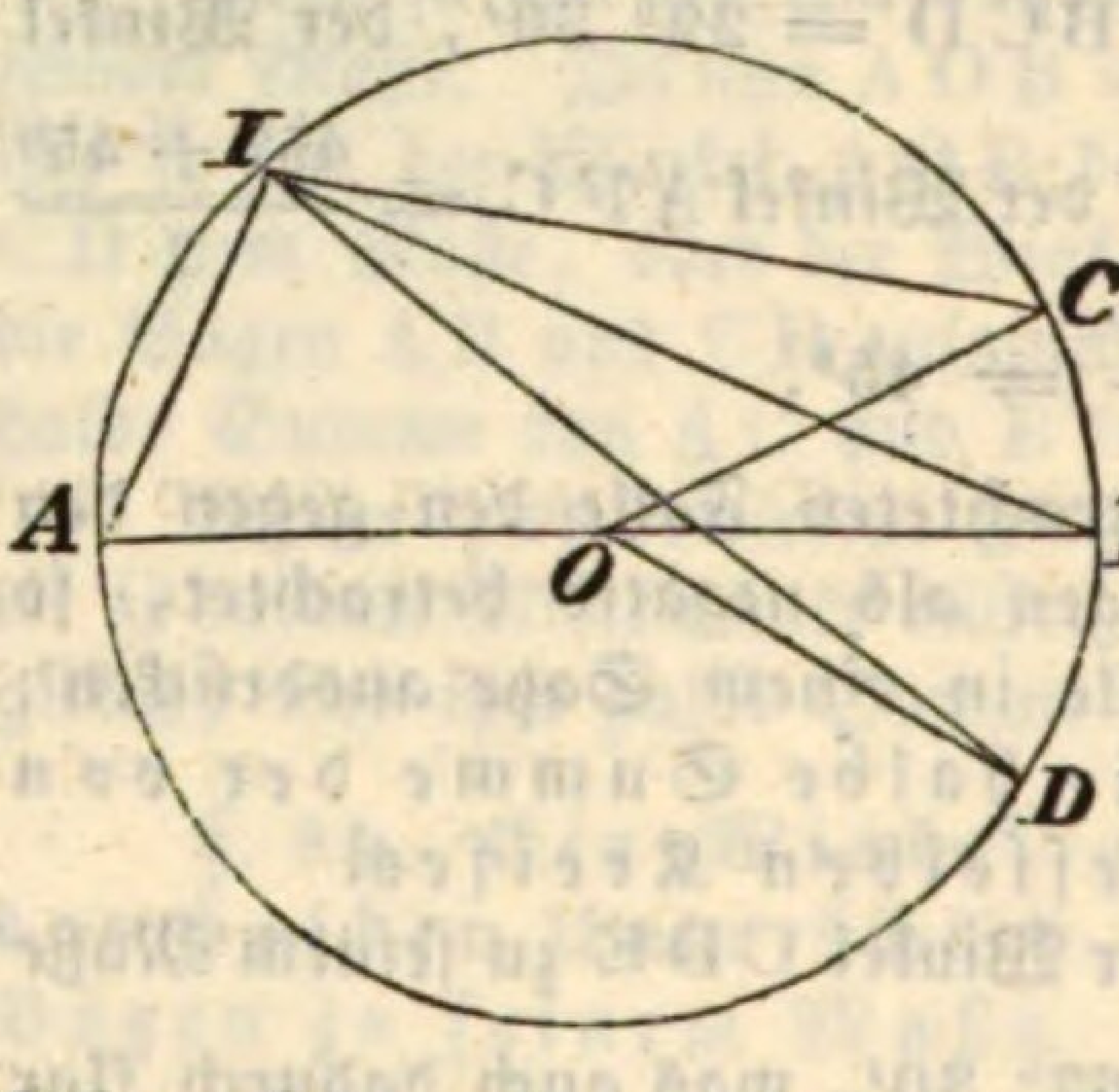
Fig. 95.



§. 94. Der Umfangswinkel, der den Halbkreis zu seinem Bogen hat, ist ein rechter Winkel, der einen größeren Bogen als den Halbkreis zu seinem Bogen hat, ein stumpfer, und der einen kleineren Bogen als

den Halbkreis zu seinem Bogen hat, ein spitziger Winkel.

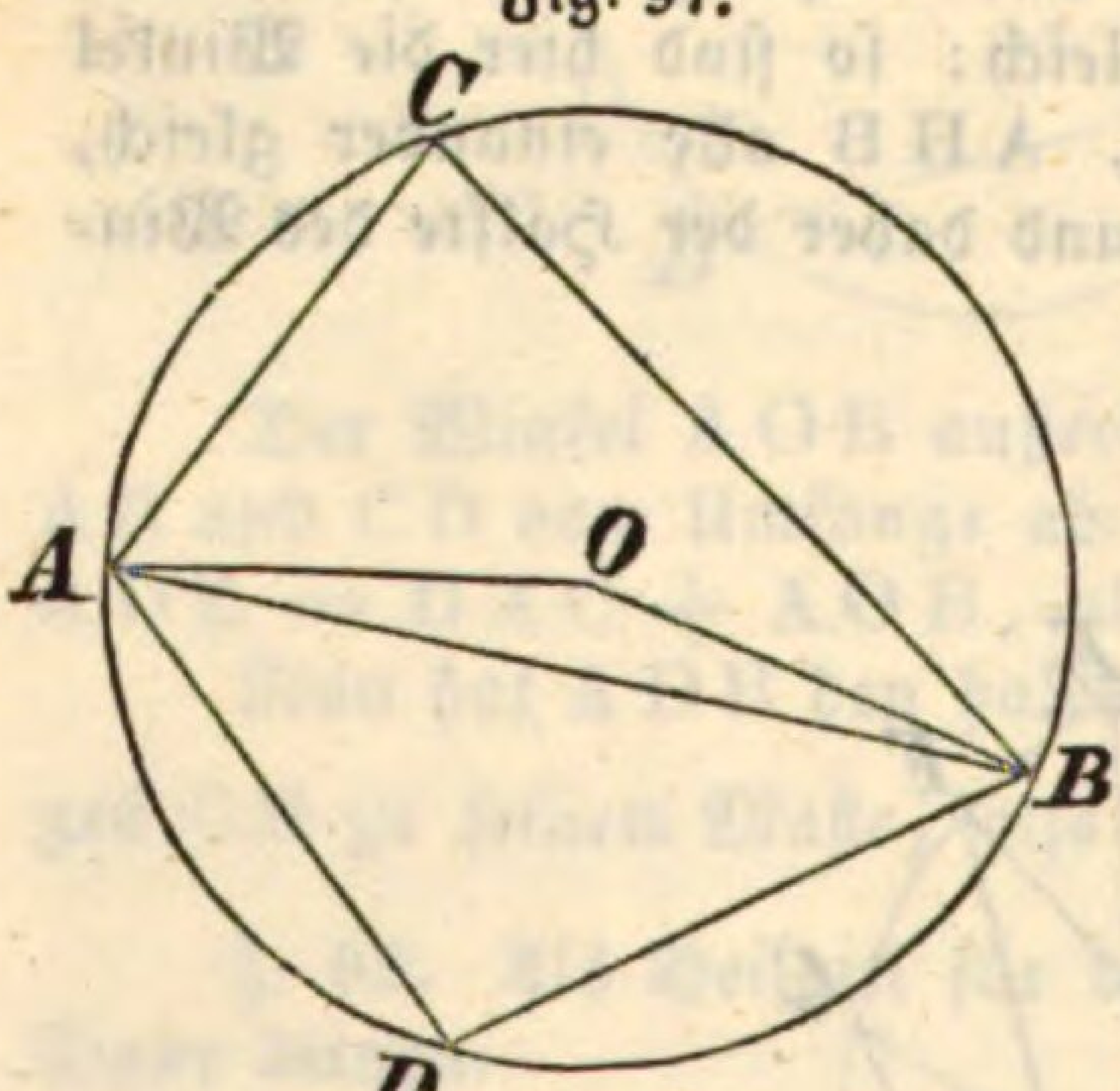
Fig. 96.



Der Winkel AIB, der den Halbkreis ADB zu seinem Bogen, und den Durchmesser AB zu seiner Sehne hat, muß nothwendig ein rechter Winkel seyn; denn der Mittelpunktswinkel, der auf dem Bogen ADB aufsteht, ist der gerade Winkel AOB = 180°, daher AIB als seine Hälfte = 90°; der Winkel AIC hat zu seinem Bogen ADBC, dessen Mittelpunktswinkel der erhabene Winkel AOC, der also größer als 180° ist, daher AIC = $\frac{1}{2}$ erhabener AOC also AIC > 90°. Der Winkel AID steht auf dem Bogen AD, dessen Mittelpunktswinkel AOD < 180°, daher AID < 90°.

§. 95. Zwei Umfangswinkel, die auf den entgegengesetzten Seiten einer und derselben Sehne aufstehen, ergänzen sich zu 180°.

Fig. 97.

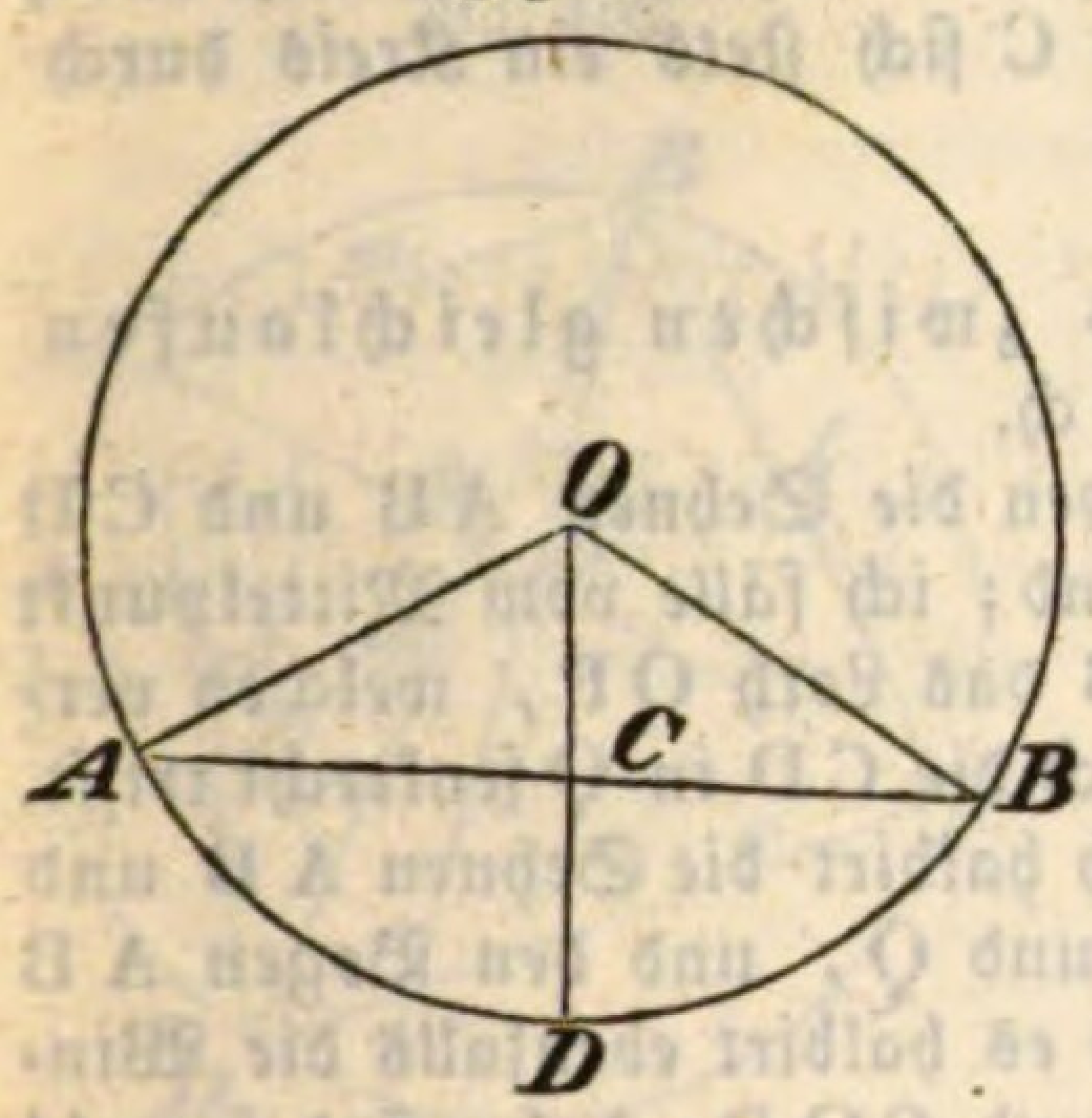


Die Winkel ACB und ADB stehen beide auf der Sehne AB auf. Es ist ACB = $\frac{1}{2}$ des hohlen Winkels AOB, der auf dem Bogen ADB aufsteht, der Winkel ADB = $\frac{1}{2}$ des erhabenen Winkels AOB, der auf dem Bogen ACB aufsteht. Da nun der hohle Winkel AOB mehr dem erhabenen Winkel AOB gleich 360° ist, so ist die Summe ihrer Hälften, d. i. ACB + ADB = 180°.

Ein solches Viereck wie hier ACDB ist, wo der Umfang des Kreises durch die vier Ecke A, C, D, B desselben gehet, heißt dem Kreise eingeschrieben; wir wollen es kurz ein Kreis-Viereck nennen, und können daher auch sagen: In jedem dem Kreise eingeschriebenen Vierecke ist die Summe der gegenüberstehenden Winkel gleich 180°.

§. 96. Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises ein Loth auf eine Sehne fällt, so wird dadurch die Sehne, der dazu gehörige Bogen und der Winkel am Mittelpunkte halbirt.

Fig. 98.



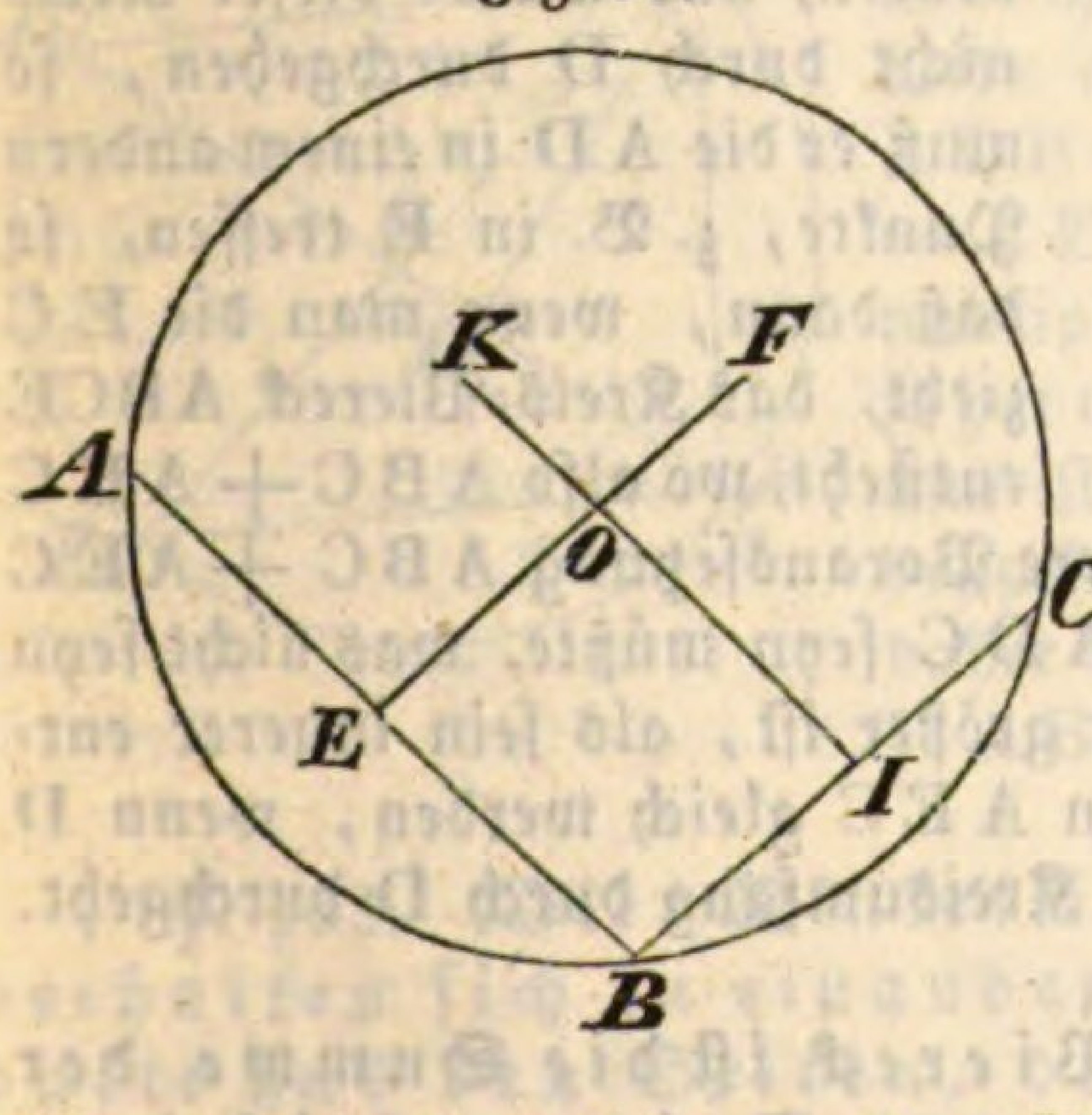
Fällt man vom Mittelpunkte O ein Loth OC auf die Sehne AB, und verbindet A und B mit O, so hat man das gleichschenklichte Dreieck AOB, und man weiß, wenn man im gleichschenklichten Dreiecke vom Scheitel auf die Grundlinie ein Loth fällt, so wird dadurch die Grundlinie und der Winkel am Scheitel halbirt; daher AC = CB, und AOC = COB oder AOD = DOB, daher auch die Bögen AD und DB gleich sind.

§. 97. **Errichtet man in der Mitte einer Sehne ein Loth, so muß dieses durch den Mittelpunkt des Kreises durchgehen.**

Ist in der vorhergehenden Figur C die Mitte der Sehne AB, und ich errichte in C ein Loth auf AB, so muß dieses Loth durch den Mittelpunkt O des Kreises durchgehen; denn AOB ist ein gleichschenklichtes Dreieck, und wenn man in der Mitte der Grundlinie eines gleichschenklichten Dreiecks ein Loth errichtet, so muß dieses durch den Scheitel O desselben gehen.

Indem man sich die Lehrsätze des gleichschenklichten Dreiecks gut vor Augen hält, und hier auf den Kreis anwendet, so gelangt man zu dem allgemeinen Ergebnisse, daß folgende vier Eigenschaften: 1. den Winkel der Halbmesser halbiren; 2. durch den Mittelpunkt durchgehen und auf der Sehne senkrecht stehen; 3. senkrecht durch die Mitte der Sehne durchgehen; 4. die Mitte der Sehne und des zugehörigen Bogens verbinden, stets einer und derselben geraden Linie zukommen.

Fig. 99.



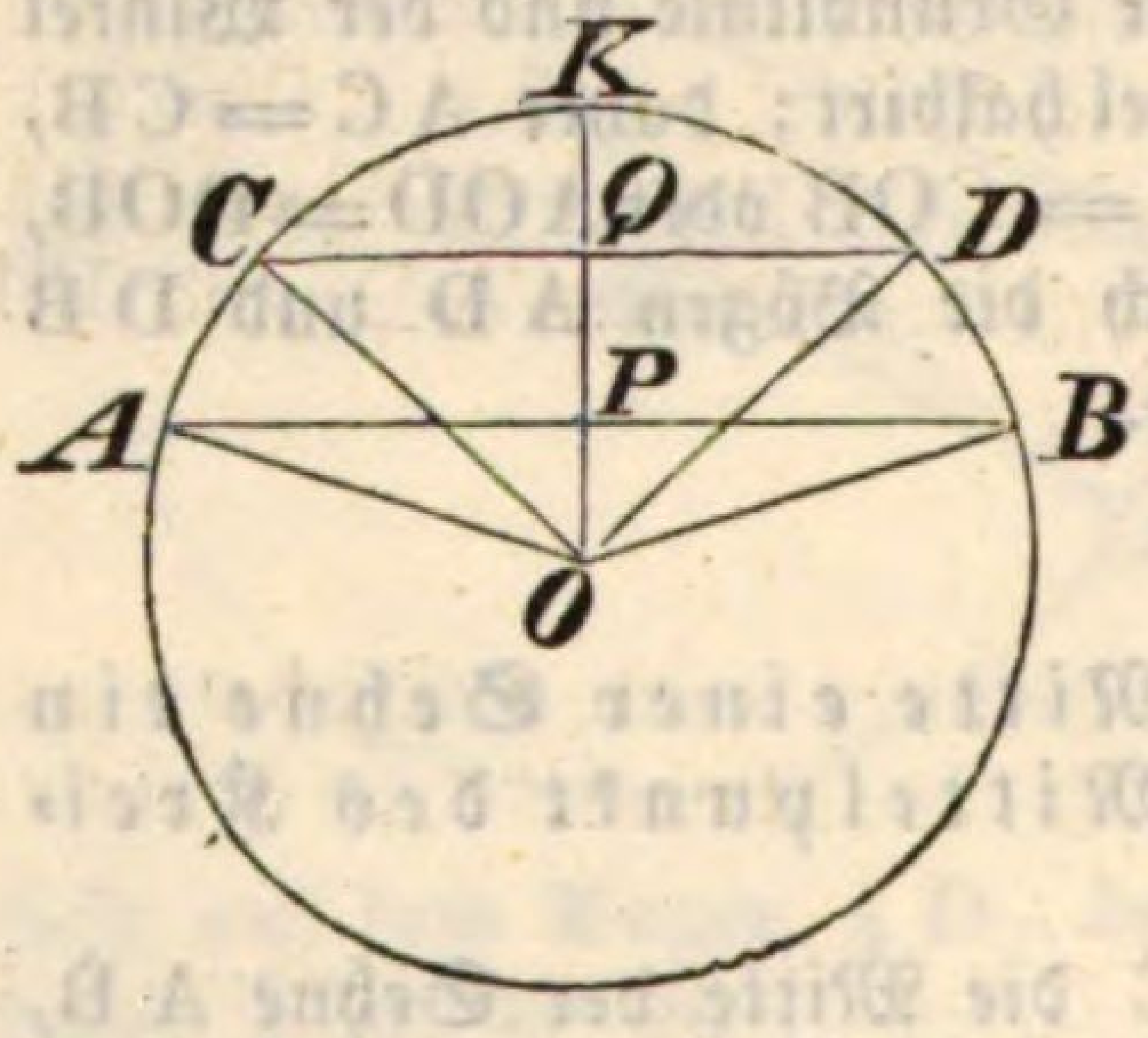
§. 98. Hat man zwei Sehnen AB und BC eines Kreises, halbirt selbe in E und I, und errichtet in diesen Punkten die Lothe EF und IK, so werden sich diese Lothe schneiden, sobald AB und BC nicht parallel sind. Da nun der Mittelpunkt des Kreises sowohl in dem Lothe EF als in dem Lothe IK liegen muß, so ist natürlicher Weise der Durchschnittspunkt O der Mittelpunkt des Kreises.

Würde man nun noch die Sehne AC ziehen, und in ihrer Mitte ein Loth errichten, so müßte auch dieses durch den Mittelpunkt O durchgehen. Diese Betrachtungen geben uns somit das Hilfsmittel,

den Mittelpunkt eines Kreises zu finden, und lehren uns, daß durch was immer für drei Punkte A, B und C sich stets ein Kreis durchlegen läßt.

§. 99. **Bögen eines Kreises zwischen gleichlaufenden Sehnen sind einander gleich.**

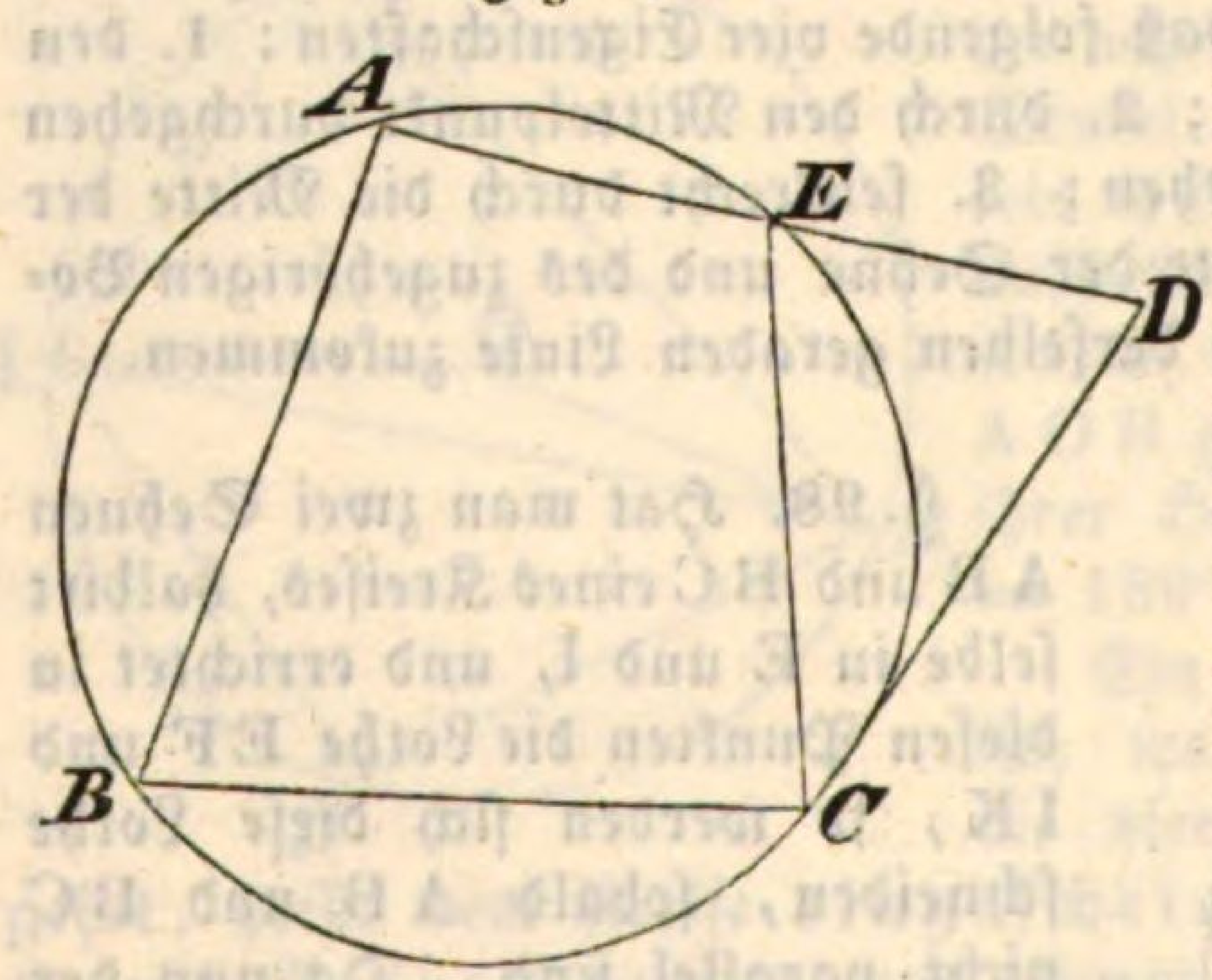
Fig. 100.



Es seyen die Sehnen AB und CD gleichlaufend; ich fälle vom Mittelpunkt O auf AB das Loth OP, welches verlängert auch die CD in Q senkrecht trifft. Dieses Loth halbirt die Sehnen AB und CD in P und Q, und den Bogen AB in K, und es halbirt ebenfalls die Winkel AOB und COD; daher sind sowohl die Bögen AK = KB, als auch CK = KD, daher auch AK − CK = KB − KD, d. h. AC = BD.

§. 100. **Ist in einem Vierecke die Summe je zwei einander gegenüberstehender Winkel gleich 180°, so läßt sich durch die vier Eckpunkte dieses Vierecks ein Kreis durchziehen, oder es läßt sich diesem Vierecke ein Kreis umschreiben,** d. h. das Viereck ist dann ein Kreis-Viereck.

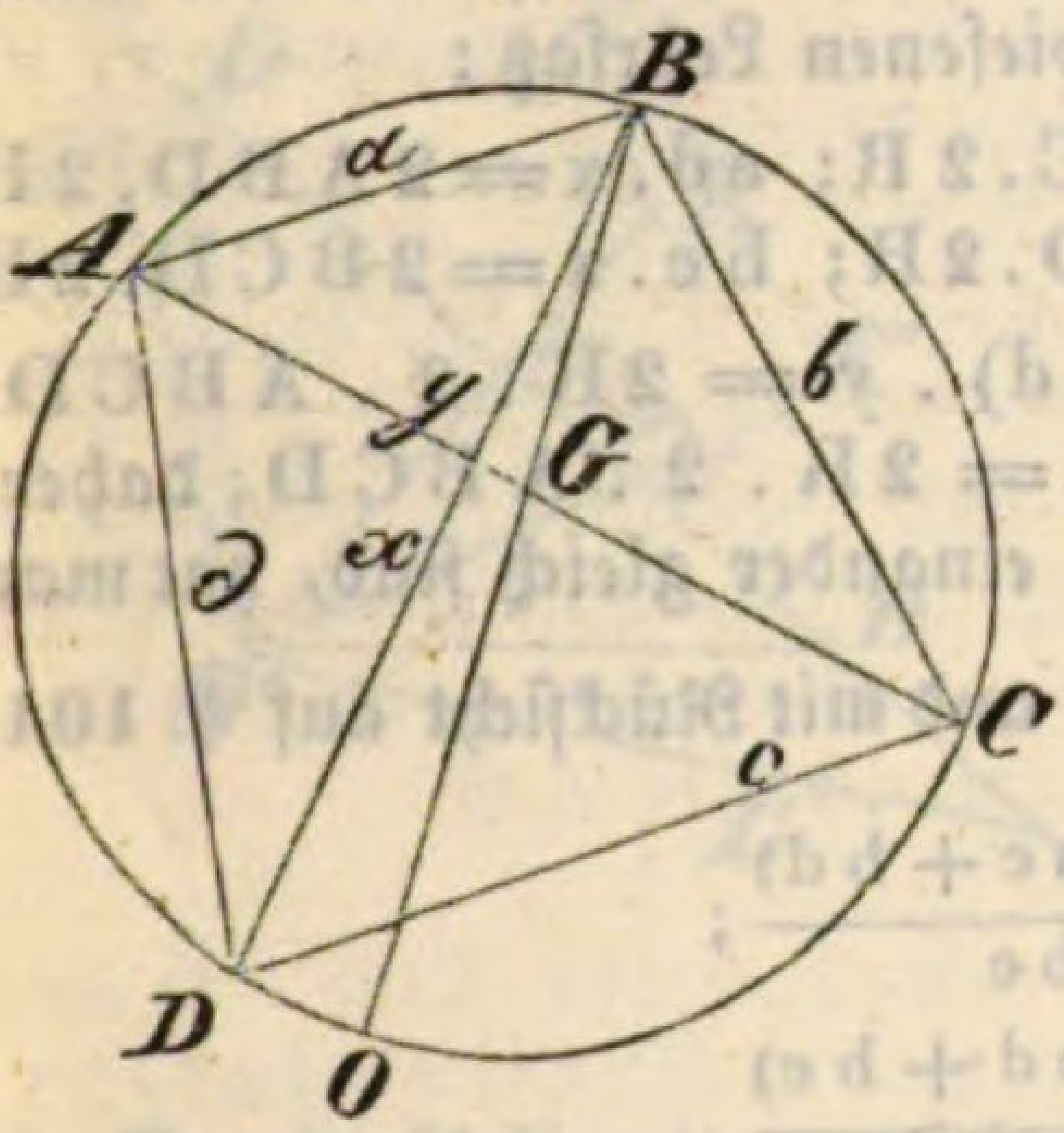
Fig. 101.



Gesetzt es wäre im Vierecke ABCD, ABC + ADC = 180°, so müssen A, B, C und D in einem Kreisumfange liegen; denn wäre dieses nicht der Fall, so können wir uns jedenfalls durch A, B und C einen Kreis denken, und würde dieser Kreis nicht durch D durchgehen, so muß er die AD in einem andern Punkte, z. B. in E treffen, so daß dann, wenn man die EC zieht, das Kreis-Viereck ABCE entsteht, wo also ABC + AEC = 180°, daher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung ABC + AEC = ABC + ADC, d. h. AEC = ADC seyn müßte, was nicht seyn kann, da ein äußerer Winkel jederzeit größer ist, als sein innerer entgegengesetzter. ADC kann nur dann AEC gleich werden, wenn D mit E zusammenfällt, d. h. wenn der Kreisumfang durch D durchgeht.

§. 101. **In jedem Kreis-Viereck ist die Summe der Produkte der gegenüberstehenden Seiten gleich dem Produkte der beiden Winkellinien (Diagonalen).**

Fig. 102.



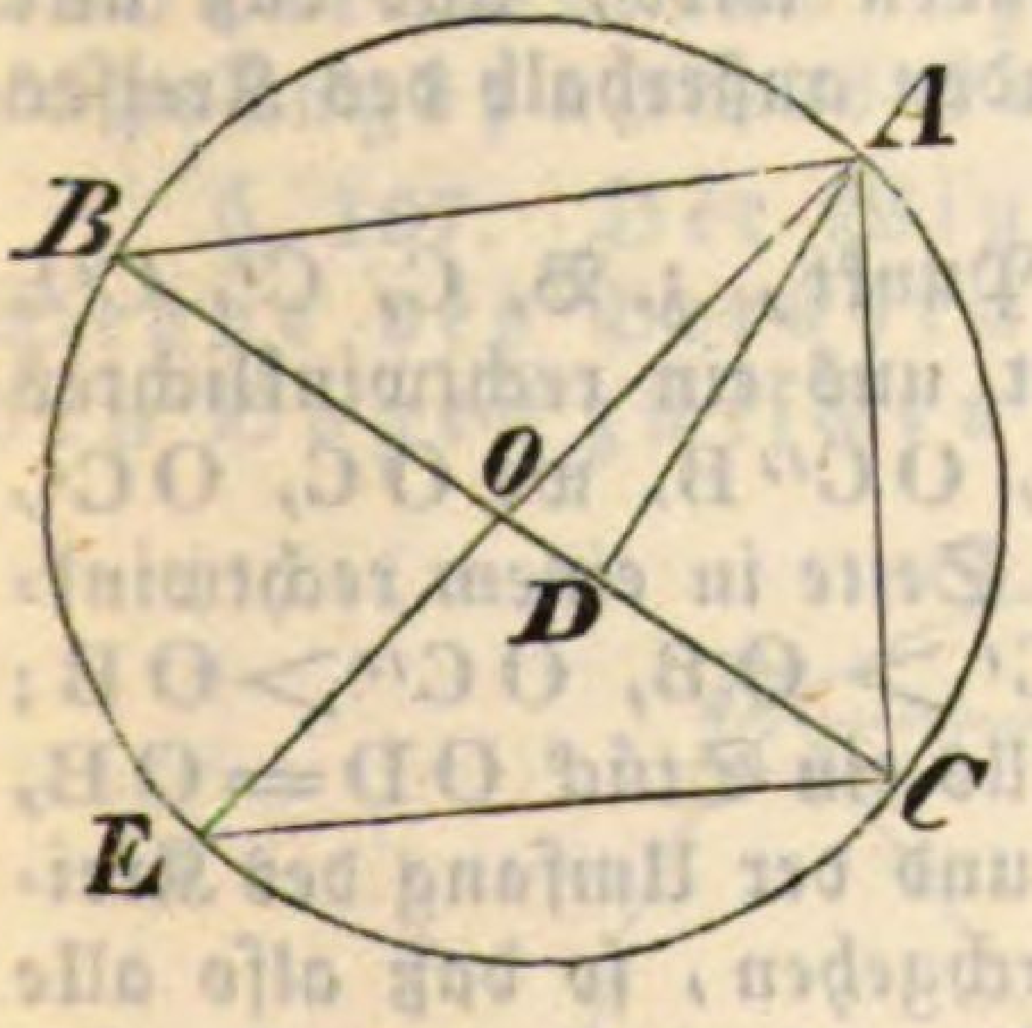
Es sey das Kreis-Viereck ABCD, die vier Seiten AB, BC, CD, DA wollen wir kurz a, b, c, d, und die zwei Winkellinien BD und AC, x und y nennen. — Ich mache den Bogen AO = CD, so daß die Winkel ABO = CBD, und den Punkt, wo die BO die AC schneidet, nenne ich G.

Man findet zuerst, daß die Dreiecke ABG und BCD ähnlich sind; denn ABG = CBD, und BAG = BDC, weil beide auf demselben Bogen BC aufstehen; daher hat man: AG : a = c : x, daher AG . x = a . c. Eben so sind aber die Dreiecke ABD und BGC einander ähnlich; denn BDA = BCG, weil sie auf demselben Bogen AB aufstehen, und ABD = CBG, weil sie auf gleichen Bögen AD = CO = AO — DO = CD — DO aufstehen: daher GC : b = d : x; daher GC . x = b . d.

Durch Addition dieser und der vorhergehenden Gleichung erhält man AG . x + GC . x = a . c + b . d, oder da AG + GC = AC = y ist, so hat man: x . y = a . c + b . d.

§. 102. **Das Produkt der drei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem doppelten Flächeninhalt desselben multiplicirt mit dem Durchmesser des umschriebenen Kreises.**

Fig. 103.

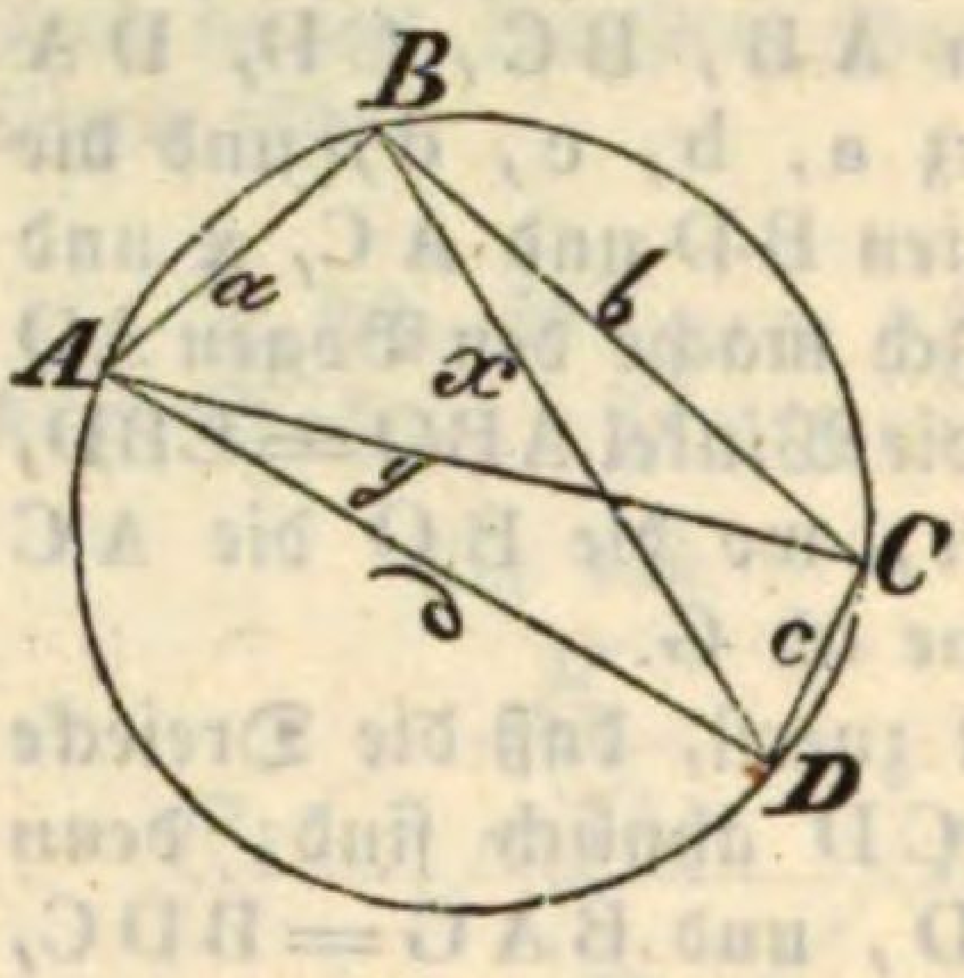


AE sey der Durchmesser des dem Dreiecke ABC umschriebenen Kreises; ich fälle das Loth AD auf BC, so sind die zwei Dreiecke ABD und AEC mit einander ähnlich; denn ABD = AEC, weil sie beide auf dem Bogen AC aufstehen, und ADB = ACE = 90°; daher AB : AD = AE : AC, folglich AB . AC = AD . AE; multiplicirt man nun beiderseits mit BC, so hat man AB . AC . BC = BC . AD . AE, nun ist BC . AD = 2 . ABC, d. h. dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks ABC; daher hat man:

AB . AC . BC = 2 . ABC . AE.

§. 103. **Die Winkellinien eines Kreis-Vierecks verhalten sich zu einander, wie die Summen der Produkte aus den Seiten, die in den Endpunkten dieser Winkellinien zusammentreffen.**

Fig. 104.



Nennen wir den Durchmesser dieses Kreises der Kürze halber 2R, so haben wir nach dem so eben bewiesenen Lehrsatz:

$ab.y = 2ABC.2R$; $ad.x = 2ABD.2R$
$cd.y = 2ACD.2R$; $bc.x = 2BCD.2R$
daher $(ab + cd).y = 2R.2.ABCD$
$(ad + bc).x = 2R.2.ABCD$; daher, da beide Größen einander gleich sind, hat man $\frac{x}{y} = \frac{ab + cd}{ad + bc}$, und mit Rücksicht auf §. 101,

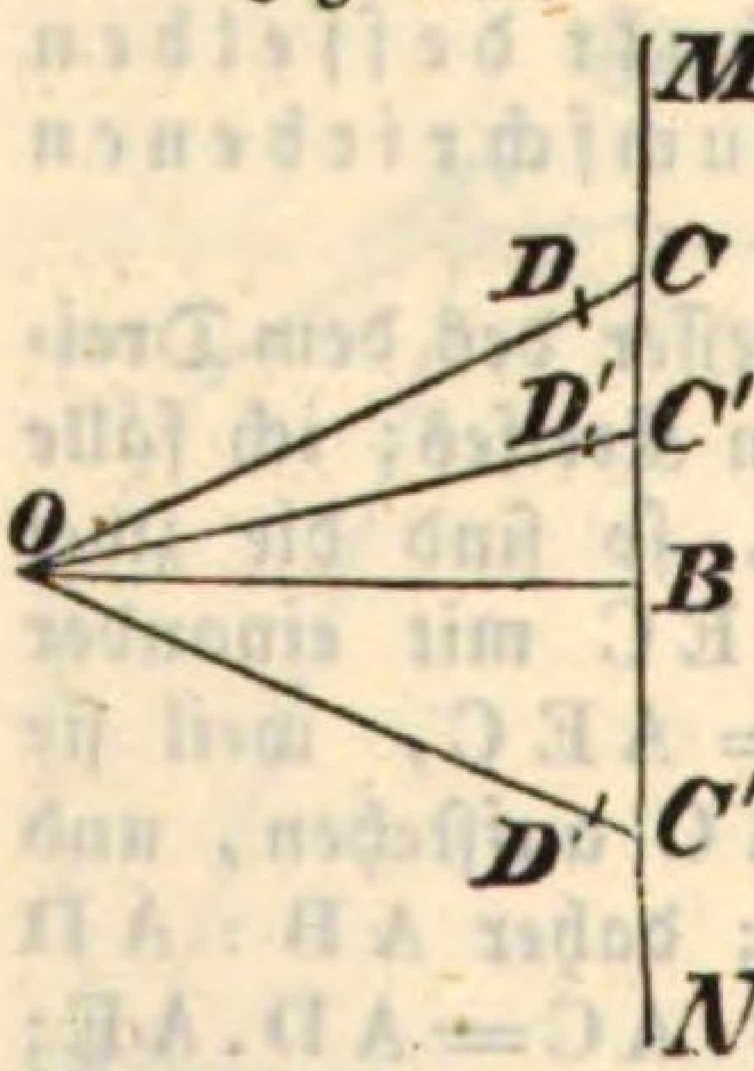
$$x^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc};$$

$$y^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

§. 104. Man sagt: eine gerade Linie berühre eine krumme, wenn beide einen Punkt mit einander gemein haben, und vor dem Zusammentreffen und nach dem Zusammentreffen die gerade Linie auf derselben Seite der krummen liegt.

Jede gerade Linie, die senkrecht durch den äußern Endpunkt des Halbmessers gehet, berührt den Kreisumfang.

Fig. 105.

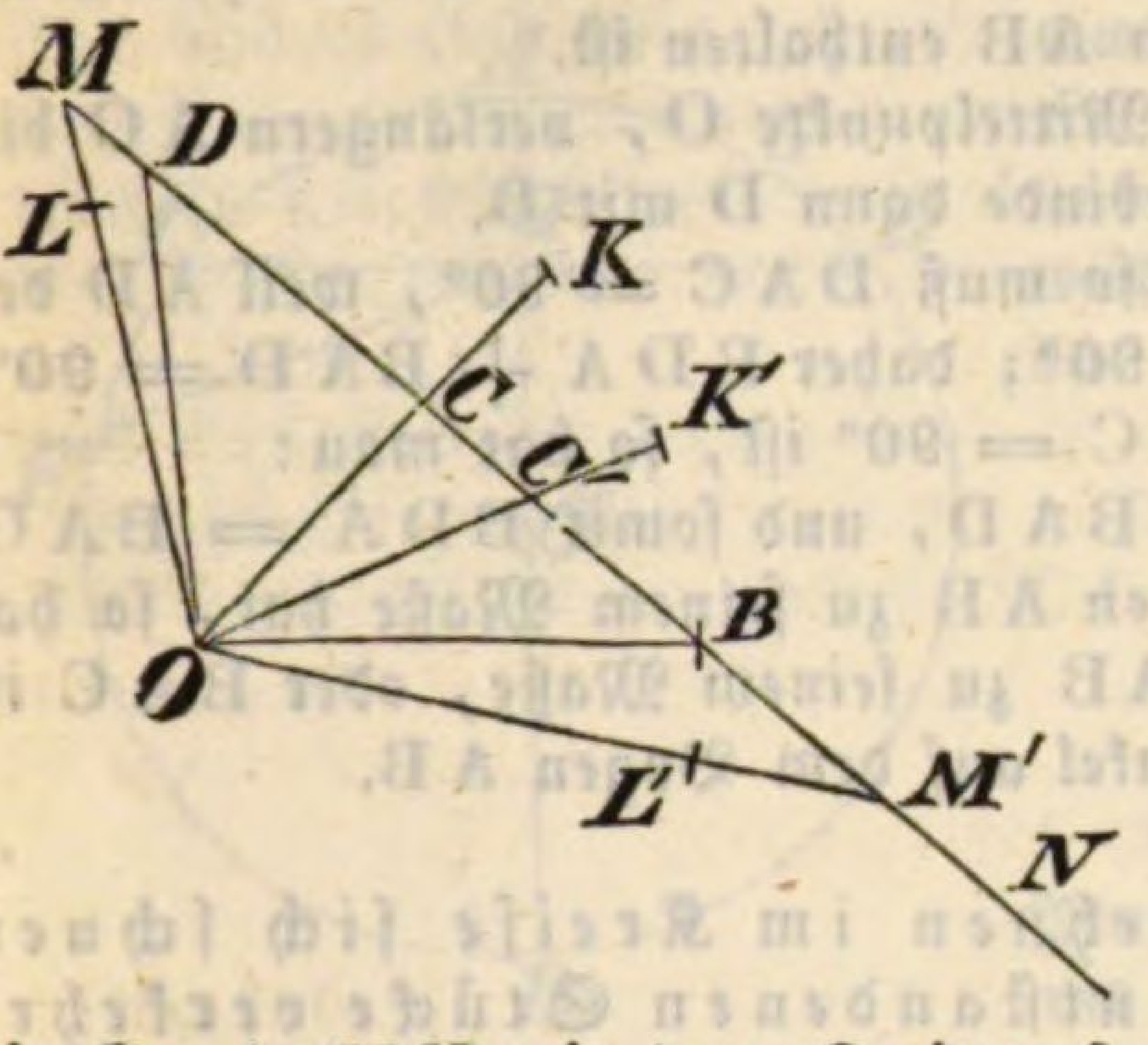


Es sey O der Mittelpunkt, OB der Halbmesser des Kreises, den ich absichtlich nicht zeichne, um durch die Figur nicht dem Beweise vorzugreifen. Errichte ich nun in B die Gerade MN lothrecht auf OB, so behaupte ich, daß die Gerade MN außer dem Punkte B keinen andern Punkt mit dem Kreisumfange gemein haben wird, und daß alle andern Punkte der Geraden außerhalb des Kreises liegen werden.

Denn jeder andere Punkt, z. B. C, C′, C″, mit O verbunden, gibt uns ein rechtwinklichtes Dreieck OCB, OC′B, OC″B, wo OC, OC′, OC″ die Hypothenuse ist, welche die größte Seite in einem rechtwinklichten Dreiecke ist; daher $OC > OB$, $OC' > OB$, $OC'' > OB$; ich kann daher von OC, OC′, OC″ jedenfalls ein Stück $OD = OB$, $OD' = OB$, $OD'' = OB$ abschneiden, und der Umfang des Kreises muß durch die Punkte D, D′, D″ durchgehen, so daß also alle andern Punkte außer B der Geraden MN außerhalb des Kreises liegen.

§. 105. **Jede Gerade, welche schief durch den äußeren Endpunkt des Halbmessers durchgehet, schneidet der Kreisumfang in zwei Punkten.**

Fig. 106.



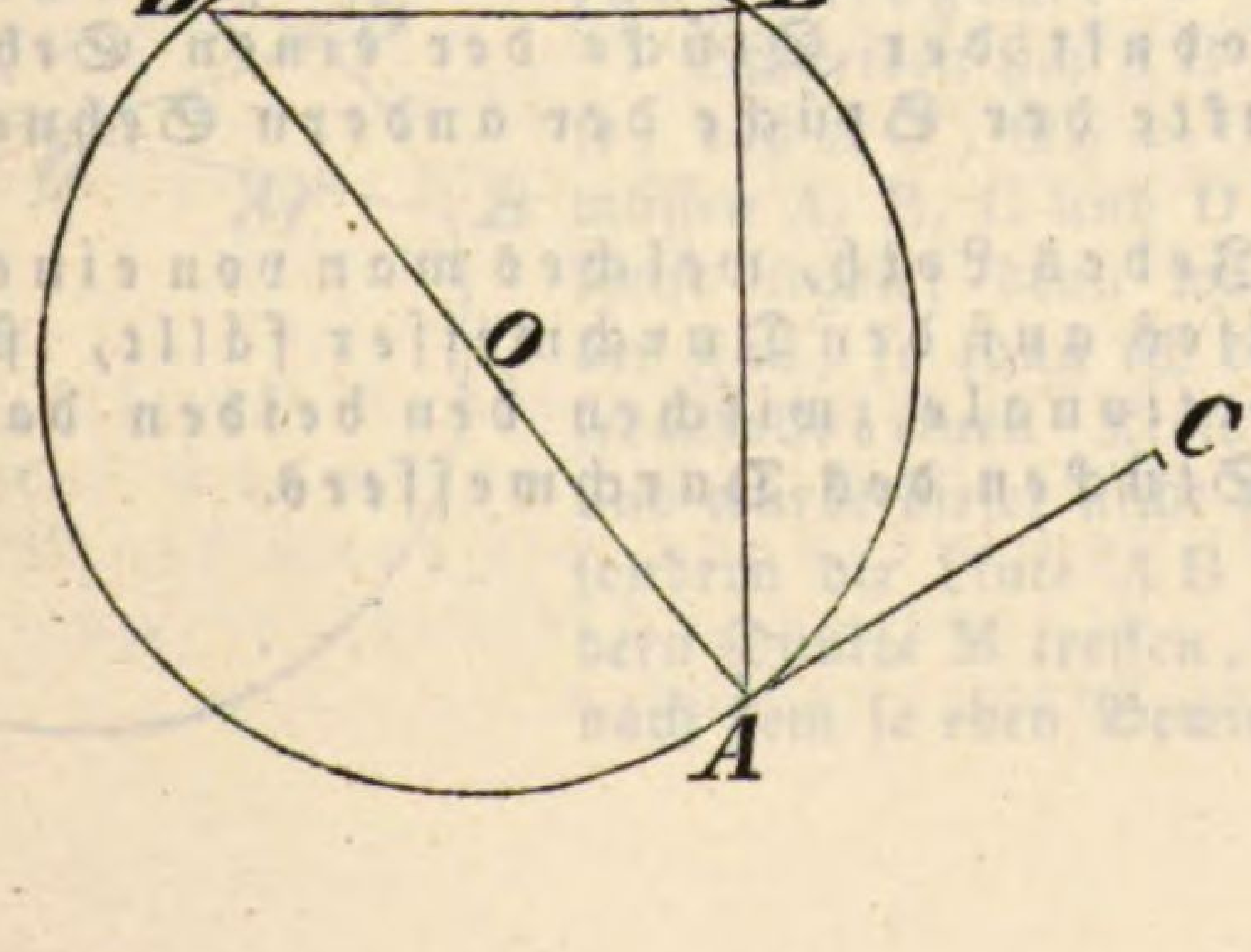
Es sey O der Mittelpunkt, OB der Halbmesser, so behaupte ich, wenn man durch B die schiefe MN zieht, daß diese den Kreis der aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OB beschrieben werden kann, in zwei Punkten schneiden müsse. Da MN gegen OB schief, so fälle ich das Loth OC von O auf MN, mache CD = CB, so ist es begreiflich, daß der Kreisumfang aus O mit OB beschrieben, gewiß durch D durchgehen muß, so daß also die Gerade MN mit dem Kreisumfange zwei Punkte gemeinschaftlich haben muß. Ich will noch zeigen, daß das Stück DB innerhalb des Kreises, alle anderen Theile außerhalb des Kreises sind.

Da OC < OB, eben so OC′ < OB ist, so verlängere ich beide, und mache das verlängerte Stück OK = OK′ = OB, so also, daß der Kreis durch K und K′ durchgeht. Es werden also die Punkte C, C′ und alle Punkte der Geraden MN zwischen D und B innerhalb des Kreisumfanges liegen. Da die vom Perpendikel weiter abstehenden Schiefen immer größer sind, so hat man OM > OB; OM′ > OB; schneidet man daher OL = OL′ = OB ab, so liegen L und L′ im Kreisumfange, also M, M′ und so alle Punkte der MN, die nicht zwischen B und D liegen, außerhalb des Kreisumfanges.

§. 106. Die natürliche Folge der beiden vorhergehenden Sätze ist: **Jede Gerade, welche den Kreis berührt, steht senkrecht auf dem Halbmesser des Berührungspunktes, und die Verbindungslinie des Mittelpunktes und Berührungspunktes steht senkrecht auf der berührenden.**

§. 107. **Der Winkel, den eine berührende mit der Sehne des Berührungspunktes bildet, hat den halben Bogen zwischen beiden zu seinem Maße.**

Fig. 107.



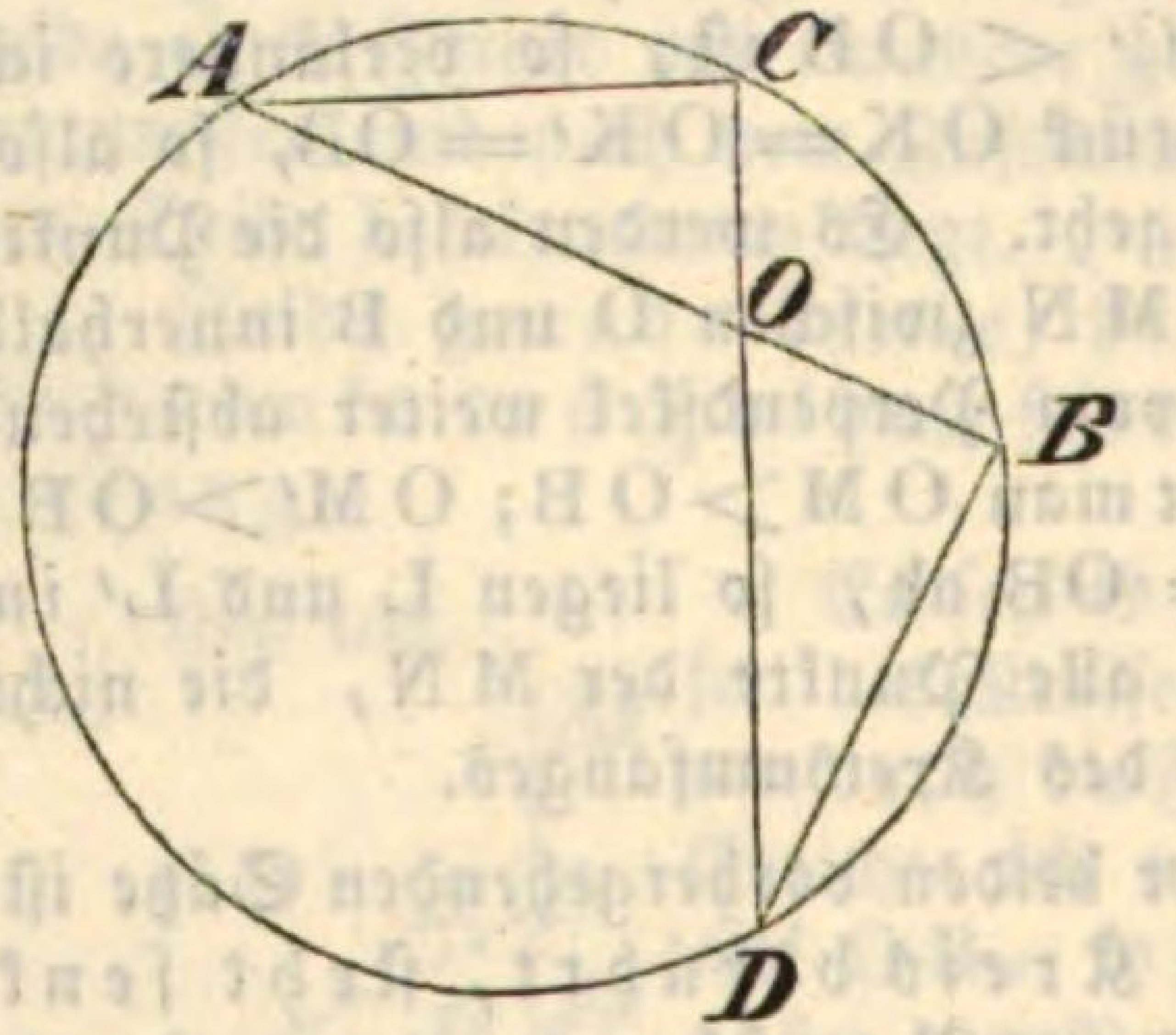
In dem Punkte A sey die berührende AC, und die Sehne AB, zwischen welchen beide der Bogen AB enthalten ist.

Verbinden wir A mit dem Mittelpunkte O, verlängern AO bis zum Punkte D im Umfange, verbinde dann D mit B.

Weil AC eine berührende, so muß DAC = 90°, weil AD der Durchmesser, so muß ABD = 90°; daher BDA + BAD = 90°, da aber BAC + BAD = DAC = 90° ist, so hat man: BDA + BAD = BAC + BAD, und somit BDA = BAC. Da nun BDA den halben Bogen AB zu seinem Maße hat, so hat auch BAC den halben Bogen AB zu seinem Maße, oder BAC ist gleich dem halben Mittelpunktwinkel auf dem Bogen AB.

§. 108. **Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, so sind die dadurch entstandenen Stücke verkehrt proportionirt.**

Fig. 108.



Die zwei Sehnen AB und CD schneiden sich in O. Ziehet man nun AC und BD, so entstehen die Dreiecke ACO und BDO. Da nun die Winkel ACD = ABD, weil beide auf dem Bogen AD und eben so BAC = CDB, weil beide auf dem Bogen BC aufstehen, so sind die zwei Dreiecke ACO und OBD einander ähnlich; daher die gleichliegenden Seiten gerade proportionirt, da nun AO und OD, und eben so CO und BO den gleichen Winkeln gegenüber liegen, so hat man:

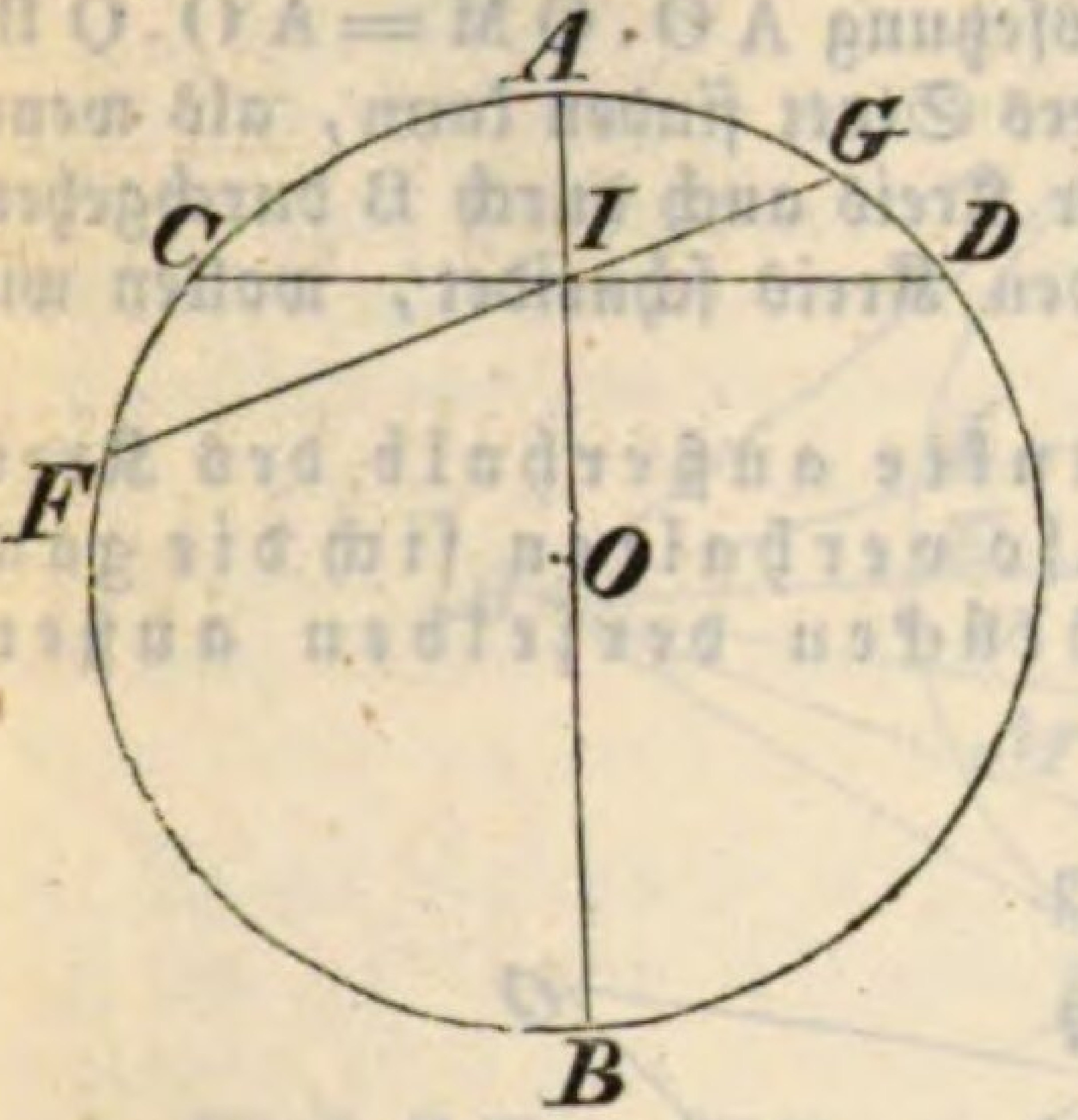
AO : OD = OC : OB,

d. h. das erste Stück der ersten Sehne zum ersten Stück der zweiten Sehne, wie das zweite Stück der zweiten Sehne zum zweiten Stück der ersten Sehne; daher diese Stücke verkehrt proportionirt, da die Stücke derselben Sehne entweder beide die äußeren oder beide die inneren Glieder der Proportion bilden.

Aus dieser Proportion folgt: AO . OB = CO . OD, d. h. **Wenn zwei Sehnen in einem Kreise sich schneiden, so ist das Produkt der Stücke der einen Sehne gleich dem Produkte der Stücke der andern Sehne.**

§. 109. **Jedes Loth, welches man von einem Punkte des Umkreises auf den Durchmesser fällt, ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden dadurch entstehenden Stücken des Durchmessers.**

Fig 109.



Es sey der Durchmesser AB; fällt man nun vom Punkte C des Umfangs ein Loth CI auf den Durchmesser, und verlängert dieses Loth, bis es wieder den Umkreis in D trifft, so hat man nach dem Vorhergehenden

$$AI : CI = ID : IB.$$

Da nun $IO \perp CD$, so muß $CI = ID$ seyn; daher

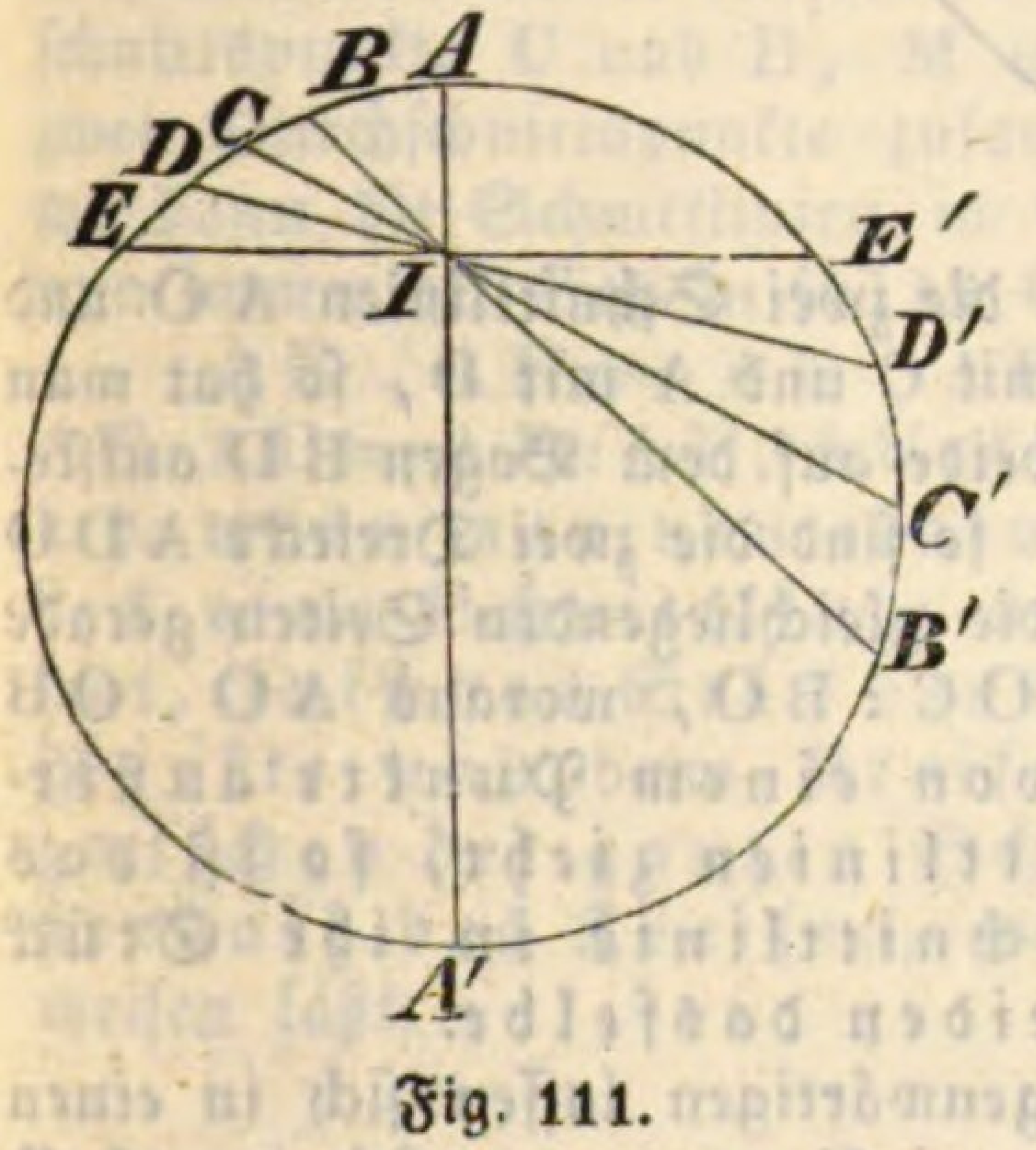
$$AI : CI = CI : IB.$$

§. 110. Ziehet man durch den Punkt I eine Gerade $IF = AO$, und verlängert IF bis G im Umfange, so hat man:

CI als geometrisches }
FI als arithmetisches } Mittel von AI und IB.
IG als harmonisches }

Harmonisches Mittel nennt man nämlich den Quotient, den man erhält, wenn man ihr Produkt durch ihr arithmetisches Mittel dividirt.

Fig. 110.



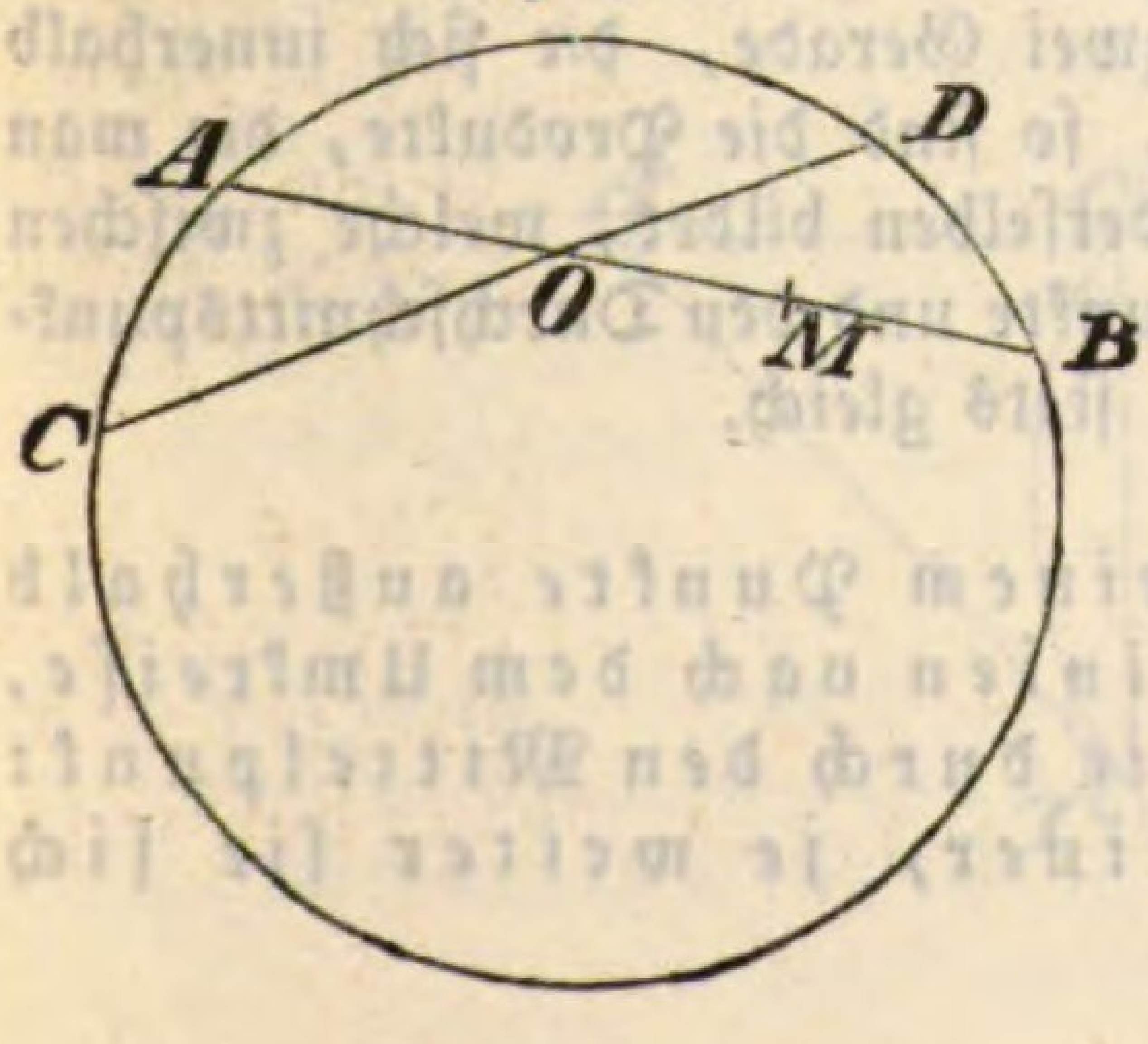
Gehen durch den Punkt I mehrere Sehnen AA′, BB′, CC′ u. s. w., so hat man nach dem so eben Entwickelten

$$AI . IA' = BI . IB' = CI . IC'$$
$$= DI . ID' = \overline{EI}^2.$$

Wie man leicht findet, ist unter allen diesen Stücken AI am kürzesten, A′I am längsten, und je näher ein Stück an A′I liegt, um desto länger.

§. 111. Umgekehrt schneiden sich zwei Gerade so, daß die vier dadurch entstehenden Stücke verkehrt proportionirt sind, so müssen die vier Endpunkte in einem Kreisumfange liegen.

Fig. 111.



Schneiden sich AB und CD in O so, daß $AO . OB = CO . OD$, so müssen A, B, C und D in einem Umkreise liegen; denn wäre dieses nicht der Fall, so kann ich durch A, C, D jedenfalls einen Kreis mir denken, und würde dieser nicht durch B gehen, sondern die Linie AB in einem andern Punkte M treffen, so hätte man nach dem so eben Bewiesenen

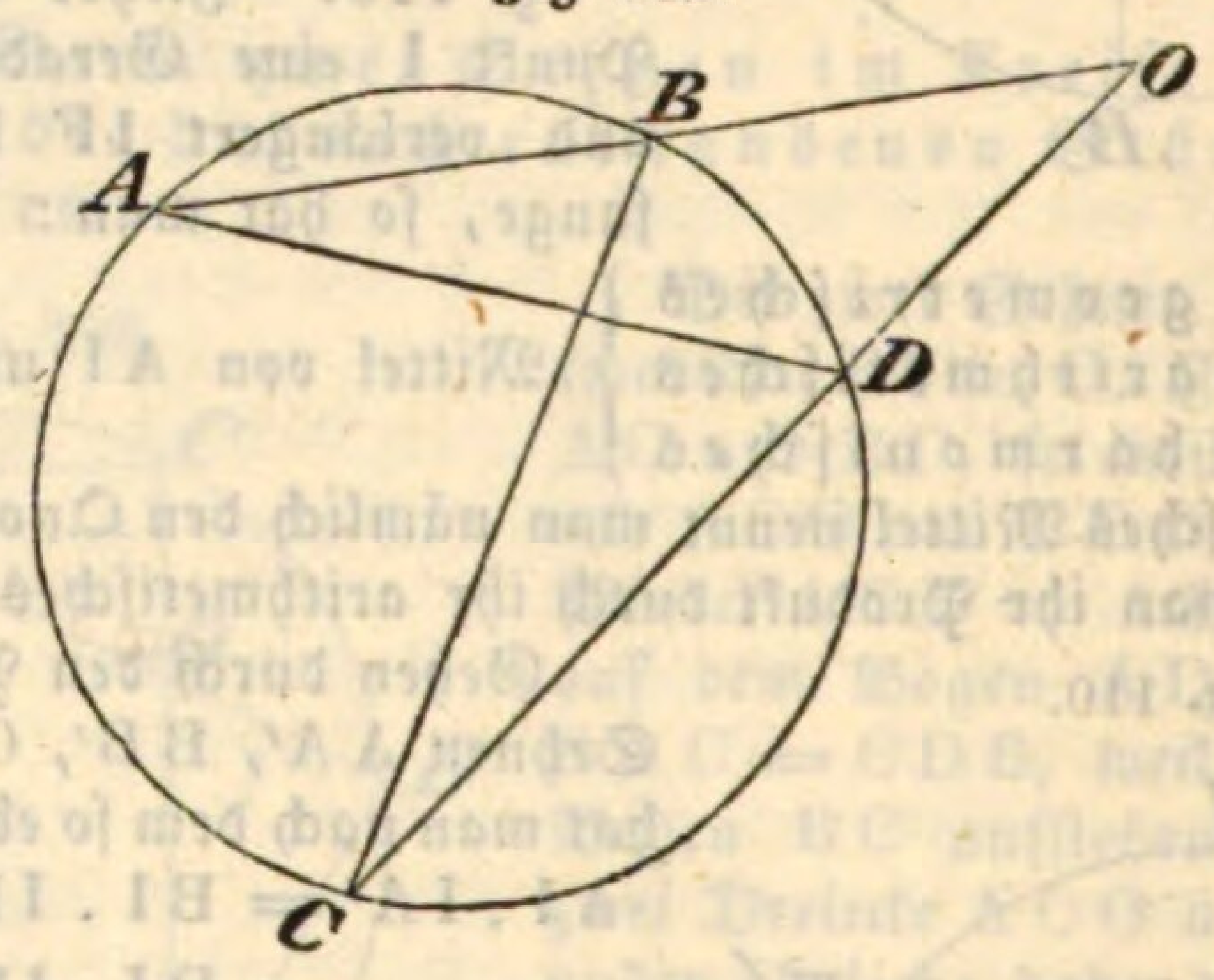
$$AO \,.\, OM = CO \,.\, OD;$$

daher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung $AO.OM = AO.OB$, folglich $OM = OB$, was nicht anders Statt finden kann, als wenn M mit B zusammenfällt, d. h. wenn der Kreis auch durch B durchgehet.

§. 112. Jede Gerade, welche den Kreis schneidet, wollen wir eine **Schnittlinie** nennen.

Wenn man von einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Schnittlinien ziehet, so verhalten sich die ganzen Schnittlinien zu den Stücken derselben außerhalb des Kreises verkehrt.

Fig. 112.

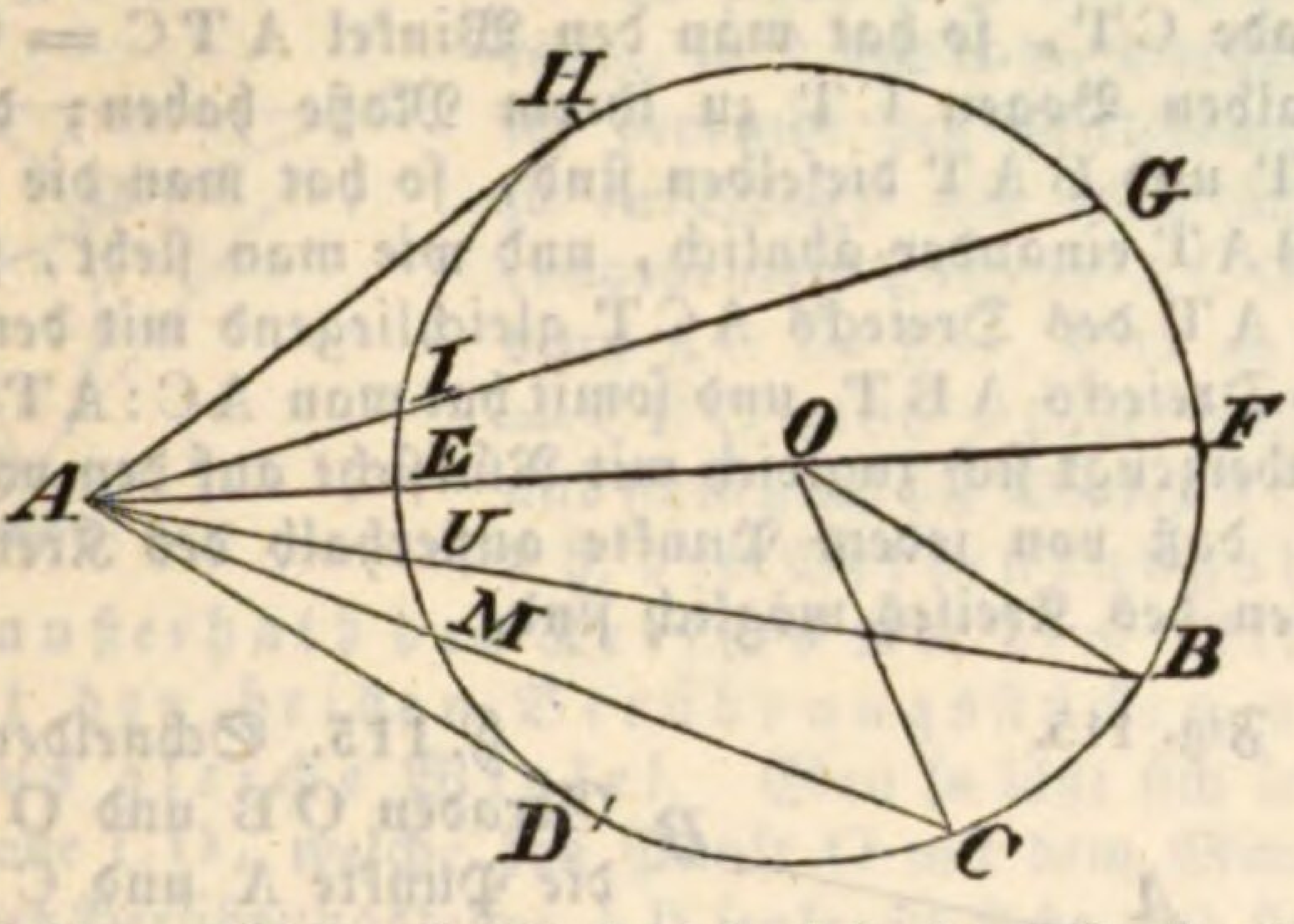


Es werden von dem Punkte O die zwei Schnittlinien AO und CO gezogen; verbindet man nun B mit C und A mit D, so hat man die Winkel $OAD = OCB$, weil beide auf dem Bogen BD aufstehen; da nun noch $AOD = BOC$, so sind die zwei Dreiecke ADO und BOC einander ähnlich, daher die gleichliegenden Seiten gerade proportionirt, daher $AO : OD = OC : BO$, woraus $AO \,.\, OB = CO \,.\, OD$, d. h. **wenn man von einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Schnittlinien zieht, so ist das Produkt aus der ganzen Schnittlinie in ihr Stück außerhalb des Kreises bei beiden dasselbe.**

Der Satz in §. 108 und im Gegenwärtigen lassen sich in einen Satz zusammenziehen: Ziehet man zwei Gerade, die sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneiden, so sind die Produkte, die man aus denjenigen Stücken einer jeden derselben bildet, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte und den Durchschnittspunkten mit dem Umkreise enthalten sind, stets gleich.

§. 113. **Ziehet man von einem Punkte außerhalb des Kreises mehrere gerade Linien nach dem Umkreise, so ist von allen die längste, die durch den Mittelpunkt gehet, die anderen desto kleiner, je weiter sie sich vom Mittelpunkte entfernen.**

Fig. 113.



Weil $OF = OB$, so ist AF soviel als $AO + OB$; da nun $AO + OB > AB$ ist, so muß auch $AF > AB$.

In den zwei Dreiecken AOB und AOC ist ferners $AO = AO$; $BO = CO$, und der Winkel $AOB > AOC$, daher $AB > AC$.

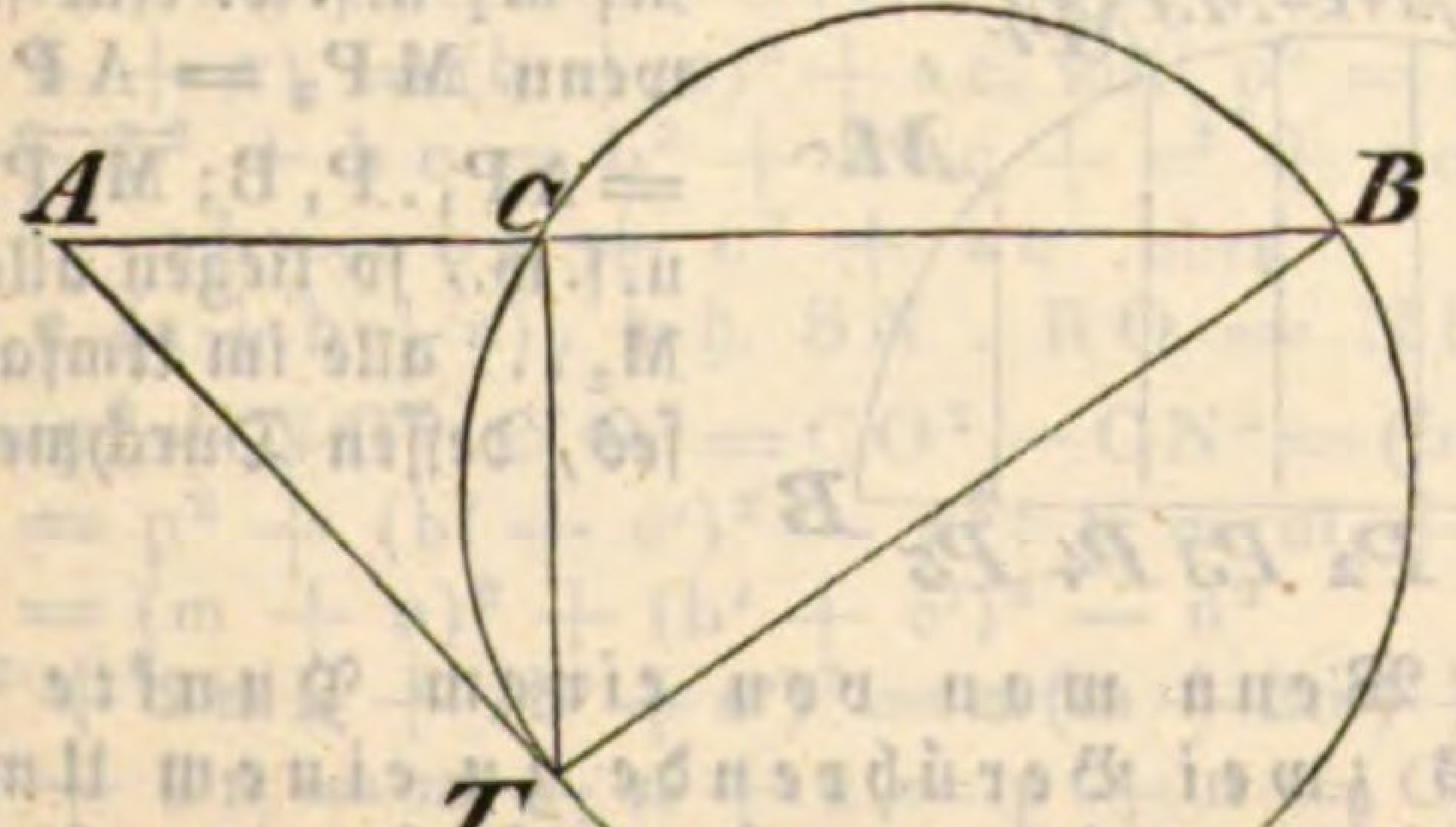
§. 114. Nach dem früher Bewiesenen ist ferners $AE . AF = AU . AB = AM . AC$. Ziehet man durch A fortwährend Schnittlinien immer entfernter vom Mittelpunkte, so rücken die Durchschnittspunkte U und B, M und C immer einander näher, bis die zwei Durchschnittspunkte zusammenfallen, z. B. wie in D und H, wo dann die Schnittlinien in Berührungslinien übergehen, und da nun immer der Satz in §. 112 Statt findet, so hat man

$AE . AF = AU . AB = AM . AC = AD^2$ oder

$AE : AD = AD : AF$; $AU : AD = AD : AB$; $AM : AD = AD : AC$,

d. h. wenn man von einem Punkte außerhalb des Kreises eine Schnittlinie und eine Berührungslinie ziehet, so ist das Stück der Berührungslinie zwischen dem Punkte und dem Kreise die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Schnittlinie und dem Stücke außerhalb des Kreises, was sich auch noch auf folgende Art beweisen läßt.

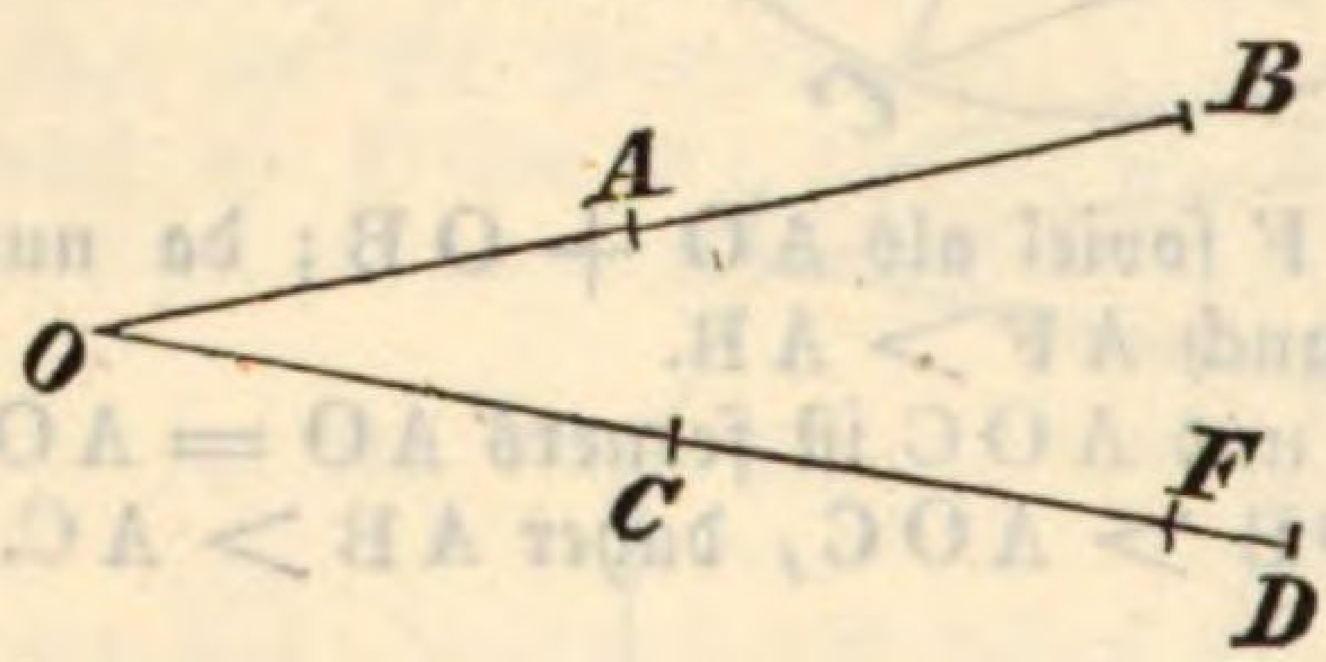
Fig. 114.



Es sey AB eine Schneidende und AT eine Berührende; ziehen wir die Gerade CT, so hat man den Winkel ATC = CBT, weil beide den halben Bogen CT zu ihrem Maße haben; da ferner die Winkel CAT und BAT dieselben sind, so hat man die zwei Dreiecke CAT und BAT einander ähnlich, und wie man sieht, sind die Seiten AC und AT des Dreiecks ACT gleichliegend mit den Seiten AT und AB des Dreiecks ABT, und somit hat man AC : AT = AT : AB.

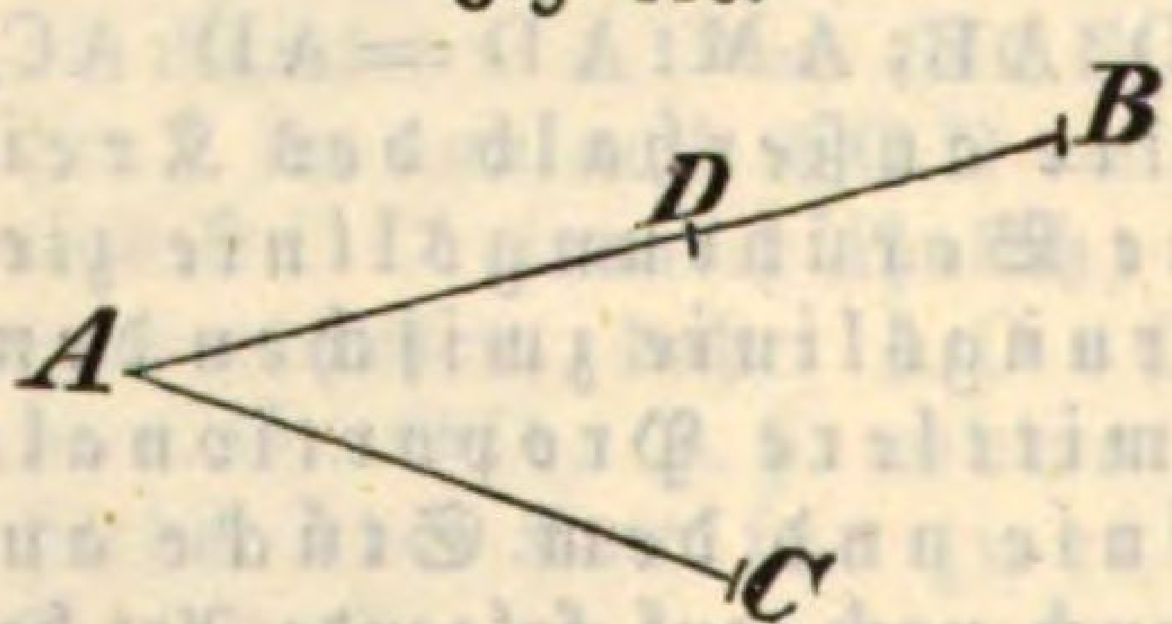
Man überzeugt sich zugleich mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraph, daß von jedem Punkte außerhalb des Kreises zwei Berührungslinien des Kreises möglich sind.

Fig. 115.



§. 115. Schneiden sich die zwei Geraden OB und OD, und sind die Punkte A und C so angenommen, daß OA . OB = OC . OD, so liegen die vier Punkte A, B, C, D in einem und demselben Umkreise; denn würde dieses nicht der Fall seyn, so lege ich mir durch A, B und C einen Kreis, ginge dieser nun nicht durch D, so müßte er die OD in einen andern Punkt, z. B. in F schneiden; dann müßte aber nach dem Frühern OA . OB = OC . OF, daher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzung OC . OF = OC . OD, daher OF = OD, was nur dann seyn kann, wenn F mit D zusammenfällt, d. h. wenn der durch A, B und C gezogene Kreis auch durch D geht.

Fig. 116.

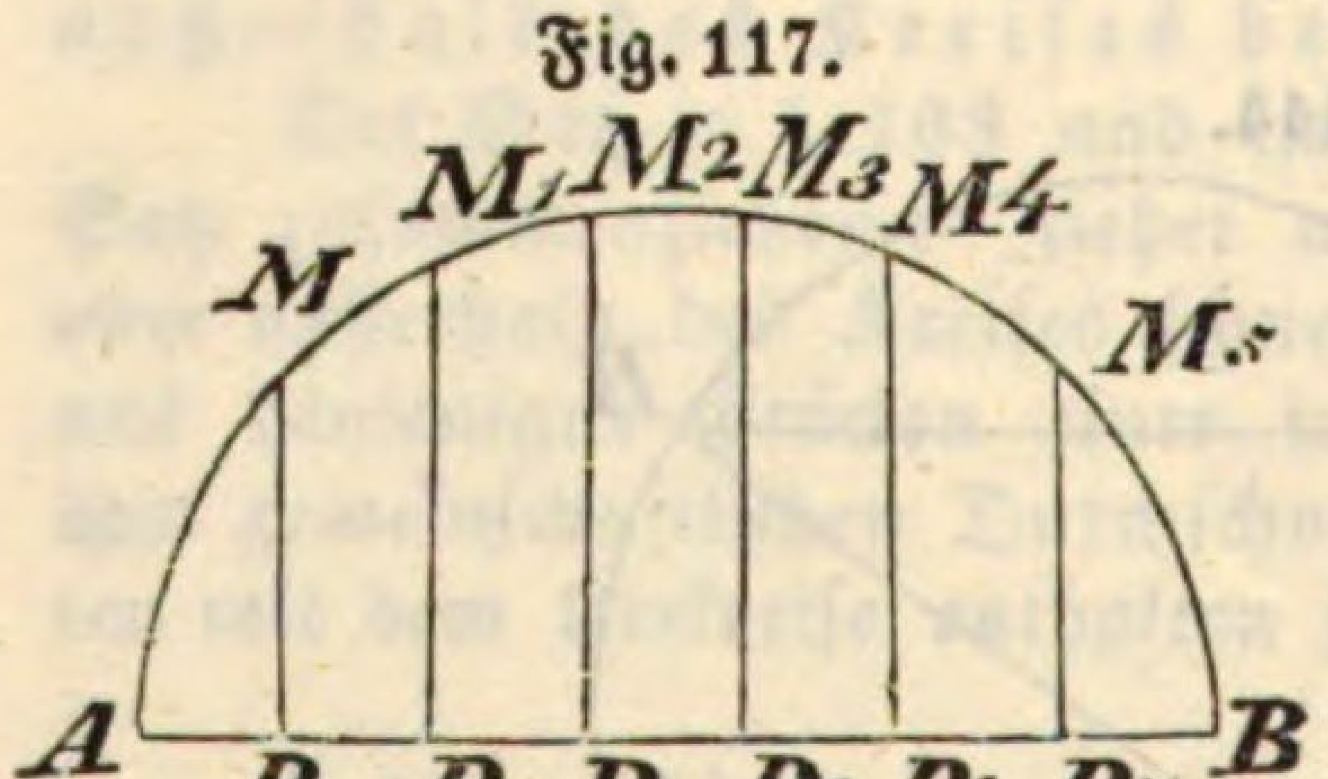


Eben so läßt sich leicht beweisen, daß, wenn bei zwei Geraden AB und AC der Punkt D so genommen wird, daß $AC^2 = AB . AD$ oder

AB : AC = AC : AD,

so wird dann der durch B, C und D beschriebene Kreis von der Geraden AC im Punkte C berührt werden.

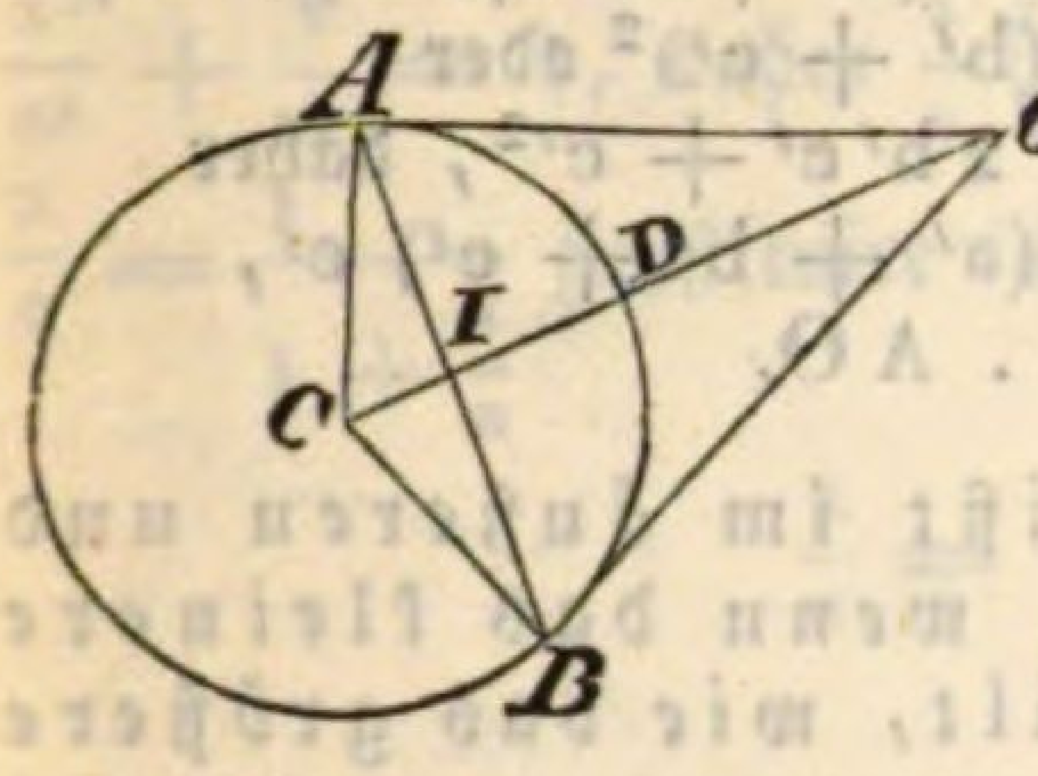
Fig. 117.



Eben so haben die Punkte M M_1 M_2 u. s. w. eine solche Lage, daß wenn $MP_2 = AP . PB$, $\overline{M_1P_1^2} = AP_1 . P_1B$; $\overline{M_2P_2^2} = AP_2 . P_2B$ u. s. w., so liegen alle Punkte M M_1 M_2 ... alle im Umfange eines Kreises, dessen Durchmesser AB ist.

§. 116. **Wenn man von einem Punkte außerhalb des Kreises zwei Berührende zu einem Umkreise ziehet, so sind die zwei dadurch entstehenden Berührungsstücke einander gleich.**

Fig. 118.

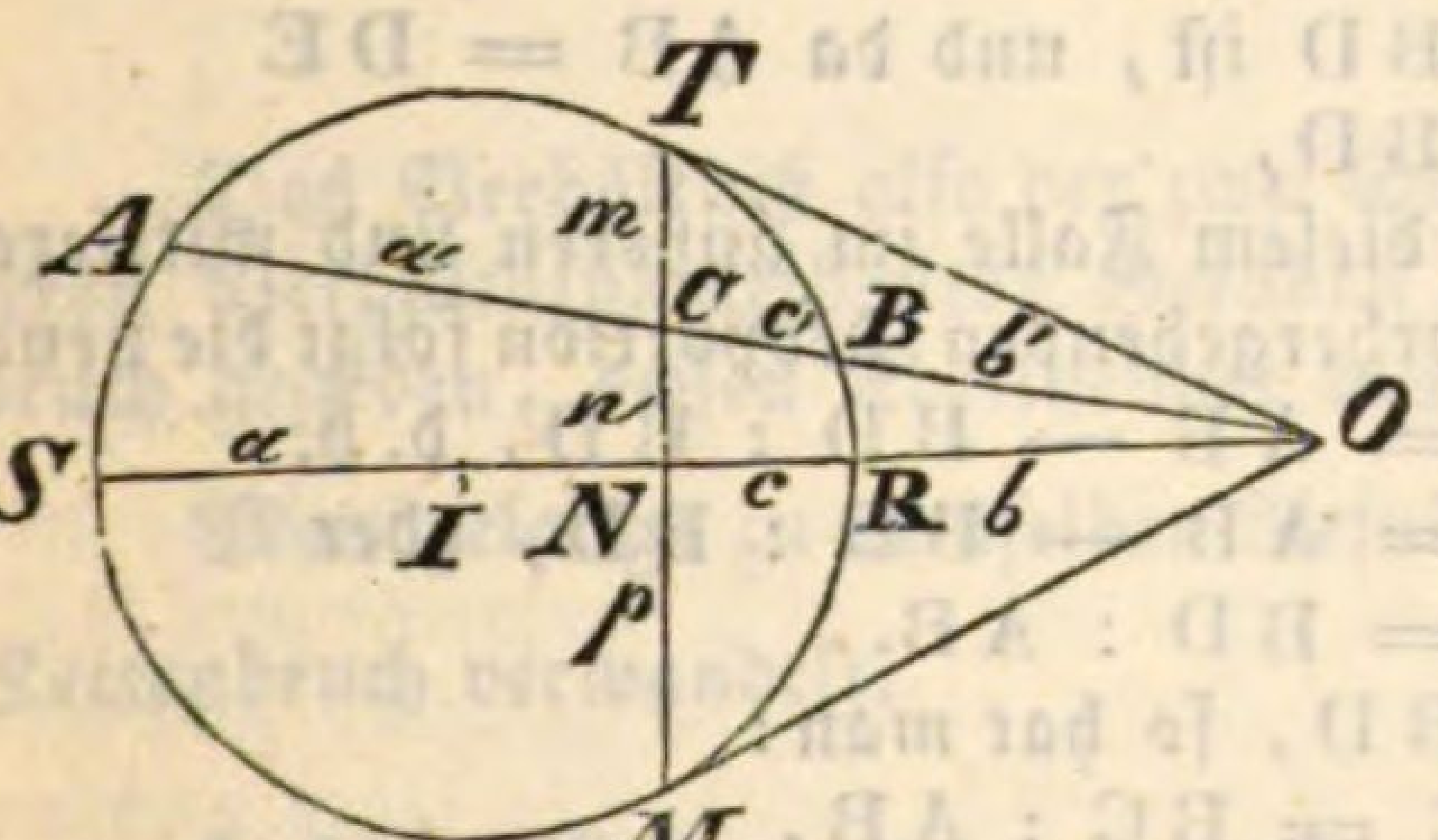


Es seyen OA und OB zwei Berührende, in A und B die Berührungspunkte; ich verbinde den Mittelpunkt C mit O, so entstehen, wie man sieht, die zwei congruenten Dreiecke ACO und CBO; denn $AC = BC$, $CO = CO$, $CAO = CBO = 90^\circ$; daher dann $AO = BO$ und schließlich die Winkel $AOC = BOC$, d. h. **die Verbindungslinie eines Punktes außerhalb des Kreises mit dem Mittelpunkte bildet mit den beiden Berührungsstücken von diesem Punkte aus gleiche Winkel.** Eben so läßt sich leicht einsehen, daß die Gerade CO, welche den Punkt O mit dem Mittelpunkte verbindet, auf der Berührungssehne AB senkrecht steht und sie in I halbirt.

§. 117. Wir wissen, wenn eine gerade Linie in zwei Punkten so getroffen wird, daß das Produkt der äußern Stücke gleich ist dem Produkte aus dem Ganzen in das mittlere Stück, so heißt diese Gerade **harmonisch** getheilt.

Eine jede Schnittlinie des Kreises wird durch den Kreis und die Berührungssehne harmonisch getheilt.

Fig. 119.



Es werden von O die Schnittlinien AO und SO gezogen, welche letztere durch den Mittelpunkt I geht; eben so zieht man die Berührungslinien OT und OM, und die Berührungssehne TM, welche unsere Schnittlinien in C und N trifft.

Bezeichnen wir die Stücke SN, OR, RN, AC, OB, BC der Kürze halber mit a, b, c, a', b', c', und TC, CN, NM mit m, n, p, so hat man:

1) Aus dem rechtwinklichten Dreiecke NOM: $MO^2 = (b + c)^2 + p^2$, und eben so, weil $MO^2 = RO \,.\, OS$ ist, $MO^2 = b\,(a + b + c)$; daher $b\,(a + b + c) = (b + c)^2 + ac$, weil $p^2 = ac$ ist,

daher $ab + b^2 + bc = b^2 + 2bc + c^2 + ac$; folglich

$$ab = bc + c^2 + ac \quad \text{oder}$$

$$ab = c\,(a + b + c), \text{ d. h. } SN \,.\, RO = NR \,.\, SO.$$

2) $\overline{MO}^2 = p^2 + NO^2$; $NO^2 = CO^2 - CN^2 = (b' + c')^2 - n^2$

$$MO^2 = p^2 + (b' + c')^2 - n^2;\ p = m + n$$

$$MO^2 = (m + n)^2 + (b' + c')^2 - n^2$$

$$MO^2 = m^2 + 2mn + (b' + c')^2 = m\,(m + 2n) + (b' + c')^2$$

nun ist $m + 2n = m + n + n = p + n = CM$, daher $m\,(m + 2n) = CT \,.\, CM = AC \,.\, CB = a'c'$, daher also

$$MO^2 = a'c' + (b' + c')^2.$$

Nun ist noch $MO^2 = BO \cdot AO = b' (a' + b' + c')$; daher hat man: $b' (a' + b' + c') = a' c' + (b' + c')^2$ oder

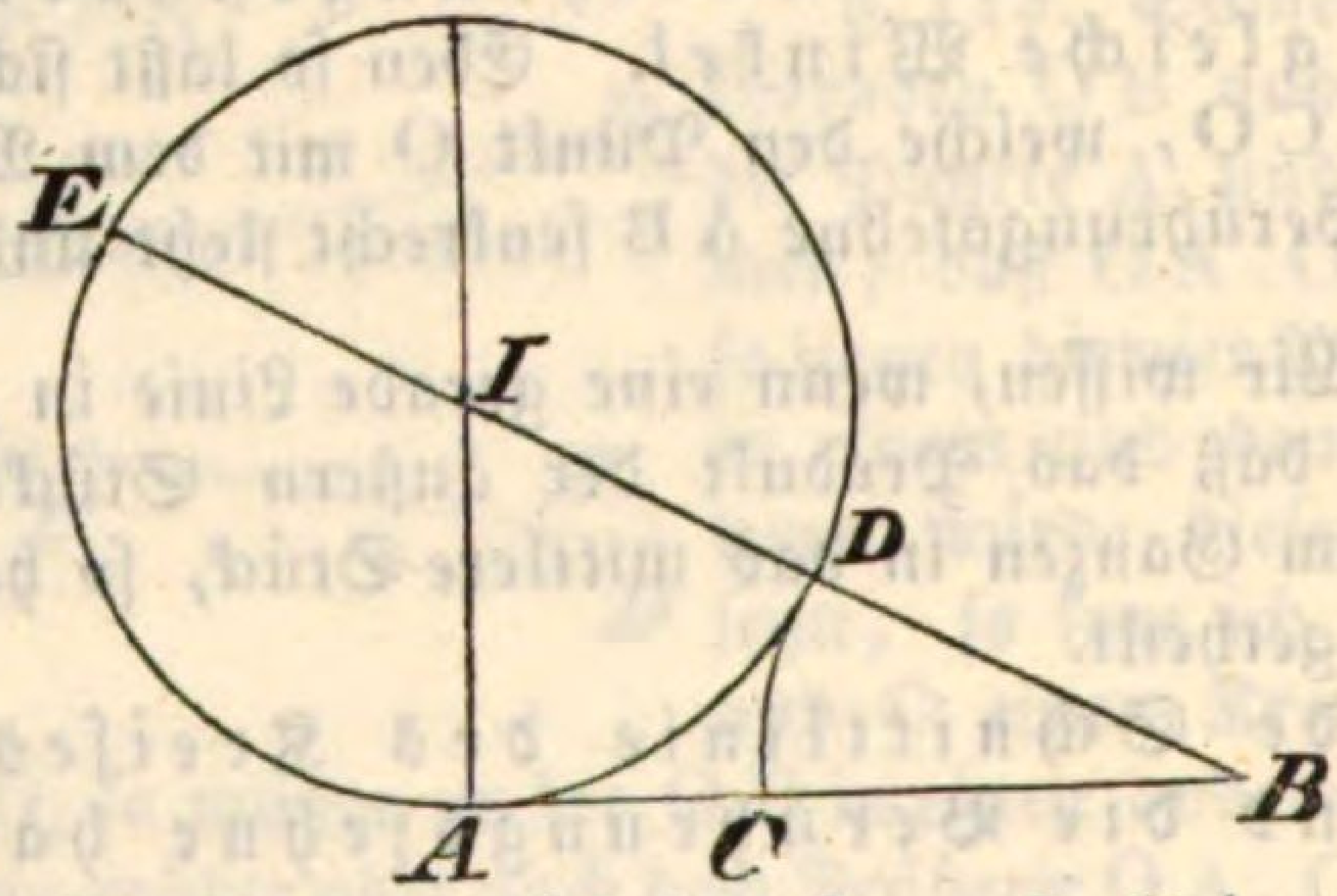
$$a'b' + b'^2 + b'c' = a'c' + b'^2 + 2b'c' + c'^2, \text{ daher}$$

$$a'b' = a'c' + b'c' + c'^2 \text{ oder } (a' + b' + c') c',$$

$$\text{d. h. } AC \cdot BO = BC \cdot AO.$$

§. 118. **Eine gerade Linie heißt im äußeren und mittleren Verhältnisse getheilt, wenn das kleinere Stück zum größeren sich so verhält, wie das größere zum Ganzen.**

Fig. 120.



Es sey das Berührungsstück AB so groß als der Durchmesser DE des berührten Kreises, so haben wir, da

$BE : AB = AB : BD$ ist, und da $AB = DE$

$BE : DE = DE : BD$,

d. h. die Schnittlinie BE ist in diesem Falle im äußeren und mittleren Verhältnisse getheilt. Aus der vorhergehenden Proportion folgt die neue:

$$BE - AB : AB = AB - BD : BD, \text{ d. h.}$$

$$BD : AB = AB - BD : BD, \text{ oder}$$

$$AB - BD : BD = BD : AB.$$

Mache ich daher $BC = BD$, so hat man:

$$AC : BC = BC : AB,$$

d. h. die Gerade AB ist ebenfalls im äußeren und mittleren Verhältnisse getheilt.

Um also eine Gerade AB im äußeren und mittleren Verhältnisse zu theilen, errichte ich im Endpunkte A ein Loth $AI = \frac{1}{2} AB$, verbinde I mit B, schneide von IB ein Stück $ID = IA$, und von AB ein Stück $BC = BD$ ab.

Soll die Gerade in zwei Stücke $a - x$ und x getheilt werden, so daß x die mittlere Proportionale zwischen $a - x$ und a seyn soll; d. h. soll a im äußeren und mittleren Verhältnisse getheilt werden, so hat man: $a - x : x = x : a$, daher

$$x^2 = -ax + a^2, \text{ folglich } x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} = \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$$

Da wir uns aber x positiv und kleiner als a denken, so können wir nur die eine Wurzel brauchen $x = a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ oder $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Die Gleichung $x^2 = -ax + a^2$ oder $x^2 + ax = a^2$ gibt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x}{a} = 1$, daher $\frac{x}{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right) = 1$, und somit $\frac{x}{a} = \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}$ substituire ich statt $\frac{x}{a}$ diesen Werth im Nenner, so habe ich:

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}} \quad \text{und so fort}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 \text{ ins Unendliche;}}}}}$$

$$\text{folglich } \frac{a}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \text{ꝛc.}}}}$$

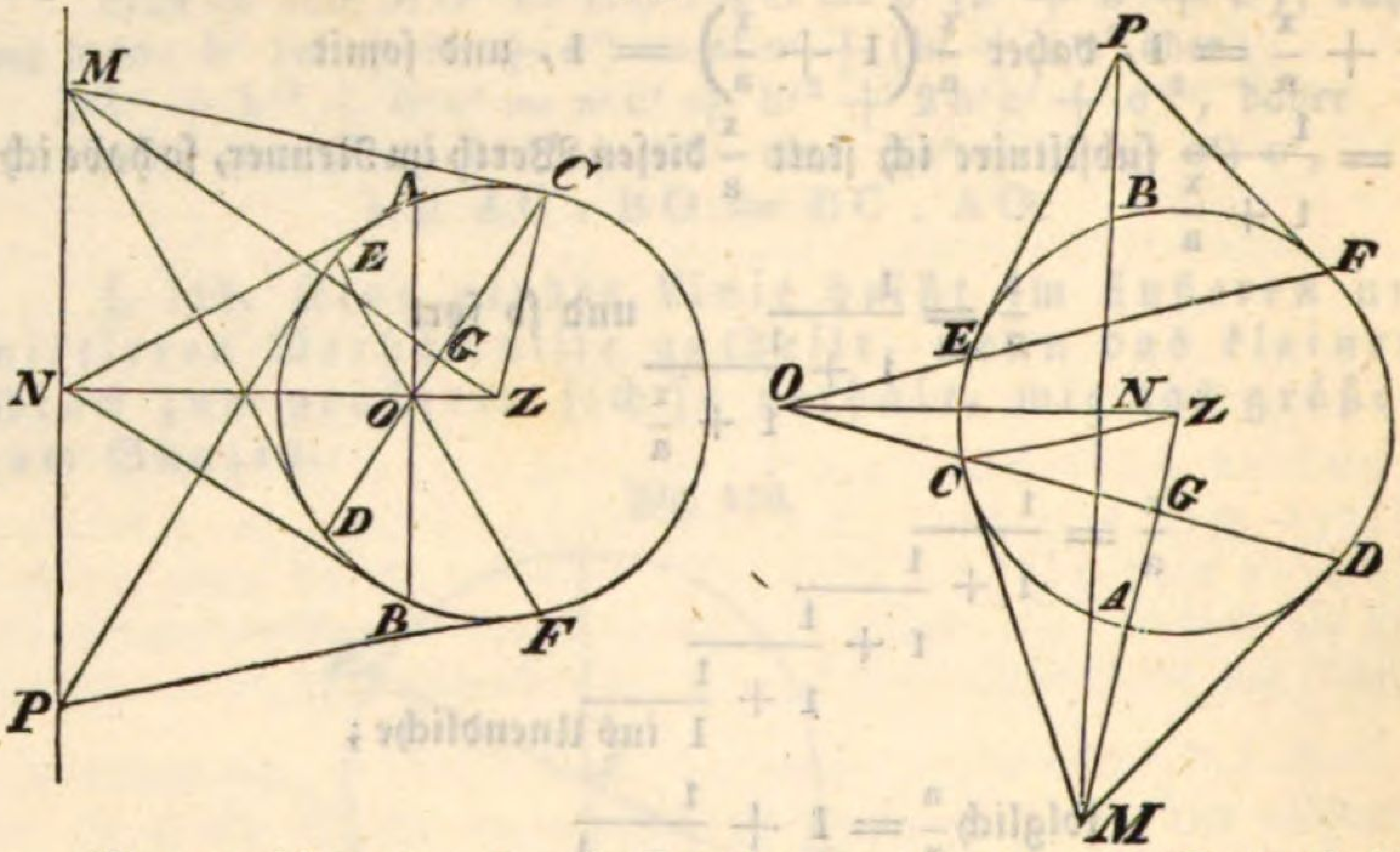
$$\text{und eben so } \frac{a-x}{x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \text{ꝛc.}}}}$$

Das Verhältniß also der zwei Stücke einer im äußeren und mittleren Verhältnisse getheilten Geraden ist durch einen endlosen Kettenbruch gegeben, dessen Theilnenner alle gleich 1 sind.

Man gelangt zu demselben Resultate, wenn man $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ in einen Kettenbruch verwandelt.

§. 119. **Wenn man durch einen beliebigen Punkt O in der Ebene eines Kreises beliebige Sehnen CD, EF ziehet, welche den Kreis in den Punkten C, D, E, F treffen, und in diesen Punkten Berührende an den Kreis ziehet, welche sich je zwei und zwei in den Punkten M P durchschneiden, so liegen die Durchschnittspunkte der zu einer Sehne gehörenden Berührenden alle in einer geraden Linie MP, deren Abstand vom Mittelpunkte des Kreises der dritten Proportionalen zum Abstande des gegebenen Punktes vom Mittelpunkte und dem Halbmesser des Kreises ist.**

Fig. 121.



Man verbinde den Punkt O mit dem Mittelpunkte Z durch die Gerade OZ, und nehme auf dieser Geraden einen Punkt N so an, daß OZ : Halbmesser gleich Halbmesser : NZ, und ziehe durch den so gefundenen Punkt N nach M die Gerade MN.

Ziehet man nun MZ und CZ, so ist $MCZ = CGZ = 90°$; $CZM = CZG$, daher die Dreiecke MCZ und CGZ einander ähnlich, daher:

$$GZ : CZ = CZ : MZ,$$

aber nach der Construction ist $OZ : CZ = CZ : NZ$; aus der ersten Proportion hat man $CZ^2 = GZ . MZ$; aus der zweiten $CZ^2 = OZ . NZ$, daher $GZ . MZ = OZ . NZ$ oder $GZ : OZ = NZ : MZ$; daher die zwei Dreiecke GOZ und MNZ ähnlich, daher die Winkel $MNZ = OGZ = 90°$, daher MN senkrecht auf NZ.

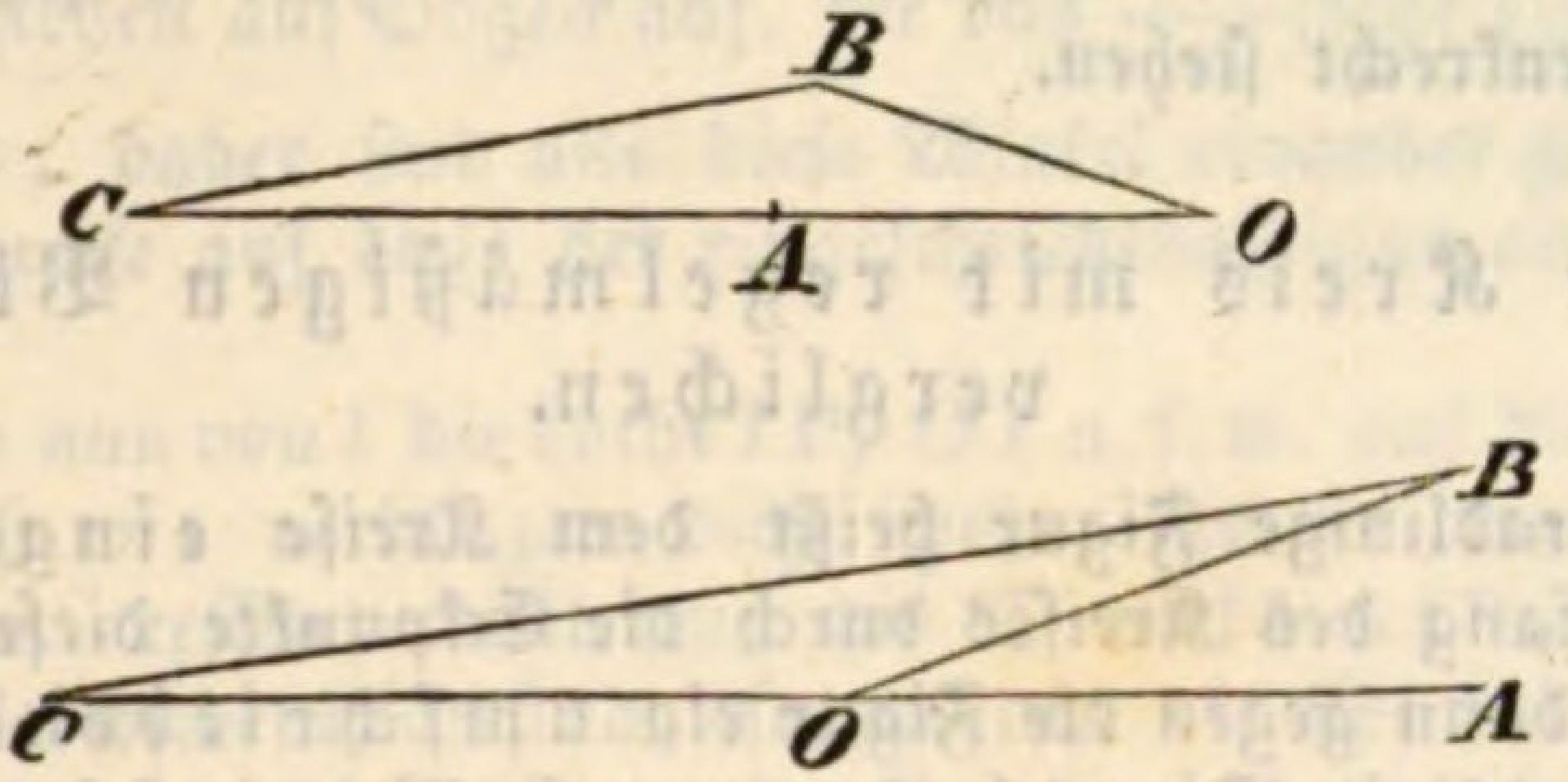
Da nun die durch O gezogene Sehne CD eine gänzlich willkürliche ist, so wird, was von dieser Sehne gilt, auch von jeder andern gelten, so daß jeder Durchschnittspunkt der zwei Berührenden, die zu einer durch O gehenden Sehne gehören, stets in einer Geraden liegt, die durch N senkrecht auf OZ geht, daher alle diese Durchschnittspunkte in einer Geraden liegen.

Man nennt in der neueren Geometrie die MP die **Polare** des Punktes O und O den Pol der Geraden MP.

§. 120. **Ist der Abstand der Mittelpunkte zweier Kreise gleich der Summe ihrer Halbmesser, so berühren sich die Kreise von außen; ist aber der Abstand der Mittelpunkte gleich dem Unterschiede ihrer Halbmesser, so berühren sie sich von innen.**

Das Berühren zweier Kreise will so viel sagen, als daß sie nur einen Punkt mit einander gemeinschaftlich haben, und daß sie vor und nach dem Zusammentreffen auf derselben Seite bleiben.

Fig. 122.

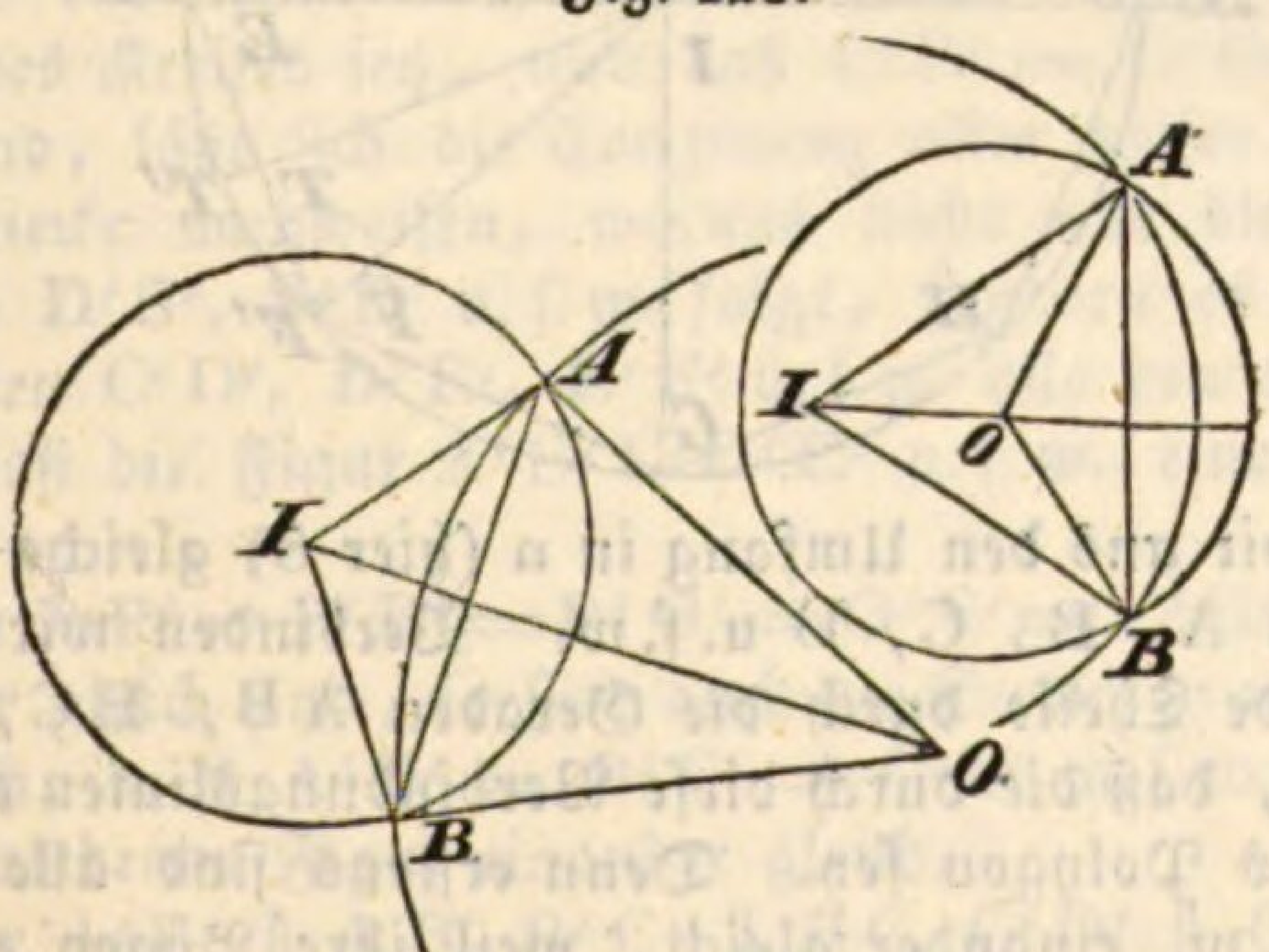


Es seyen C und O zwei Mittelpunkte; wenn wir nun aus diesen Mittelpunkten mit den Halbmessern CA und AO Kreise beschreiben würden, so können diese nur den einzigen Punkt A mit einander gemeinschaftlich haben; denn hätten sie noch einen Punkt B mit einander gemeinschaftlich, so müßte CB = CA und zugleich BO = AO; daher CB + BO = CA + AO, d. h. CB + BO = CO, und eben so CB — BO = CA — AO, d. h. CB — BO = CO seyn, was nur dann seyn kann, wenn B mit A zusammenfällt.

Eben so einleuchtend ist der Gegensatz: *Berühren sich zwei Kreise, so ist der Abstand ihrer Mittelpunkte entweder der Summe oder dem Unterschiede ihrer Halbmesser gleich.*

§. 121. *Wenn sich zwei Kreise schneiden, so steht die gemeinschaftliche Sehne jederzeit auf der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte senkrecht.*

Fig. 123.



Aus den Mittelpunkten I und O sind die Kreise beschrieben, die sich in A und B schneiden. Verbinden wir I und O mit A und B, so hat man IA = IB; OA = OB; IO = IO, daher die Dreiecke IOA und IOB mit einander ganz einerlei sind, folglich die Winkel AIO = OIB, AOI = IOB; da nun in dem gleich-

schenklichten Dreiecke AIB, und eben so in dem gleichschenklichten Dreiecke AOB der Winkel am Scheitel durch IO halbirt ist, so muß diese IO auf AB senkrecht stehen.

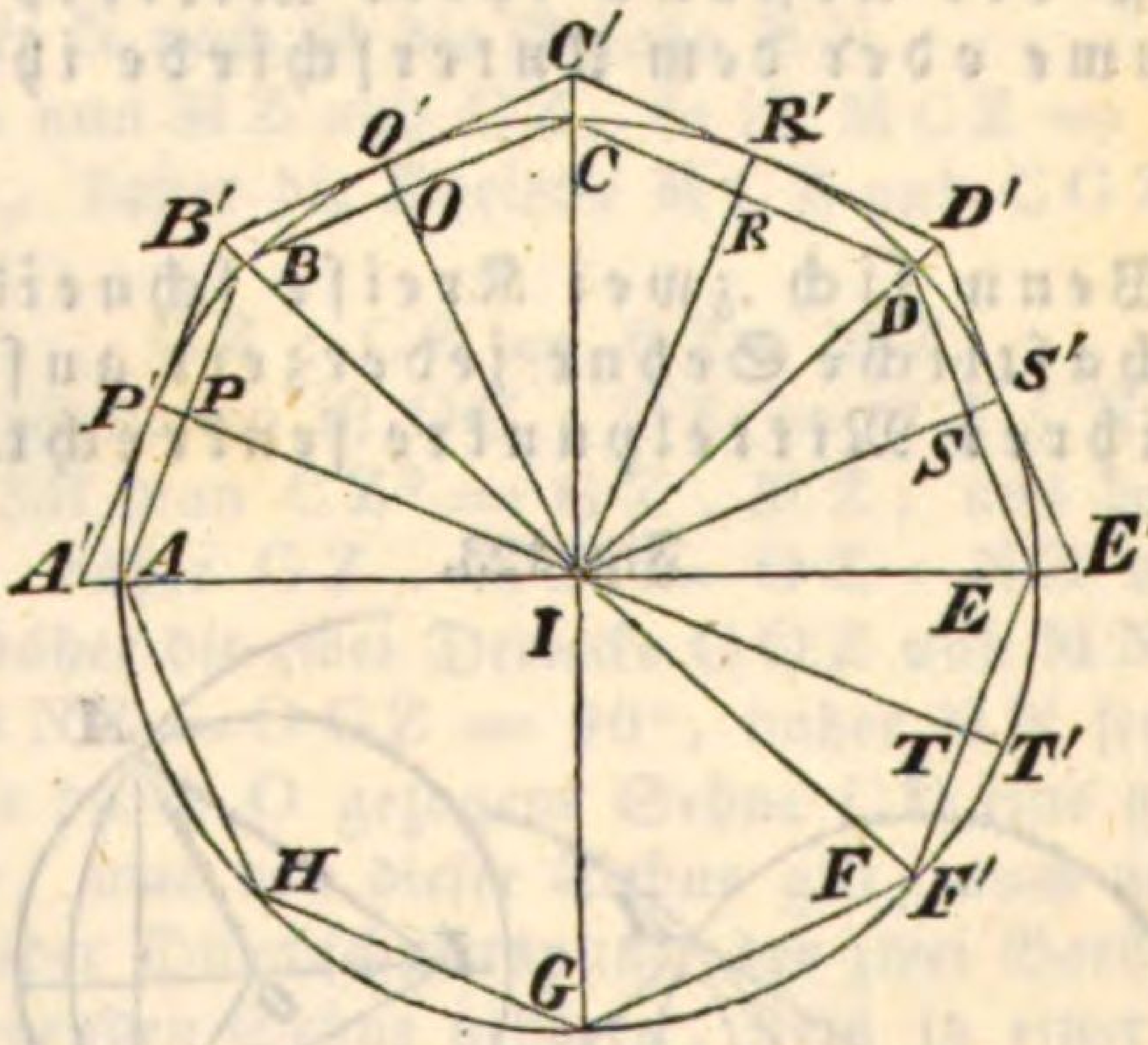
II. Der Kreis mit regelmäßigen Vielecken verglichen.

Eine geradlinige Figur heißt dem Kreise eingeschrieben, wenn der Umfang des Kreises durch die Eckpunkte dieser Figur geht. Der Kreis ist dann gegen die Figur ein umschriebener.

Eine geradlinige Figur heißt einem Kreise umschrieben, wenn alle Seiten derselben den Kreis berühren; der Kreis heißt dann gegen die Figur ein eingeschriebener.

§. 122. Wenn man sich den Umfang eines Kreises in irgend eine Anzahl gleicher Theile getheilt denkt, so läßt sich dann dem Kreise ein regelmäßiges Vieleck von eben so viel Seiten ein- und umschreiben.

Fig. 124.



Denken wir uns den Umfang in n (hier 8) gleiche Theile getheilt in den Punkten A, B, C, D u. s. w. Verbinden wir je zwei neben einander liegende Theile durch die Geraden AB, BC, CD u. s. w., so behaupte ich, daß die durch diese Verbindungslinien erhaltene Figur ein regelmäßiges Polygon sey. Denn erstens sind alle Sehnen AB, BC, CD u. s. w. einander gleich, weil ihre Bögen einander gleich sind. Aber auch die inneren Winkel ABC, BCD, CDE u s. w. sind einander gleich; denn der Winkel ABC steht auf einem Bogen CDEFGHA auf, der den ganzen Umkreis weniger der zwei Bögen AB und BC gleich ist; da nun der Bogen AB = BC gleich dem n^{ten} (hier achten) Theile des Umfanges ist, so ist der Bogen, auf welchem der Winkel ABC aufstehet, gleich $\frac{n-2}{n}$ (hier $\frac{6}{8}$) des ganzen Umfanges.

Allein ganz dasselbe gilt von den Winkeln BCD, CDE und allen übrigen, alle stehen auf Bögen auf, die das $\frac{n-2}{n}$fache (hier $\frac{6}{8}$fache) des Umfanges sind; daher sind alle diese Winkel einander gleich, und somit die dem Kreise auf diese Art eingeschriebene Figur ein regelmäßiges Vieleck.

Ich fälle nun von I die Lothe IP, OI u. s. w. auf die Sehnen AB, BC, CD u. s. w., verlängere diese Lothe, bis sie den Umfang in P' O', R' u. s. w. treffen; weil nun die Dreiecke AIB, BIC, CID u. s. w. alle gleichschenklich sind, so werden die Winkel AIB, BIC, CID u. s. w. dadurch halbirt, und eben so auch die ihnen zukommenden Bögen AB, BC, CD, u. s. w. in den Punkten P', O', R' u. s. w. in zwei Hälften getheilt. Ziehe ich nun durch den Punkt P' eine Berührende zum Kreis, und verlängere die Halbmesser AI und BI, bis sie die Berührende in den Punkten A' und B' treffen, so ergibt sich, da A'P'I = B'P'I = 90°, A'IP' = B'IP', P'I = P'I die Congruenz der Dreiecke A'IP' und B'IP', daher A'P' = P'B'. Verbinde ich nun B' mit O', so erhalte ich die congruenten Dreiecke P'IB' und B'IO'; denn die Winkel PIB und BIO sind gleich, weil ihre Bögen gleich sind, B'I = B'I; P I = O'I, daher die Winkel B'O'I = B'P'I = 90°, daher B'O' eine Berührende, und dann gibt diese Congruenz noch B'P' = B'O'. — Man verlängert nun B'O', bis sie durch die verlängerte IC, in C' getroffen wird.

Weil nun B'O'I = 90°, also auch C'O'I = 90 ist, B'IO' = O'IC', O'I = O'I, so hat man die Dreiecke B'O'I und C'O'I congruent, daher B'I' = I'C'.

Verbindet man nun C' mit R', so läßt sich die Congruenz von C'IO' und C'IR' leicht nachweisen, woraus folgt, daß C'R' eine Berührende des Kreises sey, und daß C'R' = C'O' ist. Auf diese Art fortfahrend, läßt sich die Congruenz aller dieser neben einander liegenden Dreiecke nachweisen, woraus nicht nur die Gleichheit von C'R', R'D', D'S', S'E' u. s. w. folgt, sondern es ergibt sich auch, daß die Geraden C'D', D'E', E'F' u. s. w. alle den Kreisumfang berühren, so daß die Figur A'B'C'D'E' u. s. w. eine den Kreis umschriebene ist.

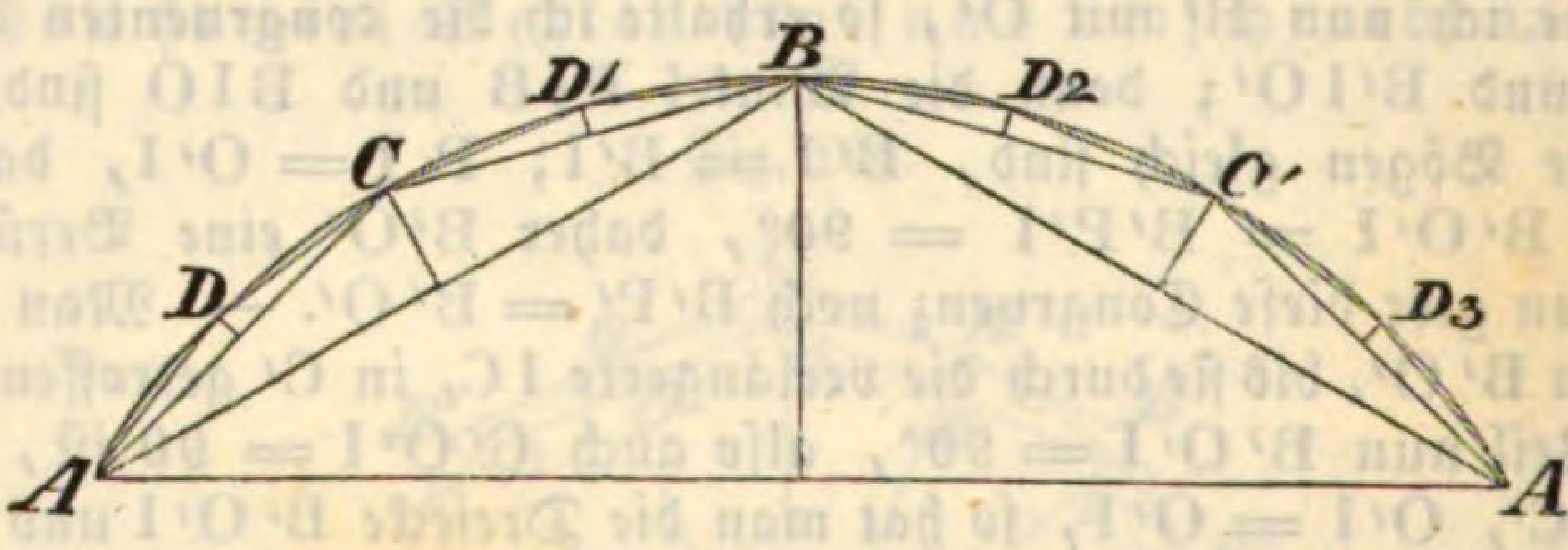
Da nun AP' = P'B' = B'O' = O'C' = C'R' = R'D' u. s. w. unter einander gleich sind, so sind auch die Summen von je zwei neben einander gleich, d. h. A'B' = B'C' = C'D' u. s. w, d. h. alle Seiten der umschriebenen Figur einander gleich.

Da aber A'B' ∥ AB, B'C' ∥ BC, C'D' ∥ CD u. s. w., weil sie je zwei auf derselben Geraden P'I, O'I R'I u. s. w. senkrecht sind, so hat man die Winkel A'B'C' = ABC, B'C'D' = BCD, C'D'E' = CDE u. s. w., d. h. die Winkel der umschriebenen Figur gleich den Winkeln der inneren Figur; da nun die letzteren einander gleich sind, so müssen es auch die der ersteren seyn; daher auch die umschriebene Figur somit ein regelmäßiges Polygon ist. Aus dem Vorhergehenden folgt ganz leicht:

Theilt man den Kreisumfang in gleiche Theile, und zieht durch jeden Theilungspunkt eine Berührende, und zwar nur so lange, bis sie von den beiden nächsten Berührenden getroffen wird, so entsteht ein dem Kreise umschriebenes regelmäßiges (Polygon) Vieleck.

§. 123. Wenn man einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck einschreibt, und mittelst diesem ein regelmäßiges Vieleck von doppelt so viel Seiten, und mittelst des letztern wieder ein Vieleck von vierfacher, achtfacher u. s. w. Anzahl von Seiten, so wird der Umfang jedes spätern Vielecks größer seyn, als der des vorhergehenden, aber jeder stets kleiner als der Umfang des Kreises.

Fig. 125.



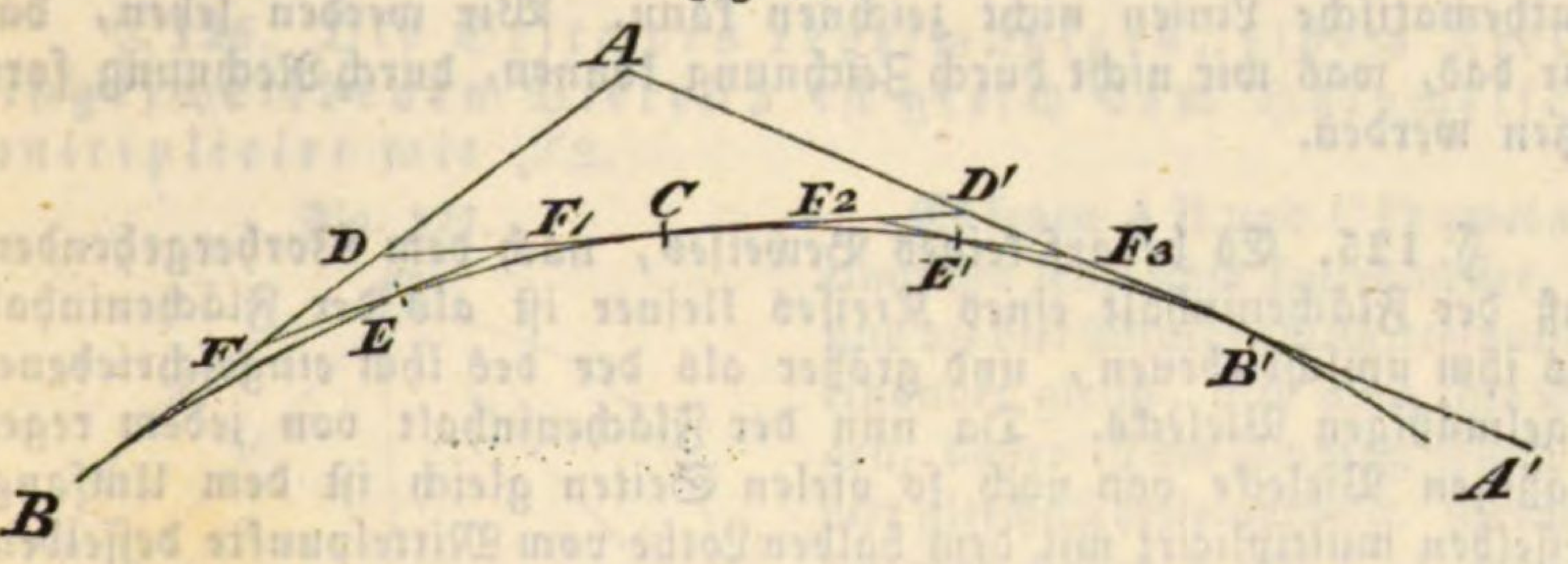
Es sey AA_1 die Seite eines eingeschriebenen regelmäßigen nseitigen Vielecks, so daß der Umfang desselben $U_n = n \cdot AA_1$. Halbire ich nun den Bogen AA' in B, so sind AB und BA_1 Seiten des regelmäßig eingeschriebenen 2n Ecks, dessen Umfang wir U_{2n} bezeichnen wollen, da nun $U_{2n} = 2n \cdot AB = n \cdot 2AB = n\,(AB + BA_1)$ ist; da nun ferners $AB + BA_1 > AA_1$, also auch $n\,(AB + BA_1) > n \cdot AA_1$, so hat man $U_{2n} > U_n$. Halbirt man eben so jeden dieser Bögen AB und BA_1 in den Punkten C und C_1, und nennt den Umfang $ACBC_1A_1$ u. s. w. des neuen 4nseitigen Vielecks U_{4n}, so hat man $U_{4n} = 4n \cdot AC = 2n \cdot 2AC = 2n\,(AC + CB)$. Da nun $AC + CB > AB$, also auch $2n\,(AB + CC) > 2n \cdot AB$, so hat man $U_{4n} > U_{2n}$. Halbirt man eben so die Bögen AC CB BC_1 u. s. w., so erhält man ein regelmäßiges Vieleck von 8nSeiten, und es läßt sich wieder zeigen, daß $U_{8n} > U_{4n}$. Diese Arbeit läßt sich im Gedanken wenigstens ohne Ende fortführen, wenn auch beim Zeichnen die Kleinheit der Linien ein Hinderniß setzet. Begreiflich wird sich der Umfang jedes spätern Vielecks dem Kreisumfang immer mehr und mehr nähern, ohne ihn je vollkommen zu erreichen, weil, so klein ein Bogen auch sey, so ist er doch stets größer als seine Sehne, weil die gerade Linie die kürzeste ist zwischen zwei Punkten. Der Kreisumfang ist daher die Grenze, der sich die Umfänge der eingeschriebenen Vielecke desto mehr nähern, je größer die Anzahl ihrer Seiten ist, und in diesem Sinne ist der

häufig gebrauchte Ausdruck zu verstehen, daß der Kreis ein regelmäßiges Polygon von unendlich viel Seiten sey.

Das Wort unendlich will eben sagen, wenn man noch so viel Seiten nimmt, es nie ganz genau ist.

§. 124. **Wenn man einem Kreise ein regelmäßiges Vieleck umschreibt von n Seiten, und mittelst dieses regelmäßige Vielecke von 2n, 4n, 8n Seiten u. s. w., so ist der Umfang jedes folgenden Vielecks kleiner als der des vorhergehenden, doch jeder stets größer als der Kreisumfang.**

Fig. 126.



Es sey $A A'$ die Seite eines regelmäßigen umschriebenen nseitigen Vielecks, welche in B_1 den Kreis berührt, so daß also $A B_1 = A_1 B_1$; eben so sey $A B$ die Hälfte der nächsten Seite, so daß also $A B = A B_1$ und daher $AB + AB_1 = A A'$ ist. Nennen wir daher den Umfang des nseitigen umschriebenen Vielecks U_n, so hat man $U_n = n \,.\, A A_1$ $= n\,(AB + AB_1)$. Halbirt man nun den Bogen $B B'$ in C, und ziehet durch C eine Berührende $D D'$ zum Kreise, so ist $D D'$ die Seite des regelmäßigen umschriebenen Vielecks von $2n$ Seiten, und BD und $B_1 D_1$ die Hälften solcher Seiten. Daher wenn U_{2n} der Umfang des umschriebenen Vielecks von $2n$ Seiten ist, so hat man $U_{2n} = 2n \,.\, DD_1$; nun ist $AD + AD_1 > DD_1$, daher $AD + AD_1 + BD + B_1 D_1$ $> DD_1 + BD + B_1 D_1$, d. h. $AB + AB_1 > 2\,DD_1$, also $AA_1 > 2 DD_1$, daher $n \,.\, AA_1 > 2n \,.\, DD_1$, d. i. $U_n > U_{2n}$.

Halbire ich nun die Bögen BC, CB_1 u. s. w. in $E\ E_1$ und ziehe durch diese Theilungspunkte Berührende zum Kreise $F F_1$, $F_2 F_3$ u. s. w., so sind FF_1, $F_1 F_2$, $F_2 F_3$ u. s. w. die Seiten eines regelmäßig umschriebenen Polygons von $4n$ Seiten. Nun ist $FD + F_1 D > FF_1$, also $FD + F_1 D + BF + F_1 C > FF_1 + BF + F_1 C$, d. h. $BD + CD > FF_1 + FF_1$, d. h. $DD_1 > 2 FF'$, daher $2n DD_1$ $> 4n FF_1$, also $U_{2n} > U_{4n}$.

Auch hier können wir wenigstens im Gedanken diese Arbeit fortsetzen, und der Umfang jedes späteren auf diese Art verzeichneten Vielecks ist kleiner als der des vorhergehenden. Wir sehen zugleich, daß diese Umfänge sich dem Umfange des Kreises immer mehr und mehr nähern, und ohne die Zeichnung wirklich auszuführen, sehen wir aus dem bis-

herigen Hergang ein, daß wenn der Umfang eines der auf diese Art verzeichneten Vielecke noch so nahe dem Kreise ist, sich doch noch ein kleinerer Umfang von doppelt so viel Seiten denken läßt, der kleiner ist, als der des gedachten Vielecks, und doch noch nicht mit dem Kreise zusammenfällt; denn keiner dieser Umfänge kann ganz mit dem Kreisumfange zusammenfallen, weil die Berührende eines Kreises nur einen Punkt mit demselben gemein hat, und daher nie mit dem Bogen zusammenfallen kann. Daher ist der Umfang eines noch so nahe an den Kreis sich anschließenden umschriebenen Vielecks doch stets größer als der Kreisumfang. — Der hier angestellten Untersuchung des immer näher Anschließens der umschriebenen Vielecke an den Kreis stellt sich in der Zeichnung durch die Dicke der Linien ein Hinderniß, da man mathematische Linien nicht zeichnen kann. Wir werden sehen, daß wir das, was wir nicht durch Zeichnung können, durch Rechnung fortsetzen werden.

§. 125. Es bedarf keines Beweises, nach dem Vorhergehenden, daß der Flächeninhalt eines Kreises kleiner ist als der Flächeninhalt des ihm umschriebenen, und größer als der des ihm eingeschriebenen regelmäßigen Vielecks. Da nun der Flächeninhalt von jedem regelmäßigen Vielecke von noch so vielen Seiten gleich ist dem Umfange desselben multiplicirt mit dem halben Lothe vom Mittelpunkte desselben; da ferner, je größer die Anzahl der Seiten des regelmäßigen Vielecks ist, dieses Loth vom Mittelpunkte auf eine der Seiten sich immer mehr und mehr dem Halbmesser des Kreises nähert, während sich zugleich der Umfang und Flächeninhalt des Vielecks dem Umfang und dem Flächeninhalt des Kreises ohne Ende nähert, je größer die Anzahl der Seiten wird, so gelangt man zum Endschluß, daß der Flächeninhalt des Kreises gleich ist dem Umfange desselben multiplicirt mit dem halben Halbmesser.

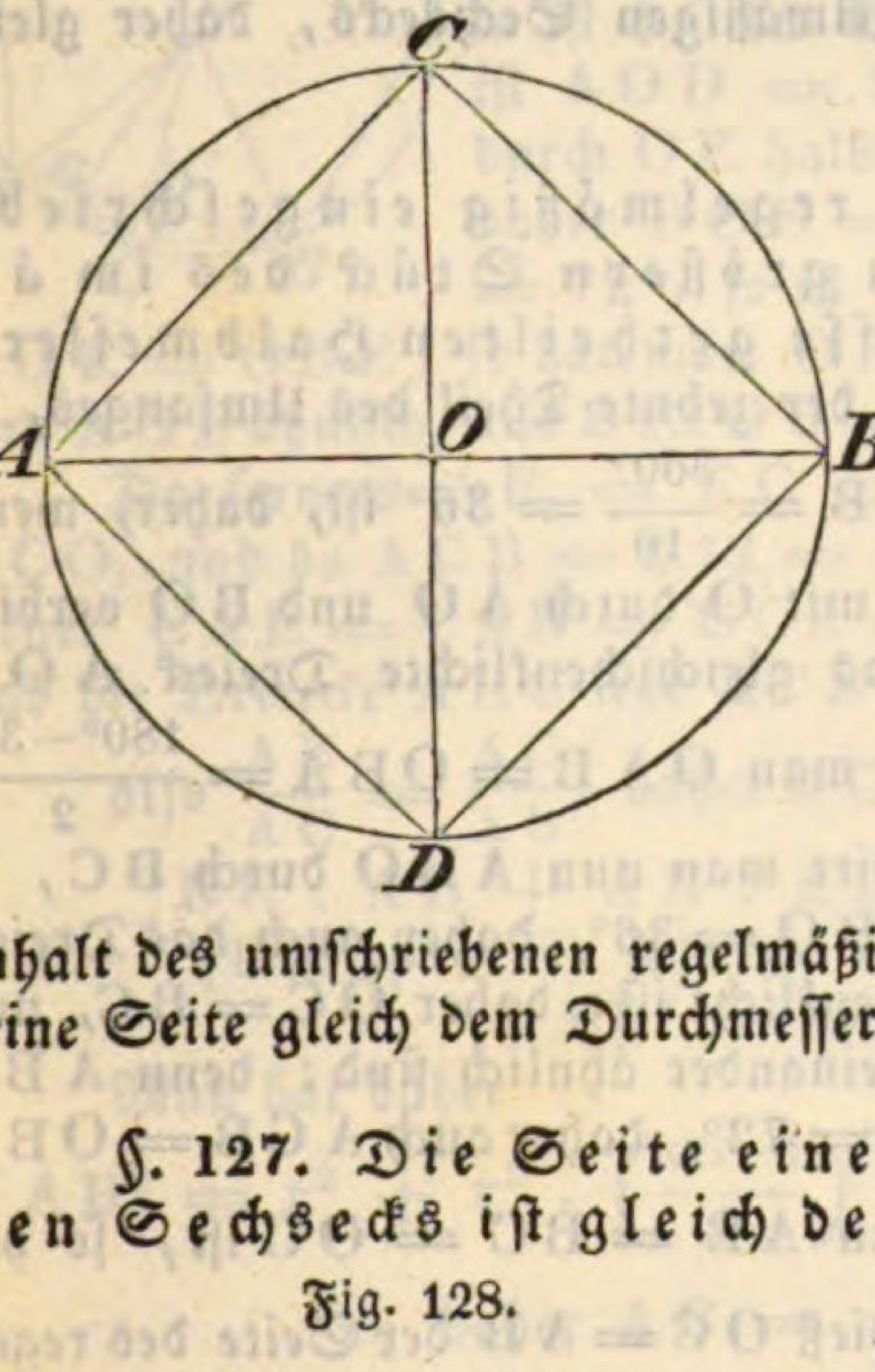
Wollte man die Richtigkeit dieser Behauptung läugnen, so müßte der Flächeninhalt F des Kreises größer oder kleiner als $U \cdot \frac{r}{2}$, wo U den Kreisumfang und r den Halbmesser ausdrückt

Es läßt sich zeigen, daß weder das eine, noch das andere seyn kann. Denn wäre erstens $F > U \cdot \frac{r}{2}$, so sey $F - U \cdot \frac{r}{2} = \triangle$. Nun läßt sich jedem Kreise ein regelmäßiges Vieleck einschreiben, dessen Fächeninhalt vom Flächeninhalt des Kreises um weniger verschieden ist, als jede gegebene noch so kleine Größe. Es sey nun ein solches regelmäßiges Vieleck, dessen Umfang u, und wo das Loth auf einer der Seiten p ist, so hat man $F - u \cdot \frac{p}{2} < \triangle$, daher $F - u \cdot \frac{p}{2} < F - U \cdot \frac{r}{2}$; es müßte daher: $u \cdot \frac{p}{2} > U \frac{r}{2}$, was aber nicht seyn kann, da $U > u$ und $r > p$ ist.

Eben so wenig kann zweitens $F < U \cdot \frac{r}{2}$ seyn; denn wäre $U \cdot \frac{r}{2} - F = \triangle$, so können wir stets dem Kreise ein regelmäßiges Vieleck umschreiben, so daß der Unterschied ihrer Flächeninhalte kleiner sey als jede gegebene noch so kleine Größe. Es sey u' der Umfang eines solchen umschriebenen Vielecks, so ist hier das Loth vom Mittelpunkte auf einer Seite gleich dem Halbmesser r, und wir haben somit $u' \cdot \frac{r}{2} - F < \triangle$, also $u' \cdot \frac{r}{2} - F < U \cdot \frac{r}{2} - F$, daher $u' \cdot \frac{r}{2} < U \cdot \frac{r}{2}$, was unmöglich, da $u' > U$ seyn muß.

§. 126. **Die Seite des regelmäßigen, einem Kreise eingeschriebenen Vierecks ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit $\sqrt{2}$.**

Fig. 127.

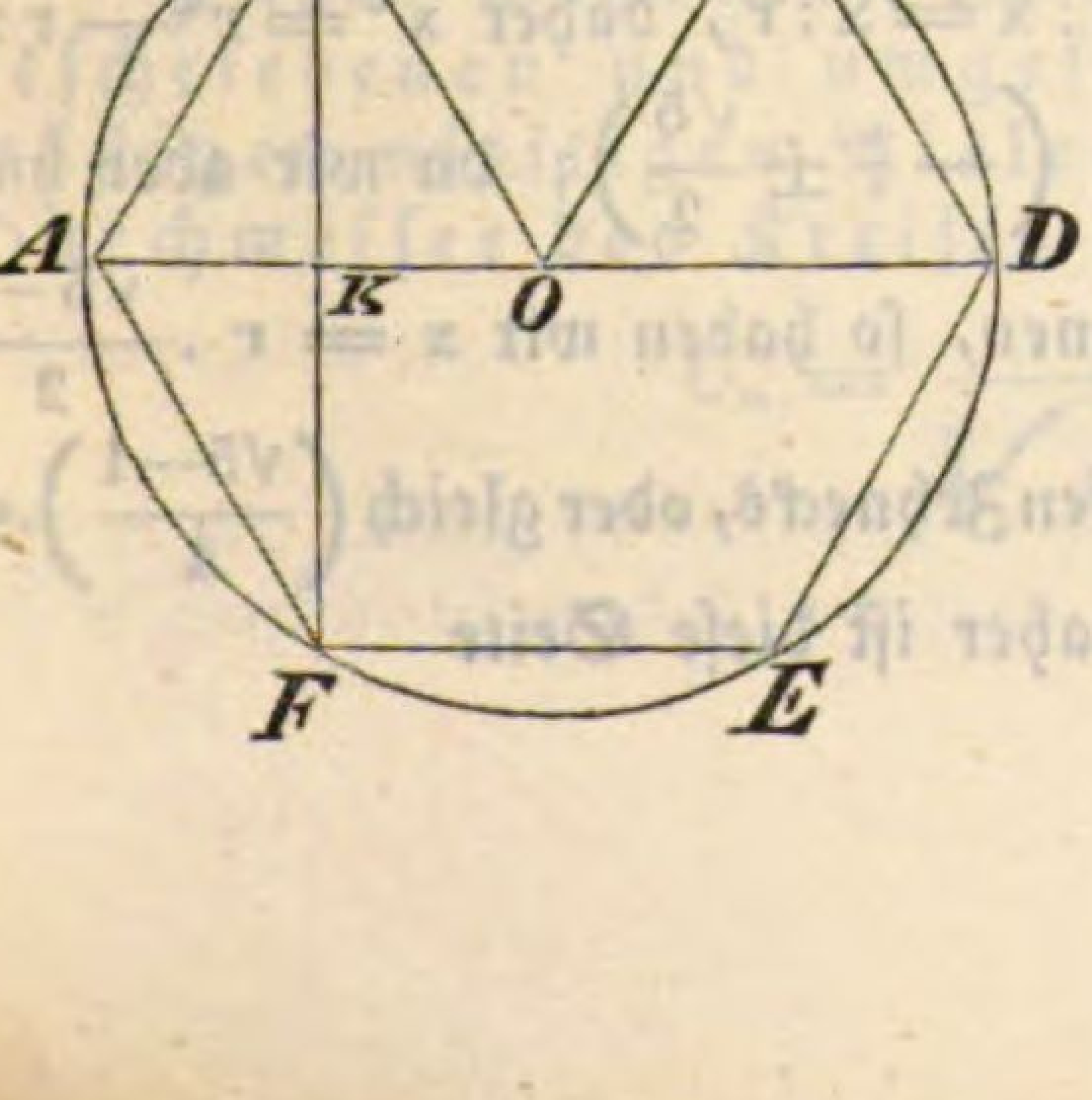


Es seyen AB und CD zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so sind die vier Winkel am Mittelpunkte einander gleich, also auch ihre Bögen, daher ist der Umfang somit in vier gleiche Theile getheilt. Verbindet man daher A mit C, C mit B, B mit D, D mit A, so ist ABCD ein regelmäßiges Viereck. Nun ist $AC^2 = AO^2 + CO^2 = 2AO^2$; daher $AC = AO \cdot \sqrt{2} = r \cdot \sqrt{2}$, wenn r den Halbmesser vorstellt. Der Flächeninhalt von ABCD $= 2r^2$.

Den Beweis, daß der Flächeninhalt des umschriebenen regelmäßigen Vielecks gleich ist $4r^2$, und daß seine Seite gleich dem Durchmesser, überlassen wir unsern Lesern.

§. 127. **Die Seite eines regelmäßig eingeschriebenen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser.**

Fig. 128.



Es sey AO der Halbmesser; beschreibe ich aus dem Mittelpunkte A einen Kreisbogen mit dem Halbmesser AO, der den Kreis in B und F schneidet; verbinde B mit A, so ist AB die Seite des regelmäßigen Sechsecks; denn $AO = BO$ als Halbmesser $AB = AO$, nach unserer Voraussetzung, daher AOB ein gleichseitiges Dreieck, daher $AOB = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, daher $AOB = \frac{360^\circ}{6}$,

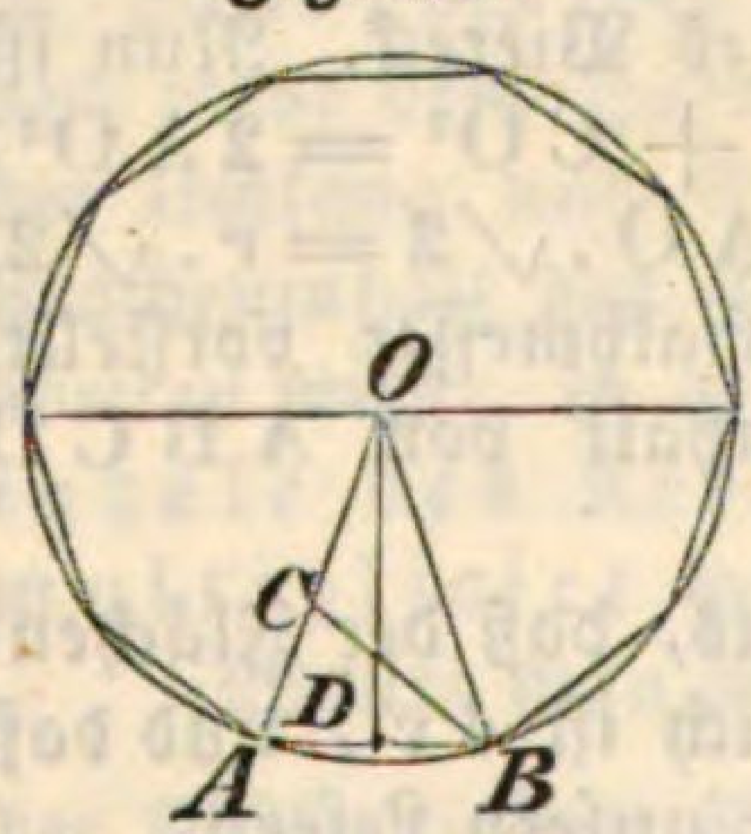
daher der Bogen A B der sechste Theil des Umfanges, und die Sehne A B die Seite des regelmäßigen Sechsecks; oder da $AOB = 60^\circ$, so ist $BOD = 120^\circ$. Halbirt man nun B O D durch C O, so ist $AOB = BOC = COD = 60^\circ$, also die Bögen $AB = BC = CD$, daher der Bogen A B der dritte Theil des halben, oder der sechste Theil des ganzen Umfanges.

Nennen wir den Halbmesser r, so ist, wenn $BK \perp AO$ ist, $AK = \frac{r}{2}$, also $BK^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4}$, also $BK = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, daher Flächeninhalt von $AOB = \frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3}$; daher der Flächeninhalt des Sechsecks $= \frac{6r^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3}$.

Verlängert man B K, so trifft es in F ein, und dann ist B F die Seite des regelmäßigen Dreiecks, welche also gleich $2BK = r\sqrt{3}$ ist, und wie man leicht sieht, ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Dreiecks gerade die Hälfte des regelmäßigen Sechsecks, daher gleich $\frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot r^2$.

§. 128. **Die Seite des regelmäßig eingeschriebenen Zehnecks ist gleich dem größern Stück des im äußern und innern Verhältnisse getheilten Halbmessers.**

Fig. 129.



Es sey A B der zehnte Theil des Umfanges, so also, daß $AOB = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$ ist, daher, wenn man A und B mit O durch A O und B O verbindet, so daß das gleichschenklichte Dreieck A O B entsteht, so hat man $OAB = OBA = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ$. Halbirt man nun A B O durch B C, so ist $ABC = CBO = 36^\circ$, daher auch das Dreieck B O C gleichschenklicht ist; daher $OC = BC$, und die Dreiecke A B O und A B C mit einander ähnlich sind; denn $ABC = AOB = 36^\circ$; $CAB = OAB = 72^\circ$, daher auch $ACB = OBA = 72^\circ$, daher $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{OA}$; da nun $AB = BC = OC$ ist, so hat man $AC : OC = OC : OA$, und dieß $OC = AB$ der Seite des regelmäßigen Zehnecks. Suchen wir nun durch Rechnung die Größe der Seite des regelmäßigen Zehnecks, so haben wir nach dem Vorhergehenden, wenn x diese Seite ist: $(r - x) : x = x : r$, daher $x^2 = r^2 - rx$, also $x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + r^2} = r\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; da wir aber hier nur den positiven Werth brauchen können, so haben wir $x = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ als Seite des regelmäßig eingeschriebenen Zehnecks, oder gleich $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right) \cdot d$, wenn d den Durchmesser bedeutet; daher ist diese Seite

$= 0{\cdot}30901\ 699437\ .\ d,$

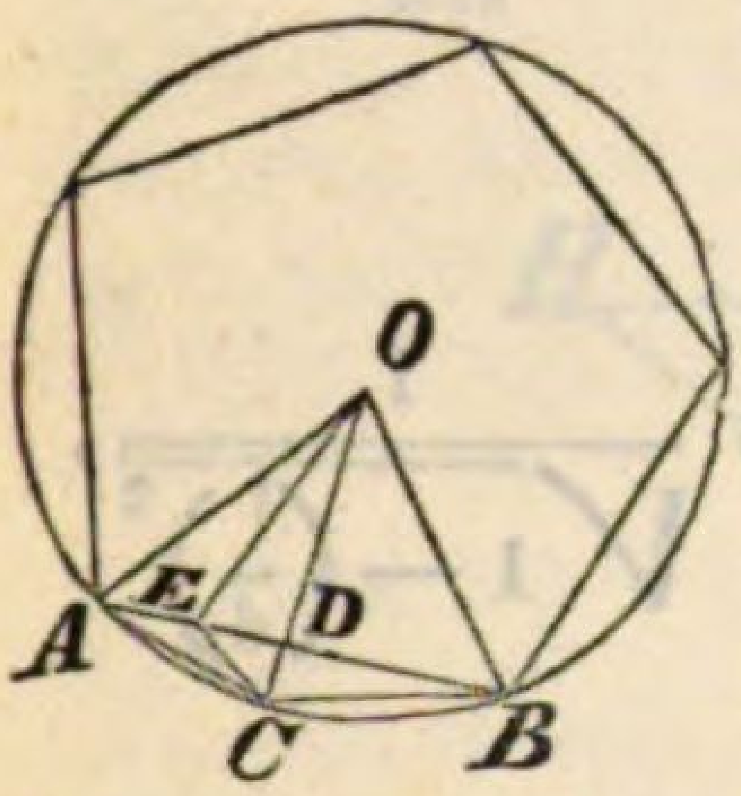
daher der Umfang des regelmäßigen eingeschriebenen Zehnecks

$= 3{\cdot}09016\ 99437\ .\ d.$

Fällt man von O das Loth OD auf AB, so findet man in dem Dreiecke BOD; $OD = 0{\cdot}4755282\ .\ d$, und den Flächeninhalt des Zehnecks $= 0{\cdot}7347316\ .\ d^2$.

§. 129. **Das Quadrat der Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Fünfecks ist gleich dem Quadrate der Seite des regelmäßigen eingeschriebenen Zehnecks mehr dem Quadrate des Halbmessers.**

Fig. 130.



Es sey AB die Seite des regelmäßigen Fünfecks, daher $AOB = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$, und wenn wir von O das Loth OD auf AB fällen, und dieß bis C im Umfange verlängern, AC und CB ziehen, so ist AC die Seite des regelmäßigen Zehnecks. Es ist $AOD = 36^\circ$, und wenn wir diesen Winkel durch OE halbiren, so ist $EOC = 18^\circ = AOE$, daher $BOE = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$; da $BOA = 72^\circ$, so ist $OAB = OBA = 54^\circ$, da also $BOE = OBE$, so hat man $OE = BE$, und die Dreiecke BOE und AOB ähnlich, also $BE : OB = OB : AB$, also $OB^2 = BE . AB$.

Da ferners $AE = EC$ aus der Congruenz von AEO und ECO, und da $ACB = 2.72 = 144^\circ$, also $BAC = CBA = 18^\circ$; ferner $CAE = CAB = ECA = 18^\circ$, also $AEC = 144^\circ$, so sind die Dreiecke AEC und ACB ähnlich,

also $\frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AB}$, daher $AC^2 = AE . AB$, und somit:

$$BE\ .\ AB + AE\ .\ AB = OB^2 + AC^2, \text{ oder}$$

$$(BE + AE)\ AB = OB^2 + AC^2, \text{ und somit}$$

$$AB^2 = OB^2 + AC^2.$$

Man hat daher

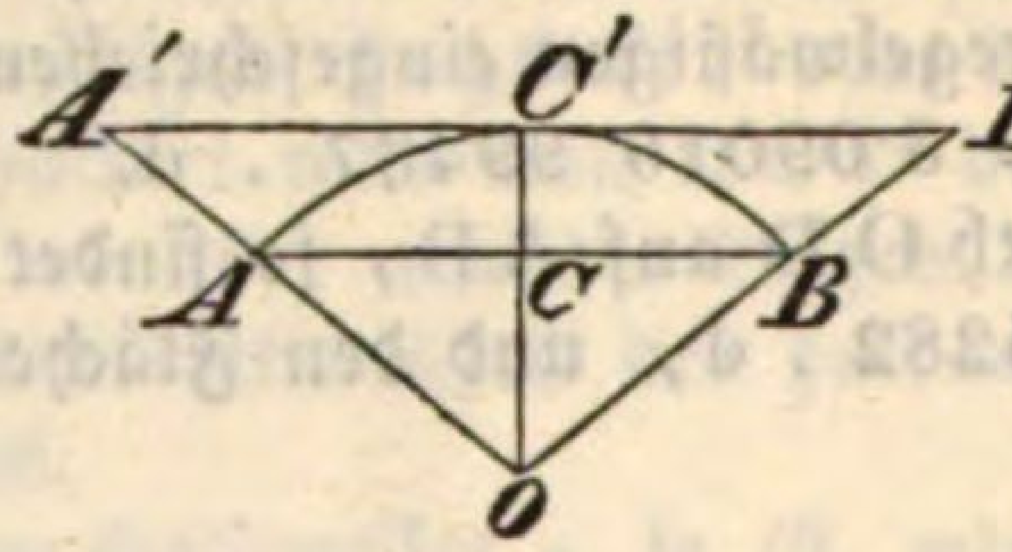
$$AB^2 = r^2 + r^2 . \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = r^2 . \left(1 + \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}\right),$$

$$\text{daher } AB = r . \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2}.$$

§. 130. **Bedeuten E_n und U_n die Umfänge der eingeschriebenen und umgeschriebenen nseitigen regelmäßigen nseitigen Vielecke, so hat man, wenn d den Durchmesser des Kreises bedeutet,**

$$U_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{E_n}{n d}\right)^2}}.$$

Fig. 131.



Es sey $AOB = \frac{360^\circ}{n}$, also AB die Seite des regelmäßig eingeschriebenen nseitigen Vielecks $OC' \perp AB$, $A'B' \perp C'O$, so ist $A'B'$ die Seite des regelmäßigen umschriebenen nEcks; man hat nun: $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'O}{CO} = \frac{C'O}{\sqrt{AO^2 - AC^2}}$, daher wenn man $AB = l$, $A'B' = l'$ und $AO = \frac{d}{2}$ nennt, so hat man:

$$\frac{l'}{l} = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} = \frac{d}{\sqrt{d^2 - l^2}}; \quad l' = \frac{l}{\sqrt{1 - \left(\frac{l}{d}\right)^2}},$$

also da $l\,n = E_n$; $l'n = U_n$ ist

$$U_n = \frac{E_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{E_n}{nd}\right)^2}}.$$

Die letzte Gleichung zwischen l und l′ führt uns durch Quadrirung und Umkehrung der Gleichung zur folgenden interessanten:

$$\frac{1}{l'^2} = \frac{1}{l^2} - \frac{1}{d^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{1}{l^2} - \frac{1}{l'^2} = \frac{1}{d^2}.$$

Es ist also der Unterschied der Quadrate der reciproken Werthe der Seite eines ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks eine beständige Größe.

Die letzte Gleichung gibt uns:

$$\frac{1}{E_n^2} - \frac{1}{U_n^2} = \frac{1}{n^2 d^2}.$$

Je größer nun n ist, desto kleiner wird dieser Unterschied, und bei dem unendlichen Wachsen von n wird dieser Unterschied ohne Ende klein; daher sich die Umfänge der ein- und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke bei fortwährendem Wachsen der Seitenanzahl einander ohne Ende nähern. Und wie wir wissen, liegt der Kreisumfang jederzeit zwischen beiden.

Durch Anwendung obiger Formel erhält man für das Zehneck:

$$U_{10} = 3{\cdot}249197 \,.\, d$$

und der Flächeninhalt des umschriebenen Zehnecks ist gleich seinem Umfange, multiplicirt mit dem halben Lothe aus dem Mittelpunkte auf

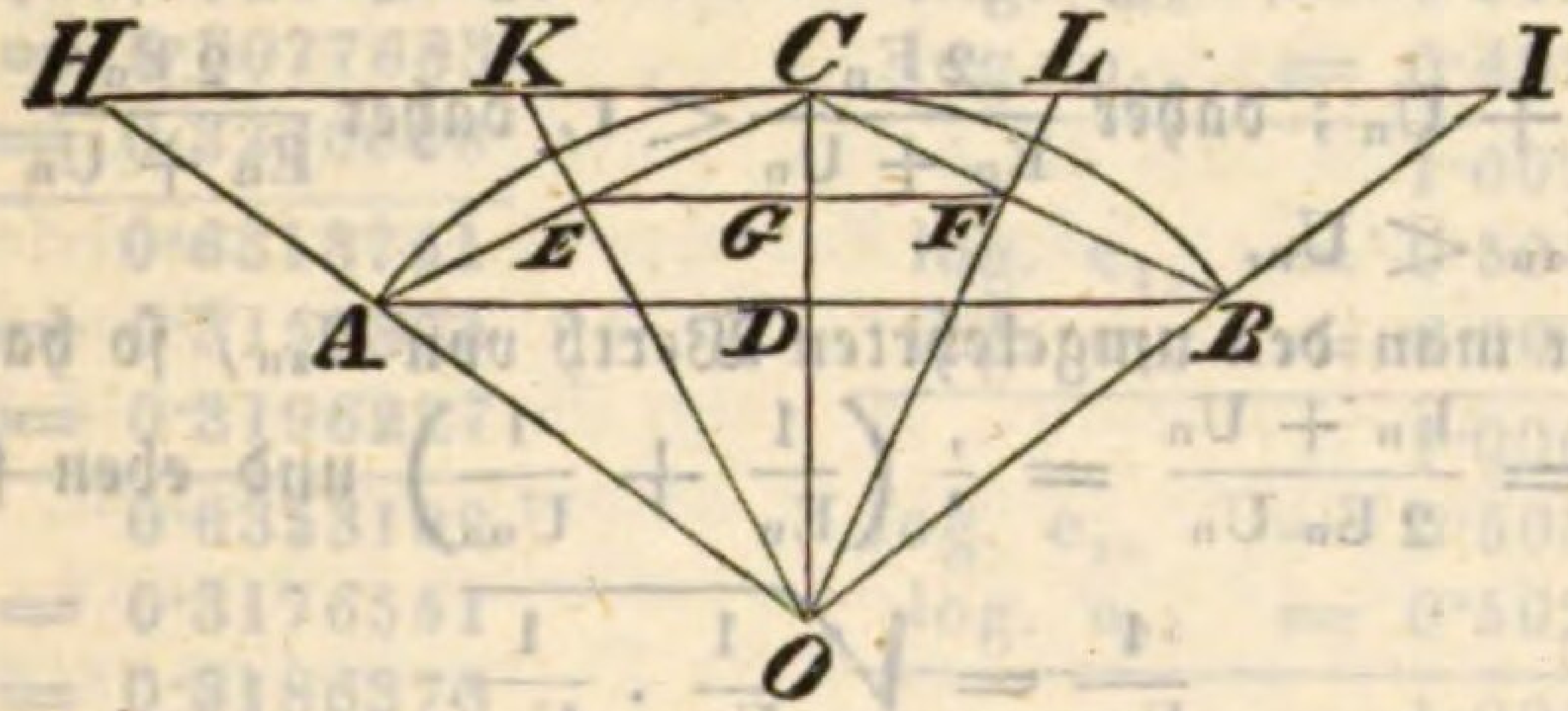
eine der Seiten, d. h. multiplicirt mit $\frac{d}{4}$, daher der Flächeninhalt des umschriebenen Zehnecks $= 0{\cdot}812299\ d^2$.

§. 131. Bedeuten E_n und U_n die Umfänge von einem nseitigen, eingeschriebenen und nseitigen umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke, und bedeuten E_{2n} und U_{2n} eben solche Umfänge von regelmäßigen Vielecken von doppelt so viel Seiten, so hat man

$$E_{2n} = \sqrt{E_n \,.\, U_{2n}};\quad U_{2n} = \frac{2\,E_n\,U_n}{E_n + U_n} \text{ oder}$$

$$\frac{1}{E_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{E_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}},\quad \frac{1}{U_{2n}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{E_n} + \frac{1}{U_n}\right).$$

Fig. 132.



Es sey AB die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen nEcks, HI die Seite des regelmäßigen umgeschriebenen nEcks, also AOB $= \frac{360}{n}$; fällt man von O ein Loth OC auf HI, so ist AOC = COB $= \frac{180}{n}$, somit sind AC und CB die Seiten des regelmäßigen eingeschriebenen 2nEcks; fällt man nun von O die Lothe OE und OF auf AC und CB, die verlängert die HI in K und L treffen, so ist der Winkel KOL $= \frac{360}{2n}$, folglich sein Bogen der 2nte Theil des Kreisumfanges, also KL die Seite des umschriebenen regelmäßigen 2nEcks, daher hat man:

$E_n = n\,.\,AB$; $U_n = n\,.\,HI$; $E_{2n} = 2n\,.\,AC$; $U_{2n} = 2n\,.\,KL$.

Man hat $\triangle AEO \sim \triangle KOC$, weil $AOE = KOC = \frac{360°}{4n}$; $AEO = KCO = 90°$,

$\triangle ACD \sim \triangle ECO$, weil $ACD = ECO$, $ADC = CEO = 90°$, daher hat man:

$$\frac{U_{2n}}{E_{2n}} = \frac{KL}{AC} = \frac{KC}{EA} = \frac{CO}{EO} = \frac{AC}{AD} = \frac{2n\,.\,AC}{n\,.\,2AD} = \frac{E_{2n}}{E_n};\ \text{daher}$$

$$U_{2n}\,.\,E_n = E_{2n}\,.\,E_{2n} \text{ oder } E_{2n} = \sqrt{E_n\,.\,U_{2n}}.$$

Eben so hat man $\frac{U_{2n}}{E_n} = \frac{2n\,KL}{n\,.\,2AD} = \frac{KL}{AD} = \frac{KL}{EF} = \frac{CO}{GO} = \frac{CO}{\frac{1}{2}(CO + DO)}$.

Nun ist $\frac{CO}{DO} = \frac{HC}{AD}$, also $\frac{CO}{CO + DO} = \frac{HC}{HC + AD}$, also

$$\frac{CO}{\frac{1}{2}(CO + DO)} = \frac{HC}{\frac{1}{2}(HC + AD)} = \frac{2nHC}{\frac{1}{2}(2nHC + 2nAD)} = \frac{U_n}{\frac{1}{2}(U_n + E_n)};$$

daher $\frac{U_{2n}}{E_n} = \frac{U_n}{\frac{1}{2}(U_n + E_n)}$, also $U_{2n} = \frac{E_n U_n}{\frac{1}{2}(U_n + E_n)}$.

Mittelst dieser zwei Formeln können wir aus den Umfängen irgend eines regelmäßigen ein- und umgeschriebenen Vielecks die Umfänge des regelmäßigen eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecks von doppelt so viel Seiten berechnen. Wir sehen zugleich aus diesen Formeln, daß der Umfang des umschriebenen Vielecks von doppelter Seitenanzahl kleiner ist, als der Umfang des umschriebenen Vielecks von einfacher Seitenanzahl. Daß $E_{2n} > E_n$, daß $E_n < U_n$, ist aus geometrischer Betrachtung klar, da nun $E_n < U_n$, so ist

$2E_n < E_n + U_n$; daher $\frac{2E_n}{E_n + U_n} < 1$, daher $\frac{2E_n}{E_n + U_n} \cdot U_n < U_n$, und somit $U_{2n} < U_n$.

Nimmt man den umgekehrten Werth von U_{2n}, so hat man:

$$\frac{1}{U_{2n}} = \frac{E_n + U_n}{2E_n U_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E_n} + \frac{1}{U_n}\right)$$ und eben so ist

$$\frac{1}{E_{2n}} = \sqrt{\frac{1}{E_n} \cdot \frac{1}{U_{2n}}}.$$

Bezeichnet man daher die umgekehrten Werthe von U_n und E_n durch u_n und e_n, d. h. setzt man $\frac{1}{U_n} = u_n$; $\frac{1}{E_n} = e_n$, so hat man

$$u_{2n} = \frac{1}{2}(u_n + e_n);\ e_{2n} = \sqrt{e_n \cdot u_{2n}}.$$

Nachdem wir oben gezeigt haben, wie man den Umfang sowohl des eingeschriebenen als den des umgeschriebenen regelmäßigen Zehnecks finden könne, so hat man E_{10} und U_{10}, die man in so viel Decimalstellen bestimmen kann, als man nur will, dadurch sind dann

$$e_{10} = \frac{1}{E_{10}};\ u_{10} = \frac{1}{U_{10}}$$

bestimmt, und können mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden, dadurch erhält man dann:

$$u_{20} = \frac{1}{2}(u_{10} + e_{10}) : e_{20} = \sqrt{e_{10}\, u_{20}}$$
$$u_{40} = \frac{1}{2}(u_{20} + e_{20}) : e_{40} = \sqrt{e_{20}\, u_{40}}$$
$$u_{80} = \frac{1}{2}(u_{40} + e_{40}) : e_{80} = \sqrt{e_{40}\, u_{80}}$$ u. s. f.

Wir wollen uns im Folgenden siebenziffriger Logarithmentafeln bedienen, können uns daher auch nicht auf die Sicherheit der siebenten Stelle verlassen. Für das praktische Bedürfniß wird die hiedurch erlangte Genauigkeit, wie wir sehen werden, hinreichend seyn.

Aus dem Früheren haben wir nun für das regelmäßige Zehneck

$$E_{10} = 3{\cdot}090170\ d;\ U_{10} = 3{\cdot}249197\ d,$$

$$\text{also } e_{10} = \frac{1}{3\,090170\ d};\ u_{10} = \frac{1}{3\,249197\ d}.$$

Man hat:

$$u_{20} = \tfrac{1}{2}(e_{10} + u_{10});\ \log. e_{20} = \tfrac{1}{2}(\log. e_{10} + \log. u_{20})$$
$$u_{40} = \tfrac{1}{2}(e_{20} + u_{20});\ \log. e_{40} = \tfrac{1}{2}(\log. e_{20} + \log. u_{40})$$
$$u_{80} = \tfrac{1}{2}(e_{40} + u_{40});\ \log. e_{80} = \tfrac{1}{2}(\log. e_{40} + \log. u_{80})$$

u. s. w. Wir haben somit:

Bei log. U_{10} und log. E_{10} kömmt eigentlich noch log. d, bei log. u_{10}, e_{10}, u_{20}, e_{20} u. s. w. noch — log. d hinzu, lassen wir es der Kürze halber einstweilen hinweg, so hat man:

log. U_{10} = 0·5117761	log. E_{10} = 0·4899824
log. u_{10} = 0·4882239 — 1	log. e_{10} = 0·5100176—1
u_{10} = 0·3077683	log. u_{20} = 0·4992574—1
e_{10} = 0·3236068	1·0092750—2
0·6313751	log. e_{20} = 0·5046375—1
u_{20} = 0·3156875	log. u_{40} = 0·5019558—1
e_{20} = 0·3196227	1·0065933—2
0·6353102	log. e_{40} = 0·5032966—1
u_{40} = 0·3176551	log. u_{80} = 0·5026268—1
e_{40} = 0·3186373	1·0059234—2
0·6362924	log e_{80} = 0·5029617—1
u_{80} = 0·3181462	log u_{160} = 0·5027942—1
e_{80} = 0·3183916	1·0057559—2
0·6365378	log. e_{160} = 0·5028779—1
u_{160} = 0·3182689	log. u_{320} = 0·5028359—1
e_{160} = 0·3183302	1·0057138—2
0·6365991	log. e_{320} = 0·5028569 − 1
u_{320} = 0·3182995	log. u_{640} = 0·5028464—1
e_{320} = 0·3183149	1·0057033 − 2
0·6366144	log. e_{640} = 0·5028516—1
u_{640} = 0·3183072	log. u_{1280} = 0·5028488—1
e_{640} = 0·3183109	1·0057004—2
0·6366181	log. e_{1280} = 0·5028502—1
u_{1280} = 0·3183090	log. u_{2560} = 0·5028495—1
e_{1280} = 0·3183100	1·0056997—2
0·6366190	log. e_{2560} = 0·5028498 − 1
u_{2560} = 0·3183095	
e_{2560} = 0·3183098	

Ein weiteres Treiben der Rechnung wird unnöthig, da die letzten Ziffern der Logarithmen zu unsicher sind. Wir haben

$\lg. U_{1280} = -\lg. u_{1280} = 0{\cdot}497\,1512 + \lg. d$; $U_{1280} = 3{\cdot}141602 . d$
$\lg. E_{1280} = -\lg. e_{1280} = 0{\cdot}497\,1498 + \lg. d$; $E_{1280} = 3{\cdot}141592 . d$
$\lg. U_{2560} = -\lg. u_{2560} = 0{\cdot}497\,1505 + \lg. d$; $U_{2560} = 3{\cdot}141597 . d$
$\lg. E_{2560} = -\lg. e_{2560} = 0{\cdot}497\,1502 + \lg. d$; $E_{2560} = 3{\cdot}141594 . d$

Da nun der Kreisumfang kleiner als U_{1280} und größer als E_{1280} ist, so muß auch der Kreisumfang kleiner als $3{\cdot}141602 . d$ und größer als $3\,141592 . d$ seyn.

Lassen wir die letzten Decimalstellen, als zu unsicher, weg, und nennen den Kreisumfang P, so hat man:

$$P > 3\,14159 . d;\ P < 3{\cdot}14160\ d,\ \text{daher}$$
$$\frac{P}{d} > 3{\cdot}14159 \quad \frac{P}{d} < 3{\cdot}14160;$$

daher sicher $\frac{P}{d} = 3\,14159$ in den ersten fünf Stellen genau. Diese sich überall gleich bleibende Verhältnißzahl zwischen Umfang und Durchmesser des Kreises, drückt man durch den griechischen Buchstaben π aus, und nennt sie häufig auch die Ludolphische Zahl, weil ein gewisser Ludolph von Ceulen sich mit Berechnung dieser Zahl besondere Mühe gab, und dieselbe in 20 Decimalstellen bestimmte. Würden wir, statt die Logarithmen anzuwenden, die obige Methode mittelst des arithmetischen und geometrischen Mittels in Anwendung bringen, und würden wir u_{10} und e_{10} in 10 oder 20 Decimalstellen bestimmen, so könnten wir auch das π viel genauer, in mehr Decimalstellen entwickeln.

Wenn wir das Vorhergehende durchgehen, so sehen wir, daß die Methode unserer Berechnung der Verhältnißzahl zwischen Kreisumfang und Durchmesser darin bestand, daß wir uns die Umfänge von dem Kreise eingeschriebener und umgeschriebener regelmäßiger Vielecke von stets verdoppelter Zahl berechnet haben; da nun der Umfang eines jeden dieser Polygone zu dem Durchmesser des Kreises ein bestimmtes Verhältniß hat, und da dieses Verhältniß bei Vermehrung der Seitenanzahl sich immer mehr einer bestimmten Zahl nähert, so ist die Grenze aller dieser Verhältnißzahlen die von uns in fünf Stellen berechnete Zahl π.

§. 132. **Der Flächeninhalt des Kreises ist gleich dem Quadrate des Halbmessers multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl.**

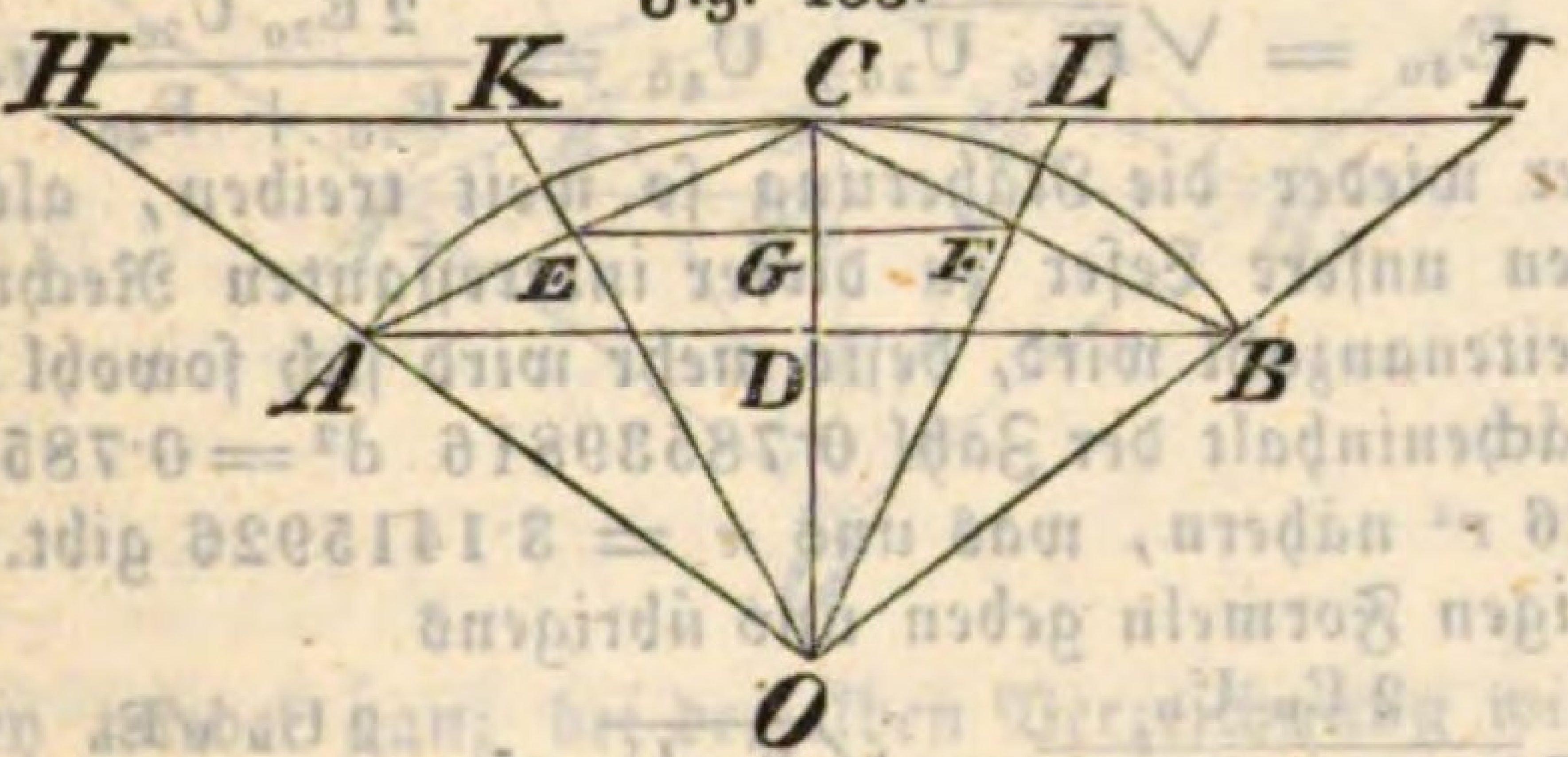
Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß der Flächeninhalt des Kreises gleich ist seinem Umfange multiplicirt mit dem halben Halbmesser, da nun nach dem so eben entwickelten, der Umfang gleich ist dem Durchmesser multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl, so hat man, wenn r der Halbmesser des Kreises ist, den Umfang gleich $2 r . \pi$, daher der Flächeninhalt $= 2 r \pi . \frac{r}{2} = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$.

§. 133. Das Vorhergehende bietet uns ein neues Mittel, den Werth von π zu berechnen. Wir dürfen nur die Flächeninhalte der ein-

und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecke von stets verdoppelter Zahl berechnen, so werden sich die einen durch stetige Zunahme, die andern durch stetige Abnahme ohne Ende dem Flächeninhalte des Kreises oder der Größe $d^2 . \frac{\pi}{4}$ nähern, da ich auf diese Weise annäherungsweise den Werth von $d^2 . \frac{\pi}{4}$ erhalte, so ist mir dadurch $\frac{\pi}{4}$, und somit π selbst annäherungsweise gegeben.

Im Vorhergehenden haben wir bereits den Flächeninhalt des ein- und umschriebenen Zehnecks berechnet, suchen wir uns nun die Formeln, mittelst welcher man aus dem Flächeninhalte des ein- und umschriebenen Vielecks die von doppelt so viel Seiten berechnen kann. Dazu wird uns die schon früher betrachtete Figur hülfreich seyn.

Fig. 133.



Wobei, wie früher AB und HI die Seiten des ein- und umschriebenen regelmäßigen nEcks, AC und KL die Seiten des ein- und umschriebenen 2nEcks sind. Nennen wir E_n E_{2n} U_n U_{2n} die Flächeninhalte des eingeschriebenen nEcks 2nEcks des umschriebenen nEcks 2nEcks.

Wir haben nun sofort

$E_n = 2n . AOD, U_n = 2n . OCH, E_{2n} = 2n . AOC; U_{2n} = 2n\,KOL$

$$\frac{E_n}{E_{2n}} = \frac{AOD}{AOC}; \frac{E_{2n}}{U_n} = \frac{AOC}{OCH}; \text{ es ist aber:}$$

$$\frac{AOD}{AOC} = \frac{AD.DO}{AD.CO} = \frac{DO}{CO}; \frac{AOC}{OCH} = \frac{OC.AD}{OC.CH} = \frac{AD}{CH}.$$

Da nun aus der Figur ersichtlich $\frac{DO}{CO} = \frac{AD}{CH}$, so hat man

$\frac{AOD}{AOC} = \frac{AOC}{OCH}$, und somit $\frac{E_n}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{U_n}$; daher $E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}$.

Es ist ferners $\frac{U_{2n}}{E_{2n}} = \frac{KOL}{AOC} = \frac{CO^2}{EO^2}$, weil $KOL \sim AOC$

$\frac{CO^2}{EO^2} = \frac{CO^2}{CO.GO} = \frac{CO}{GO}$, weil $EGO \sim ECO$, da nun

$$GO = DO + \frac{CO - DO}{2} = \frac{CO + DO}{2} \text{ ist,}$$

so ist $\frac{CO}{GO} = \frac{CO}{\frac{1}{2}(CO + DO)}$, daher $\frac{U_{2n}}{E_{2n}} = \frac{CO}{\frac{1}{2}(CO + DO)}$.

Da nun $\frac{E_{2n}}{E_n} = \frac{AOC}{AOD} = \frac{CO}{DO}$, so ist $\frac{E_{2n}}{E_{2n} + E_n} = \frac{CO}{CO + DO}$ und $\frac{E_{2n}}{\frac{1}{2}(E_{2n} + E_n)} = \frac{CO}{\frac{1}{2}(CO + DO)}$, daher $\frac{U_{2n}}{E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{\frac{1}{2}(E_{2n} + E_n)}$;

$$\text{daher } U_{2n} = \frac{2E_{2n}^2}{E_{2n} + E_n} = \frac{2E_n U_n}{E_n + E_{2n}}.$$

Mittelst der zwei Formeln $E_{2n} = \sqrt{E_n U_n}$; $U_{2n} = \frac{2E_n U_n}{E_n + E_{2n}}$ kann man die Flächeninhalte der ein- und umschriebenen Vielecke von doppelt so viel Seiten berechnen, aus denen mit einfacher Seitenzahl.

Man hat so, da E_{10} und U_{10} bereits bekannt sind:

$$E_{20} = \sqrt{E_{10} U_{10}};\ U_{20} = \frac{2E_{10} U_{10}}{E_{10} + E_{20}},$$

$$E_{40} = \sqrt{E_{20} U_{20}};\ U_{40} = \frac{2E_{20} U_{20}}{E_{20} + E_{40}} \text{ u. s. w.}$$

und kann hier wieder die Näherung so weit treiben, als man will, und wir laden unsere Leser zu dieser interessanten Rechnung ein, je größer die Seitenanzahl wird, desto mehr wird sich sowohl der eine als der andere Flächeninhalt der Zahl $0{\cdot}78539816 \cdot d^2 = 0{\cdot}78539816 \cdot 4r^2 = 3{\cdot}1415926\, r^2$ nähern, was uns $\pi = 3{\cdot}1415926$ gibt.

Die obigen Formeln geben uns übrigens

$$U_{2n} - E_{2n} = \frac{2E_n U_n}{E_n + \sqrt{E_n U_n}} - \sqrt{E_n U_n} = \frac{2U_n \sqrt{E_n}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{U_n}} - \sqrt{E_n U_n}$$

$$= \frac{U_n \sqrt{E_n} - E_n \sqrt{U_n}}{\sqrt{E_n} + \sqrt{U_n}} = \frac{(U_n \sqrt{E_n} - E_n \sqrt{U_n})(\sqrt{E_n} + \sqrt{U_n})}{(\sqrt{E_n} + \sqrt{U_n})^2}$$

$= \frac{(U^n - E_n)\sqrt{E_n U_n}}{(\sqrt{E^n} + \sqrt{U^n})^2}$, nun ist jederzeit für was immer für zwei Zahlen a und b, $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$, daher $\frac{\sqrt{ab}}{a+b} < \frac{1}{2}$, also $\frac{ab}{(a+b)^2} < \frac{1}{4}$, und daher, wenn a und b beide > 1, so ist uns daher $\frac{\sqrt{ab}}{(a+b)^2} < \frac{1}{4}$, daher gewiß $\frac{\sqrt{E_n U_n}}{(\sqrt{E_n} + \sqrt{U_n})^2} < \frac{1}{4}$, und somit $U_{2n} - E_{2n} < \frac{1}{4}(U_n - E_n)$

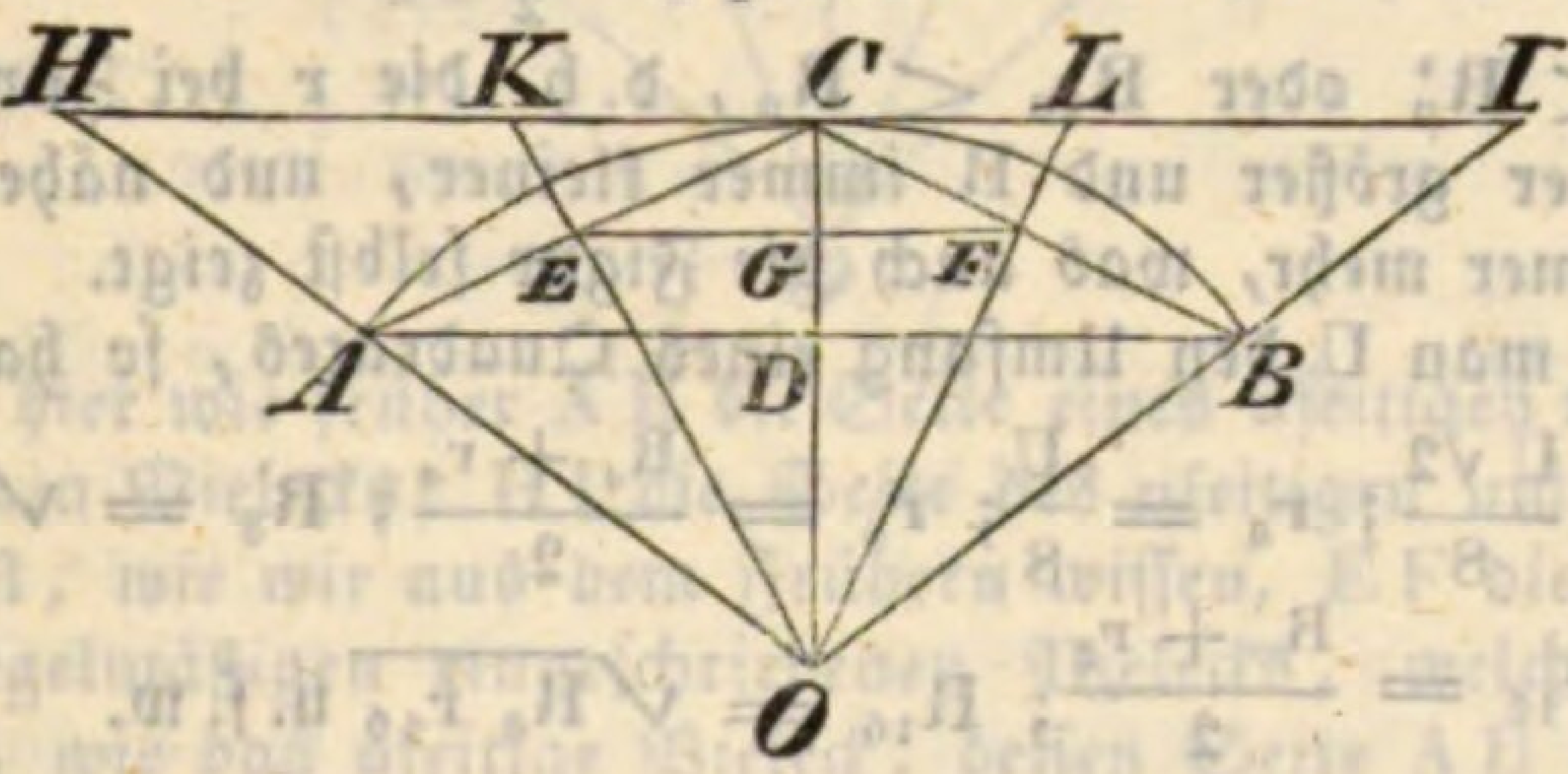
Der Unterschied der Flächeninhalte zweier ein- und umgeschriebenen Vielecke von doppelt so viel Seiten ist kleiner als ein Viertel des Unterschieds derselben Vielecke von einfacher Seitenzahl.

§. 134. Ein drittes Mittel, die Ludolphische Zahl zu berechnen, besteht darin. Denken wir uns ein regelmäßiges Vieleck, z. B. ein Quadrat, dessen Umfang eine bestimmte Länge habe; suchen wir nun ein regelmäßiges Vieleck, welches bei doppelter Seitenanzahl, z. B. bei acht Seiten denselben Umfang habe. Setzen wir nun diese Verwandlungen fort, d. h. suchen wir ein 16Eck, 32Eck, 64Eck, 128Eck u. s. w., die alle denselben Umfang haben sollen, so wird sich der Umfang bei Vermehrung der Seitenanzahl immer mehr und mehr einer Kreislinie nähern, deren Umfang dem Umfange unseres ursprüng-

lichen Vielecks, z. B. des Quadrats, der als bekannt vorausgesetzt wird, gleich ist. Da wir nun bei diesem Kreise die Größe des Umfanges wissen, so brauchen wir nur die Größe des Halbmessers stufenweise zu berechnen, um dadurch das Verhältniß zwischen Umfang und Durchmesser zu erfahren.

Unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, aus dem Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Vielecks den Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises eines regelmäßigen Vielecks zu finden, welches bei doppelter Seitenanzahl denselben Umfang habe. Hiezu wird uns die schon früher betrachtete Figur hülfreich seyn.

Fig. 134.



Es sey wieder ganz bei derselben Verzeichnung wie früher A B die Seite eines nseitigen regelmäßigen Vielecks, $AO = R_n$ der Halbmesser des umschriebenen, und $DO = r_n$ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises. Ein Vieleck nun, welches 2nSeiten und denselben Umfang $= n \cdot AB$ haben soll, hat nothwendig eine einzelne Seite $= \frac{1}{2} AB$, so wie nun beim gegebenen nseitigen Vielecke der Mittelpunktswinkel $AOB = \frac{360^\circ}{n}$ ist, so muß er beim gleichumfänglichen (isoperimetrischen) Vielecke von doppelt so viel Seiten $= \frac{360^\circ}{2n}$ $= \frac{AOB}{2}$ seyn. Allen diesen Anforderungen entspricht die Seite E F, wo, wie wir aus dem Früheren wissen, E und F die Mitten von A C und B C sind, folglich $EF = \frac{AB}{2}$, und da $EOC = COF = \frac{AOC}{2}$ $= \frac{AOB}{4}$ ist, so hat man $EOF = \frac{AOB}{2}$. Es ist also E F die Seite eines 2nseitigen regelmäßigen Vielecks, das denselben Umfang hat, als das nseitige Vieleck, dessen Seite A B ist.

Nennen wir nun $OF = R_{2n}$; $OG = r_{2n}$.

Nun ist, weil $CF = \frac{1}{2} BC$; $EC = \frac{1}{2} AC$; auch $CG = \frac{1}{2} CD$ $= \frac{1}{2}(CO - DO)$; daher $OG = DO + \frac{1}{2}(CO - DO)$

$$= \frac{CO + DO}{2}, \text{ d. h. } r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}.$$

In dem rechtwinklichten Dreiecke C F O ist $FG \perp CO$, daher

$GO : FO = FO : OC$ oder $FO^2 = GO . OC$; $FO = \sqrt{GO . OC}$, d. h. $R_{2n} = \sqrt{R_n . r_{2n}}$.

Durch diese zwei Formeln ist unsere Aufgabe gelöset, man hat so

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2}; \; R_{2n} = \sqrt{R_n . r_{2n}},$$

$$r_{4n} = \frac{R_{2n} + r_{2n}}{2}; \; R_{4n} = \sqrt{R_{2n} . r_{4n}} \text{ u. s. w.}$$

Man sieht ferners, da $R_n > r_n$, also $R_n + r_n > 2 r_n$, also $\frac{R_n + r_n}{2} > r_n$, daß $r_{2n} > r_n$. Eben so, da $r_n < R_n$, also $R_n r_n < R_n^2$, also $R_n^2 + R_n r_n < 2 R_n^2$; $\frac{R_n (R_n + r_n)}{2} < R_n^2$, $R_n . r_{2n} < R_n^2$, d. h. $R_{2n}^2 < R_n^2$ oder $R_{2n} < R_n$, d. h. die r bei Zunahme des n werden immer größer und R immer kleiner, und nähern sich beide einander immer mehr, was auch die Figur selbst zeigt.

Nennt man U den Umfang eines Quadrates, so hat man:

$$R_4 = \frac{U \sqrt{2}}{8}; \; r_4 = \frac{U}{8}; \; r_8 = \frac{R_4 + r_4}{2}; \; R_8 = \sqrt{R_4 r_8};$$

$$r_{16} = \frac{R_8 + r_8}{2}; \; R_{16} = \sqrt{R_8 r_{16}} \text{ u. s. w.}$$

Für die Durchmesser $D_n = 2 R_n$; $d_n = 2 r_n$ werden ganz dieselben Formeln

$$d_{2n} = \frac{D_n + d_n}{2}; \; D_{2n} = \sqrt{D_n d_{2n}}$$

gelten. Nennt man U den Umfang des regelmäßigen Zehnecks, und sind d_{10} und D_{10} die Durchmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises, so hat man nach dem Frühern

$$U = 3{\cdot}249197 \; d_{10}; \quad U = 3{\cdot}090170 \; D_{10}, \text{ daher}$$

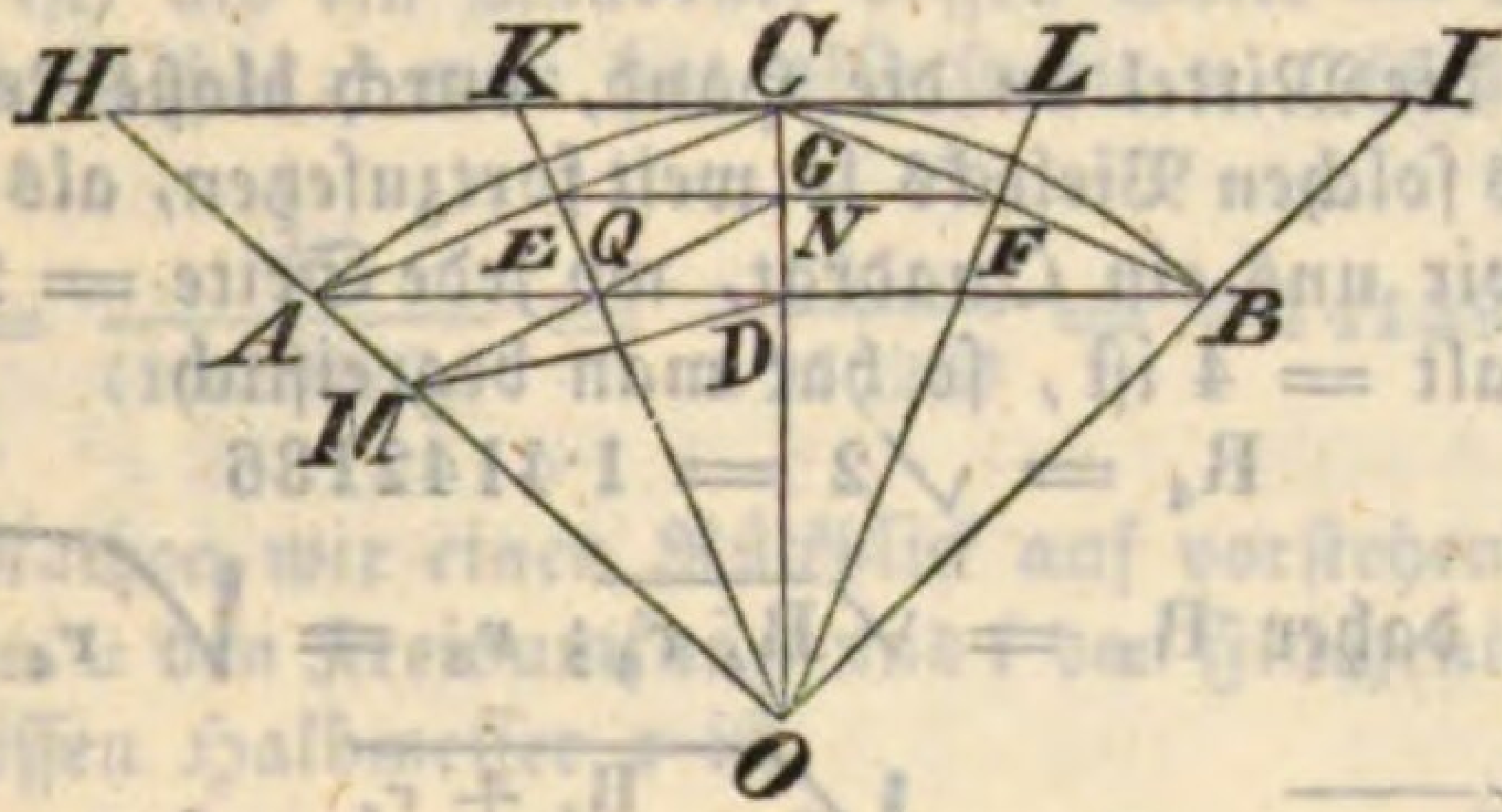
$$d_{10} = \frac{U}{3{\cdot}249197}; \; D_{10} = \frac{U}{3{\cdot}090170}.$$

Wenn man diese Rechnung fortführen wollte, so sieht man, daß man ganz in die Rechnung des §. 131 verfällt, indem $d_{10} = u_{10}$; $D_{10} = e_{10}$ ist.

§. 135. Eine vierte Methode, die Ludolphische Zahl π zu berechnen, besteht darin: Nimmt man irgend ein regelmäßiges Vieleck und verwandelt dieses in ein regelmäßiges Vieleck von doppelter Seitenanzahl, mit Beibehaltung desselben Flächeninhalts; dieses neue regelmäßige Vieleck verwandelt man wieder in ein gleich großes mit doppelter Seitenanzahl u. s. w. Je weiter man nun diese Verwandlungen fortsetzt, um so mehr wird sich der Umfang des regelmäßigen Vielecks, der beständig denselben Flächeninhalt hat, einem Kreisumfange nähern. Da nun der Flächeninhalt dieses Kreises gegeben ist, so wissen wir die Größe von πr^2, um nun das π selbst zu erfahren, muß man r^2 oder r finden; daher werden wir folgender Maßen verfahren: wir werden

ein regelmäßiges Vieleck von bestimmtem Flächeninhalte nehmen, wo uns der Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises r, R bekannt ist, und dieses in ein gleich großes regelmäßiges Vieleck von doppelt so viel Seiten verwandeln, und den Halbmesser des ein- und umgeschriebenen Kreises r und R des neuen Vielecks suchen. Zu diesem Behufe wird uns die schon so oft betrachtete Figur neuerdings ihre Dienste leisten.

Fig 135.



Es sey hier wie früher AB die Seite eines nseitigen regelmäßigen eingeschriebenen Vielecks, HI die Seite des nseitigen umgeschriebenen u. s. w., so ist, wie wir aus dem Frühern wissen, EF die Seite eines 2nseitigen regelmäßigen eingeschriebenen Vielecks, welches denselben Umfang hat, wie das nseitige Vieleck, dessen Seite AB ist.

Nenne ich nun den Halbmesser AO des dem nseitigen Vieleck umschriebenen Kreises R_n, und den des ihm eingeschriebenen Kreises $DO = r_n$. Denke ich mir nun in dem Winkel AOD ein gleichschenklichtes Dreieck gebildet, $MON = AOD$, so ist MN die Seite eines regelmäßigen 2nseitigen Vielecks, welches denselben Flächeninhalt hat, wie das nseitige Vieleck, dessen Seite AB ist, und $MO = R_{2n}$ ist der Halbmesser des umschriebenen und $QO = r_{2n}$, wo $OQ \perp MN$, ist der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, und es ist somit unsere Aufgabe gelöset, wenn wir zeigen, wie man aus den Werthen von R_n und r_n die von R_{2n} und r_{2n} im Stande ist zu berechnen.

Für die Berechnung von MO haben wir $\triangle ADO : \triangle MDO = AO : MO$, $\triangle MDO : \triangle MNO = DO : NO$, daher habe ich durch Multiplikation beider Proportionen

$$\triangle ADO : \triangle MNO = AO \,.\, DO : MO \,.\, NO.$$

Da nun der Voraussetzung nach $\triangle ADO = \triangle MNO$, so hat man $MO \,.\, NO = AO \,.\, DO$, d. h. $R_{2n}^2 = R_n \,.\, r_n$.

Da $MNO = ADO = EOF$ ist, so hat man die Dreiecke MON und EOF mit einander ähnlich, daher $MN : EF = OQ : OG$, daher auch $2n \,.\, MN : 2n EF = OQ : OG$; da nun $2n EF$ der Umfang eines 2nseitigen regelmäßigen Vielecks ist, dessen Umfang dem Umfange des eingeschriebenen nseitigen Vielecks, dessen Seite AB ist, gleich ist, so ist $2n EF = n AB$, daher hat man $2n \,.\, MN : n AB = OQ : OG$. Unserer Forderung gemäß, daß der Flächeninhalt des nseitigen und 2nseitigen Vielecks gleich seyn müsse, hat man aber:

$2nMN . \frac{OQ}{2} = nAB . \frac{OD}{2}$, daher $2nMN : nAB = OD : OQ$, daher $OQ : OG = OD : OQ$, da nun $OG = \frac{OD + OC}{2}$ ist, so hat man $r_{2n} : \frac{R_n + r_n}{2} = r_n : r_{2n}$, und somit $r_{2n}^2 = r_n . \frac{R^n + r^n}{2}$.

Die Formeln $R_{2n} = \sqrt{R_n . r_n}$, $r_{2n} = \sqrt{r_n . \frac{R_n + r_n}{2}}$ geben uns nun die Mittel an die Hand, durch bloße Rechnung die Verwandlung eines solchen Vielecks so weit fortzusetzen, als wir nur wollen.

Denken wir uns ein Quadrat, wo jede Seite = 2, also wo auch der Flächeninhalt = 4 ist, so hat man begreiflich

$$R_4 = \sqrt{2} = 1{\cdot}4142136$$

$$r_4 = 1, \text{ daher } R_8 = \sqrt{R_4 r_4}; \; r_8 = \sqrt{r_4 . \frac{R_4 + r_4}{2}}$$

$R_{16} = \sqrt{R_8 r_8}$; $r_{16} = \sqrt{r_8 \frac{R_8 + r_8}{2}}$ u. s. w. Man hat so:

$$\begin{aligned} R_4 &= 1{\cdot}4142136, & r_4 &= 1{\cdot}0000000 \\ R_8 &= 1{\cdot}1892071, & r_8 &= 1{\cdot}0986841 \\ R_{16} &= 1{\cdot}1430500, & r_{16} &= 1{\cdot}1210863 \\ R_{32} &= 1{\cdot}1320149, & r_{32} &= 1{\cdot}1265639 \\ R_{64} &= 1{\cdot}1292862, & r_{64} &= 1{\cdot}1279257 \\ R_{128} &= 1{\cdot}1286063, & r_{128} &= 1{\cdot}1282657 \end{aligned}$$

Von hier ab, wo die erste Hälfte der Ziffern auf beiden Seiten gleich ist, kann man, statt der geometrischen Mittelzahlen, die arithmetischen nehmen, weil solche nur in den höhern Decimalen von jenen verschieden sind *), dadurch wird die Rechnung abgekürzt, und wir haben:

---

*) Es ist zwar das arithmetische Mittel zweier Zahlen jederzeit größer als ihr geometrisches, allein dieser Unterschied wird desto kleiner, je kleiner beide Zahlen sind. Man hat nämlich:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{ab}{2}, \text{ daher}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{ab}{2},$$

$$\text{oder } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2; \text{ daher } \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Eben so ist

$$\left(\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}\right)\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right) = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2;$$

$$\text{daher } \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}{\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}}.$$

Ist nun $a - b < \frac{1}{10^n}$, so ist gewiß (wenn a und b größer als 1 sind).

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{10^{2n}}.$$

$R_{256} = 1{\cdot}1284360$, $r_{256} = 1{\cdot}1283508$
$R_{512} = 1{\cdot}1283934$, $r_{512} = 1{\cdot}1283721$
$R_{1024} = 1{\cdot}1283827$, $r_{1024} = 1{\cdot}1283774$
$R_{2048} = 1{\cdot}1283801$, $r_{2048} = 1{\cdot}1283787$
$R_{4096} = 1{\cdot}1283794$, $r_{4096} = 1{\cdot}1283791$
$R_{8192} = 1{\cdot}1283792$, $r_{8192} = 1{\cdot}1283792$

Es ist also 1·128379 sehr nahe der Halbmesser eines Kreises, welcher so groß ist, als ein Quadrat, dessen Seite = 2, der also den Flächeninhalt = 4 hat; man hat also somit $\pi\,.\,(1{\cdot}128379)^2 = 4$, und hat somit:

$$\pi = \frac{4}{(1{\cdot}128379)^2} = \frac{4}{1{\cdot}273239} = 3{\cdot}141592.$$

§. 136. Machen wir einen Rückblick auf vorstehende vier Methoden, so ist, wenn u den Kreisumfang und f den Flächeninhalt des Kreises bedeutet, dessen Halbmesser r ist,

$$u = 2\pi r;\ f = \pi r^2,$$

$$\text{daher } \pi = \frac{u}{2r};\ \pi = \frac{f}{r^2}.$$

Nach der ersten Methode wurde von einem bestimmten Werthe von r ausgegangen, und durch stetige Verdoppelung der Seiten ein Näherungswerth von u bestimmt. Bei der dritten Methode hat man für ein bestimmtes u den Näherungswerth von r bestimmt. Nach der zweiten Methode hat man für ein bestimmtes r das f näherungsweise bestimmt; nach der vierten Methode endlich hat man für ein bestimmtes f stufenweise das r berechnet, und so hat jede dieser Weisen zur Bestimmmnng des π gedienet.

Die höhere Mathematik bietet leichtere und schärfere Methoden dar, den Werth des π zu berechnen, und mittelst dieser hat man auch diese in der gesammten Mathematik so wichtige Zahl mit einer jedes Bedürfniß bei weitem übersteigenden Genauigkeit bestimmt. Bis vor zwei Jahren hat man den Werth von π in 146 Decimalstellen gehabt; vor zwei Jahren hat ein ehemaliger Zuhörer von mir, der bekannte Kopfrechner, Zacharias Dase aus Hamburg, unter meiner Anleitung die Berechnung des π bis zur 200sten Decimalstelle gegeben, die wir bloß der Merkwürdigkeit halber hier mittheilen. Sie sind:

π = 3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971
69399 37510 58209 74944 59230 78164 06286 20899
86280 34825 34211 70679 82148 08651 32823 06647
09384 46095 50582 23172 53594 08128 48111 74502
84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

Verwandeln wir $\pi = 3{\cdot}141592\ 653589$ in einen Kettenbruch, und suchen dann davon die Näherungsbrüche, so hat man:

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103998}{33102}\ \text{u. s. w.}$$

Man kann nun also näherungsweise sagen die Verhältnißzahl

zwischen Umfang und Durchmesser eines Kreises ist $\frac{22}{7}$, d. h. also der Umfang verhält sich zum Durchmesser wie 22 zu 7, oder der Durchmesser zum Umfang wie 7 : 22 mit einer Genauigkeit, daß der Fehler $< \frac{1}{7 \cdot 106}$, d. h. $< \frac{1}{742}$, und zwar ist $\frac{22}{7}$ um etwas nahe $\frac{1}{742}$ größer als π. Eine Genauigkeit, die für den größten Theil der Rechnungen des praktischen Lebens vollkommen hinreichend ist.

Archimedes von Syrakus, 300 J. v. Christi Geburt, hat zuerst dieses Verhältniß angegeben.

Viel genauer ist es, wenn man $\pi = \frac{355}{113}$ setzt, d. h. wenn man sagt: der Durchmesser eines Kreises verhält sich zu seinem Umfange wie 113 : 355; denn die hier erlangte Genauigkeit ist so groß, daß der Fehler $< \frac{1}{113 \cdot 33102}$, d. h. $< \frac{1}{3{,}740526}$, d. h. $< \frac{1}{10^6}$, so daß, wenn man $\frac{355}{113}$ in einen Decimalbruch verwandelt, noch die sechs ersten Decimalziffern gut seyn werden. Das Verhältniß 113 : 355 ist uns deßhalb merkwürdig, weil es sich so leicht im Gedächtnisse aufbewahren läßt, man braucht sich nur die ersten drei ungeraden Zahlen jede doppelt anzuschreiben, und in der Mitte durch einen Strich zu trennen: 113|355, so hat man das verlangte Verhältniß.

§. 136. Um also aus dem Durchmesser eines Kreises seinen Umfang zu finden, habe ich nichts anders zu thun, als den Durchmesser mit der Verhältnißzahl π zu multipliciren. Um aus dem Kreisumfange die Größe des ihm zugehörenden Durchmessers zu finden, habe ich den Umfang durch π zu dividiren. Je nach dem Bedürfniß der Aufgabe und dem geforderten Grad der Genauigkeit nimmt man für π genauere oder minder genaue Werthe an.

a) Für den größten Theil der praktischen Fälle des Lebens ist es hinreichend zu sagen $\frac{u}{d} = \frac{22}{7}$ oder Umfang $= \frac{22}{7}$ Durchmesser $= \left(3 + \frac{1}{7}\right)$ Durchmesser. Man kann diesemnach folgende Regel als für die gewöhnlichen Fälle hinreichend genau aufstellen. Man erhält den Umfang eines Kreises, wenn man vom Durchmesser das Dreifache und $\frac{1}{7}$ des Durchmessers nimmt und beide addirt.

Beispiel 1. Es sey der Durchmesser 98″, wie groß ist der Umfang?

$$\begin{aligned} 3 \cdot 98 &= 294'' \\ \tfrac{1}{7} \cdot 98 &= \underline{\ 14''} \\ & \quad 308'' \end{aligned}$$

daher ist der Umfang 308″.

B. 2. Es sey der Durchmesser 7° 4′ 1″,

$$\begin{aligned} \text{so hat man } 3\,d &= 21^\circ\ 12'\ 3'' \\ \tfrac{1}{7}\,d &= \underline{\ 1^\circ\ 0'\ 7''} \\ \text{Umfang} &= 24^\circ\ 0'\ 10'' \end{aligned}$$

Um aus dem Umfange eines Kreises den Durchmesser desselben zu berechnen, hat man den Umfang mit $\frac{7}{22}$ zu multipliciren, oder da $\frac{7}{22} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{22}$ kann man auch sagen: man nimmt ein Drittel des Umfanges, von diesem Drittel $\frac{1}{22}$, und ziehet letzteres vom ersteren ab.

B. 1. Der Umfang sey gleich 286′, wie groß ist der Durchmesser?

$$7 \cdot 286 = 2002$$
$$2\,002 : 2 = 1001$$
$$1\,001 : 11 = 91 = \text{Durchmesser.}$$

B. 2. Der Umfang sey gleich 17° 5′ 3″, wie groß ist der Durchmesser

$$7 \,.\, u = 119^{\circ}\ 35'\ 21''$$

dieß dividirt durch 11, $10^{\circ}\ 8'\ 3''$

dieß durch 2, $5^{\circ}\ 4'\ 1\frac{1}{2}''$ als Durchmesser;

oder $u = 17^{\circ}\ 5'\ 3'$

$\frac{1}{3}u = 5^{\circ}\ 5'\ 9''$

$\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3}u = 3'\ 3''$

$\frac{1}{22} \cdot \frac{1}{3}u = 1'\ 7\frac{1}{2}''$

das Letzte von $\frac{1}{3}u$ ab $5^{\circ}\ 4'\ 1\frac{1}{2}''$.

b) Ist das Bedürfniß der Genauigkeit größer, so multiplicirt man den Durchmesser mit 3·14159265358. Will man aber aus dem Umfange den Durchmesser berechnen, so muß man den Umfang durch 3 141592 .. dividiren, oder was dasselbe ist, mit $\frac{1}{3{\cdot}141592} = 0{\cdot}3183098\,..$ zu multipliciren; letztere Zahl in sechs Decimalen 0·318310 läßt sich dem Gedächtnisse vielleicht dadurch anvertrauen, daß man die Anfangsziffern von π, nämlich 314314, doppelt anschreibt, die letzten vier in der Mitte dazu gibt und vorn und hinten Null ansetzt, 0·318310. Zu den hier nöthigen Multiplicationen erweisen sich folgende Tafeln als sehr nützlich:

Vielfache der Zahl π.	Vielfache der Zahl $\frac{1}{\pi}$.
$1\pi = 3{\cdot}141592\,654$	$\frac{1}{\pi} = 0{\cdot}318309\,886$
$2\pi = 6{\cdot}283185\,307$	$\frac{2}{\pi} = 0{\cdot}636619\,772$
$3\pi = 9{\cdot}424777\,961$	$\frac{3}{\pi} = 0{\cdot}954929\,659$
$4\pi = 12\ 566370\,614$	$\frac{4}{\pi} = 1{\cdot}273239\,545$
$5\pi = 15{\cdot}707963\,268$	$\frac{5}{\pi} = 1{\cdot}591549\,431$
$6\pi = 18\ 849555\,922$	$\frac{6}{\pi} = 1{\cdot}909859\,317$
$7\pi = 21{\cdot}991148\,575$	$\frac{7}{\pi} = 2{\cdot}228169\,203$
$8\pi = 25{\cdot}132741\,229$	$\frac{8}{\pi} = 2{\cdot}546479\,089$
$9\pi = 28{\cdot}274333\,882$	$\frac{9}{\pi} = 2{\cdot}864788\,976$

B. 1. Es sey der Durchmesser eines Kreises 553″ = 7° 4′ 1″, wie groß ist der Umfang? man hat so:

$$500\pi = 1570\,7963$$
$$50\pi = 157{\cdot}0796$$
$$3\pi = 9{\cdot}4248$$
$$553\pi = 1737{\cdot}3007$$

daher der Umfang 1737″3 oder 24° 0′ 9·″3, unser voriges Resultat ist also nur um 0·7″ zu groß.

B. 2. Der Durchmesser = 33 333, so ist

$$30\pi = 94{\cdot}248$$
$$3\pi = 9{\cdot}425$$
$$0{\cdot}3\pi = 0{\cdot}942$$
$$0{\cdot}03\pi = 0{\cdot}094$$
$$0{\cdot}003\pi = 0{\cdot}009$$
$$33{\cdot}333\pi = 104{\cdot}718$$ = dem Umfange.

B. 3. Ist der Umfang eines Kreises gleich 777·777, so hat man zur Berechnung des Durchmessers:

$$\frac{700}{\pi} = 222{\cdot}817$$
$$\frac{70}{\pi} = 22{\cdot}282$$
$$\frac{7}{\pi} = 2{\cdot}228$$
$$\frac{0{\cdot}7}{\pi} = 0{\cdot}223$$
$$\frac{0{\cdot}07}{\pi} = 0{\cdot}022$$
$$\frac{0{\cdot}007}{\pi} = 0{\cdot}002$$

also Durchmesser $= \frac{777{\cdot}777}{\pi} = 247{\cdot}574$

c) Zu dieser Berechnung erweisen sich auch sehr bequem die Logarithmen, da man $u = \pi d$ hat, so ist

$\log. u = \log. d + \log. \pi$, und $\log. d = \log. u - \log. \pi$ oder

$\log. d = \log. u + \log. \frac{1}{\pi}$, nun ist aber:

$$\log. \pi = 0{\cdot}4971499;\ \log. \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}5028501 - 1.$$

B. 1. Es sey der Durchmesser 33·333, so hat man:

$$\log. 33{\cdot}333 = 1{\cdot}522\,8744$$
$$\log. \pi = 0{\cdot}497\,1499$$
$$2{\cdot}020\,0243 = \log. 104{\cdot}7187,$$

daher Umfang = 104·7187

B. 2. Es sey der Umfang = 777·777, so hat man

$$\log. 777{\cdot}777 = 2{\cdot}8908512$$
$$39$$
$$\log. \frac{1}{\pi} = 0{\cdot}5028501 - 1$$
$$\overline{2{\cdot}3937052} = \log. 247{\cdot}574,$$

also Durchmesser = 247·574.

§. 138. Nennen wir r den Halbmesser, d den Durchmesser, u den Umfang, f den Flächeninhalt eines Kreises, so hat man nach dem Vorhergehenden:

$$f = \pi r^2 \quad \text{oder} \quad f = \pi \,.\, \frac{d^2}{4} \quad \text{oder da } d = \frac{u}{\pi},$$

$$\text{hat man auch } f = \pi \,.\, \left(\frac{u}{2\pi}\right)^2 = \frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{\pi}$$

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem Quadrat der halben Peripherie, dividirt durch die Ludolphische Zahl.

B. Der Umfang eines Kreises ist 22′, wie groß ist der Flächeninhalt?

$$f = 121 \,.\, \tfrac{7}{22} = 11 \,.\, \tfrac{7}{2} = 38{\cdot}5\square'.$$

Ist aber der Flächeninhalt eines Kreises gegeben, und man will den Halbmesser, Durchmesser oder Umfang, so hat man aus obigen Formeln:

$$r = \sqrt{\frac{f}{\pi}}; \quad d = 2\sqrt{\frac{f}{\pi}}; \quad u = 2\pi\sqrt{\frac{f}{\pi}} = 2\sqrt{f\pi}.$$

Diese Ausdrücke lassen sich nun auf verschiedene Art rechnen, indem man nämlich f mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt und dann die Quadratwurzel ausziehet, oder was in vielen Fällen sehr bequem seyn wird, mittelst Logarithmen.

Manchmal kann auch der Werth von $\sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{\cdot}5641896$ von Nutzen seyn, und $\sqrt{\pi} = 1{\cdot}7724538$.

B. 1. Es sey die Frage, wie groß muß der Halbmesser eines Kreises seyn, dessen Flächeninhalt = 1□′ seyn soll, so hat man

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{\cdot}564' = 6''\,9'''.$$

B. 2. Wie groß wird der Umfang eines Kreises seyn, dessen Flächeninhalt = 197□ ist, so hat man:

$$\log. 197 = 2{\cdot}2944662$$
$$\log. \pi = \underline{0{\cdot}4971499}$$
$$2{\cdot}7916161$$
$$1{\cdot}3958080$$
$$\log. 2 = \underline{0{\cdot}3010300}$$
$$1{\cdot}6968380 = \log. 49{\cdot}75514,$$

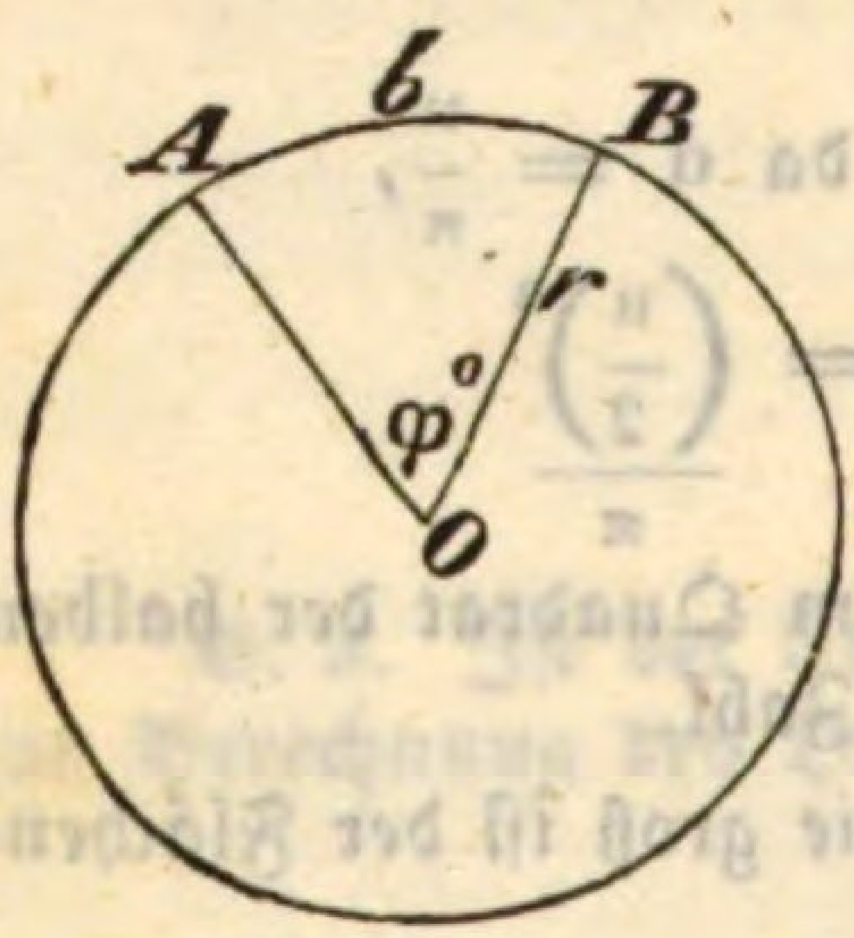
daher Umfang gleich 49·75514.

B. 3. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Flächeninhalt = 1□′ ist. Antwort: $= 2\sqrt{\pi} = 2.\ 1{\cdot}7725 = 3{\cdot}'545$.

Für den gewöhnlichen Verkehr wird auch bei diesen Aufgaben hinreichend seyn, $\pi = \frac{22}{7}$ zu nehmen.

§. 139. So wie wir im Vorgehenden gezeigt haben, wie man den ganzen Umfang des Kreises im Stande ist zu berechnen, so wollen wir jetzt zeigen, wie man einzelne Theile desselben, Kreisbögen mittelst des Halbmessers bestimmen könne.

Fig. 136.



Es sey der Mittelpunktswinkel A O B, er habe φ Grade, sein zugehörender Bogen A B habe die Länge b. Denken wir uns nun den ganzen Umfang in seine 360 Grade getheilt, so kommen natürlich auf den Bogen A B dann φ Grade, da wir nun aus dem Vorhergehenden den ganzen Umfang bestimmen können, so wissen wir auch den 360sten Theil des Umfanges, d. i. die Länge eines Bogens von 1°, folglich auch von φ^0 zu berechnen; wir haben somit, da, wenn r der Halbmesser, also $2 r \pi$ der Umfang ist, daher $\frac{2 r \pi}{360}$ die Länge eines Bogens von 1° ist.

$$b = \varphi \cdot \frac{2 r \pi}{360} \quad (1).$$

In dieser Gleichung sind drei Größen r, φ, b enthalten, und da, sobald zwei derselben gegeben sind, man mittelst dieser Gleichung immer die dritte finden kann, so bietet dieselbe drei Auflösungen dar, deren erste hier lehrt, aus Winkel und Halbmesser die Bogenlänge zu finden. Die Formel

$$(2) \quad \varphi^0 = \frac{b}{r} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

zeigt aus Bogenlänge und Halbmesser den Winkel zu finden, und endlich die Formel:

$$(3) \quad r = \frac{b}{\varphi^0} \cdot \frac{180^0}{\pi}$$

lehrt aus Bogenlänge und Winkel den Halbmesser zu bestimmen. Alle drei Formeln lassen sich durch folgende von selbst einleuchtende Proportion im Gedächtnisse behalten:

Jeder Bogen verhält sich zum Umfange, wie sein Mittelpunktswinkel zu 360 Grad.

Für den gewöhnlichen Lebensverkehr wird diese Proportion und der Werth von $\pi = \frac{22}{7}$ vollkommen ausreichen.

B. 1. Ein Bogen habe 15° 20′, der Halbmesser ist $3^1/_2$ Schuh, wie lang ist der Bogen?

Weil der Halbmesser 3·′5 ist, so hat man Durchmesser = 7′, also Umfang 22′, daher die Proportion:

$b : 22' = 15\frac{1}{3} : 360$, oder

$b : 22' = 46 : 1080$; daher $b = \frac{22'.46}{1080} = 0{.}937$ Schuh.

B. 2. Ein Bogen ist 25', der Halbmesser 10', wie viel Grade hat der Bogen? Der Umfang ist gleich $20 . \frac{22}{7} = \frac{440}{7}$, daher ist:

$$25 : \frac{440}{7} = \varphi^0 : 360^0, \text{ oder}$$

$$175 : 440 = \varphi^0 : 360^0, \text{ daher}$$

$$\varphi^0 = \frac{175}{440} . 360^0 = \frac{175}{11} . 9^0 = \frac{1575^0}{11}$$

$$1575^0 : 11 = 143^0\ 10'\ 54''.5$$

$$\begin{array}{l} 2 \\ \hline 120 \\ 10 \\ \hline 600 \\ 56 \end{array} \qquad \text{daher } \varphi^0 = 143^0\ 10'\ 54''5$$

B. 3. Ein Bogen hat 7' und sein Winkel ist 42°, wie groß ist der Halbmesser des Kreises? Man hat

$$7' : u = 42^0 : 360^0$$
$$= 7 : 60;$$

daher $u = \frac{7'.60}{7} = 60'$, daher $2r = \frac{60.7}{22}$; also $r = 9{\cdot}545$.

§. 140. Zur schärferen Auflösung dieser drei Aufgaben dienen die oben entwickelten drei Formeln; ehe wir aber darüber Beispiele geben, wollen wir die geometrische Bedeutung von $\frac{180^0}{\pi}$ und von $\frac{\pi}{180^0}$ entwickeln. Denken wir uns einen Kreis mit dem Halbmesser = 1, so ist sein Durchmesser = 2, und sein Umfang gleich 2π, und sein halber Umfang = π; es hat also der halbe Umfang eine Länge von π Einheiten (Klafter, Schuh oder Zoll, was man eben als Einheit, die dem Halbmesser gleich ist, angenommen hat), zugleich hat der halbe Umfang 180 Grade, daher ist die Länge von 180° gleich π Längeneinheiten; daher ist die Länge eines Bogens von 1° gleich $\frac{\pi}{180}$ Längeneinheiten. Drücken wir nun durch arc. 1° die Länge eines Bogens von 1° aus, so hat man:

$$\text{arc. } 1^0 = \frac{\pi}{180}, \text{ daher arc. } 1' = \frac{\pi}{60.180}; \text{ arc. } 1'' = \frac{\pi}{60.60.180}.$$

Da nun die Länge von 180 Graden gleich ist π Längeneinheiten, so kommen auf eine Längeneinheit $\frac{180}{\pi}$ Grade; da aber hier der Halbmesser gleich ist der Längeneinheit, so kann man sagen: auf einen Bogen, der dem Halbmesser gleich ist, kommen $\frac{180}{\pi}$ Grade.

Ein Bogen also, dem Halbmesser gleich, hat $\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{\cdot}141592\ldots}$ $= 180^\circ.03\,18309\ldots = 57^\circ{\cdot}2957795 = 206264''{\cdot}8 = 57^\circ17'44''{\cdot}8.$

Wie man sieht, hat man es hier mit Einheiten zweierlei Art, Längeneinheiten und Winkeleinheiten zu thun, die mit einander in der innigsten Beziehung stehen, und deren Wechselverhältniß wir so eben entwickelt haben.

Die oben entwickelte Formel (1) läßt sich auch so darstellen:

Die Länge eines Bogens = Anzahl seiner Grade $\times$ mit der Länge eines Bogens von 1° $\times$ für den Halbmesser = 1; oder auch:

Die Länge eines Bogens = Anzahl seiner Minuten $\times$ mit der Länge eines Bogens von 1′ $\times$ für den Halbmesser = 1.

Die Länge eines Bogens = Anzahl seiner Sekunden $\times$ mit der Länge eines Bogens von 1″ $\times$ für den Halbmesser = 1.

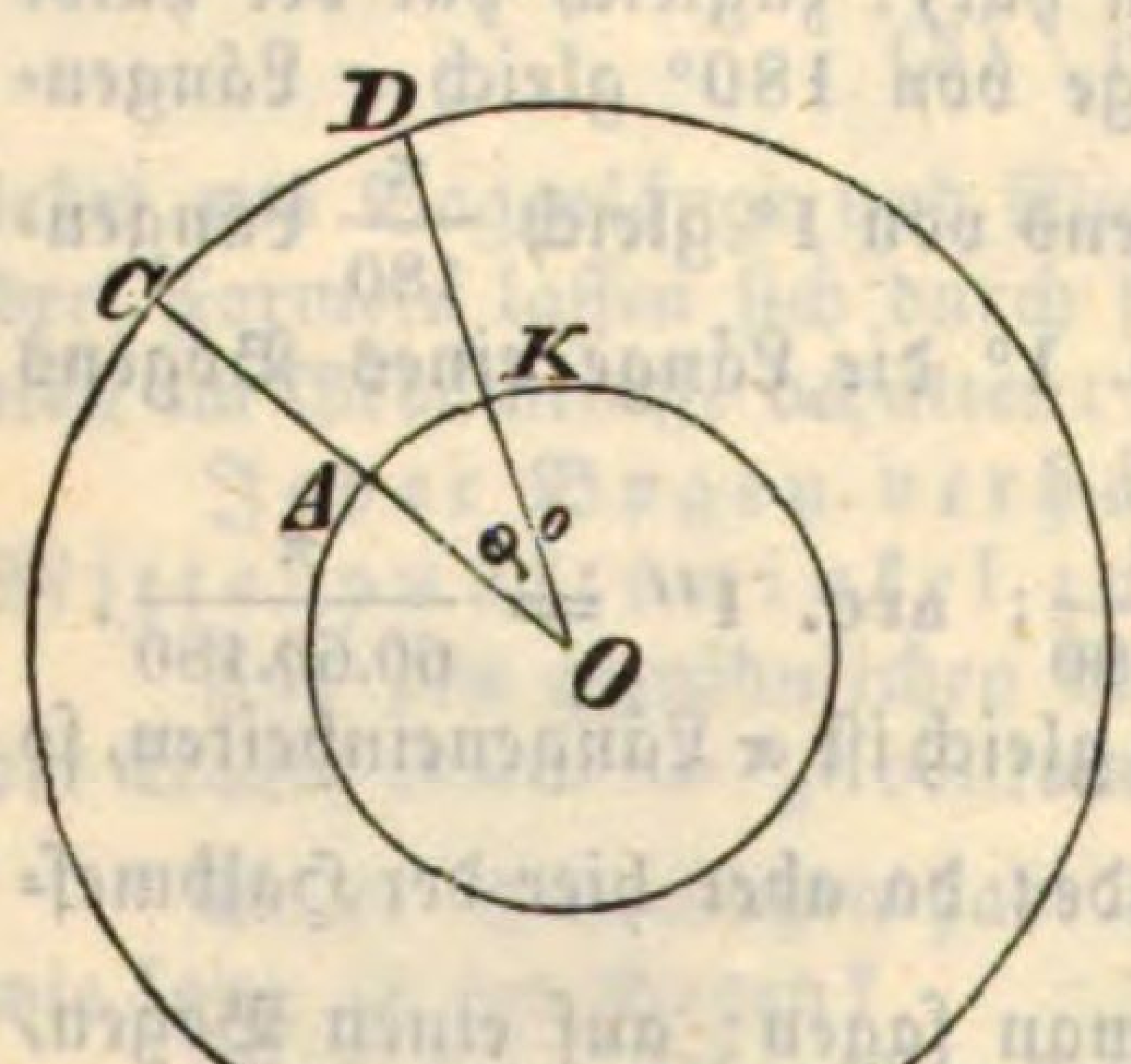
Zur scharfen und bequemeren Berechnung der Länge eines Bogens wird uns also eine Tabelle, wo die Bogenlängen von 1° 1′ 1″ und ihre Vielfachen von 1 bis 9fachen enthalten sind, gute Dienste leisten, und die wir daher unsern Lesern hier mittheilen wollen:

Bogenlängen für den Halbmesser = 1.

1° = 0·0174 5329	1′ = 0·0002 9089	1″ = 0·0000 0485
2° = 0·0349 0659	2′ = 0·0005 8178	2″ = 0·0000 0970
3° = 0·0523 5988	3′ = 0·0008 7266	3″ = 0 0000 1454
4° = 0·0698 1317	4′ = 0·0011 6355	4″ = 0·0000 1939
5° = 0·0872 6646	5′ = 0·0014 5444	5″ = 0·0000 2424
6° = 0·1047 1976	6′ = 0·0017 4533	6″ = 0·0000 2909
7° = 0·1221 7305	7′ = 0·0020 3622	7″ = 0·0000 3394
8° = 0·1396 2634	8′ = 0·0023 2711	8″ = 0·0000 3879
9° = 0·1570 7963	9′ = 0·0026 1799	9″ = 0.0000 4363

Zu noch besserer Verständniß der Anwendung dieser Tabelle betrachten wir folgende Figur.

Fig. 137.



Es seyen zwei concentrische Kreise (von demselben Mittelpunkte). Demselben Winkel A O K = C O D entsprechen die beiden Bögen A K = b, und C D = B; es seyen die Halbmesser A O = r und C O = R, so ist $2\pi r$ der Umfang des kleineren und $2\pi R$ der Umfang des größeren Kreises, so hat man, wenn der Winkel φ Grade hat, folgende Proportionen:

$$b : 2\pi r = \varphi^\circ : 360;$$
$$B : 2\pi R = \varphi^\circ : 360^\circ;\ \text{daher}$$
$$b : 2\pi r = B : 2\pi R,\ \text{und somit}$$
$$b : B = r : R,$$

d. h. die Längen zweier Kreisbögen, die zu demselben Winkel gehören, verhalten sich gerade wie ihre Halbmesser.

Ist nun r = 1, so hat man B = b . R, d. h. die Länge eines Kreisbogens ist gleich der Länge des Bogens für den Halbmesser 1 (für denselben Winkel), multiplicirt mit dem Halbmesser.

Die Bogenlänge für den Halbmesser = 1 ist so die Größe der Winkel bestimmend, daß man sehr häufig in der Mathematik die Bogenlänge für den Halbmesser = 1 statt der Anzahl der Grade gibt; statt z. B. zu sagen, ein Winkel von 9 Graden, sagt man ein Winkel, dessen Bogenlänge für den Halbmesser = 1 gleich 0·15707963, und nur in diesem Sinne, daß man statt des Winkels seine Bogenlänge für den Halbmesser = 1 setzt, ist der Satz: Ein Kreisbogen ist gleich seinem Winkel, multiplicirt mit dem Halbmesser, zu nehmen.

Mittelst obiger Tabelle läßt sich nun leicht jeder Bogen für den Halbmesser = 1 bestimmen, multiplicirt man das so erhaltene Resultat mit dem entsprechenden Halbmesser, so hat man die Bogenlänge für irgend einen Halbmesser.

B. 1. Es soll die Bogenlänge von 128° 47′ 29″ für einen Halbmesser von 59′ bestimmt werden. Man hat so:

100°	=	1·74533
20°	=	0·34907
8°	=	0·13963
40′	=	0·01164
7′	=	0·00204
20″	=	0·00010
9″	=	0·00004
128° 47′ 29″	=	2·24785 für den Halbmesser 1
		59
		112·3925
		20·23065
		132·6232

ist die Länge eines Bogens von 128° 47′ 29″ für den Halbmesser von 59′.

B. 2. Es sey die Bogenlänge von 72° für den Halbmesser = 1325 zu finden, so ist diese 1325mal so groß als die von 72° für den Halbmesser 1 oder 1325.72 = 95400 so groß als der Bogen von 1° für den Halbmesser = 1, oder als der Bogen von 95400° für den Halbmesser = 1; man hat so:

90000°	=	1570·796
5000	=	87·266
400	=	6·981
		1665·043 die gesuchte Bogenlänge.

B. 3. Wie groß ist der Bogen von 1'' für einen Kreis der Erde, deren Halbmesser = 864 Meilen ist.

arc. 800'' = 0·003879
arc. 60'' = 0·000291
arc. 4'' = 0·000019

0·004189 Meilen = 16·756 Klafter, da 1 M. = 4000°.

Aus diesem Beispiele ersieht man, wie außerordentlich klein ein Winkel und ein Bogen von einer Sekunde ist. Wir haben oben gefunden, daß ein Bogen, dessen Länge gleich dem Halbmesser ist, 206264·8 Sekunden hält; es verhält sich also die Länge eines Bogens von 1'' zum Halbmesser wie 1 zu 206264·8, d. h. wollten wir ein Winkel-Instrument bauen, dessen eingetheilter Kreisrand Bögen von einer Sekunde dem freien Auge noch sichtbar darstellte, d. h., daß ein Bogen von einer Sekunde die Länge von $\frac{1}{10}$ Linie hätte, so müßte der Halbmesser 20626·48''' = 1718·87'' = 143·24' = 23·87 Klafter seyn. Aus diesem mögen unsere Leser entnehmen, daß der Winkel von einer Sekunde eine so kleine Größe ist, mit der man in der gewöhnlichen Praxis wenig zu thun hat.

Da eine Bogenlänge gleich dem Halbmesser = 206264·8 oder 3437·74 Minuten hat, so ist ein Fehler im Winkel von einer Minute, ein Fehler im Bogen, der $\frac{1}{3437}$ des Halbmessers beträgt. Man sieht, daß dieser Fehler erst für eine größere Entfernung bedeutend wird.

Dieselben obigen Tabellen lassen sich auch zur verkehrten Aufgabe benützen, wenn die Länge des Bogens und der Halbmesser gegeben sind, die Anzahl der zugehörigen Grade, d. h. die Größe seines Winkels zu bestimmen.

B. 1. Es sey die Länge des Bogens 153·5 und der Halbmesser 250', wie groß ist der zugehörige Winkel? ich suche zuerst, wie groß ist der Bogen desselben Winkels für den Halbmesser 1; daher ist, da $b = \frac{B}{R}$ gleich der Bogenlänge, dividirt durch den Halbmesser $= \frac{153·5}{250}$ = 0·614.

Ich suche nun die nächst kleinere Zahl, in der Tafel der Grade, ohne auf den Werth der Stelle zu sehen, und finde da

arc. 3° = 0·0523 5988, daher arc. 30° = 0·5236.

Ziehe dieß von 0·614 ab u. s. w., und habe so

0·6140
0·5236 = arc. 30°
0·0904
0·0873 = arc. 5°
0·0031
0·0029 = arc. 10'
0·0002 = arc. 1;

daher dieser Bogen 35° 11' hat.

B. 2. Es habe ein Bogen die Länge von 47·5 Schuh, sein Halbmesser = 3125′, wie viel Grade hat er? Bogen für den Halbmesser = 1, ist $= \frac{47·5}{3125} = 0·0152$.

$$
\begin{array}{ll}
0·015200 & \\
\underline{0·014544} & = \text{arc. } 50' \\
0·000656 & \\
\underline{0·000582} & = \text{arc. } 2' \\
0·000074 & \\
\underline{0·000049} & = \text{arc. } 10'' \\
0·000025 & = \text{arc. } 5'';
\end{array}
$$

daher hat der Bogen 52′ 15″ im Gradmaß.

Die dritte Aufgabe aus Bogenlänge und Gradmaß den Halbmesser zu finden, wird, da nach Obigem $\frac{B}{b} = R$ ist, dadurch gelöset, daß man die gegebene Bogenlänge durch die Bogenlänge für den Halbmesser 1 = dividirt.

B. 1. Es sey die Länge eines Bogens 43′ und sein Winkel habe 26° 15′ 52″, wie groß ist sein Halbmesser?

$$
\begin{array}{rl}
\text{arc. } 20^\circ & = 0·349066 \\
\text{arc. } 6^\circ & = 0·104720 \\
\text{arc. } 10' & = 0·002909 \\
\text{arc. } 5' & = 0·001454 \\
\text{arc. } 50'' & = 0·000242 \\
\text{arc. } 2'' & = \underline{0·000010} \\
\text{arc } 26^\circ\ 15'\ 52'' & = 0·458401
\end{array}
$$

$$43 : 0·458401 = 93·8043$$

als Größe des Halbmessers.

Zur Verwandlung der Halbmessertheile in Bogentheile leistet folgende Tabelle sehr nützliche Dienste.

1 r = 57° 17′ 44″·8	3 r = 171° 53′ 14″·4	5 r = 286° 28′ 44″·0
2 r = 114° 35′ 29″·6	4 r = 229° 10′ 59″·2	6 r = 343° 46′ 28″·8

	Zehntel	Hundertel.	Tausendtel.	Zehntausendtel.	Hunderttausendtel.
1	5° 43′ 46″·5	0° 34′ 22″·6	3′ 26″·3	0′ 20″·6	2″·1
2	11 27 33·0	1 8 45·3	6 52·5	0 41·3	4·2
3	17 11 19·4	1 43 7·9	10 18·8	1 1·9	6·2
4	22 55 5·9	2 17 30·6	13 45·1	1 22·5	8·3
5	28 38 52·4	2 51 53·2	17 11·3	1 43·1	10·3
6	34 22 38·9	3 26 15·9	20 37·6	2 3·8	12·4
7	40 6 25·4	4 0 38·5	24 3·9	2 24·4	14·4
8	45 50 11·8	4 35 1·2	27 30·1	2 45·0	16·5
9	51 33 58·3	5 9 23·8	30 56·4	2 5·6	18·6

Als Anwendung dieser Tabelle berechnen wir das erste Beispiel der zweiten Aufgabe, nämlich wie viele Grade hat ein Bogen von der

Länge 153·5, dessen Halbmesser = 250′ ist, so hat man Bogenlänge für den Halbmesser 1 gleich $\frac{153 \cdot 5}{250} = 0 \cdot 614$, nun ist nach der so eben gegebenen Tafel:

$$\begin{array}{lrrr} 0 \cdot 6 & = 34^{0} & 22' & 38'' \cdot 9 \\ 0 \cdot 01 & = 0^{0} & 34' & 22 \cdot 6 \\ 0 \cdot 004 & = & 13' & 45 \cdot 1 \\ \hline 0 \cdot 614 & = 35^{0} & 10' & 46'' \cdot 6 \end{array}$$

Eben so soll die Bogenlänge 0·0152 in Grademaß verwandelt werden.

$$\begin{array}{lrr} 0 \cdot 01 & = 34' & 22'' \cdot 6 \\ 0 \cdot 005 & = 17' & 11 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0002 & = & 41 \cdot 3 \\ \hline 0 \cdot 0152 & = 52' & 15'' \cdot 2 \end{array}$$

§. 141. Noch bequemer lassen sich diese drei Aufgaben mittelst Logarithmen lösen. Bezeichnet B die Länge des Bogens, R den Halbmesser, φ in Graden die Größe des Winkels, b die Länge des Bogens desselben Winkels für den Halbmesser = 1, so hat man:

$$B = b \, . \, r; \; b = \varphi \, . \, \text{arc.} \, 1^{0} \text{ oder } b = \varphi \, . \, \frac{\pi}{180};$$

daher $B = r \, . \, \varphi \, . \, \text{arc.} \, 1^{0}$, oder wie wir früher hatten, $B = r \, . \, \varphi \, . \, \frac{\pi}{180}$;

$$\text{daher } \log. B = \log. r + \log. \varphi + \log. \frac{\pi}{180},$$

d. h. der Logarithmus des Bogens ist gleich dem Logarithmus des Halbmessers, mehr dem Logarithmus der Anzahl der Grade, mehr dem Logarithmus des Bogens von 1°.

Ist der Winkel statt in Graden in Minuten oder Sekunden gegeben, so zwar, daß z. B. $\varphi^{0} = \psi' = \omega''$ ist, so hat man, da hier die Zahl $\psi = 60 \, \varphi$, $\omega = 3600 \, \varphi$ ist, daher auch

$$\varphi \, . \, \text{arc.} \, 1^{0} = \psi \, . \, \text{arc.} \, 1' = \omega \, . \, \text{arc.} \, 1'' \text{ oder}$$

$$\varphi \, . \, \frac{\pi}{180} = \psi \, . \, \frac{\pi}{60.180} = \omega \, . \, \frac{\pi}{60.60.180}, \text{ und somit}$$

$$B = r \, . \, \psi \, . \, \text{arc.} \, 1' = r \, . \, \omega \, . \, \text{arc.} \, 1''; \text{ daher auch}$$

$$\log. B = \log. r + \log. \psi + \log \; \text{arc.} \, 1'$$

$$\log. B = \log. r + \log. \omega + \log. \text{arc.} \, 1''.$$

Der Logarithmus einer Bogenlänge gleich dem Logarithmus des Halbmessers mehr dem Logarithmus der Anzahl Minuten oder Sekunden mehr dem Logarithmus der Bogenlänge von einer Minute oder einer Sekunde, je nachdem der Winkel in Minuten oder Sekunden gegeben ist. Zu diesen Rechnungen bedarf man

$$\log.\ \text{arc.}\ 1^\circ = \log.\ \frac{\pi}{180} = 0\cdot241\ 8774-2,$$

$$\log.\ \text{arc.}\ 1' = \log.\ \frac{\pi}{60.180} = 0\cdot463\ 7261-4,$$

$$\log.\ \text{arc.}\ 1'' = \log.\ \frac{\pi}{60.60.180} = 0\cdot685\ 5749-6.$$

Da $B = r\,.\,\varphi\,.\,\frac{\pi}{180}$, so ist $\varphi^\circ = \frac{B}{r}.\frac{180^\circ}{\pi}$, wenn der Winkel in Graden bestimmt werden soll; will man den Winkel in Minuten oder Sekunden haben, so ist die Anzahl der Minuten $= \frac{B}{r}.\frac{180\cdot60}{\pi}$ oder Anzahl der Sekunden $= \frac{B}{r}.\frac{180\cdot60\cdot60}{\pi}$.

Man hat nun $\log.\frac{180^\circ}{\pi} = \log.\frac{1}{\text{arc. } 1^\circ} = \log.\ 57^\circ295779$ $= 1\cdot758\ 1226$;

$$\log.\frac{180.60'}{\pi} = \log.\frac{1}{\text{arc. } 1'} = \log.\ 3437\cdot7467 = 3\cdot5362739$$

$$\log.\frac{180.60.60''}{\pi} = \log.\frac{1}{\text{arc.} 1''} = \log.\ 206264\cdot''8 = 5\cdot3144251.$$

Endlich hat man $r = \frac{B}{\varphi}.\frac{180}{\pi}$, wenn der Winkel φ in Graden gegeben ist, sonst $r = \frac{B}{\text{Anzahl Minuten}}.\frac{180.60}{\pi}$,

$$r = \frac{B}{\text{Anzahl Sekunden}}.\frac{180\cdot60\cdot60}{\pi},$$

wenn der Winkel in Minuten und Sekunden gegeben ist.

Beim Verwandeln von Minuten und Sekunden in Decimaltheile des Grades leistet uns folgende Tabelle nützliche Dienste.

$1' = 0^\circ\!\cdot\!016666\dot{6}$	$1'' = 0\cdot00027\dot{7}$
$2' = 0\cdot033333\dot{3}$	$2'' = 0\cdot00055\dot{5}$
$3' = 0\cdot0500000$	$3'' = 0\cdot00083\dot{3}$
$4' = 0\cdot066666\dot{6}$	$4'' = 0\cdot00111\dot{1}$
$5' = 0\cdot083333\dot{3}$	$5'' = 0\cdot00138\dot{8}$
$6' = 0^\circ\!\cdot\!100000$	$6'' = 0\cdot00166\dot{6}$
$7' = 0\cdot11666\dot{6}$	$7'' = 0\cdot00194\dot{4}$
$8' = 0\cdot13333\dot{3}$	$8'' = 0\cdot00222\dot{2}$
$9' = 0\cdot150000$	$9'' = 0\cdot002500$

wo sich hier die letzte Ziffer ohne Ende wiederholt.

B. 1. Es sey ein Winkel von 45° 45′ 45″, der Halbmesser sey 73·528 Schuh, wie groß ist sein entsprechender Bogen?

$$40' = 0 \cdot 6666\dot{6}$$
$$5 = 0 \cdot 0833\dot{3}$$
$$40'' = 0 \cdot 0111\dot{1}$$
$$5'' = 0 \cdot 0013\dot{8}$$
$$0 \cdot 76250$$

daher Bogen $= 45 \cdot 7625 \,.\, 73 \cdot 528 \, \frac{\pi}{180}$

$$\log.\ 45 \cdot 7625 = 1 \cdot 6605098$$
$$\log.\ 73 \cdot 528 = 1 \cdot 8664528$$
$$\log.\ \frac{\pi}{180} = 0 \cdot 2418774 - 2$$
$$\log.\ \text{der Bogenlänge} = 1 \cdot 7688400$$
$$\text{Bogenlänge} = 58 \cdot 7273.$$

B. 2. Die Länge eines Bogens ist 345′, und Halbmesser 926′, wie viel Grade hat der Bogen

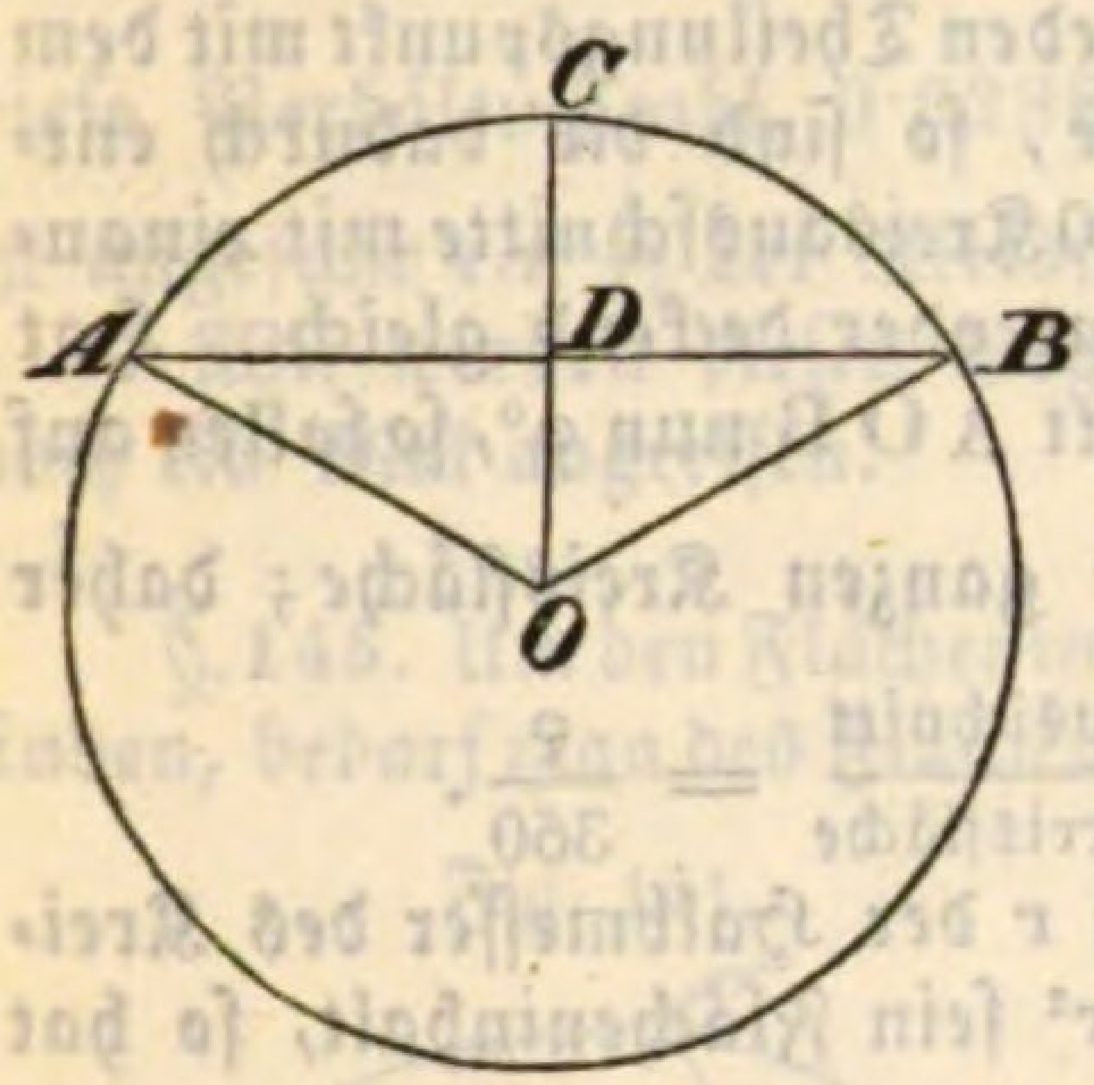
$$345 : 2\pi \,.\, 926 = \varphi^0 : 360^0$$
$$\varphi = \frac{345}{926} \,.\, \frac{180}{\pi}$$
$$\log.\ 345 = 2 \cdot 5378191$$
$$\log.\ \frac{180}{\pi} = 1 \cdot 7581226$$
$$4 \cdot 2959417$$
$$\log.\ 926 = 2 \cdot 9666110$$
$$\log.\ \varphi^0 = 1 \cdot 3293307$$
$$\varphi = 21^0 \cdot 3467 = 21^0\, 20'\, 48''$$

B. 3. Ein Bogen habe die Länge von 100′, und er habe 36° 36″ wie groß ist sein Halbmesser?

$$100 : 2\pi r = 36 \cdot 6 : 360^0$$
$$r = \frac{100}{36 \cdot 6} \,.\, \frac{180}{\pi}$$
$$\log.\ 100 = 2 \cdot 0000000$$
$$\log.\ \frac{180}{\pi} = 1 \cdot 7581226$$
$$3 \cdot 7581126$$
$$\log.\ 36 \cdot 6 = 1 \cdot 5634811$$
$$\log.\ r = 2 \cdot 1946315$$
$$r = 156 \cdot 542 \text{ Schuh}.$$

§. 142. Die Verbindungslinie der Halbirungspunkte des Bogens und seiner Sehne nennt man oft die Bogenhöhe, die Sehne selbst manchmal Bogenweite; zwischen Bogenhöhe, Bogenweite und Halbmesser besteht eine merkwürdige Gleichung, die wir jetzt aufsuchen wollen.

Fig. 138.



Es sey der Bogen AB; fällt man vom Mittelpunkte O ein Loth OD auf die Sehne AB, so wird dieses verlängert die Sehne AB in D, den Bogen AB in C halbiren, so ist dann $CD = h$ die Bogenhöhe; nennen wir die Bogenweite $AB = \omega$, den Halbmesser $= r$, so ist $DB = \frac{\omega}{2}$; $DO = r - h$. Da man nun in dem rechtwinklichten Dreiecke OBD

$$\overline{OB}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DB}^2$$

hat, so ist:

$$r^2 = (r-h)^2 + \frac{\omega^2}{4} = r^2 - 2hr + h^2 + \frac{\omega^2}{4},$$

somit $o = h^2 + \frac{\omega^2}{4} - 2hr$; woraus $r = \frac{\omega^2 + 4h^2}{8h}$. Mittelst welcher Formel man jederzeit aus Bogenhöhe und Bogenweite den Halbmesser berechnen kann.

Sollten h und ω große Zahlen seyn, so kann man $r = \frac{\omega^2}{8h} + \frac{1}{2}h$ nehmen, und den ersten Theil mittelst Logarithmen rechnen.

B. 1. Es sey die Bogenhöhe 3°, die Bogenweite 10°, wie groß ist der Halbmesser?

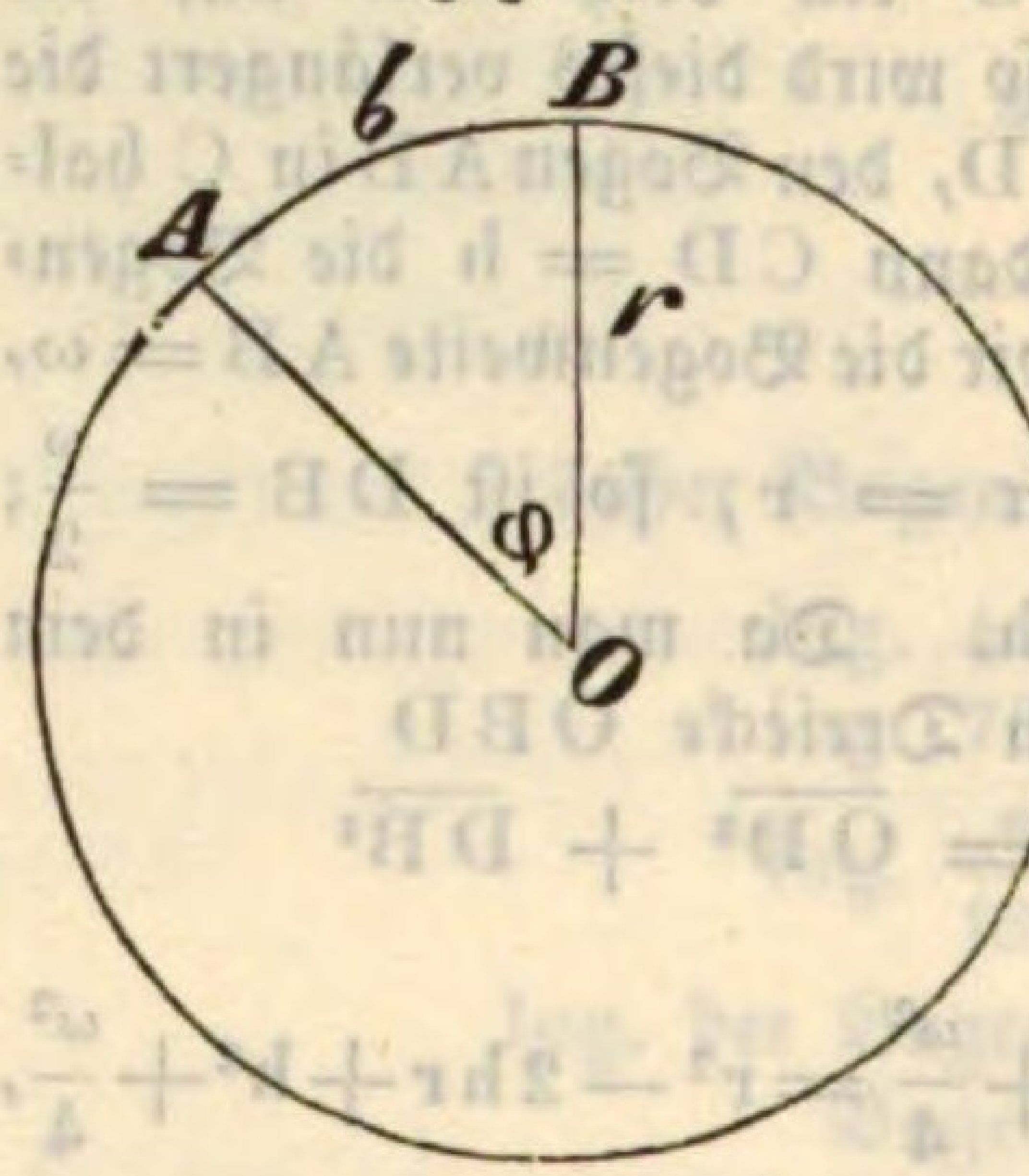
$$r = \frac{100 + 36}{24} = 5\tfrac{2}{3} \text{ Klafter.}$$

B. 2. Es sey die Bogenhöhe 48′, die Bogenweite 537′;

$$\begin{array}{rl}
\log.\ 537 = & 2{\cdot}7299743 \\
\hline
 & 5{\cdot}4599486 \\
\log.\ 48 = & 1{\cdot}6812412 \\
\log.\ 8 = & 0{\cdot}9030900 \\
\hline
 & 2{\cdot}8756174 = \log.\ 750{\cdot}961 \\
 & 750{\cdot}961 \\
 & 24 \\
\hline
 & 774{\cdot}961 \text{ ist der Halbmesser.}
\end{array}$$

§. 143. **Der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes verhält sich zur ganzen Kreisfläche, wie die Anzahl der Grade seines Winkels zu 360 Grad.**

Fig. 139.



Denkt man sich den ganzen Kreisumfang in 360 gleiche Theile getheilt, verbindet man jeden Theilungspunkt mit dem Mittelpunkte, so sind die dadurch entstehenden 360 Kreisausschnitte mit einander congruent oder deckend gleich. Hat der Ausschnitt A O B nun φ°, so fallen auf ihn $\frac{\varphi}{360}$ der ganzen Kreisfläche; daher hat man $\frac{\text{Ausschnitt}}{\text{Kreisfläche}} = \frac{\varphi}{360}$.

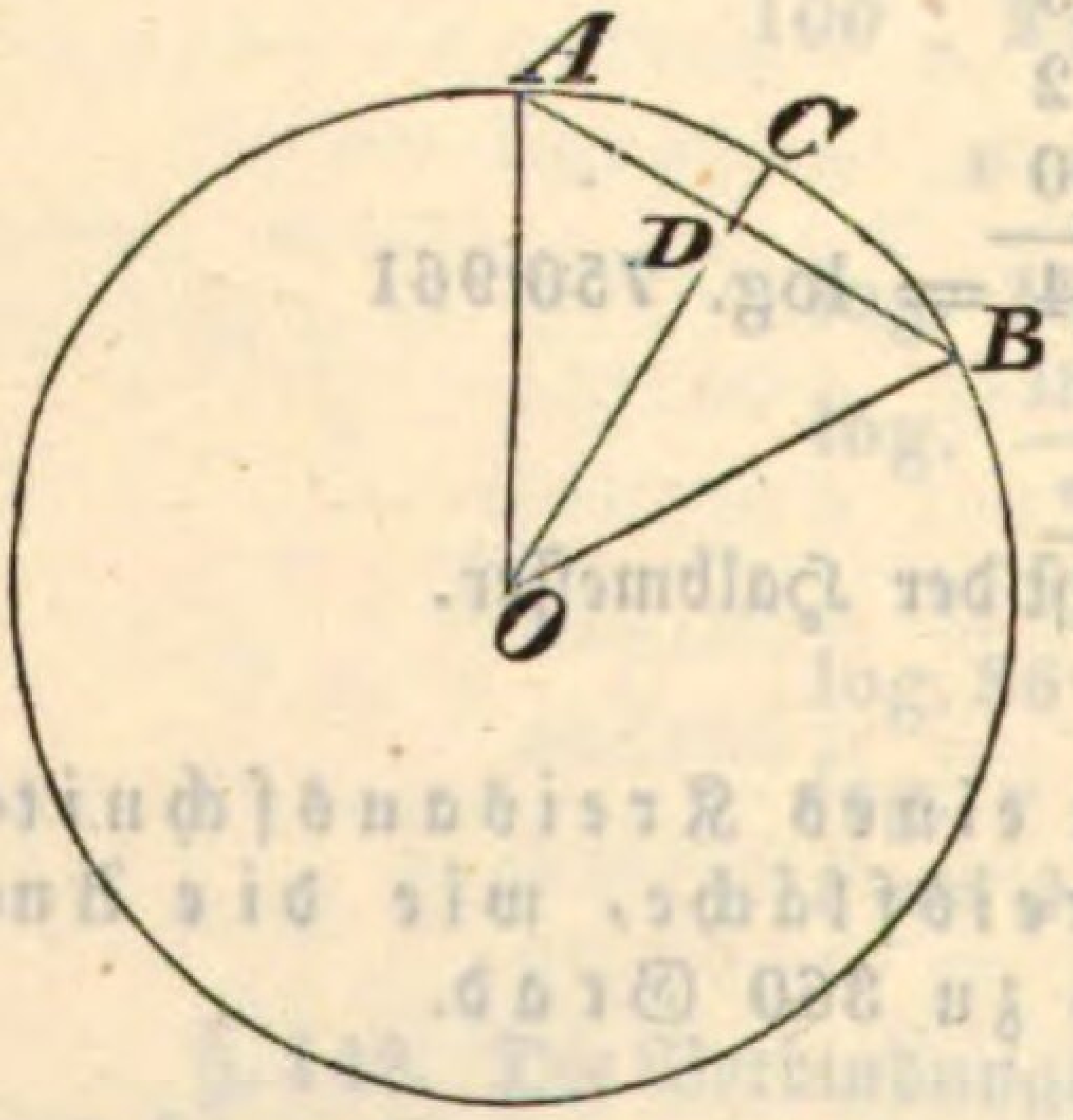
Ist nun r der Halbmesser des Kreises, also πr^2 sein Flächeninhalt, so hat man $A = \frac{\varphi}{360} \cdot \pi r^2$. Bezeichnen wir aber den Bogen AB durch b, so hat man $b = \frac{\varphi}{360} \cdot 2 r \pi$; dividirt man nun die zwei letzten Gleichungen durch einander, so hat man

$$\frac{A}{b} = \frac{r^2}{2r} \text{ oder } \frac{A}{b} = \frac{r}{2}, \text{ daher } A = b\,\frac{r}{2};$$

daher auch: **der Flächeninhalt eines Kreisausschnittes gleich seinem Bogen, multiplicirt mit dem halben Halbmesser.**

§. 144. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, muß man zuerst den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes bestimmen, und von diesem das Dreieck abziehen, welches von den beiden Halbmessern und der Sehne gebildet wird.

Fig. 140.



So ist der Kreisabschnitt ACB gleich dem Kreisausschnitte A O B C, weniger dem Dreiecke A O B.

Es sey z. B. AB = dem Halbmesser BO, so ist der Ausschnitt AOBC = $\frac{1}{6}$ der Kreisfläche, daher AOBC = $\frac{1}{6}\pi r^2$

$$\triangle AOB = r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{4} = r^2\,\frac{\sqrt{3}}{4},$$

daher Abschnitt A B C

$$= \frac{\pi}{6} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2$$

$$= (0{\cdot}5235988 - 0{\cdot}4330127)\, r^2$$

$$= 0{\cdot}0905861\, r^2.$$

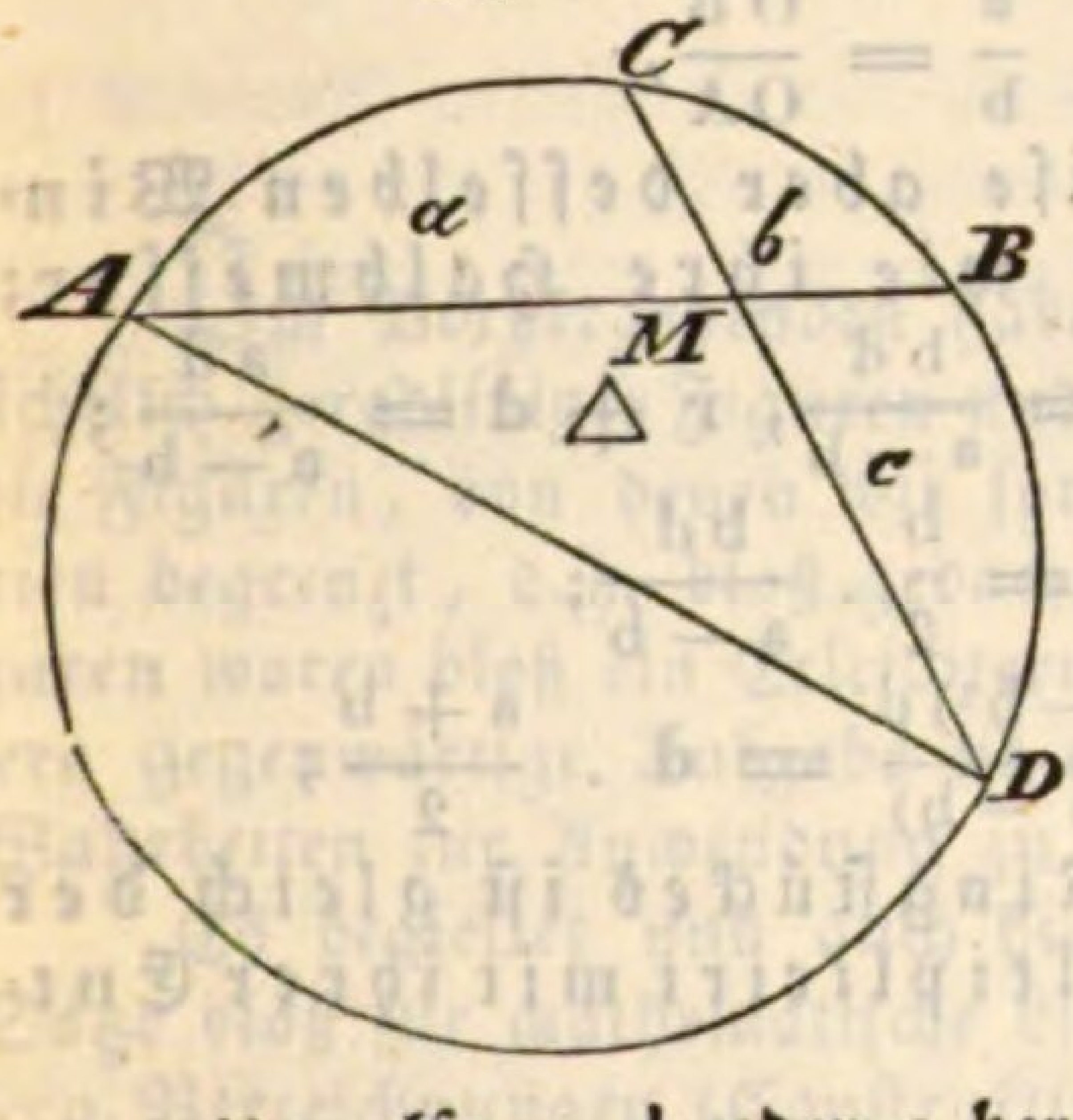
Wollte man das Verhältniß dieses Abschnittes zur ganzen Kreisfläche haben, so ist dieses gleich $\dfrac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{\pi}$. Berechne ich nun diesen Ausdruck, oder

kürzer, multiplicire ich 0·090586 mit $\frac{1}{\pi} = 0·318310$, so hat man als diese Verhältnißzahl $0·028834 = \frac{1}{34·6\ldots}$, d. h. der Kreisabschnitt ist ungefähr ein $\frac{1}{35}$ der Kreisfläche.

Wir werden diesen Gegenstand verstärkt mit andern Hilfsmitteln noch ein Mal angreifen.

§. 145. Um den Flächeninhalt eines Stückes eines Kreisabschnittes zu finden, bedarf man des Flächeninhalts noch zweier anderer Kreisabschnitte.

Fig. 141.



Es sey das Kreisstück ACM = a, BCM = b, MBD = c, das Dreieck AMD = △.

Es sey der Flächeninhalt des Abschnittes ACB = A, des Abschnittes CBD = A′, des Abschnittes ACBD = A″, so hat man

$$a + b = A$$
$$b + c = A'$$
$$a + b + c + \triangle = A''$$

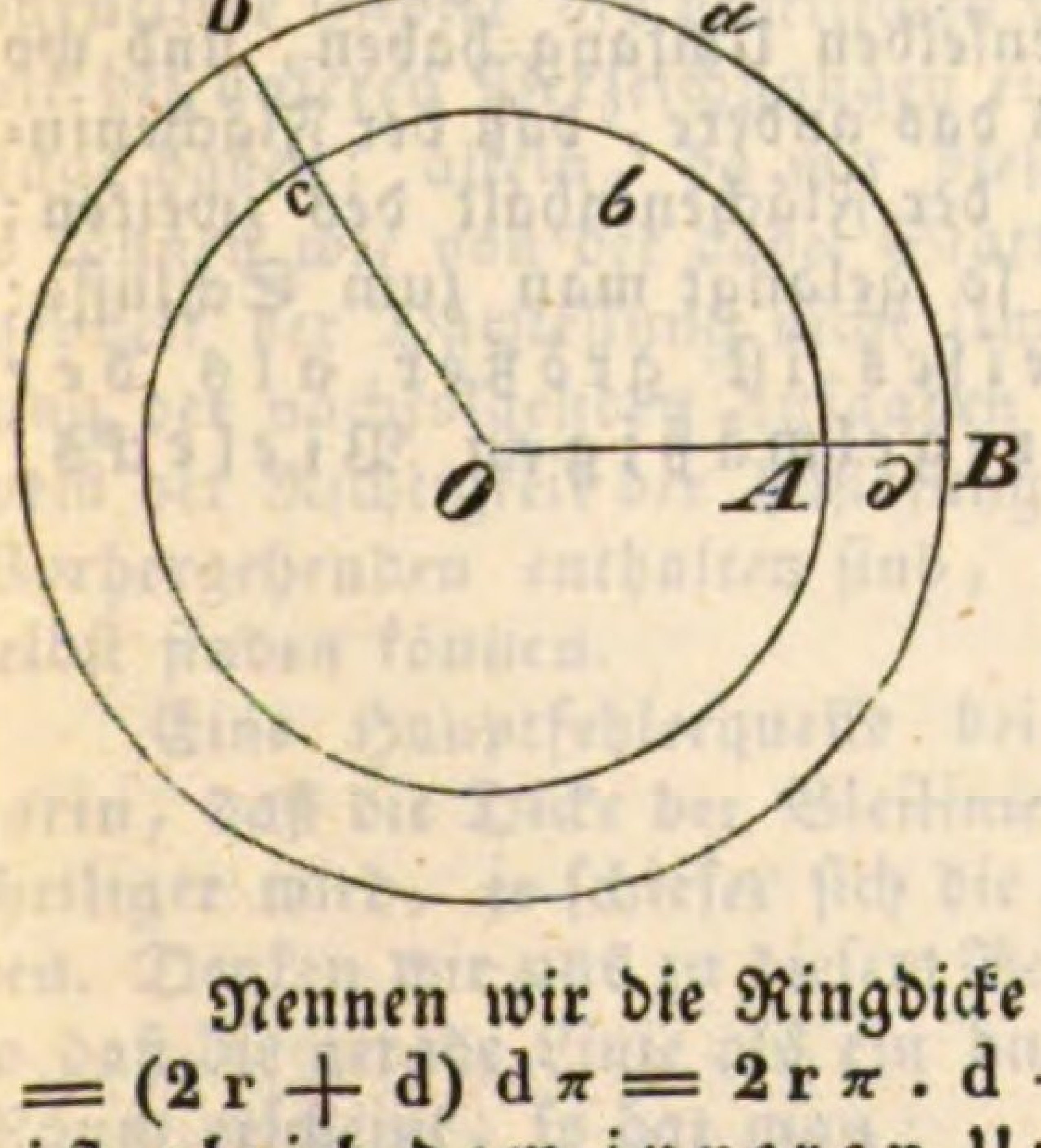
woraus man

$$a = A'' - A' - \triangle$$
$$b = A + A' + \triangle - A''$$
$$c = A'' - A - \triangle$$ erhält.

Um also a, b oder c berechnen zu können, müssen die Angaben so gestellt seyn, daß man mittelst derselben früher A, A′, A″, △ im Stande ist zu berechnen.

§. 146. Die Fläche zwischen zwei concentrischen Kreislinien nennt man eine Ringfläche.

Fig. 142.



Die Entfernung der beiden Umfänge AB = OB — OA heißt die Ringdicke. Ist nun OA = r; OB = R, so ist die Ringfläche $= \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r)(R - r)$, d. h. eine Ringfläche ist gleich der Summe der Halbmesser, multiplicirt mit ihrem Unterschiede, multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl.

B. Es seyen die beiden Halbmesser 7′ und 9′, so ist die Ringfläche $= 16·2 . \pi = 32 . \frac{22}{7} = 100\frac{4}{7}$ □Schuh.

Nennen wir die Ringdicke R — r = d, so hat man Ringfläche $= (2r + d)\, d\pi = 2r\pi . d + d^2\pi$, d. h. Eine Ringfläche ist gleich dem inneren Umfange, multiplicirt mit der

Dicke, mehr dem Flächeninhalte eines Kreises, dessen Halbmesser die Ringdicke ist. Bei sehr dünnen Ringflächen wird der zweite Theil immer unbedeutender.

Um den Flächeninhalt eines Ringstückes B A C D zu finden, bedenke man, daß $ABCD = BOD - COA$; nun ist aber der Flächeninhalt eines Ausschnittes gleich seinem Bogen, multiplicirt mit dem halben Halbmesser; daher wenn die Bögen $BD = a$; $AC = b$; und ihre Entfernung $AB = d$ gegeben ist, wir vorerst die Halbmesser OA und OB bestimmen müssen. Da nun

$$\frac{a}{2\pi OB} = \frac{AOC}{360^\circ};\quad \frac{b}{2\pi OA} = \frac{AOC}{360^\circ}, \text{ so ist}$$

$$\frac{a}{OB} = \frac{b}{OA} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{b} = \frac{OB}{OA},$$

d. h. Bögen verschiedener Kreise aber desselben Winkels verhalten sich gerade so wie ihre Halbmesser;

$$\text{daher } \frac{a}{b} = \frac{r+d}{r}, \text{ woraus } r = \frac{bd}{a-b},\ r + d = \frac{ad}{a-b};$$

$$\text{daher } DOB = \frac{a}{2} \cdot \frac{ad}{a-b};\ AOC = \frac{b}{2} \cdot \frac{bd}{a-b};$$

$$\text{daher } ABCD = \frac{a^2 d - b^2 d}{2(a-b)} = \frac{(a^2 - b^2)\,d}{2(a-b)} = d \cdot \frac{a+b}{2};$$

d. h. der Flächeninhalt eines Ringstückes ist gleich der halben Summe der Bögen, multiplicirt mit ihrer Entfernung.

B. Es seyen 47′ und 52′ die Längen der beiden concentrischen Bögen und 10′ ihre Entfernung, so ist der Flächeninhalt des Ringstückes $= 99 \cdot 5 = 495$ □ Schuh, der innere Halbmesser $= \frac{47 \cdot 10}{5} = 94$, der äußere $= \frac{52 \cdot 10}{5} = 104'$.

§. 147. Aus dem Früheren ersieht man, daß von zwei Vielecken, demselben Kreise eingeschrieben, die denselben Umfang haben, und wo das eine doppelt so viel Seiten hat als das andere, daß der Flächeninhalt des erstern stets größer ist, als der Flächeninhalt des zweiten; setzt man diese Betrachtungen fort, so gelangt man zum Schlusse: der Flächeninhalt eines Kreises ist größer als der Flächeninhalt irgend eines regelmäßigen Vielecks, das denselben Umfang hat.

Drittes Buch.

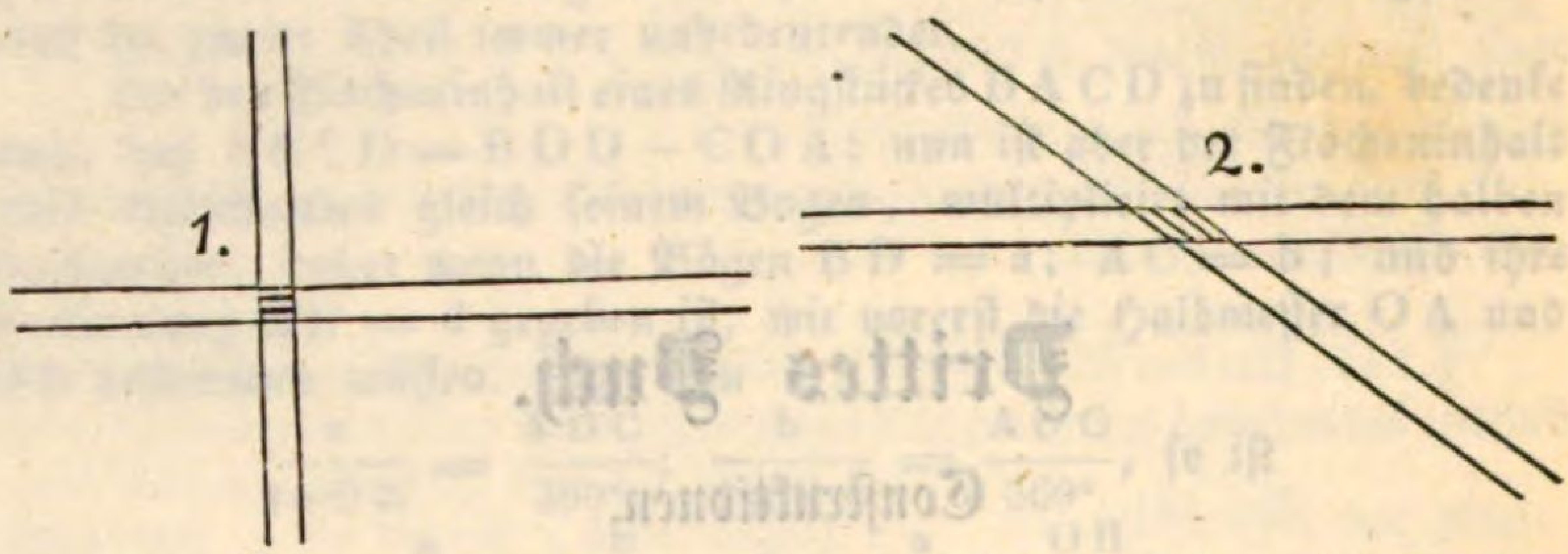
Construktionen.

Im Vorhergehenden haben wir uns mit den Gesetzen, die rücksichtlich geradliniger Figuren und der Kreise Statt finden, beschäftiget; die Figuren, von denen wir sprachen, waren von mathematischen Linien begrenzt, d. h. bloß gedacht; die dabei gebrauchten wirklichen Figuren waren bloß ein Erleichterungsmittel der Einbildungskraft. Unsere gegenwärtige Aufgabe ist es, die dort errungenen theoretischen Wahrheiten zur Anwendung zu bringen.

Es begleitet uns auch hier das Gefühl, daß alle gewonnenen Sätze bloß für mathematische Linien gelten, daß wir also in allen unsern Verzeichnungen (Construktionen) unsere Linien so dünn zu machen haben, als es nur irgend möglich ist. Es wird uns nicht verwundern, daß trotz aller angewandten Vorsicht, die durch eine Kette von Verzeichnungen erworbenen Resultate mit dem als theoretisch Erwiesenen nicht immer vollkommen übereinstimmen, weil durch Anhäufung sehr kleiner Fehler zuletzt bedeutendere entstehen. Allein eben deßhalb wird es uns nicht einfallen, aus bloßen Verzeichnungen und den dabei sich ergebenden Beziehungen allgemeine Schlüsse zu ziehen. Ohne in das eigentliche Gebiet der praktischen Geometrie uns zu verlieren, werden wir bei unseren Verzeichnungen eigentlich nur mathematische Linien im Auge haben; allein, da wir diese Linien wirklich zu zeichnen haben, so können wir von der dabei Statt findenden nothwendigen Unvollkommenheit der Darstellung nicht Umgang nehmen. Wir werden bei Lösung der nachfolgenden Aufgaben nicht überall den umständlichen Beweis der Richtigkeit der Auflösung mittheilen, da dieselben meistens im Vorhergehenden enthalten sind, und unsere Leser dieselben oft leicht selbst finden können.

Eine Hauptfehlerquelle bei geometrischen Construktionen liegt darin, daß die Dicke der Bleilinien beim Durchschnitte um desto nachtheiliger wird, je schiefer sich die Geraden oder die Kreisbögen schneiden. Denken wir uns zu diesem Behufe das Ganze vielmals vergrößert, so daß die gerade Linie als ein durch zwei parallele Gerade begrenzter Raum erscheint, so hat man:

Fig. 143.



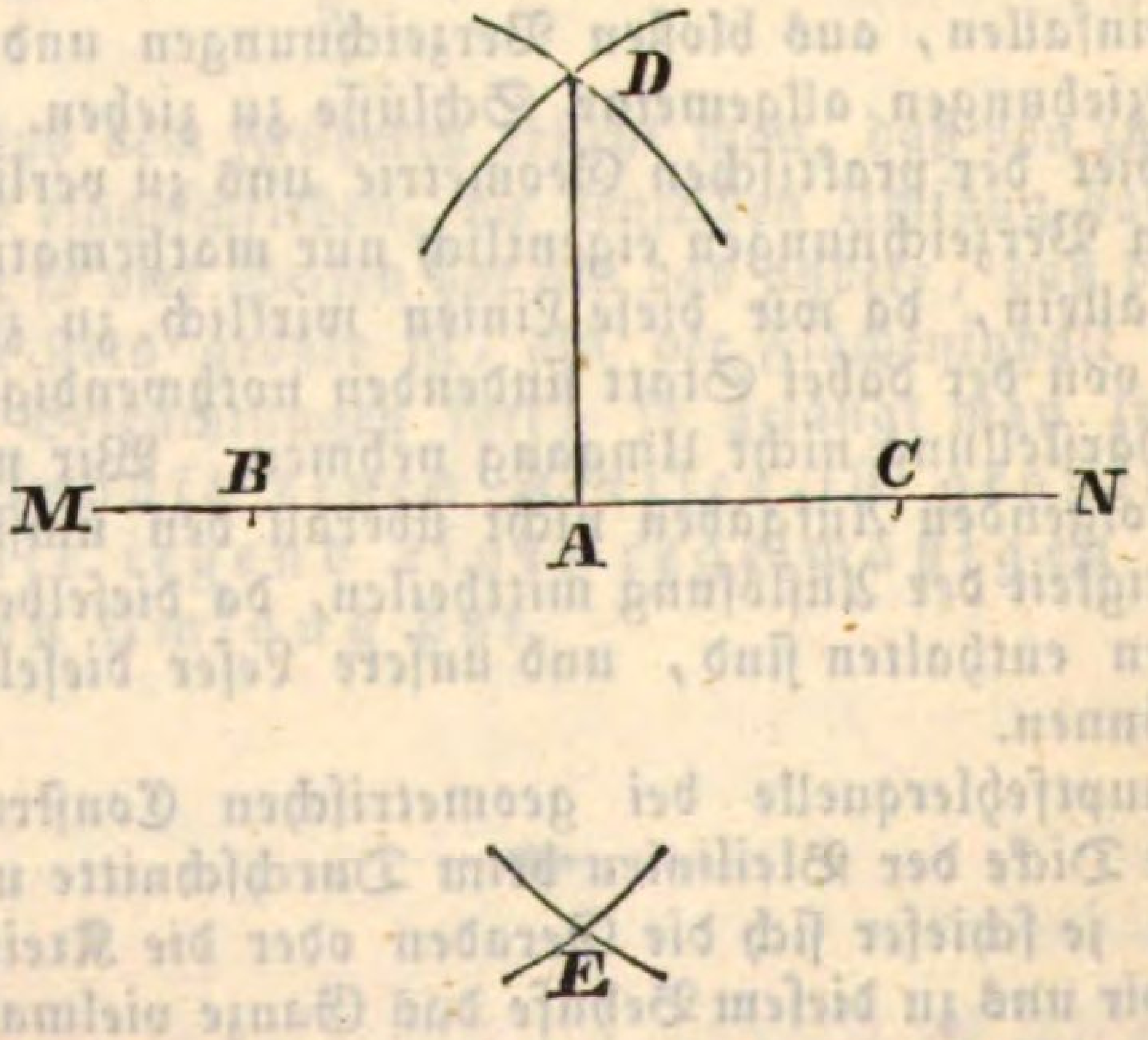
den Punkt der Durchschneidung innerhalb des straffirten Raumes zu suchen. Bei der schiefen Durchschneidung in (2) ist ein viel größerer Irrthum möglich, wie in (1). Daher wird man schiefe Durchschneidungen nach Möglichkeit vermeiden, und Punkte durch schiefe Durchschneidungen erhalten, nicht leicht als Anhaltspunkte weiterer Verzeichnungen benützen.

I. Grundaufgaben.

§. 148. In einem Punkte einer Geraden auf dieselbe ein Loth errichten.

a) Liegt der gegebene Punkt gegen die Mitte, so schneidet man links und rechts von diesem Punkte gleiche Stücke ab, und aus den Endpunkten beschreibt man Kreisbögen desselben Halbmessers; ihr Durchschnittspunkt mit dem gegebenen verbunden, erzeugt das verlangte Loth.

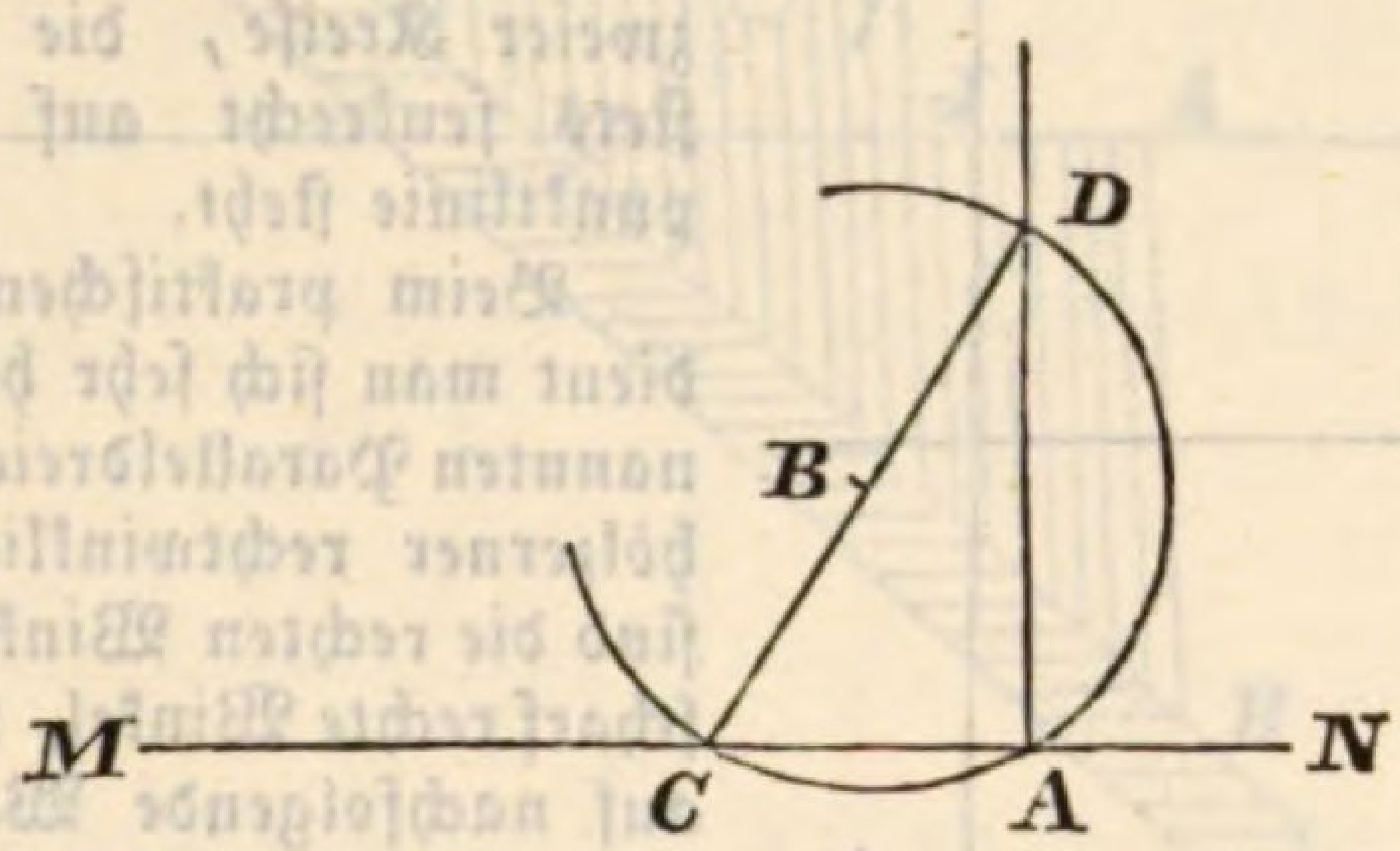
Fig. 144.



A der gegebene Punkt, AB = AC, aus B und C Kreisbögen beschrieben mit demselben Halbmesser, die sich in D und E schneiden.

D, A und E müssen in einer Geraden liegen, die senkrecht auf MN im Punkte A ist; denn verbindet man B und C mit D, so hat man ein gleichschenklichtes Dreieck, wo die Grundlinie halbirt ist u. s. f.

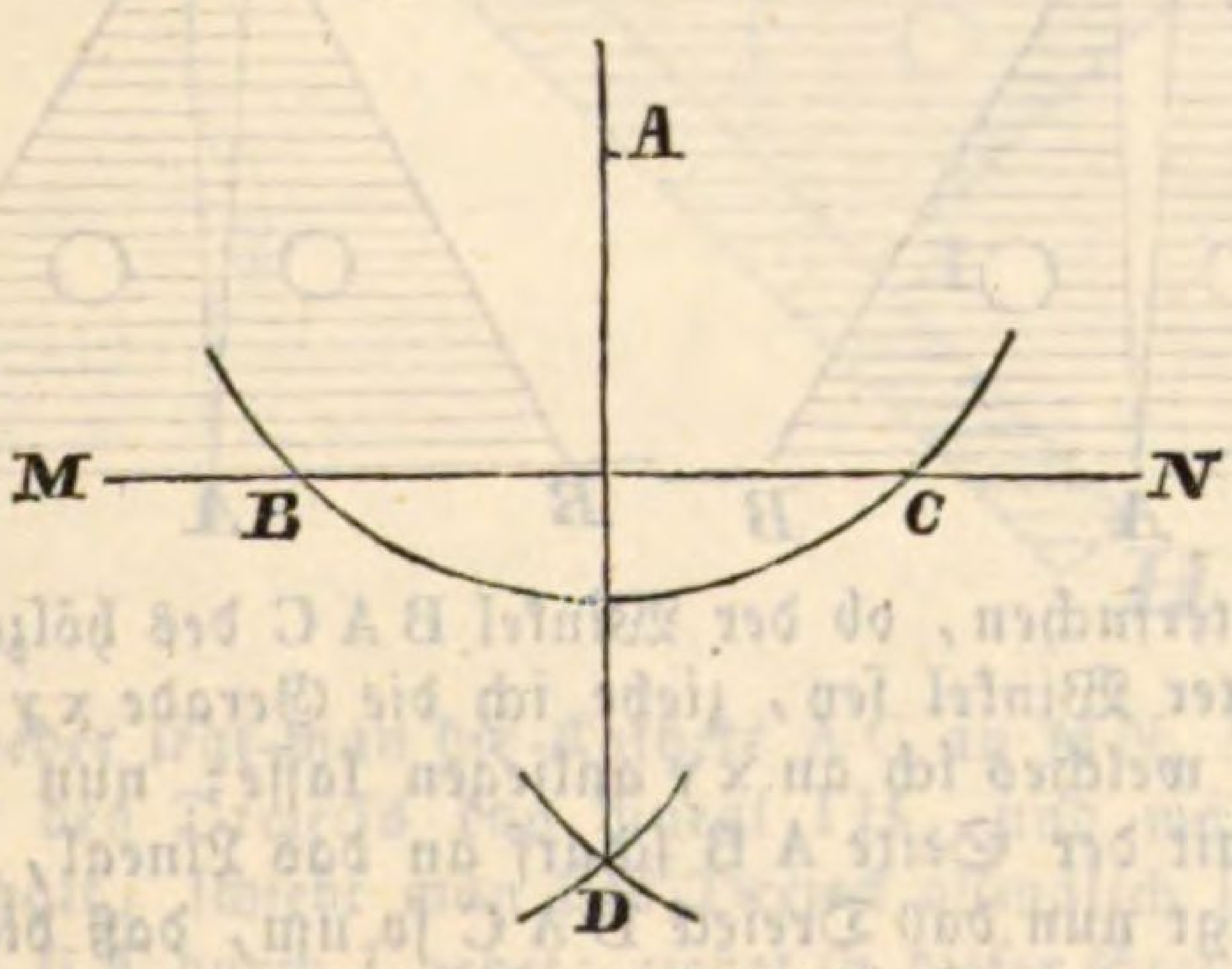
Fig. 145.



b) Liegt der Punkt A mehr gegen Ende der Geraden MN, so beschreibe ich aus irgend einem Punkte B mit dem Halbmesser BA einen Halbkreis, der die MN in C schneidet, verbinde C mit B, und verlängere CB bis an den Umfang in D. Verbinde D mit A, so ist DA das verlangte Loth.

§. 149. **Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf dieselbe ein Loth fällen.**

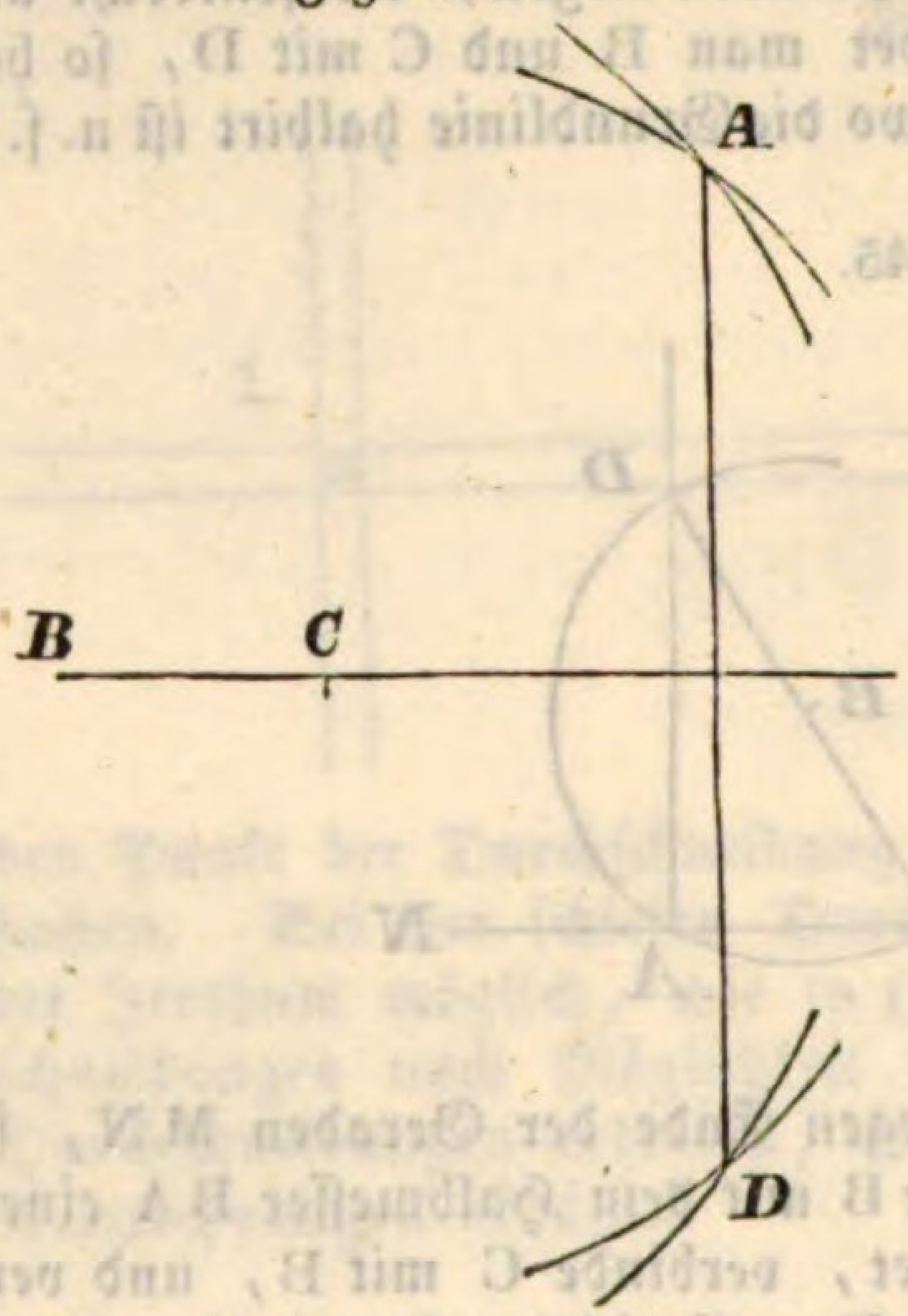
Fig. 146.



A sey der gegebene Punkt, MN die gegebene Gerade. Aus A beschreibe ich einen Kreisbogen, der die MN in zwei Punkten, z. B. in B und C schneidet. Aus den Punkten B und C beschreibt man mit demselben Halbmesser zwei Kreisbögen, die sich in D schneiden; D mit A verbunden, gibt das verlangte Loth.

Liegt aber der Punkt A mehr gegen das Ende der Geraden, so beschreibt man aus zwei Punkten B und C der Geraden MN mit den

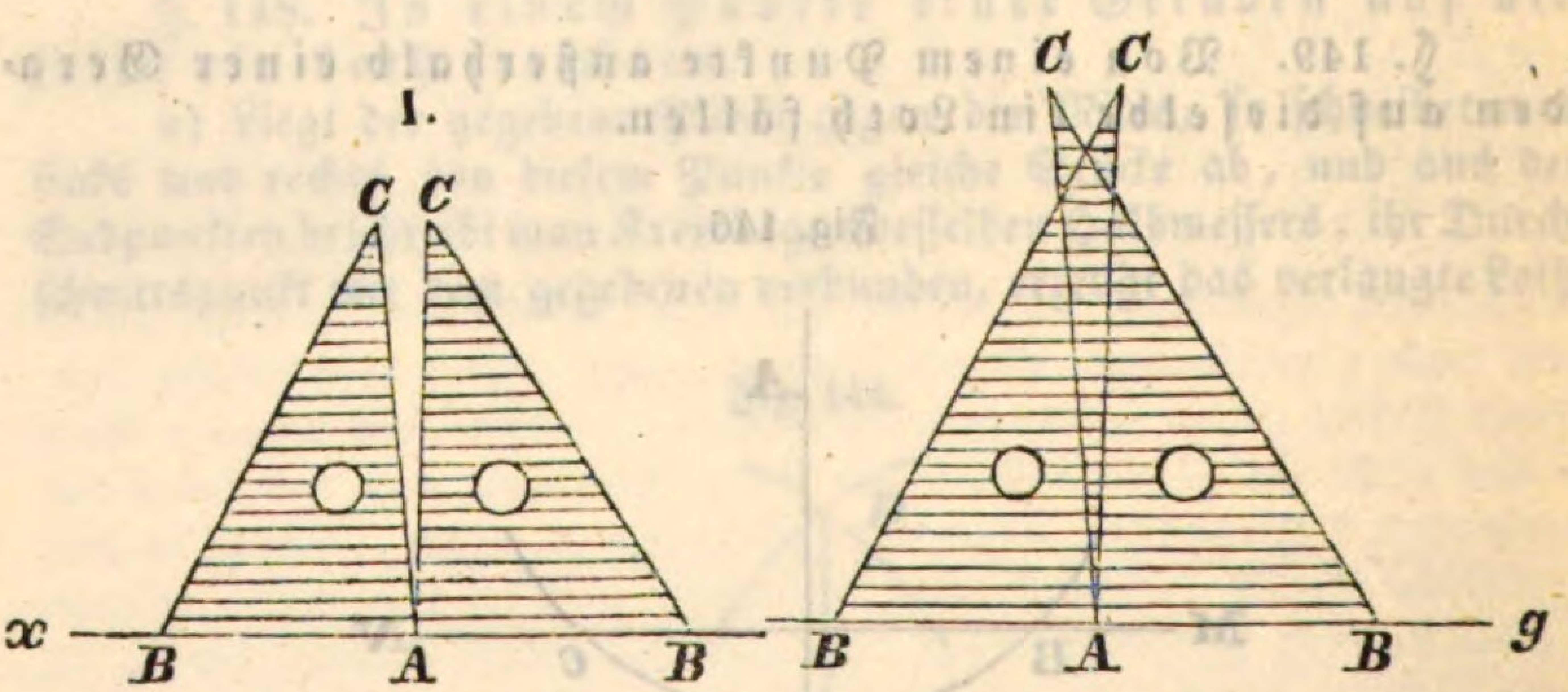
Fig. 147.



Halbmessern A B und A C Kreisbögen, die Verbindung ihrer Durchschnittspunkte D und A ist das verlangte Loth; denn wir wissen ja, daß die gemeinschaftliche Sehne zweier Kreise, die sich schneiden, stets senkrecht auf ihrer Mittelpunktlinie steht.

Beim praktischen Zeichnen bedient man sich sehr häufig der sogenannten Paralleldreiecke, d. i. zweier hölzerner rechtwinklichter Dreiecke; sind die rechten Winkel wirklich sehr scharf rechte Winkel, wovon man sich auf nachfolgende Weise überzeugt, so sind sie zur Bestimmung solcher Punkte, die nicht als Hauptpunkte nachfolgender Verzeichnungen zu dienen haben, wohl zuläßig.

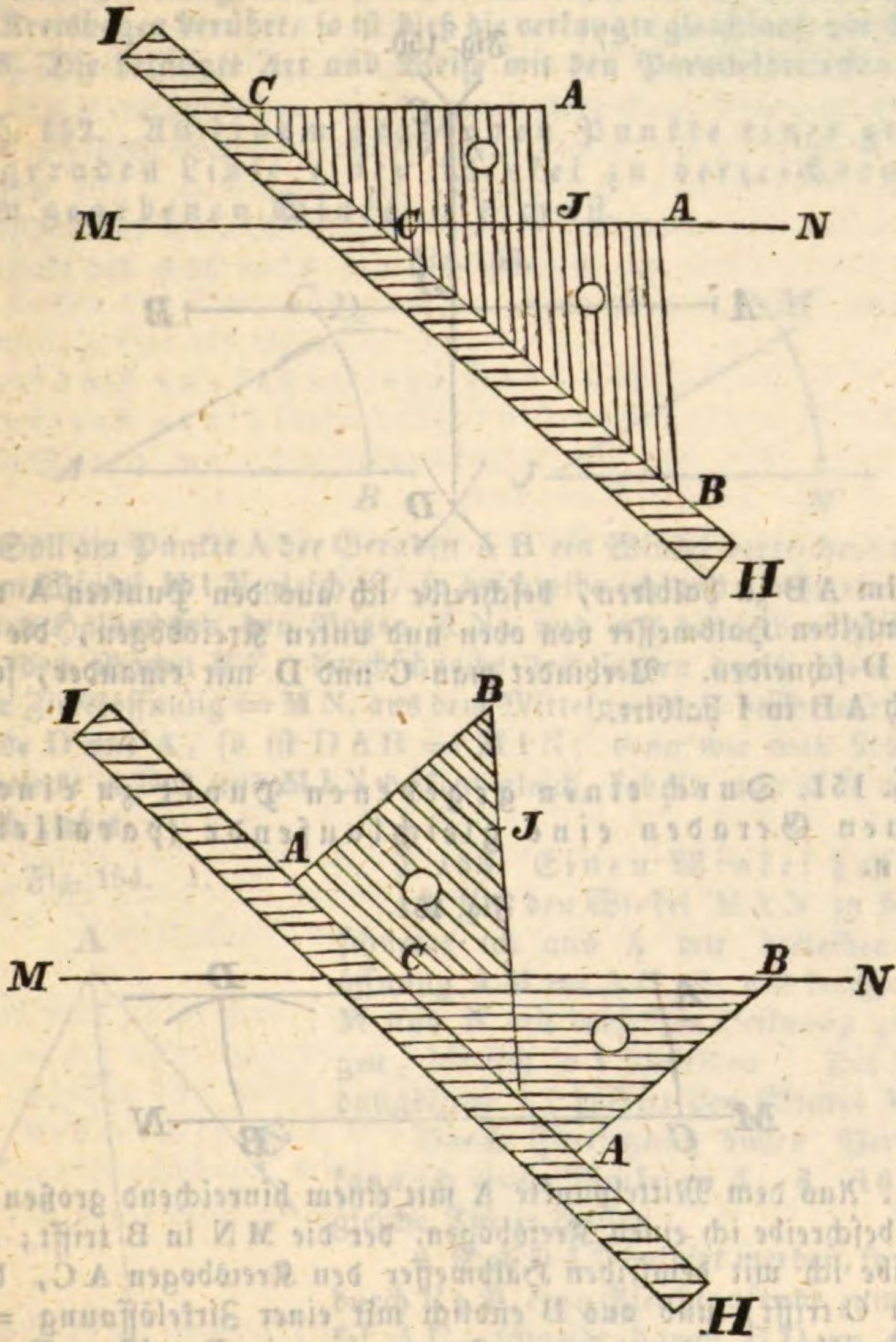
Fig. 148.



Um zu untersuchen, ob der Winkel B A C des hölzernen Dreiecks ABC ein rechter Winkel sey, ziehe ich die Gerade xy mittelst eines guten Lineals, welches ich an xy anliegen lasse; nun legt man das Dreieck ABC mit der Seite AB scharf an das Lineal, und ziehet die Gerade AC; legt nun das Dreieck BAC so um, daß die Kathete AB wieder auf der anderen Seite des Punktes A an der xy anliege, und ziehe wieder AC; fallen die beiden (so fein als möglich) gezogenen Linien über einander, so ist das Dreieck gut; erscheinen aber die Linien wie in 1. und 2., so ist der Winkel BAC entweder spitzig in (1), oder stumpf in (2), also in keinem Falle brauchbar.

Um nun mittelst eines solchen Dreiecks durch einen gegebenen Punkt I auf eine Gerade MN ein Loth zu ziehen, kann man folgender Maßen verfahren:

Fig. 149.

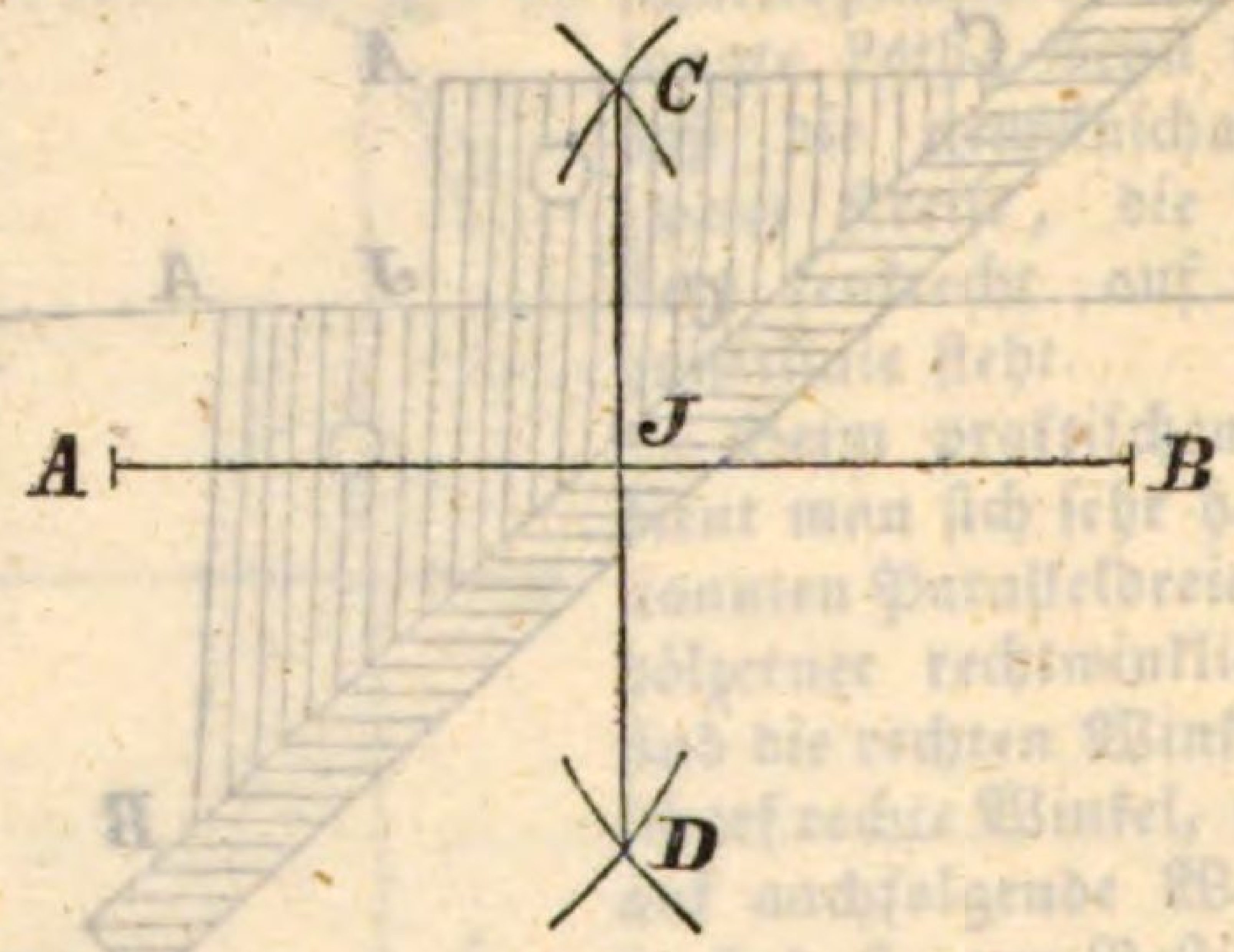


a) Entweder legt man die Kathete AC an MN, legt an die Hypothenuse BC des Dreiecks das Lineal IH, und während man das Lineal IH festhält, schiebt man das Dreieck allmälich so lange hinauf bis die Kathete BA durch I gehet; ziehet in dieser Stellung längs AB eine Gerade, so ist diese das verlangte Loth.

b) Oder man legt die Hypothenuse BC an MN, und an die Kathete CA ein Lineal, dreht das Dreieck BAC um, und legt es so, daß die Kathete AC am Lineal anliegt, und schiebt es so lange, bis die Hypothenuse durch I geht, ziehet längs dieser Hypothenuse eine Gerade, so ist diese das verlangte Loth.

§. 150. Ein Stück einer geraden Linie halbiren.

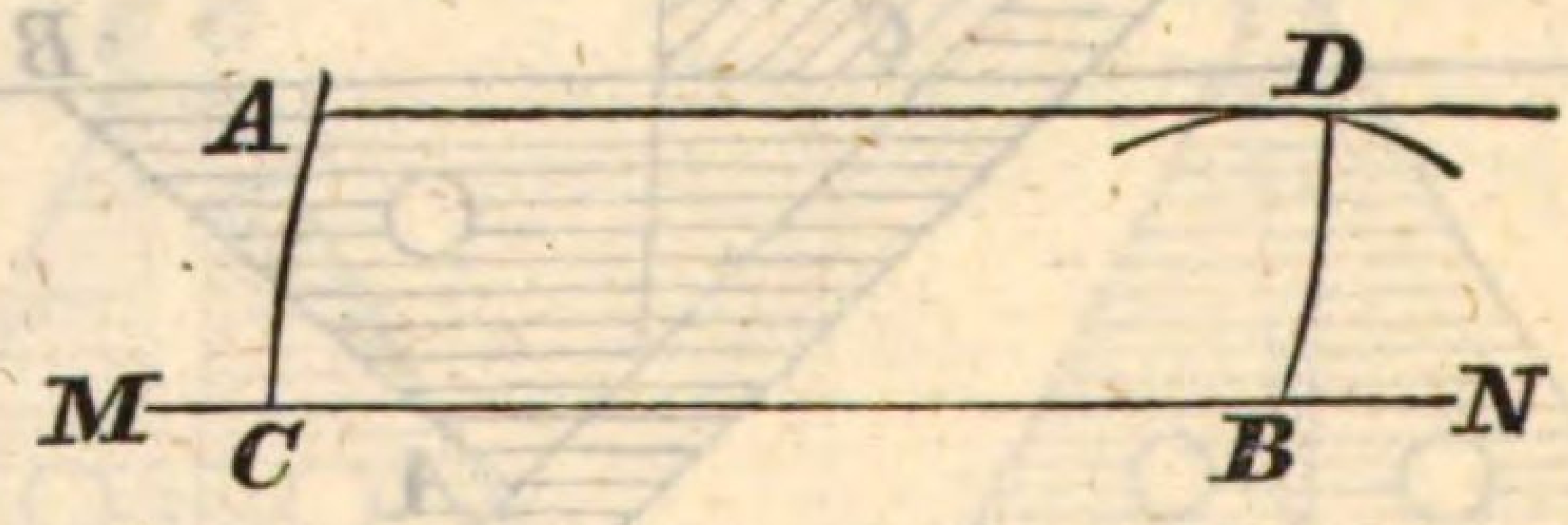
Fig. 150.



Um AB zu halbiren, beschreibe ich aus den Punkten A und B mit demselben Halbmesser von oben und unten Kreisbögen, die sich in C und D schneiden. Verbindet man C und D mit einander, so wird dadurch AB in I halbirt.

§. 151. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden eine gleichlaufende (parallele) zu ziehen.

Fig. 151.



1. Aus dem Mittelpunkte A mit einem hinreichend großen Halbmesser beschreibe ich einen Kreisbogen, der die MN in B trifft; aus B beschreibe ich mit demselben Halbmesser den Kreisbogen AC, der die MN in C trifft, und aus B endlich mit einer Zirkelöffnung = AC einen Kreisbogen, der den zuerst gezogenen in D trifft. Verbindet man nun A mit D, so ist AD gleichlaufend mit BC.

Fig. 152.



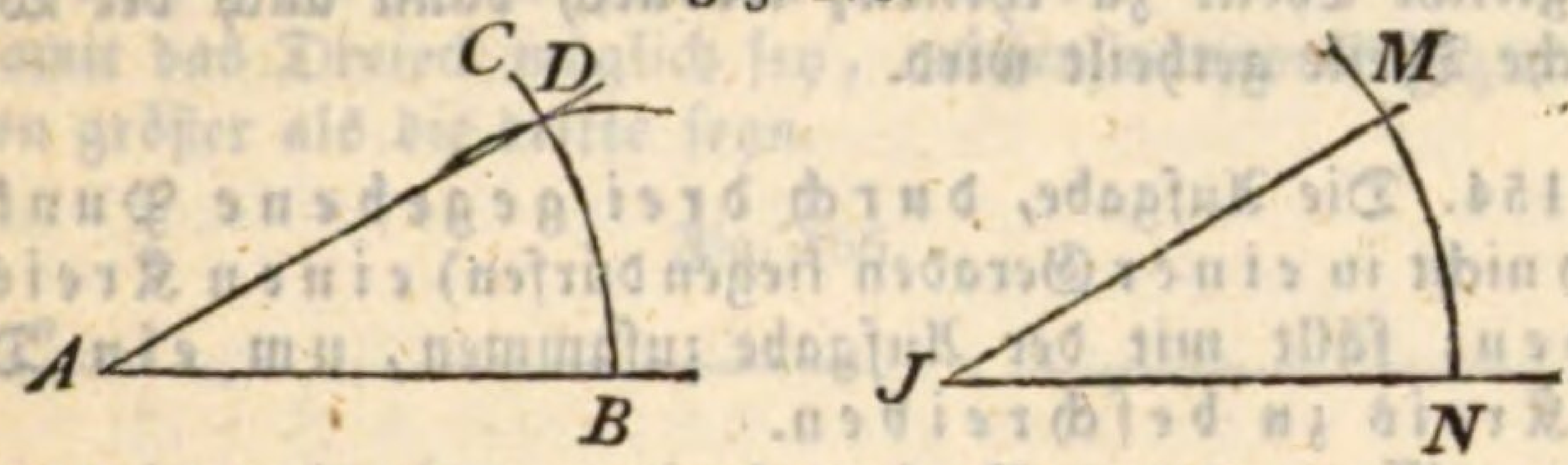
2. Aus A beschreibe man einen Kreisbogen, der die MN in B berührt, aus irgend einem Punkte C der MN mit demselben Halbmesser

wieder einen Kreisbogen. Ziehe ich nun durch A eine Gerade A D, welche diesen Kreisbogen berührt, so ist dieß die verlangte gleichlaufende Gerade.

3. Die bekannte Art und Weise mit den Paralleldreiecken.

§. 152. An einem gegebenen Punkte einer gegebenen geraden Linie einen Winkel zu verzeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Fig. 153.



Soll am Punkte A der Geraden A B ein Winkel verzeichnet werden, der dem Winkel M I N gleich ist, so beschreibe ich aus I mit einem willkürlichen Halbmesser den Bogen M N, und mit demselben Halbmesser aus A den Bogen B C; durchschneide den letzten durch einen Bogen mit der Zirkelöffnung = M N, aus dem Mittelpunkte B beschrieben, in D; verbinde D mit A, so ist D A B = M I N; denn wie man sieht, sind die Dreiecke A D B und M I N deckend gleich, sobald man M N und D B wirklich ziehet.

Fig. 154. 1.



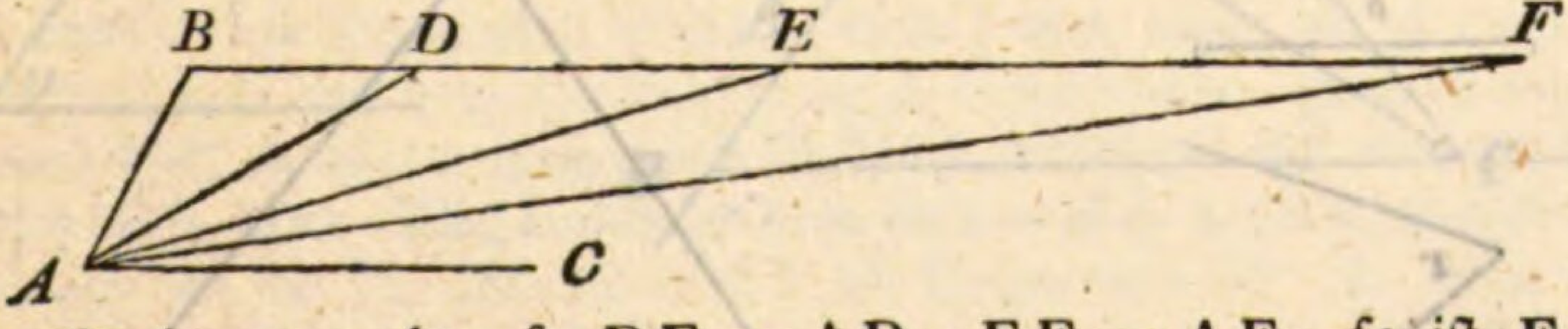
§. 153. Einen Winkel halbiren.

1. Um den Winkel M A N zu halbiren, schneide ich aus A mit derselben Zirkelöffnung A M = A N ab, und beschreibe aus M und N mit derselben Oeffnung zwei Bögen, die sich in I schneiden Die Verbindungslinie A I halbirt den Winkel M A N.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann ich einen Winkel in 4, 8, 16 u. s. w. gleiche Theile theilen.

2. Soll B A C halbirt werden, so ziehe ich durch B z. B. eine Gleichlaufende zum Schenkel A C, schneide davon B D = A B ab, ziehe A D, so ist dann B A D = D A C; denn B A D = B D A und B D A = D A C als Wechselwinkel zweier Gleichlaufenden.

2.



Macht man eben so D E = A D, E F = A E, so ist E A C = $\frac{1}{4}$ B A C; F A C = $\frac{1}{8}$ B A C u. s. w.

Ein streng geometrisches Verfahren, einen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, gibt es nicht. Da $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} + \ldots$, so könnte man wohl durch fortgesetztes Vierteln eines Winkels sich einem Drittel so nähern, als die praktische Genauigkeit nur immer verlangt, allein dieses Verfahren ist jedenfalls zu umständlich. Die Praktiker ziehen es vor, den Kreisbogen eines solchen Winkels durch Probiren in drei gleiche Theile zu theilen, wodurch dann auch der Winkel in drei gleiche Theile getheilt wird.

§. 154. Die Aufgabe, **durch drei gegebene Punkte** (die natürlich nicht in **einer** Geraden liegen dürfen) **einen Kreis zu beschreiben**, fällt mit der Aufgabe zusammen, **um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben**.

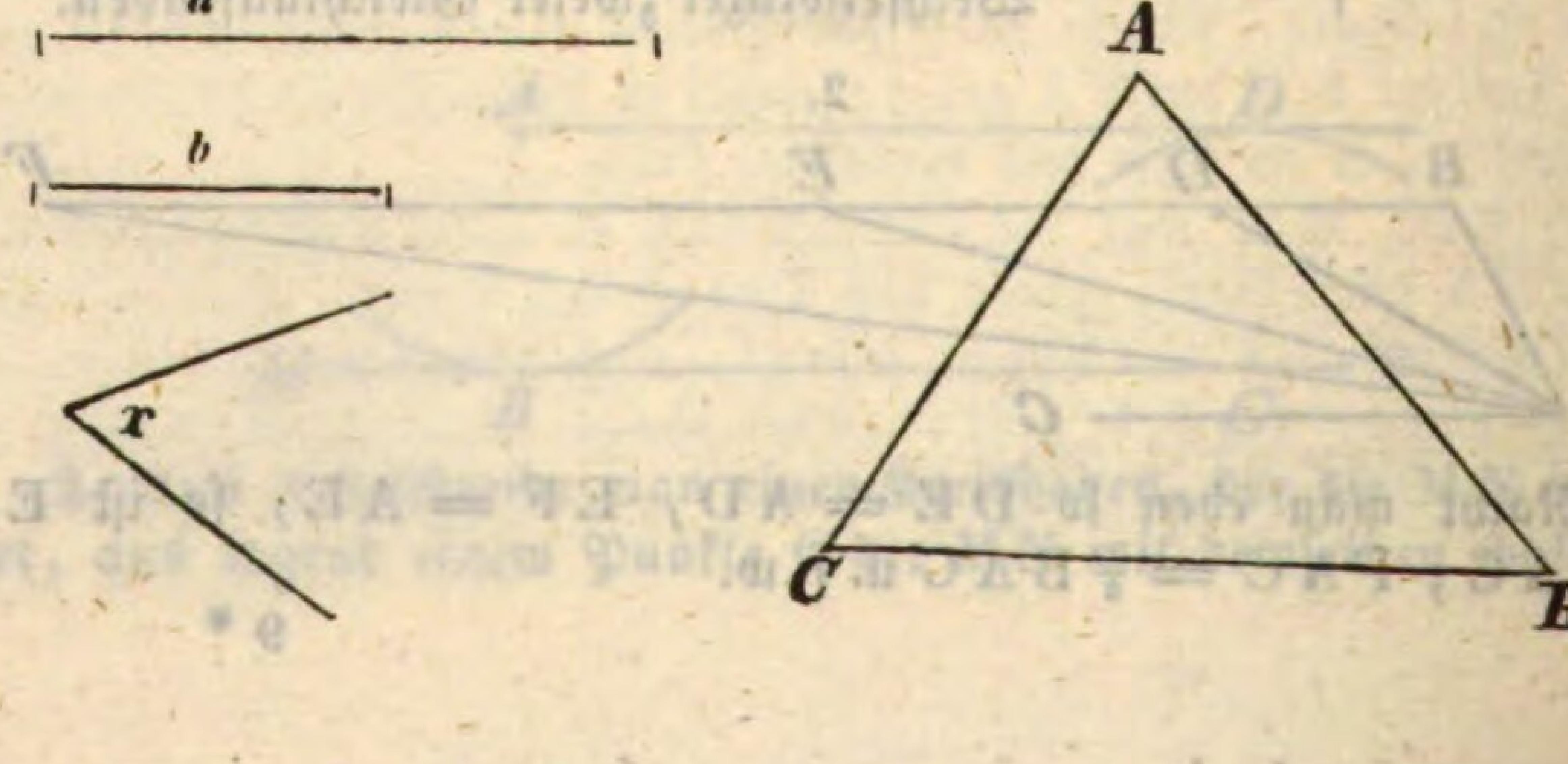
Wir wissen aus dem Vorhergehenden, daß wir deßfalls nur zwei Seiten zu halbiren brauchen, in ihren Mitten Lothe zu errichten, so ist im Durchschnittspunkte der Lothe der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, und sein Halbmesser seine Entfernung von einem Eckpunkte.

Eben so verfährt man, wenn man den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises sucht; man ziehet nämlich zwei nicht gleichlaufende Sehnen und errichtet in ihre Mitte Lothe u. s. f., da der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises der Schwerpunkt und Durchschnittspunkt der Lothe eines jeden Dreiecks nach der Theorie genau in einer geraden Linie liegen müssen, so ist die wirkliche Verzeichnung aller dieser drei Punkte ein guter Prüfstein für Anfänger in genauer Construktion.

§. 155. Aus dem Früheren wissen wir, daß, wenn man die drei Winkel eines Dreiecks halbirt, daß diese Halbirungslinien sich in einem Punkte durchschneiden, der von den Seiten gleich weit absteht. Um also **einem Dreiecke einen Kreis einzuschreiben**, wird man zwei Winkel desselben halbiren, von ihrem Durchschnittspunkte ein Loth auf eine der Seiten fällen, und mit diesem Lothe einen Kreis beschreiben, der dann der verlangte ist.

§. 156. **Ein Dreieck verzeichnen, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.**

Fig. 155.



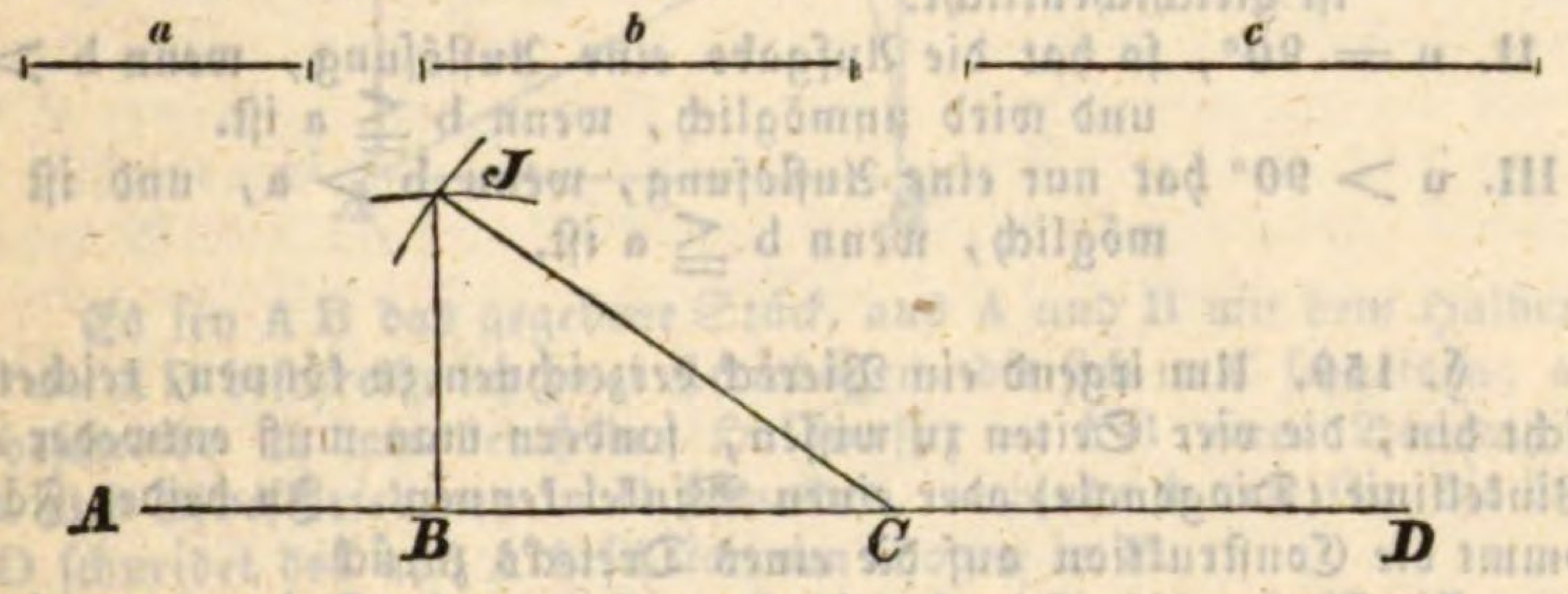
Es seyen die Stücke a und b und der Winkel x gegeben, so bilde ich mir den Winkel B A C = x, schneide A B = a und A C = b ab, verbinde B mit C, so ist A B C das verlangte Dreieck.

Ganz auf ähnliche Weise wird man die Aufgabe lösen: Ein Dreieck zu verzeichnen, wo eine Seite und zwei Winkel gegeben sind.

§. 157. Wenn die drei Seiten eines Dreiecks gegeben sind, dasselbe zu verzeichnen.

Damit das Dreieck möglich sey, müssen nothwendig zwei Seiten zusammen größer als die dritte seyn.

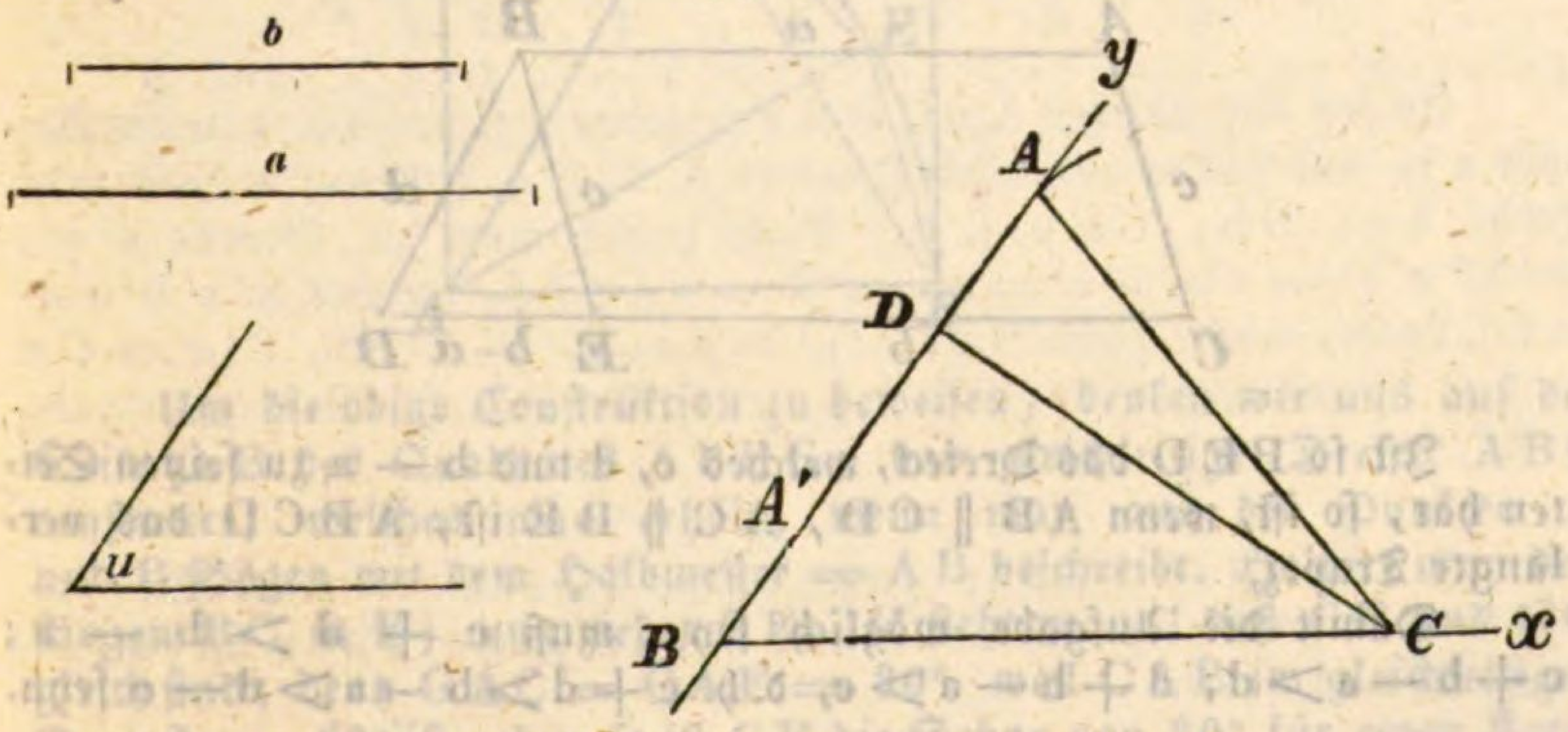
Fig. 156.



Es seyen die Stücke a, b, c gegeben; ich trage auf einer Geraden neben einander A B = a, B C = b, C D = c auf, beschreibe aus B mit dem Halbmesser A B, und aus C mit dem Halbmesser C D Kreisbögen, die sich in I schneiden. Verbinde I mit B und C, so entsteht das verlangte Dreieck.

§. 158. Aus zwei Seiten und einem dieser Seiten gegenüberstehenden Winkel das Dreieck zu verzeichnen.

Fig. 157.



Es seyen die Seiten a und b gegeben, und der gegebene Winkel u soll der Seite b gegenüberstehen. Ich verzeichne mir den Winkel x B y

gleich dem Winkel u, schneide BC = a ab, und aus dem Mittelpunkte C beschreibe ich einen Bogen mit dem Halbmesser = b, dieser schneide in A die By, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Wir müssen hier aber mehrere Fälle unterscheiden:

I. $u < 90^\circ$; fällen wir von C das Loth CD auf AB, so haben wir:
1. ist $b < CD$, so ist die Auflösung unmöglich;
2. $b = CD$, so ist das Dreieck ABC rechtwinklicht;
3. $b > CD$, so wird der aus C beschriebene Kreisbogen die By in zwei Punkten A und A′ schneiden, und man hat zwei Dreiecke, die die Aufgabe lösen;
4. $b = a$, so hat man auch nur eine Auflösung, das Dreieck ist gleichschenklicht.

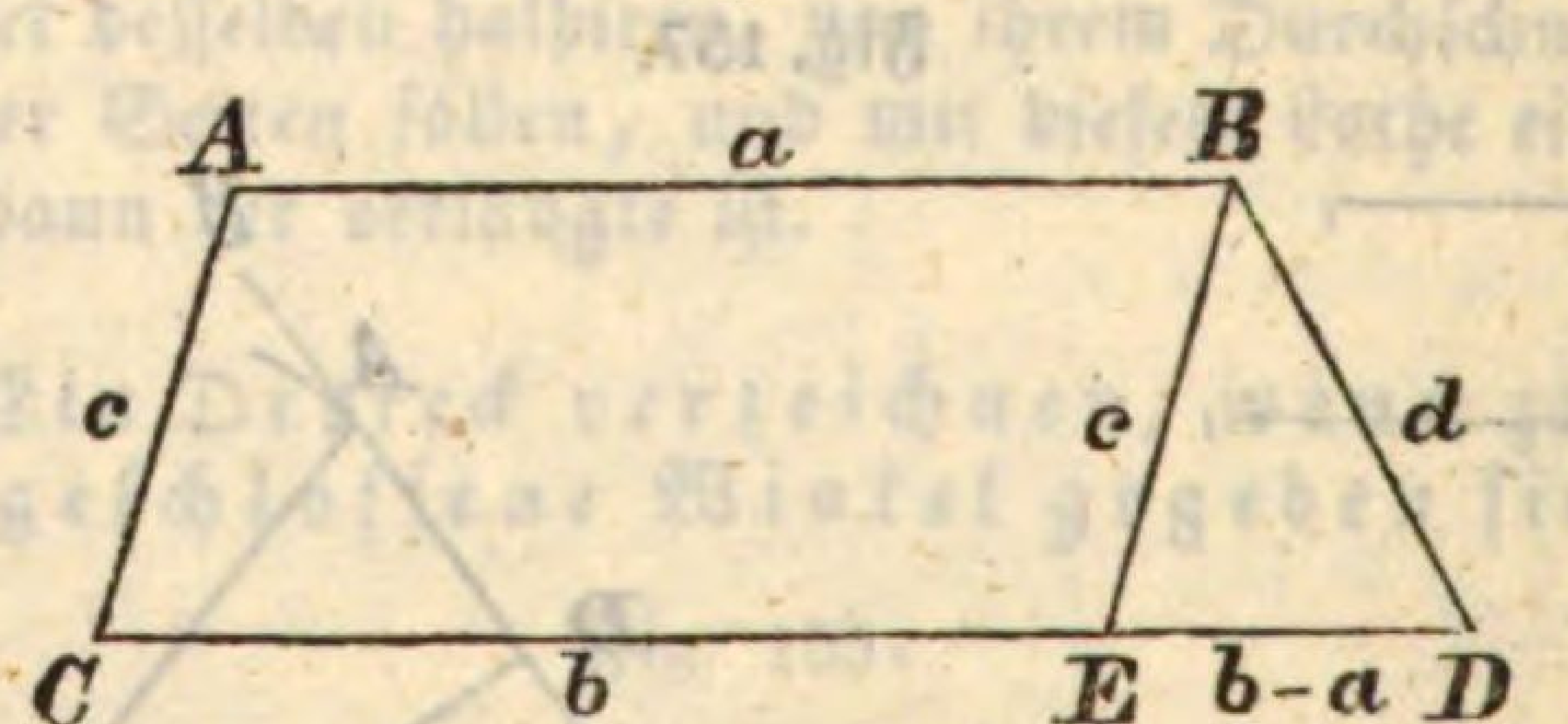
II. $u = 90^\circ$, so hat die Aufgabe eine Auflösung, wenn $b > a$, und wird unmöglich, wenn $b \leqq a$ ist.

III. $u > 90^\circ$ hat nur eine Auflösung, wenn $b > a$, und ist unmöglich, wenn $b \leqq a$ ist.

§. 159. Um irgend ein Viereck verzeichnen zu können, reichet es nicht hin, die vier Seiten zu wissen, sondern man muß entweder eine Winkellinie (Diagonale) oder einen Winkel kennen. In beiden Fällen kommt die Construktion auf die eines Dreiecks zurück.

Ein Trapez läßt sich aber bloß aus seinen vier Seiten verzeichnen. Sind nämlich a und b die gleichlaufenden, und c und d die übrigen Seiten, und ist $a < b$, und ich verzeichne mir ein Dreieck, dessen drei Seiten c, d und $b - a$ sind, so brauche ich nur diese letzte Seite zu verlängern, bis das Ganze gleich b ist, und mit den zwei Seiten c und $b - (b - a) = a$ ein (Parallelogramm) Gleicheck zu bilden, um die Aufgabe gelöset zu haben.

Fig. 158.



Ist so BED das Dreieck, welches c, d und $b - a$ zu seinen Seiten hat, so ist, wenn $AB \parallel CD$, $AC \parallel BE$ ist, ABCD das verlangte Trapez.

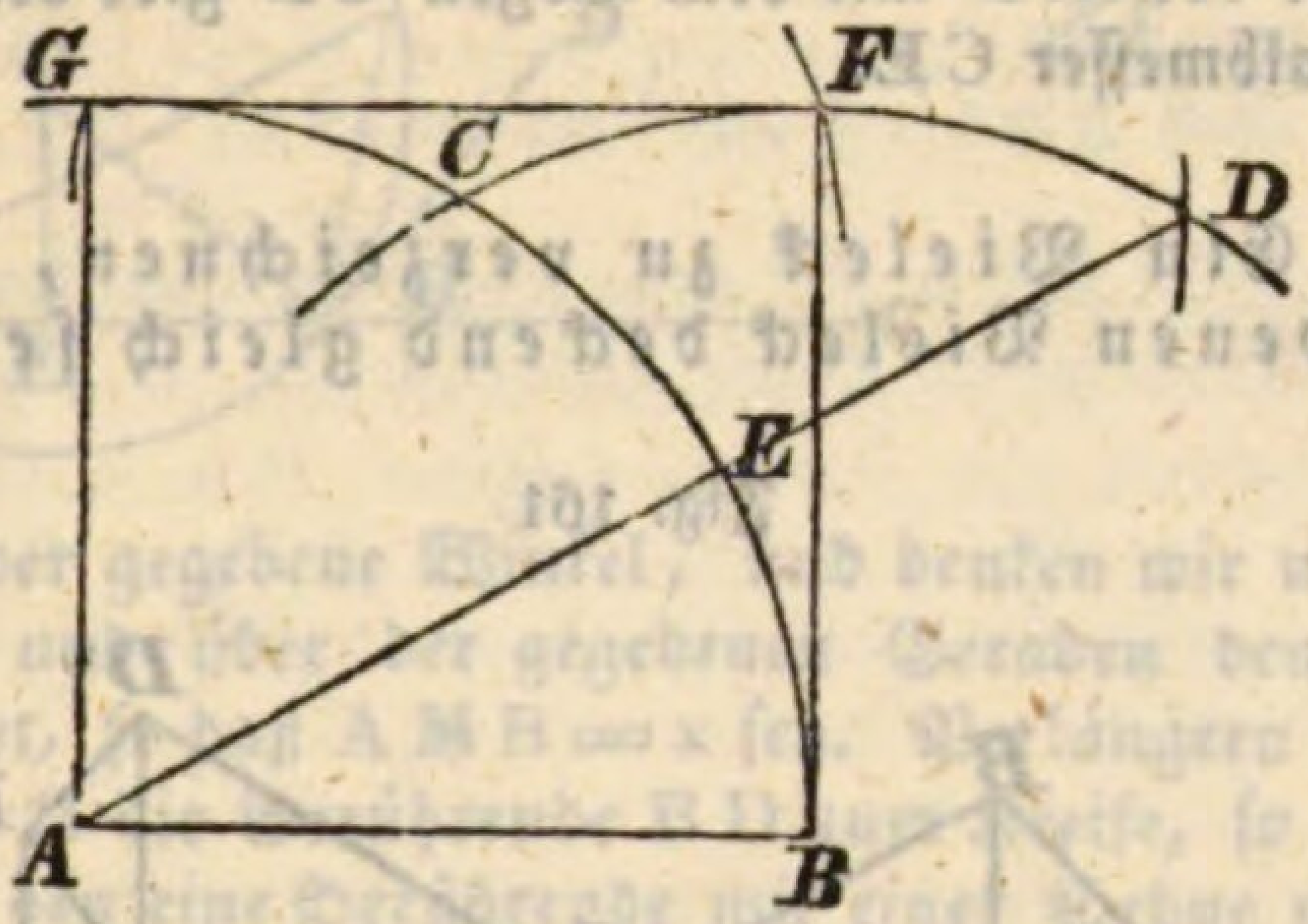
Damit die Aufgabe möglich sey, muß $c + d > b - a$; $c + b - a > d$; $d + b - a > c$, d. h. $c + d > b - a > d - c$ seyn.

§. 160. Auf einer gegebenen Seite ein Quadrat zu construiren.

1. Man errichtet in den Endpunkten des gegebenen Stückes Lothe, die dem Stücke gleich sind, und verbindet die andern zwei Endpunkte.

2. Schärfer und genauer wird die Zeichnung auf folgende Art:

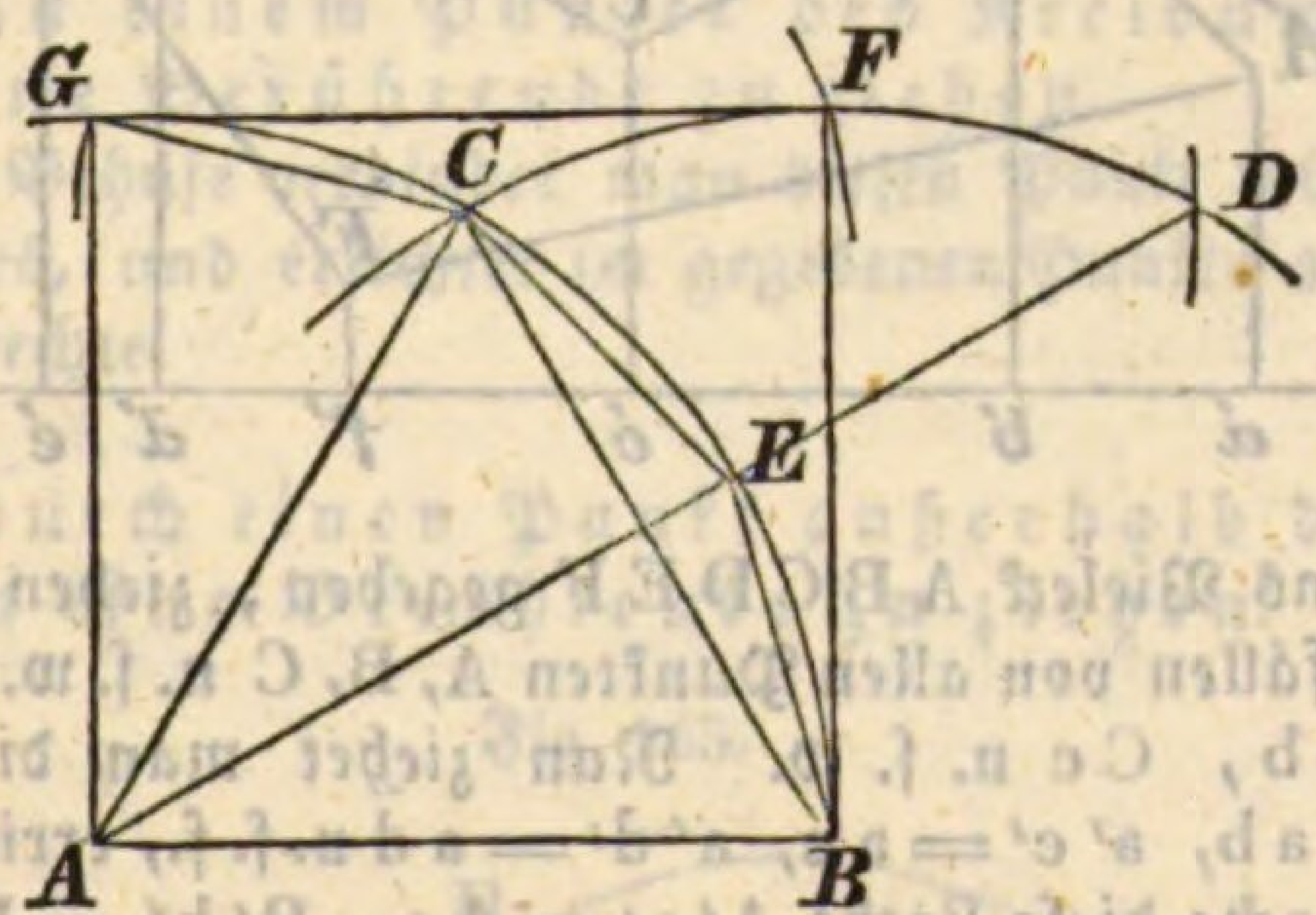
Fig. 159.



Es sey AB das gegebene Stück, aus A und B mit dem Halbmesser = AB beschreibe ich zwei Kreisbögen, die sich in C schneiden; aus C beschreibe ich mit demselben Halbmesser = AB einen Bogen, der den aus B beschriebenen in D schneidet, verbinde A mit D; die Linie AD schneidet den aus A beschriebenen Bogen in E.

Aus C beschreibe ich einen Kreisbogen mit dem Halbmesser CE, der die aus A und B beschriebenen Bögen in G und F trifft. Es sind nun F und G die zwei andern Eckpunkte des verlangten Quadrats.

Fig. 160.



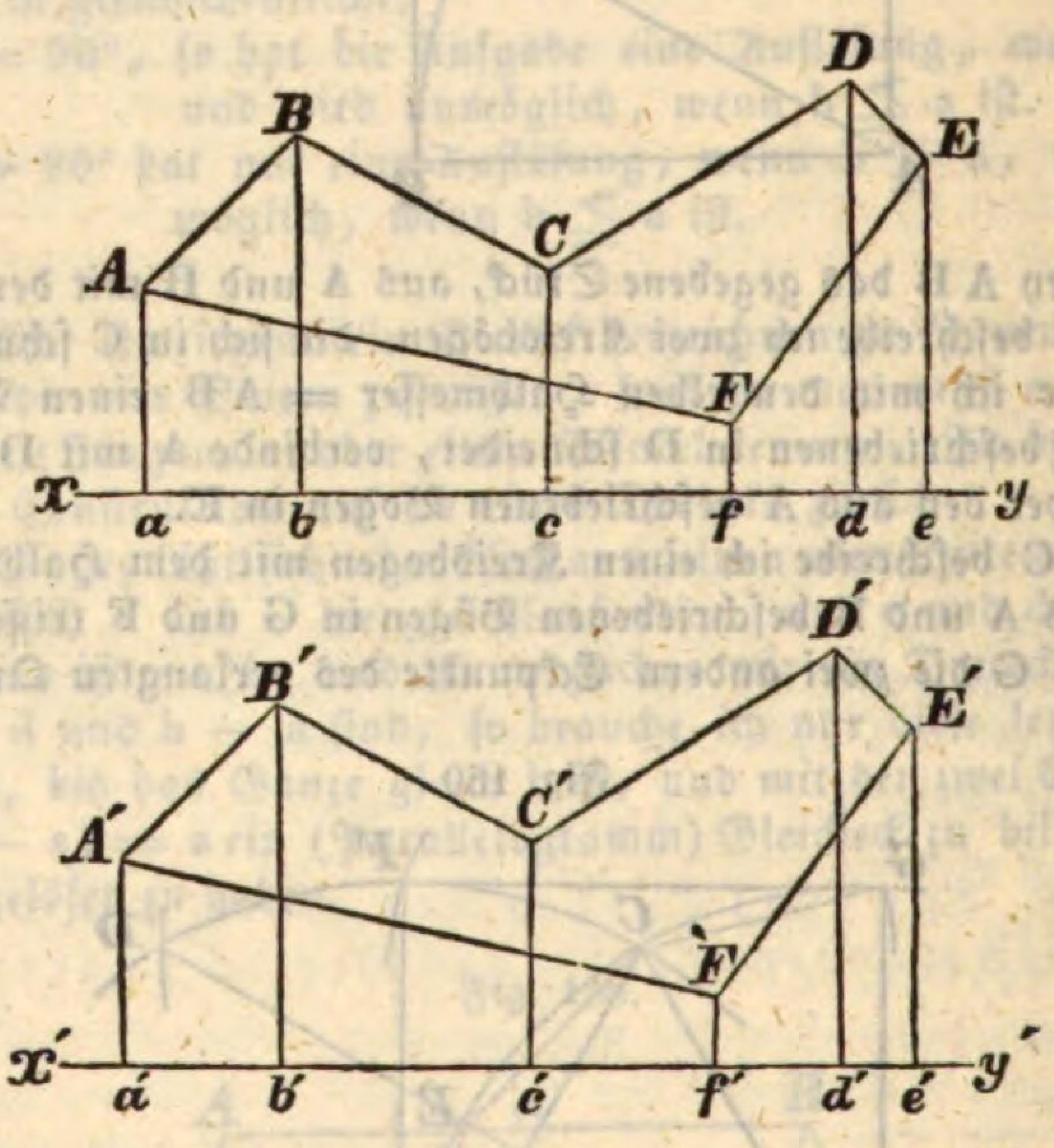
Um die obige Construktion zu beweisen, denken wir uns auf der Seite AB des Quadrates ABFG, das gleichseitige Dreieck ABC construirt, welches man erhält, wenn man aus den Punkten A und B Bögen mit dem Halbmesser = AB beschreibt. Halbirt man den Bogen BC in E, und ziehet CE, so sieht man, daß CE und CG gleich sind; denn GAC = CAE = 30°, weil CAB im gleichseitigen Dreiecke = 60° ist, eben so ist CF die Sehne von 30° für einen Kreis vom selben Halbmesser. Beschreibt man also von C mit dem Halbmesser CE einen Kreis, so muß er durch F und G durchgehen, welche

Punkte zugleich in den Bögen liegen, die aus B und A mit dem Halbmesser = AB beschrieben werden.

Durch obige Construktion findet man also zuerst die Spitze des gleichseitigen Dreiecks C, halbirt dann den Winkel CAB durch AD, der Durchschnitt von AD mit dem Bogen CB gibt den Punkt E, und dadurch den Halbmesser CE.

§. 161. **Ein Vieleck zu verzeichnen, welches mit einem gegebenen Vieleck deckend gleich seyn soll.**

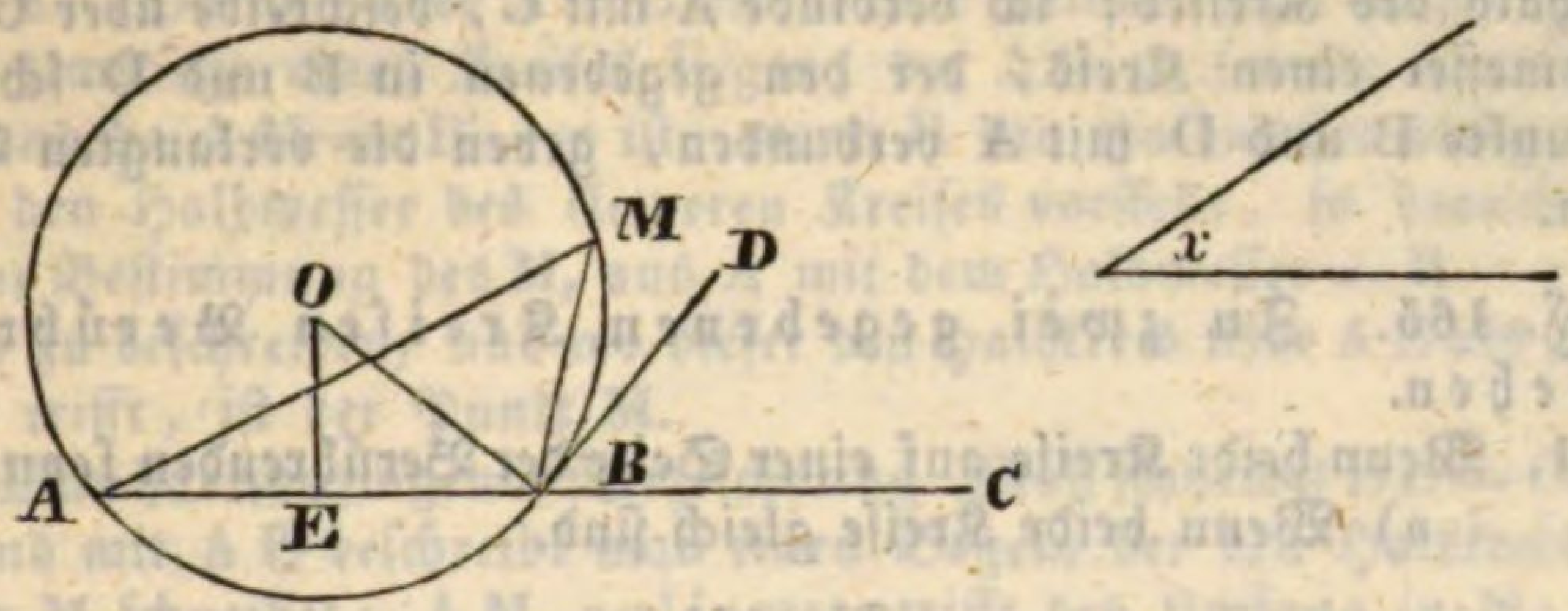
Fig. 161.



Es sey das Vieleck ABCDEF gegeben; ziehen wir nun die Gerade x y, und fällen von allen Punkten A, B, C u. s. w. auf diese Gerade Lothe Aa, Bb, Cc u. s. w. Nun ziehet man die Gerade x′ y′, macht a′b′ = ab, a′c′ = ac, a′d′ = ad u. s. f., errichte in a′b′c′d′ u. s. f. Lothe, mache diese Lothe A′a′ = Aa, B′b′ = Bb, C′c′ = Cc u. s. f. Verbindet A′B′C′ u. s. f. durch Gerade, so ist die Aufgabe gelöst.

§. 162. **Ueber eine gegebene Gerade einen Kreisabschnitt zu verzeichnen, der einen gegebenen Winkel enthalten soll.**

Fig. 162



Es sey x der gegebene Winkel, und denken wir uns die Aufgabe bereits gelöset, und über der gegebenen Geraden den Kreisabschnitt A M B verzeichnet, so daß A M B = x sey. Verlängern wir A B bis C, und ziehen durch B die Berührende B D zum Kreise, so ist, da bekanntlich der Winkel, den eine Berührende mit einer Sehne macht, den halben eingeschlossenen Bogen zum Maße hat, M B D = M A B, und daher D B C = A M B.

Um also über A B einen Kreisabschnitt, der einen Winkel = x enthalte, zu verzeichnen, verfahre ich folgender Maßen:

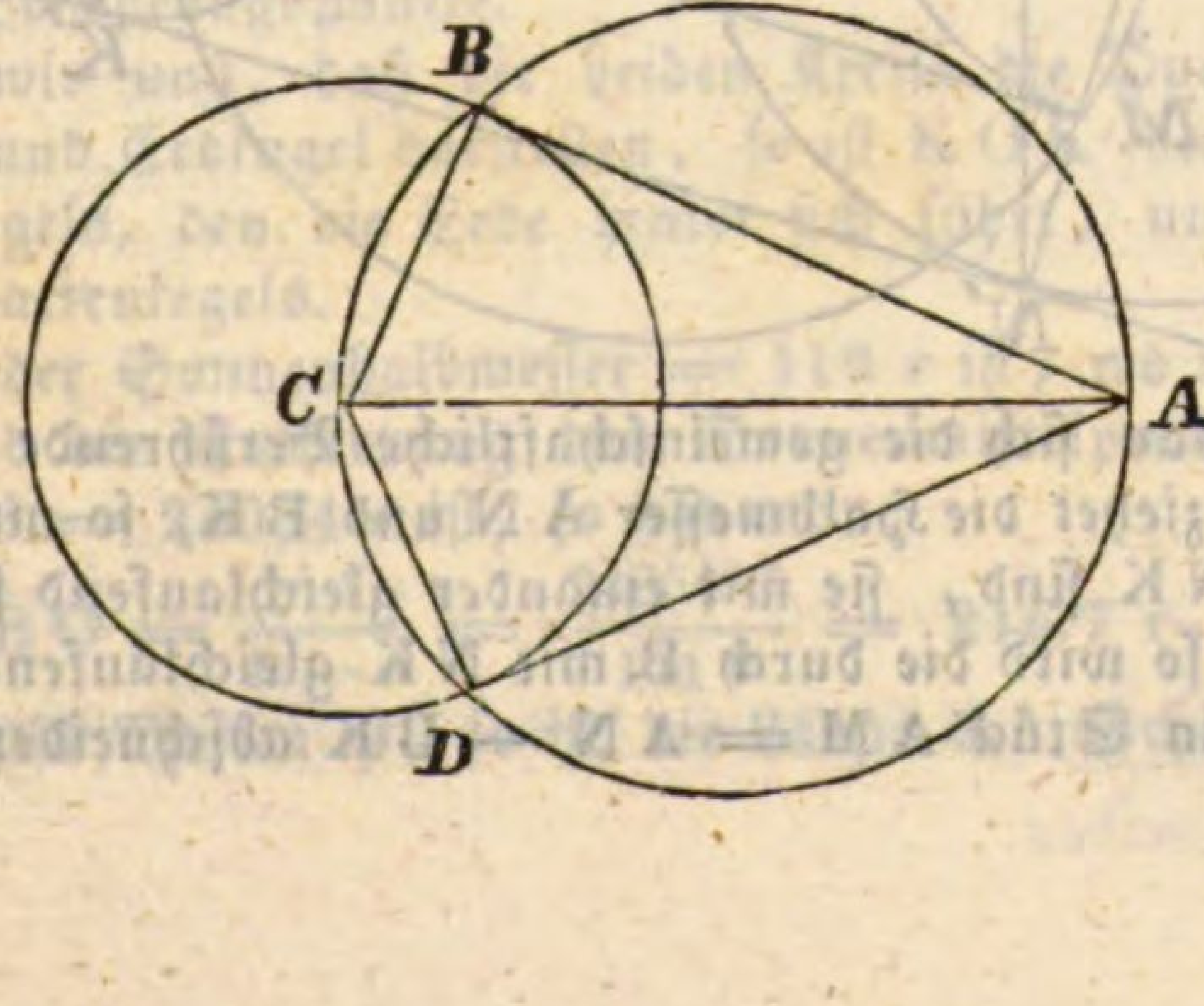
Man verlängere die gegebene A B, im Punkte B macht man den Winkel D B C = x, errichtet in B ein Loth auf B D, und eben so in der Mitte E der A B ein Loth auf A B, beide Lothe schneiden sich in O, aus O mit dem Halbmesser O A beschreibt man den verlangten Kreisbogen.

§. 163. In einem Punkte des Kreisumfanges zu demselben eine Berührende zu ziehen.

Zu diesem Behufe verbindet man diesen Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises, und errichtet im gegebenen Punkte auf dem Halbmesser eine Lothrechte.

§. 164. Durch einen Punkt außerhalb des Kreises zu demselben eine Berührende zu ziehen.

Fig. 163.



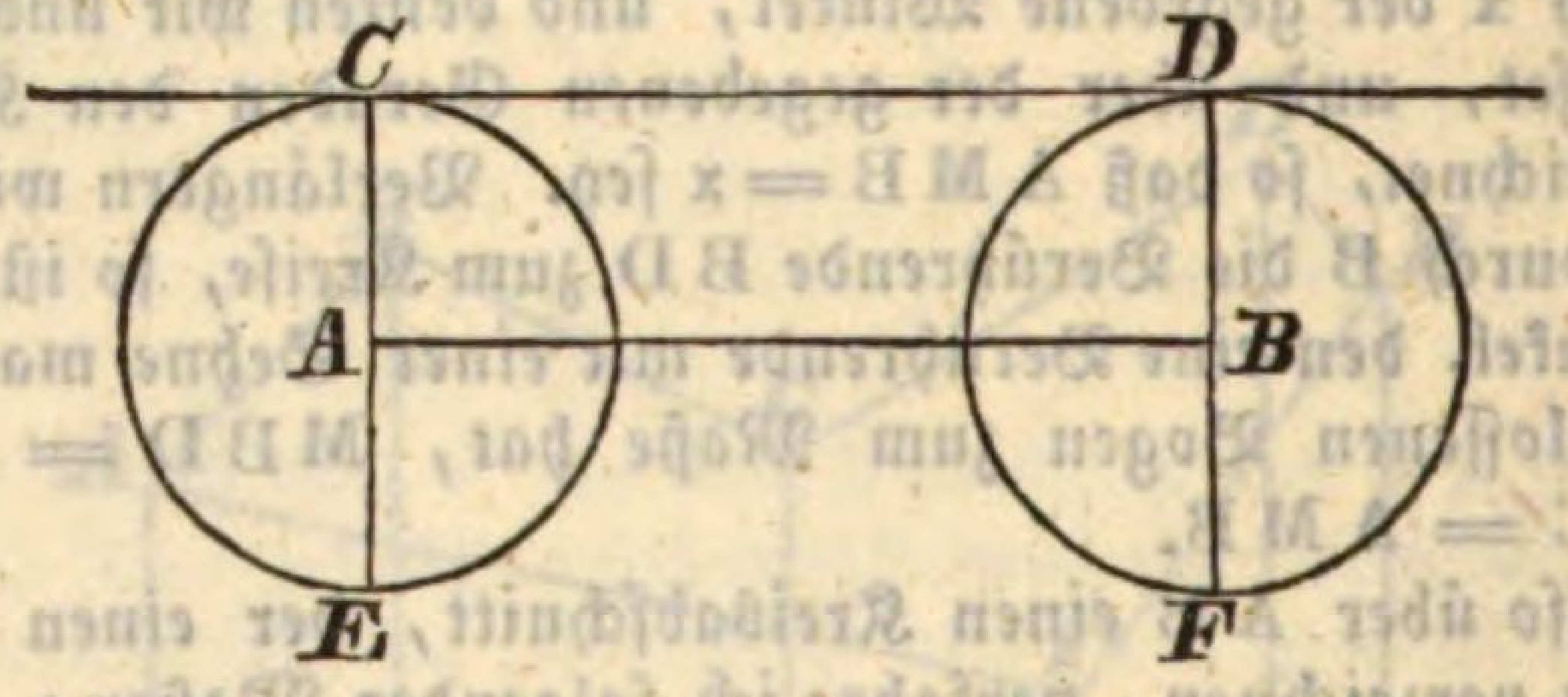
Es sey der Kreis aus dem Mittelpunkte C, und der Punkt A außerhalb des Kreises; ich verbinde A mit C, beschreibe über C A als Durchmesser einen Kreis, der den gegebenen in B und D schneidet, die Punkte B und D mit A verbunden, geben die verlangten Berührenden.

§. 165. Zu zwei gegebenen Kreisen Berührende zu ziehen.

1. Wenn beide Kreise auf einer Seite der Berührenden seyn sollen.

a) Wenn beide Kreise gleich sind.

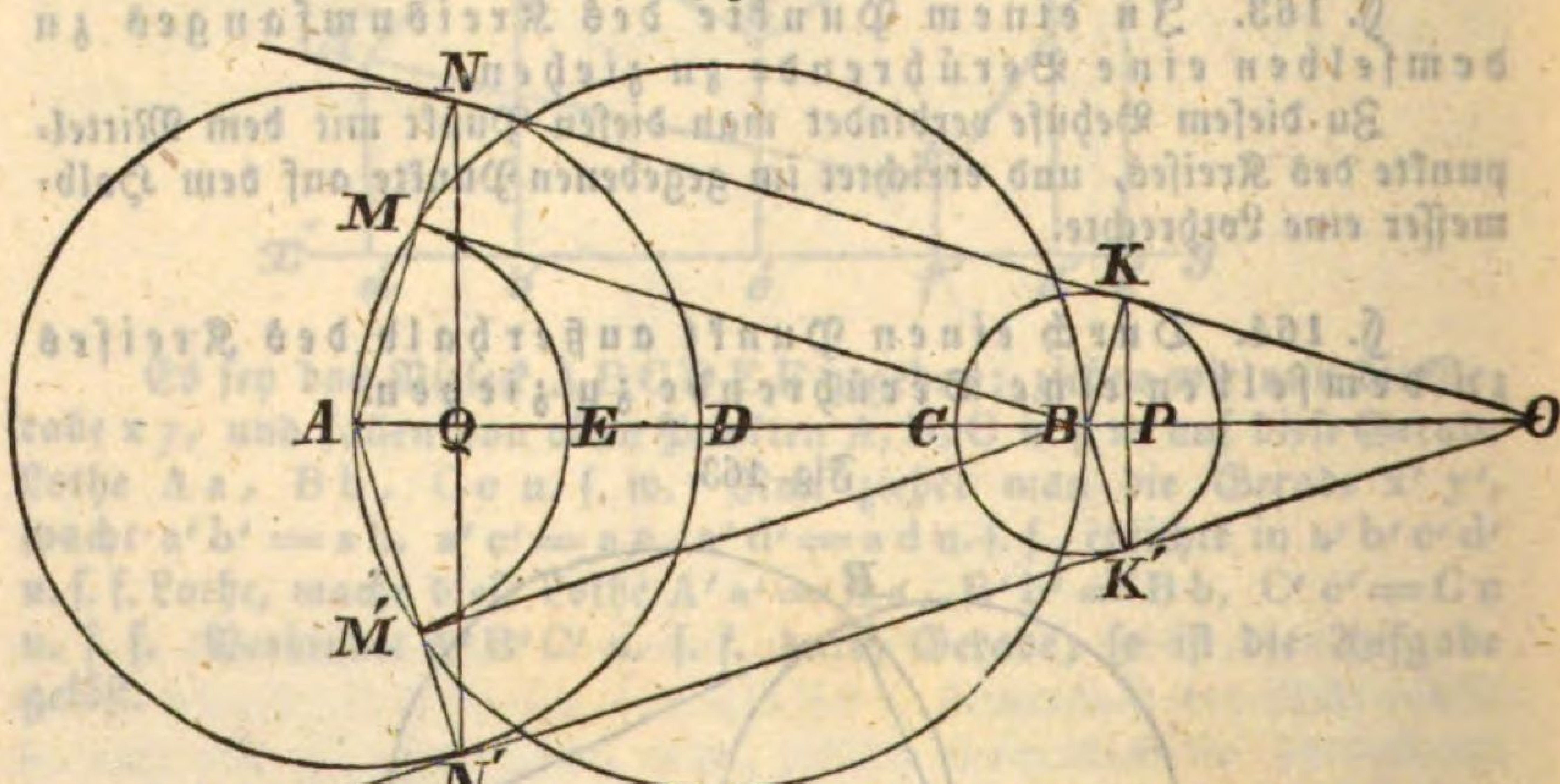
Fig. 164.



Ich ziehe AB, errichte in A und B die lothrechten Halbmesser AC und BD auf AB, verbinde C und D, so ist CD die verlangte Berührende. Verlängere ich CA und BD nach abwärts bis an die Umfänge in E und F, so ist EF eine zweite Berührende.

b) Wenn die beiden Kreise ungleich sind.

Fig. 165.



Denkt man sich die gemeinschaftliche Berührende N K an beiden Kreisen, und ziehet die Halbmesser A N und B K, so müßten, da beide senkrecht auf N K sind, sie mit einander gleichlaufend seyn. Da nun A N > B K, so wird die durch B mit N K gleichlaufend gezogene B M von der A N ein Stück A M = A N — B K abschneiden. Es handelt

sich also zur Lösung der Aufgabe lediglich darum, den Punkt M zu bestimmen. Da nun aber A M B ein rechter Winkel seyn muß, so muß M im Umfange eines Kreises liegen, der A B zu seinem Durchmesser hat, und da A M = R — r ist, wenn R den Halbmesser des größeren und r den Halbmesser des kleineren Kreises vorstellt, so braucht man nur zur Bestimmung des M, aus A mit dem Halbmesser = R — r einen Bogen zu beschreiben, und wo dieser den Halbkreis über A B als Durchmesser trifft, ist der Punkt M.

Man hat also folgende Verzeichnung. Man schneidet DE = CB = r ab, und mit A E beschreibt man einen Bogen, der den Halbkreis über A B in M schneidet; A M, verlängert, trifft den Umfang in N; ziehet man nun durch N die N K gleichlaufend mit B M, so berührt diese Gerade beide Kreise. Was der Punkt M für die obere ist, das ist der Punkt M′ für die untere, daher wir auch unten eine Berührende haben. Die N K verlängert schneidet die Mittelpunktlinie in O. Man sieht leicht ein, daß die Dreiecke M A B und K B O mit einander ähnlich sind. Man hat, wenn A B = d genannt wird, $\frac{R-r}{d} = \frac{r}{BO}$; daher

$$BO = \frac{rd}{R-r} \text{ und } AO = \frac{Rd}{R-r}.$$

Da man dieselben Werthe für A O und B O aus den unteren Dreiecken M′ A B und K′ B O erhält, so schneidet die Gerade N′ K′ die Mittelpunktslinie in demselben Punkte O, wie die obere Berührende N K.

Die Ausdrücke $AO = \frac{Rd}{R-r}$, $BO = \frac{rd}{R-r}$ werden für R = r unendlich groß, was so viel heißt, als N K und N′ K′ gleichlaufend, was der erste Fall hier ist.

Da die Geraden N N′ und K K′ die Mittelpunktlinie senkrecht in Q und P treffen, so könnte man auch die Punkte N, N′, K, K′ so bestimmen, daß man die Größe von A Q und B P berechnet. Nun ist

$$AN^2 = AQ \,.\, AO \text{ und } BK^2 = BP \,.\, BO,$$

$$\text{woraus } AQ = \frac{R(R-r)}{d}\,;\; BP = \frac{r(R-r)}{d}.$$

Berechnet man nun und schneidet nach diesen Formeln A Q und B P ab, und errichtet in den Punkten P und Q senkrechte Sehnen, so erhält man die vier Berührungspunkte.

Denken wir uns, daß die beiden Kreise die Durchschnitte der Sonnenkugel und Erdkugel darstellen, so ist K O K′ der Durchschnitt des Schattenkegels, den die Erde hinter sich führt, und B O ist die Länge des Schattenkegels.

Da nun der Sonnenhalbmesser = 112 r ist, wo r der Erdhalbmesser ist, und die Entfernung des Sonnenmittelpunktes und Erdmittelpunktes d = 24054 r ist, so hat man:

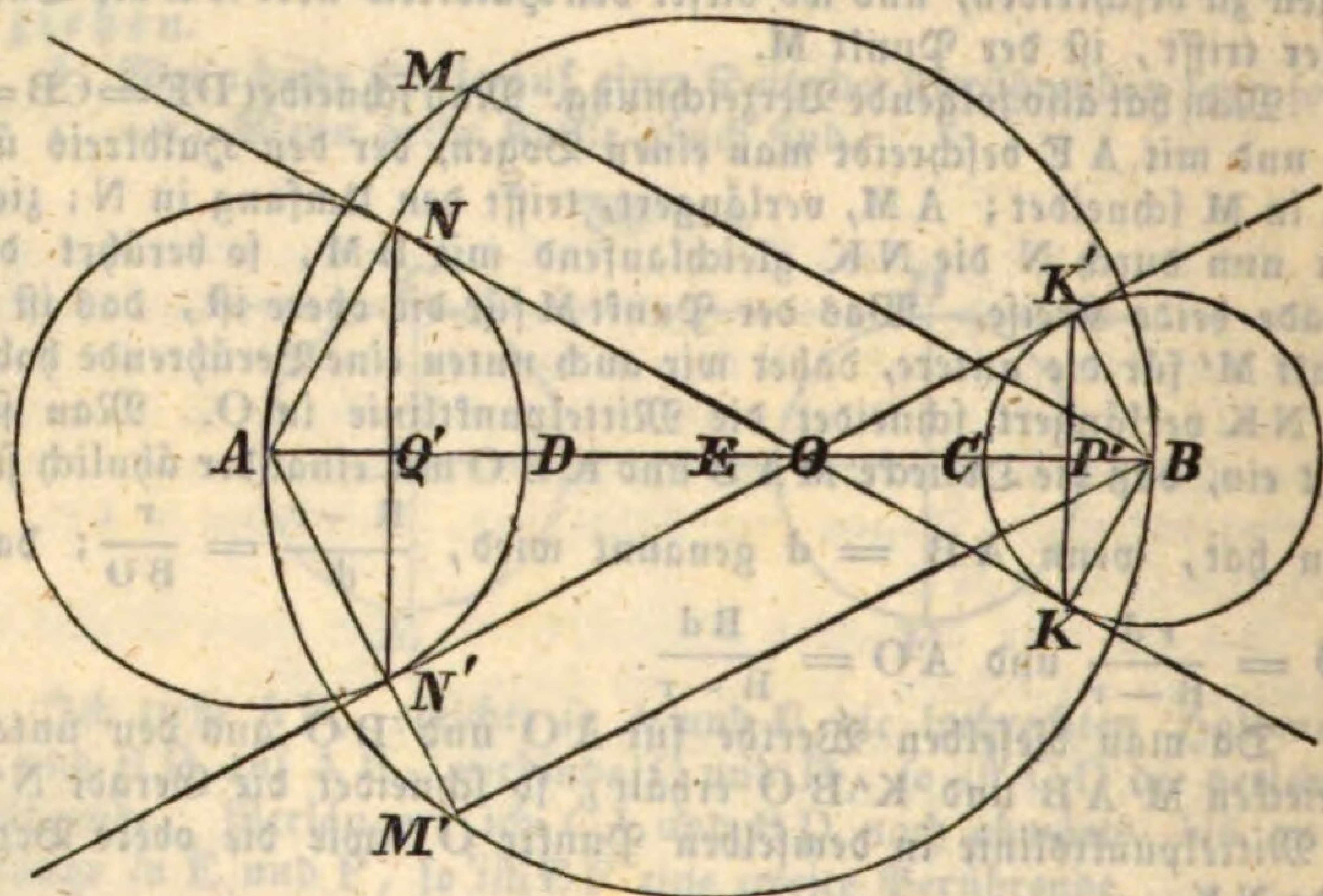
$$BO = \frac{rd}{R-r} = \frac{24054\,r^2}{111\,r} = 216{'}7\,r,$$

da nun r = 864 Meilen ist, so ist die Länge des Schattenkegels der

Erde 187231 Meilen; da nun der Mond nahe 52000 Meilen von der Erde entfernt ist, so wird er jederzeit, sobald die Erde gerade zwischen Sonne und Mond in einer geraden Linie zu stehen kommt, verfinstert.

2. **Wenn beide Kreise auf verschiedener Seite berührt werden sollen.**

Fig. 166.



Um die Verzeichnung finden zu können, denken wir uns die Aufgabe gelöset, und NK die verlangte Berührende; die beiden Halbmesser AN und BK sind auf NK senkrecht, also gleichlaufend mit einander; verlängert man AN, und ziehet durch B die BM gleichlaufend mit NK, so wird dadurch der Punkt M bestimmt; da AMB $= 90°$ ist, so muß M in dem Halbkreise liegen, der über der Geraden AB als Durchmesser beschrieben ist; da nun $AM = AN + NM = R + r$ ist, so ist dadurch der Punkt M bestimmt, und wir haben folgende Auflösung unserer Aufgabe:

Ueber AB als Durchmesser beschreibe man einen Halbkreis, aus A, mit dem Halbmesser $R + r$ durchschneide man diesen Halbkreis in M; A mit M verbunden gibt den Durchschnitt N; die Berührende des Kreises in N berühret auch den andern Kreis. Dieselbe Verzeichnung läßt sich auf der andern Seite eben so gut machen, und gibt eine zweite Berührende N′K′. Wir wollen nun nachweisen, daß beide Berührenden sich in demselben Punkte der Mittelpunktlinie schneiden.

Da ANO ∼ BAM, so hat man $\frac{AO}{AB} = \frac{AN}{AM}$; $\frac{AO}{d} = \frac{R}{R+r}$, also $AO = \frac{dR}{R+r}$.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AN′O und AM′B folgt ebenfalls $AO = \frac{dR}{R+r}$ als Beweis, daß beide Berührenden in demselben Punkte sich schneiden.

Es ist $BOK \sim ANO$, daher

$$\frac{BO}{r} = \frac{AO}{R};\ BO = \frac{r}{R} \,.\, AO = \frac{d\,r}{R+r}.$$

Es ist ferner $R^2 = AQ' \,.\, AO$; $r^2 = BP' \,.\, BO$, daher

$$R^2 = AQ' \,.\, \frac{R\,d}{R+r};\ r^2 = BP' \,.\, \frac{r\,d}{R+r},$$ somit also:

$$AQ' = \frac{R\,(R+r)}{d};\ BP' = \frac{r\,(R+r)}{d}.$$

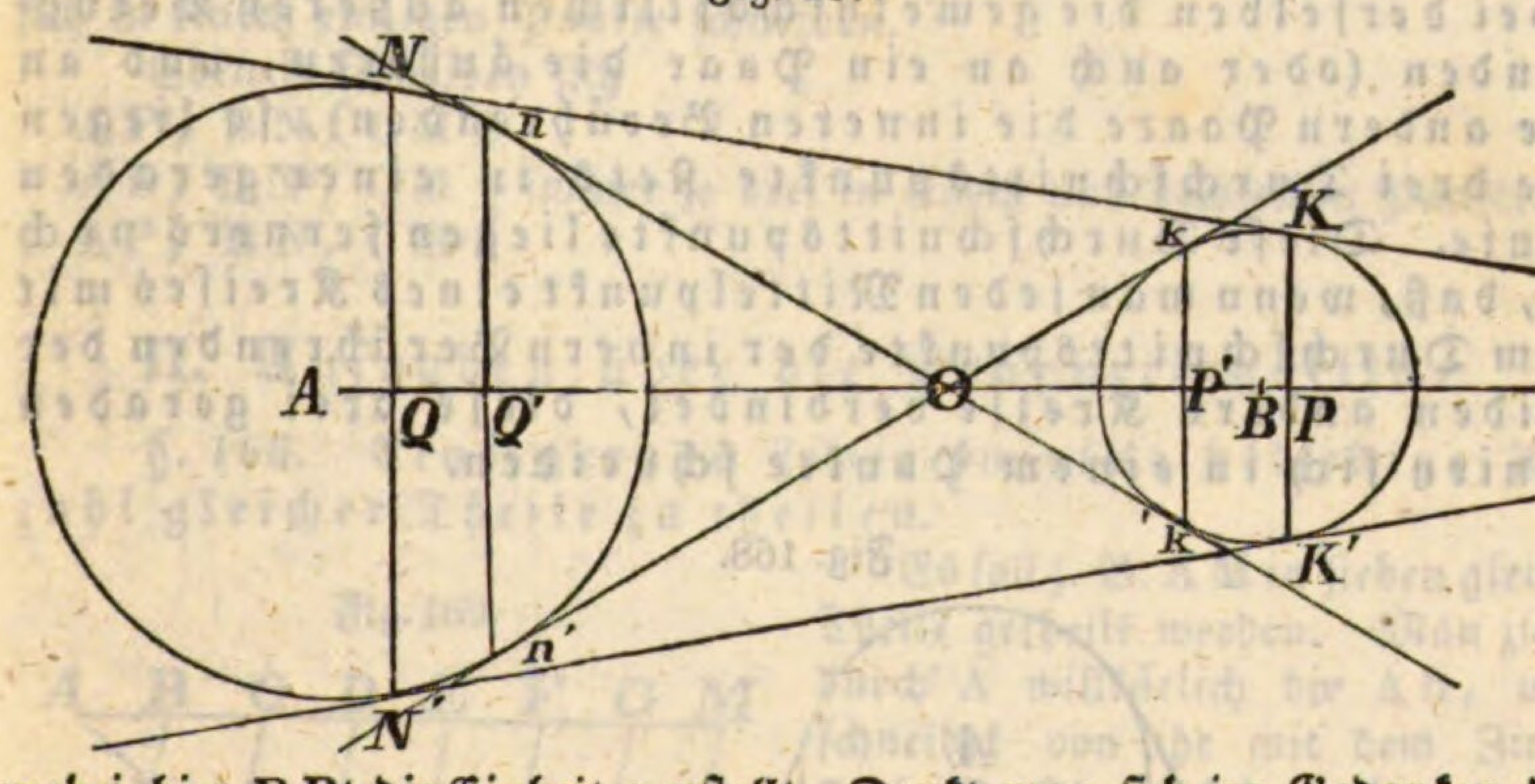
Berechnet man diese Werthe und schneidet sie im gehörigen Sinne von der Mittelpunktlinie ab, so braucht man nur in Q' und P' lothrechte Sehnen zu errichten, um die betreffenden vier Berührungspunkte zu erhalten.

Im Vorhergehenden 1, b waren P und Q die Fußpunkte der Lothe von den Berührungspunkten der äußeren Berührenden, in 2. sind P' und Q' die Fußpunkte der Lothe von den Berührungspunkten der inneren Berührenden; stellen wir die Werthe für die Entfernungen der Berührungssehnen zusammen, so haben wir:

$$AQ = \frac{R\,(R-r)}{d};\ BP = \frac{r\,(R-r)}{d};\ AQ' = \frac{R\,(R+r)}{d};\ BP' = \frac{r\,(R+r)}{d}.$$

Es sey nun für einen bestimmten Fall $R = 4$; $r = 2$; $d = 12$, so hat man $AQ = \frac{2}{3}$; $BP = \frac{1}{3}$; $AQ' = 2$; $BP' = 1$; und somit folgende Verzeichnung,

Fig. 167.



wobei hier BP' die Einheit vorstellt. Denkt man sich im Gedanken die Berührungspunkte mit dem Mittelpunkte verbunden, so findet man $KP^2 = r^2 - BP^2$; $AP = d + BP$; $AP^2 = d^2 + 2\,d \,.\, BP + BP^2$, somit $AK^2 = KP^2 + AP^2 = d^2 + 2\,d \,.\, BP + r^2$; daher:

$$AK^2 = d^2 + 2\,r\,(R-r) + r^2 = d^2 + 2\,R\,r - r^2.$$

Eben so

$$kP'^2 = r^2 - BP'^2;\ \overline{AP'} = d - BP';\ \overline{AP'}^2 = d^2 - 2\,d \,.\, BP' + \overline{BP'}^2;$$

daher $A\,k^2 = d^2 - 2\,R\,r - r^2$.

Eben so

$$NQ^2 = R^2 - AQ^2;\ BQ = d - AQ;\ BQ^2 = d^2 - 2\,d \,.\, AQ + AQ^2;$$

$BN^2 = NQ^2 + BQ^2 = d^2 - 2R(R - r) + R^2 = d^2 + 2Rr - R^2$; und eben so $Bn^2 = d^2 - 2Rr - R^2$.

Berechnet man nun die Werthe von AK, Ak, BN, Bn, so braucht man nur aus den Mittelpunkten A und B mit den entsprechenden Werthen Bögen zu beschreiben, so erhält man alle acht Berührungspunkte, wovon je zwei zusammengehörende mit einander verbunden, die verlangten Berührungslinien geben. Man hat dabei den Vortheil, daß man durch Rechnung mehrere Verzeichnungen erspart, und daher wenigern Fehlern unterworfen ist.

Für unsern Fall aber hat man $R = 4$; $r = 2$; $d = 12$, daher

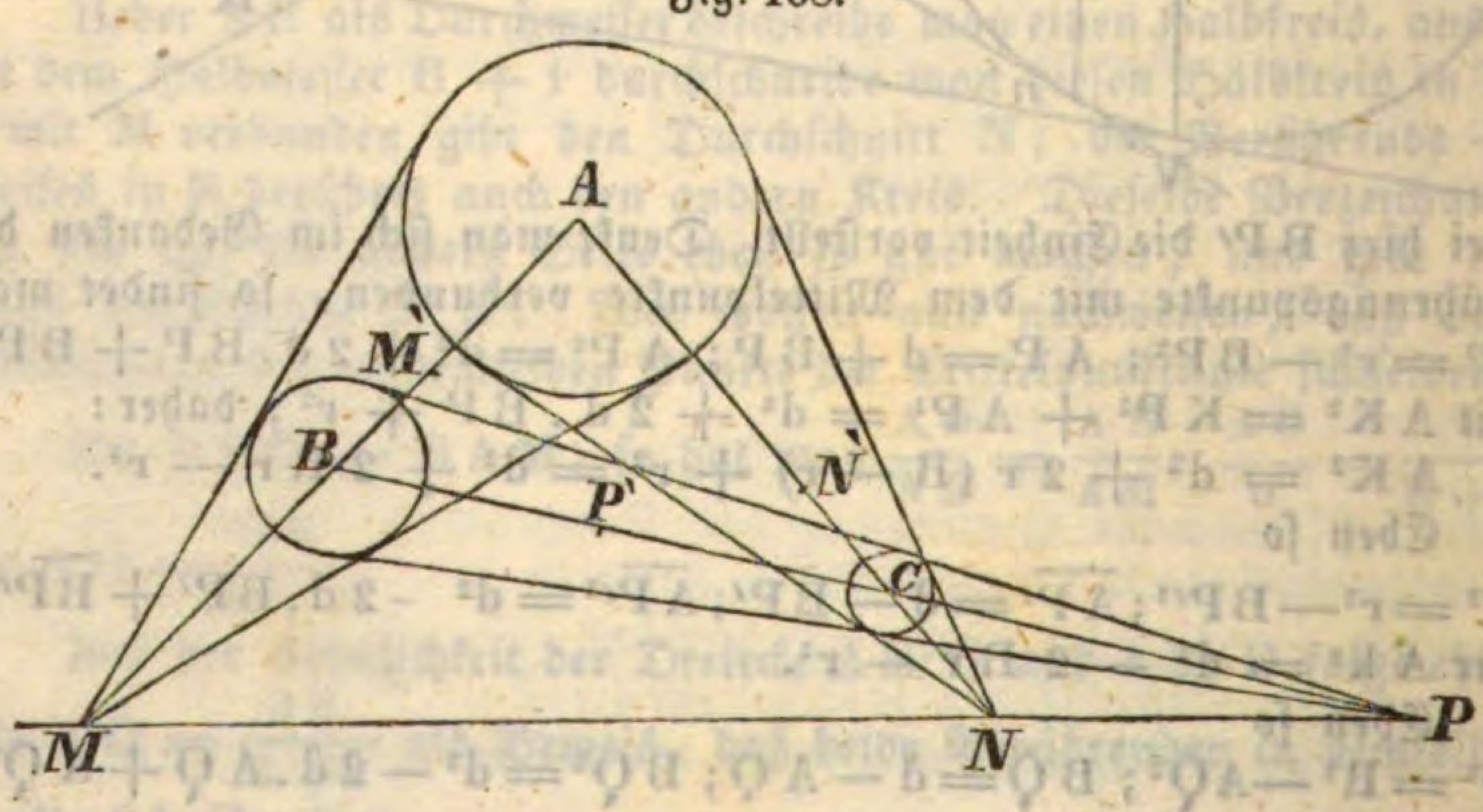
$$AK^2 = 144 + 16 - 4 = 156;\quad AK = 12{\cdot}49$$
$$Ak^2 = 144 - 16 - 4 = 124;\quad Ak = 11{\cdot}14$$
$$BN^2 = 144 + 16 - 16 = 144;\quad BN = 12$$
$$Bn^2 = 144 - 16 - 16 = 112;\quad Bn = 10{\cdot}58.$$

Beschreibt man also aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser 12·49 und 11.14 Bögen, so erhält man die vier Punkte des Kreises aus dem Mittelpunkte B, und beschreibt man aus dem Mittelpunkte B mit dem Halbmesser 12 und 10.58 Kreisbögen, so bestimmen diese vier Punkte im andern Kreise. Verbindet man nun die zugehörigen Punkte so erhält man die verlangten vier Berührenden.

Als Prüfstein genauer Construktion mag die Bewahrheitung folgender Sätze dienen:

Wenn drei Kreise gegeben sind, und man ziehet an je zwei derselben die gemeinschaftlichen äußeren Berührenden (oder auch an ein Paar die äußeren, und an die andern Paare die inneren Berührenden), so liegen die drei Durchschnittspunkte stets in einer geraden Linie. Diese Durchschnittspunkte liegen ferners noch so, daß, wenn man jeden Mittelpunkt eines Kreises mit dem Durchschnittspunkte der innern Berührenden der beiden andern Kreise verbindet, diese drei geraden Linien sich in einem Punkte schneiden.

Fig. 168.



Es sey der Halbmesser aus den Mittelpunkten A, B, C beziehungsweise R, R′, R″, so hat man nach dem Vorhergehenden:

$$AM : BM = R : R'$$
$$BP : CP = R' : R''$$
$$CN : AN = R'' : R$$
$$AM . BP . CN : BM . CP . AN = RR'R'' : RR'R'',$$

daher $AM . BP . CN = BM . CP . AN$.

Es müssen daher nach dem, was wir von den Transversalen gelehrt, M, N und P in einer geraden Linie liegen. Es seyen M′, N′, P′ die Durchschnittspunkte der innern Berührenden, die wir, um die Figur nicht zu überladen, selbst nicht verzeichnen.

Um dasselbe für M′P′ und N nachzuweisen, hat man:

$$R : R' = AM' : BM'$$
$$R' : R'' = BP' : CP'$$
$$R'' : R = CN : AN, \text{ daher}$$
$$RR'R'' : RR'R'' = AM' . BP' . CN : BM' . CP' . AN$$

daher $AM' . BP' . CN = BM' . CP' . AN$.

Die Lage der Punkte M′ P′ und N ist also gegen das Dreieck ABC so, daß diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Eben so leicht läßt sich nachweisen, daß M′N′P und wieder N′P′M, in einer geraden Linie liegen.

Da, wie man leicht sieht, $AM' . BP' . CN' = M'B . P'C . N'A$, so müssen, sobald man sie ziehet, die drei Geraden AP′, BN′ und CM′ sich in einem einzigen Punkte schneiden.

Eben so schneiden sich

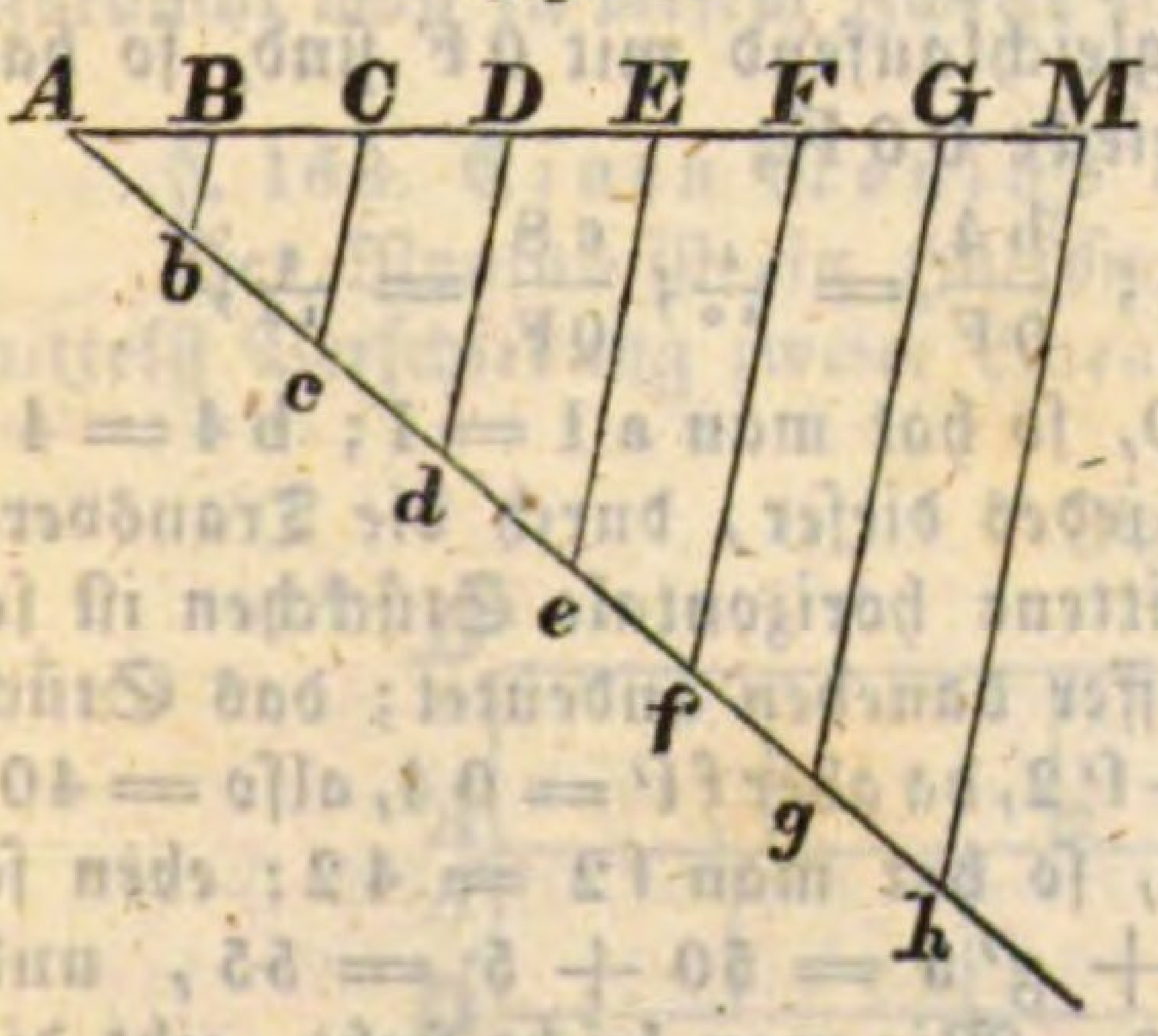
AP′, BN, CM
AP, BN′, CM
AP, BN, CM′

immer je drei in einem und demselben Punkte.

II. Aufgaben über die Proportionalität.

§. 166. Eine gerade Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Fig. 169.



Es soll z. B. AM in sieben gleiche Theile getheilt werden. Man zieht durch A willkürlich die Ah, und schneidet von ihr mit dem Zirkel 7 gleiche Theile Ab = bc = cd u. s. w. nach Belieben. Den letzten Theilungspunkt h verbinde ich mit dem Endpunkte M der gegebenen Geraden, und durch die Punkte b, c, d, e u. s. f. ziehe ich zu hM gleichlaufende Gerade, nämlich

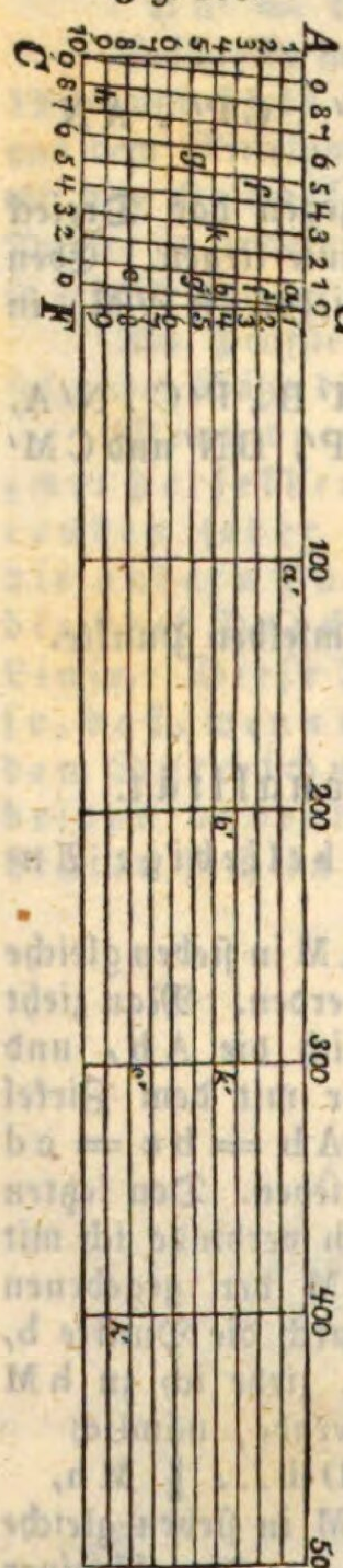
$$Bb \parallel Cc \parallel Dd \ldots \parallel Mh,$$

so ist dadurch AM in sieben gleiche Theile getheilt. — Obwohl einer

der Abschnitte, z. B. A b willkürlich ist, so wird man doch jederzeit Sorge tragen, daß der letzte Endpunkt, hier h, dem zweiten Endpunkte der gegebenen Geraden, hier M, so ziemlich gegenüber kömmt, damit die Durchschnitte so viel wie möglich senkrecht werden.

Einer solchen, in gleiche Theile getheilten Linie kann man sich zur Messung von anderen Längen bedienen, und die im gemeinen Leben üblichen Maßstäbe sind eigentlich nichts anderes, als solche eingetheilte Linien. Allein, da die Durchschnittspunkte der Abtheilungen, wenn sie noch so fein gemacht werden, doch einen Raum einnehmen müssen, so kommen sie bei kleinen Abtheilungen oft so nahe an einander, daß kein Platz für andere weitere Abtheilungen entsteht. Diesen Uebelständen sucht man durch sogenannte Transversal-Maßstäbe auszuweichen.

Fig. 170.



§. 167. Einen sogenannten tausendtheiligen Transversal-Maßstab zu verzeichnen.

Man nehme die Länge, welche das Hundertfache der kleinsten Einheit darstellen soll, und trage sie sechs Mal neben einander; so sey hier A G = 100, AB = 6 . A G. Senkrecht auf AB errichte ich A C, welches ich in zehn gleiche Theile theile; nach Vollendung des Rechtecks A B C D ziehe ich durch jeden Theilungspunkt der A C gleichlaufende zu A B, den Punkt G bezeichne ich mit 0, die andern Theilungspunkte der A B nach einander mit 100, 200, 300, 400, 500, und durch alle diese Theilungspunkte ziehe ich gleichlaufende zu A C und B D; theile sowohl A G als C F in zehn gleiche Theile, bezeichne die Punkte von G bis A nach einander mit 1, 2, 3 u. s. w., die Punkte aber von F bis C nach einander mit 0, 1, 2, 3, u. s. w. Nun verbinde ich die Punkte 0 mit 0, 1 mit 1, 2 und 2, 3 und 3, u. s. w. durch gerade Linien, welche man gewöhnlich Transversalen nennt. Da nun C F = 100, so ist 0 F = 10; da die horizontalen Geraden 1 1, 2 2, 3 3 u. s. w. alle gleichlaufend mit 0 F sind, so hat man in dem Dreiecke 0 0 F;

$$\frac{a\,1}{0\,F} = \tfrac{1}{10}; \quad \frac{b\,4}{0\,F} = \tfrac{4}{10}; \quad \frac{c\,8}{0\,F} = \tfrac{8}{10};$$

da nun 0 F = 10, so hat man a 1 = 1; b 4 = 4; c 8 = 8, d. h. jedes dieser, durch die Transversale 0 0 abgeschnittene horizontale Stückchen ist so groß, als die Ziffer daneben andeutet; das Stück f 2 ist gleich f f′ + f′ 2, da aber f f′ = 0 4, also = 40, und f′ 2 = 2 ist, so hat man f 2 = 42; eben so ist g 5 = g g′ + g′ 5 = 50 + 5 = 55, und eben so h g = 89. Wie man leicht sieht, gibt die

Ziffer der Transversale den Zehner, und die an der Horizontalen stehende die Einheit. Es sind in dem Rechtecke ACFG alle Längen von 1 bis 100 dargestellt, indem ich in dem Dreiecke 0 0 F nach einander alle Horizontalen nehme, habe ich 1 bis 10; nehme ich die Horizontale des Trapezes 1 1 0 F, so habe ich 1 0, 1 1, 1 2, bis 2 0, die des Trapezes 2 2 0 F geben 2 0, 2 1, 2 2... 3 0 u. s. w.; — das Stück a a′ ist gleich 1 a′ + 1 a = 100 + 1 = 101; b b′ = b 4 + 4 b′ = 4 + 200 = 204; h h′ = h 9 + 9 h′ = 89 + 400 = 489. Wir sehen also, daß mittelst unserer Zeichnung alle Längen von 1 bis 500 hier vorgestellt sind. Dieser Transversal-Maßstab kann uns nun dienen, sowohl Längen von gegebener Größe aufzutragen, als auch die Länge gegebener Linien dadurch zu bestimmen.

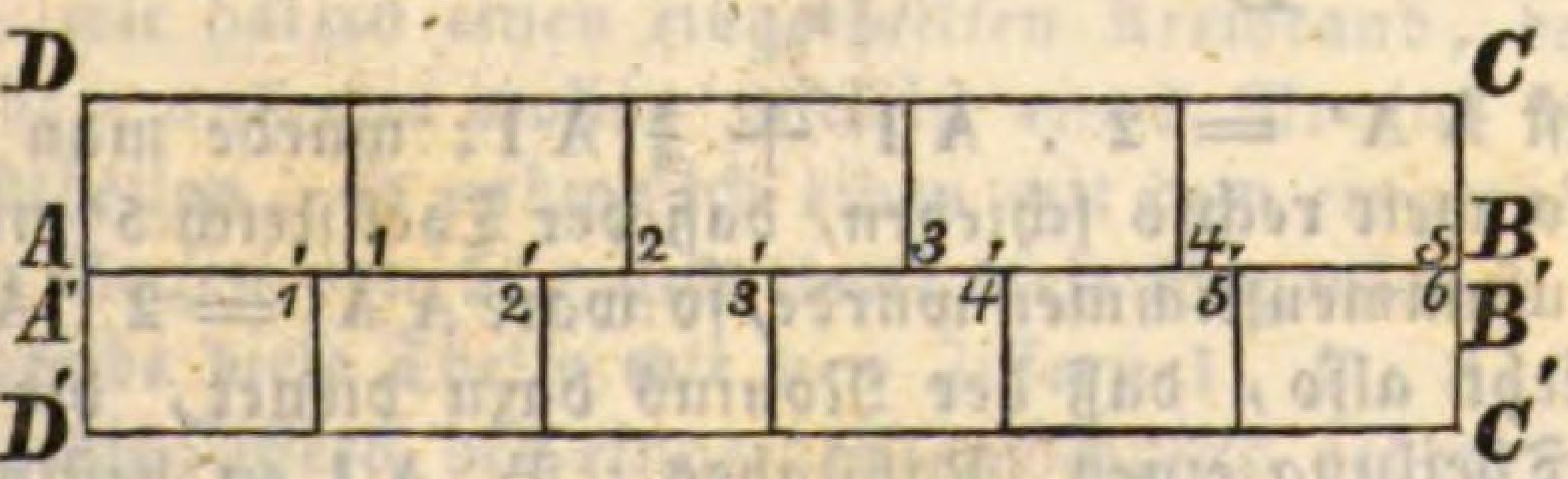
Will man z. B. eine Länge von 334 verzeichnen, so suche ich nun den Punkt, wo die Horizontale 4, 4 die Vertikale von 300 schneidet, hier den Punkt k′; in diesem Punkte setze ich die eine Zirkelspitze ein, und öffne nun den Zirkel längs dieser Horizontalen so weit, bis die zweite Zirkelspitze den Punkt trifft, wo die Transversale 3, 3 die Horizontale 4, 4 trifft; die so bestimmte Entfernung der Zirkelspitzen gibt die Länge von 334. Wie man sieht, geben die Horizontalen die Einheiten, die Transversalen die Zehner, die Vertikalen die Hunderter.

Ist aber eine gegebene gerade Linie zu messen, so nimmt man ihre Länge in den Zirkel, und fährt mit dem so geöffneten Zirkel nahe senkrecht auf die Ebene des Maßstabes längs einer der Vertikalen, und zwar so, daß die zweite Spitze innerhalb des Rechteckes ACFG kommt; man bewegt vorsichtig den Zirkel längs einer solchen Vertikalen hinab, bis die zweite Spitze eine Transversale trifft, wo dann wieder die Vertikale die Hunderter, die Transversale die Zehner, und die Horizontale die Einheiten gibt; wird mit der zweiten Zirkelspitze eine Transversale nicht gerade im Durchschnitt mit der Horizontalen getroffen, so kann man wohl den Mittelwerth zwischen den zwei Horizontalen durch Abschätzung bestimmen; in den meisten Fällen wird man sich aber begnügen, die zunächst passende Horizontale zu wählen.

Diese Eintheilung mittelst Transversalen hat man in früheren Zeiten auch bei der Theilung der Kreisbögen angewendet, gegenwärtig gebraucht man zu diesem Zwecke lieber Nonien oder Verniers.

§. 168. Einen Nonius oder Vernier zu construiren. Der Nonius ist ein Hülfsmittel, die Entfernung zweier Punkte mittelst Verschiebung zweier Lineale zu finden.

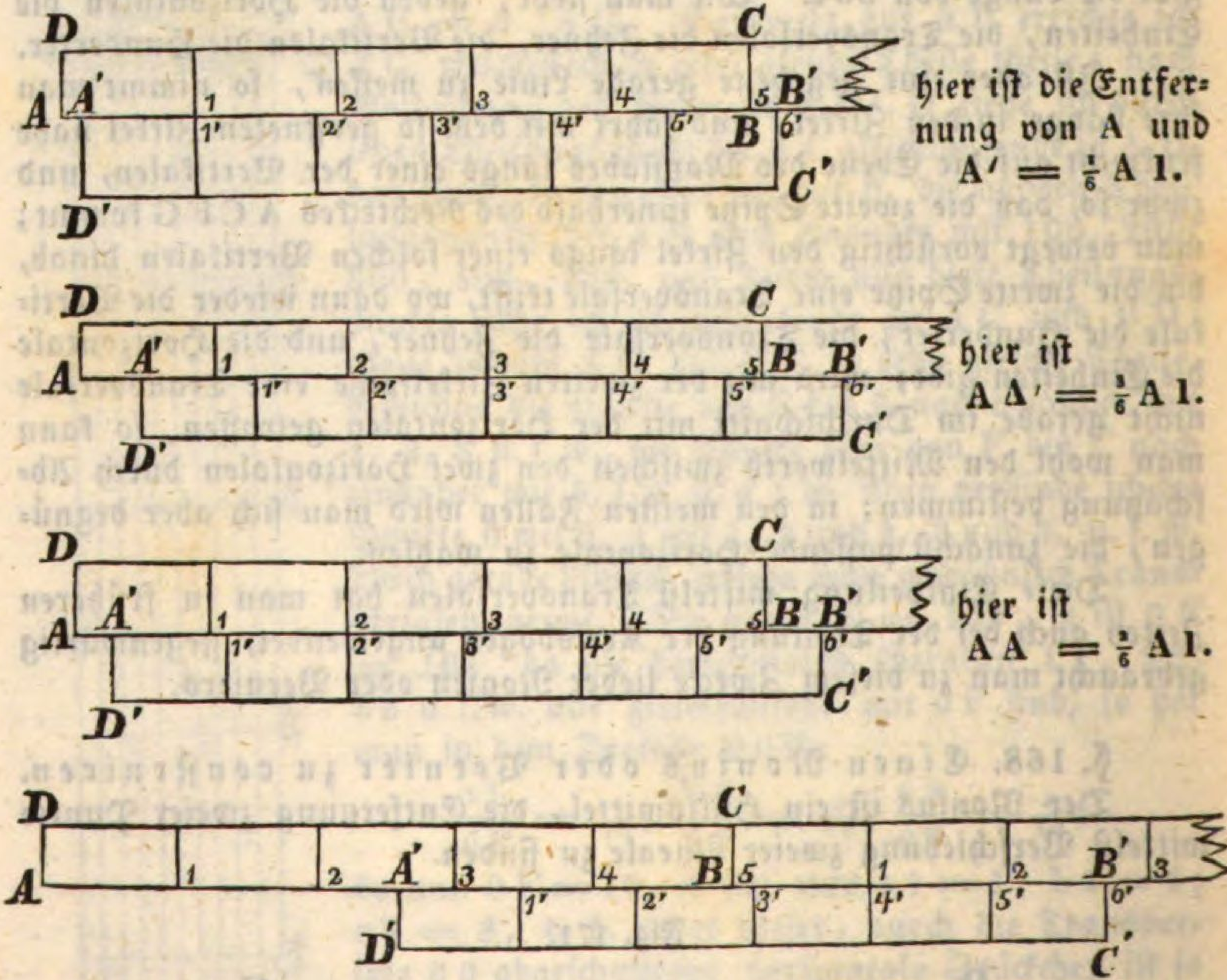
Fig. 171.



Es seyen die zwei Lineale ABCD und A′B′C′D′, so zwar, daß AB und A′B′ ganz genau mit einander gleich seyen, und es sey AB in 5 gleiche Theile, A′B′ in 6 gleiche Theile getheilt; es ist also das Stück $A1 = \frac{AB}{5}$, $A'1' = \frac{AB}{6}$, oder da $AB = 5 \,.\, A1$ ist, $A'1' = \frac{5A1}{6}$, daher $A1 - A'1' = 11' = A1 - \frac{5}{6} A1 = \frac{1}{6} A1$.

Eben so ist $A'2' = \frac{2}{6} AB = \frac{2}{6} \,.\, 5 \,.\, A1 = \frac{10}{6} A1$; $A2 = 2 \,.\, A1 = \frac{12}{6} A1$; daher $22' = A2 - A'2' = \frac{12}{6} A1 - \frac{10}{6} A1 = \frac{2}{6} A1$, eben so findet man $33' = \frac{3}{6} A1$, $44' = \frac{4}{6} A1$ u. s. f.; durch die Zusammenstellung dieser zwei Lineale ist also sowohl $\frac{1}{6}$, als die Vielfache von $\frac{1}{6}$ des Stückes A1 dargestellt. Schiebt man nun das untere Lineal nach rechts, so daß 1 mit 1′ zusammenfällt, so ist sicher die Entfernung von A und A′ gleich 11′ oder $\frac{1}{6} A_1$; fällt aber 2 mit 2′, 3 mit 3′ zusammen u. s. w., so ist die Entfernung von A und A′ gleich 22′, 33′ ..., d. h. $\frac{2}{6} A1$, $\frac{3}{6} A1$ u. s. f.

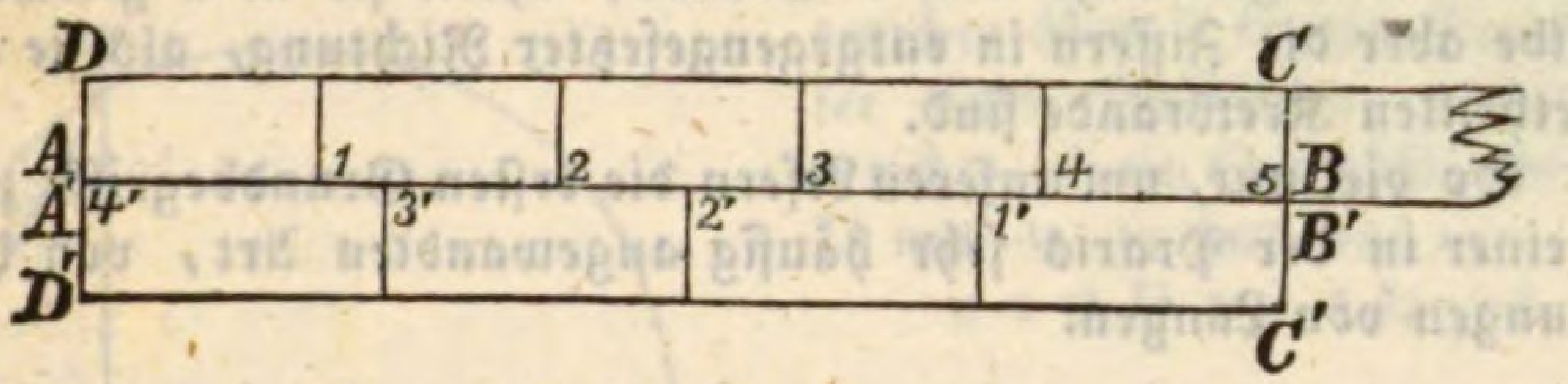
Fig. 172.



Hier ist $AA' = 2 \,.\, A1 + \frac{4}{6} A1$; würde man den Nonius A′B′C′D′ so weit rechts schieben, daß der Theilstrich 5′ mit dem Theilstrich 2 oben zusammenstimmen würde, so wäre $AA' = 2 \,.\, A1 + \frac{5}{6} A1$.

Man sieht also, daß der Nonius dazu dienet, die Bruchtheile der kleinsten Theilung eines Maßstabes z. B. A1 zu bestimmen

Fig. 173.



Hier haben wir die Abtheilung $AB = 5 . A1$ durch den Nonius $A'B'C'D'$ in 4 gleiche Theile getheilt, haben aber unten die Ziffern in entgegengesetzter Ordnung geschrieben; nun ist $B'1' = \frac{A'B'}{4} = \frac{5.B4}{4}$; daher $B'1' - B4 = \frac{B4}{4}$, d. h. $1'4 = \frac{1}{4}B4$, eben so ist: $2'3 = \frac{2}{4}B4$; $3'2 = \frac{3}{4}B4$. Schiebe ich also den Nonius unten so weit rechts, daß der Theilstrich 1' unten mit dem Theilstriche 4 stimmt, so ist die Entfernung AA' oder $BB' = \frac{1}{4}A1$, stimmt 2' mit 3, so ist $AA' = BB' = \frac{2}{4}A1$ u. s. w.

Betrachten wir das Vorhergehende allgemein; hat man irgend eine eingetheilte Linie oder einen eingetheilten Kreisrand, und a ist die Größe der kleinsten Abtheilung, und man nimmt nun n solche Abtheilungen, die uns also eine Länge von na geben, und ich nehme ein zweites Lineal von der Länge na, und theile es in $n + 1$ gleiche Theile, so ist eine einzelne Abtheilung des zweiten Lineals (des Nonius) $\frac{na}{n+1}$; daher der Unterschied einer Abtheilung als Eintheilung, und einer Abtheilung des Lineals $= a - \frac{na}{n+1} = \frac{a}{n+1}$. Schiebt man nun den Nonius an der Eintheilung weiter, so hat man: der so vielte Theilstrich des Nonius nun mit einem Theilstriche der gegebenen Eintheilung übereinstimmt, so oft Mal hat man den Unterschied $\frac{a}{n+1}$ weggeschoben. Hier müssen die Theilstriche des Nonius nach vorwärts numerirt seyn.

Man kann aber auch die Länge na in $n - 1$ gleiche Theile theilen, so daß dann einer der Theile des Nonius $= \frac{n}{n-1}a$ ist, daher der Unterschied beider Abtheilungen $\frac{n}{n-1} . a - a = \frac{a}{n-1}$ ist. Hier ist also die kleinste Abtheilung des gegebenen Lineals a in $n - 1$ Theile getheilt, und die Ziffern des Nonius müssen in verkehrter Ordnung geschrieben werden.

Gesetzt, wir hätten einen eingetheilten Kreisrand, der unmittelbar Grade gibt, und wir wollen mittelst eines Nonius bis auf $10' = \frac{1}{6}$ Grad abtheilen, so nehme ich einen mit dem eingetheilten Kreise concentrischen Bogen von 5°, und theile diese Bogenlänge in 6 gleiche Theile, beschreibe diese Theile mit den Ziffern 1, 2, 3, in derselben Ordnung, wie die Ziffern des eingetheilten Nonius gehen. — Oder ich

nehme eine Bogenlänge von 7 Graden, theile sie in 6 gleiche Theile, schreibe aber die Ziffern in entgegengesetzter Richtung, als sie auf dem eingetheilten Kreisrande sind.

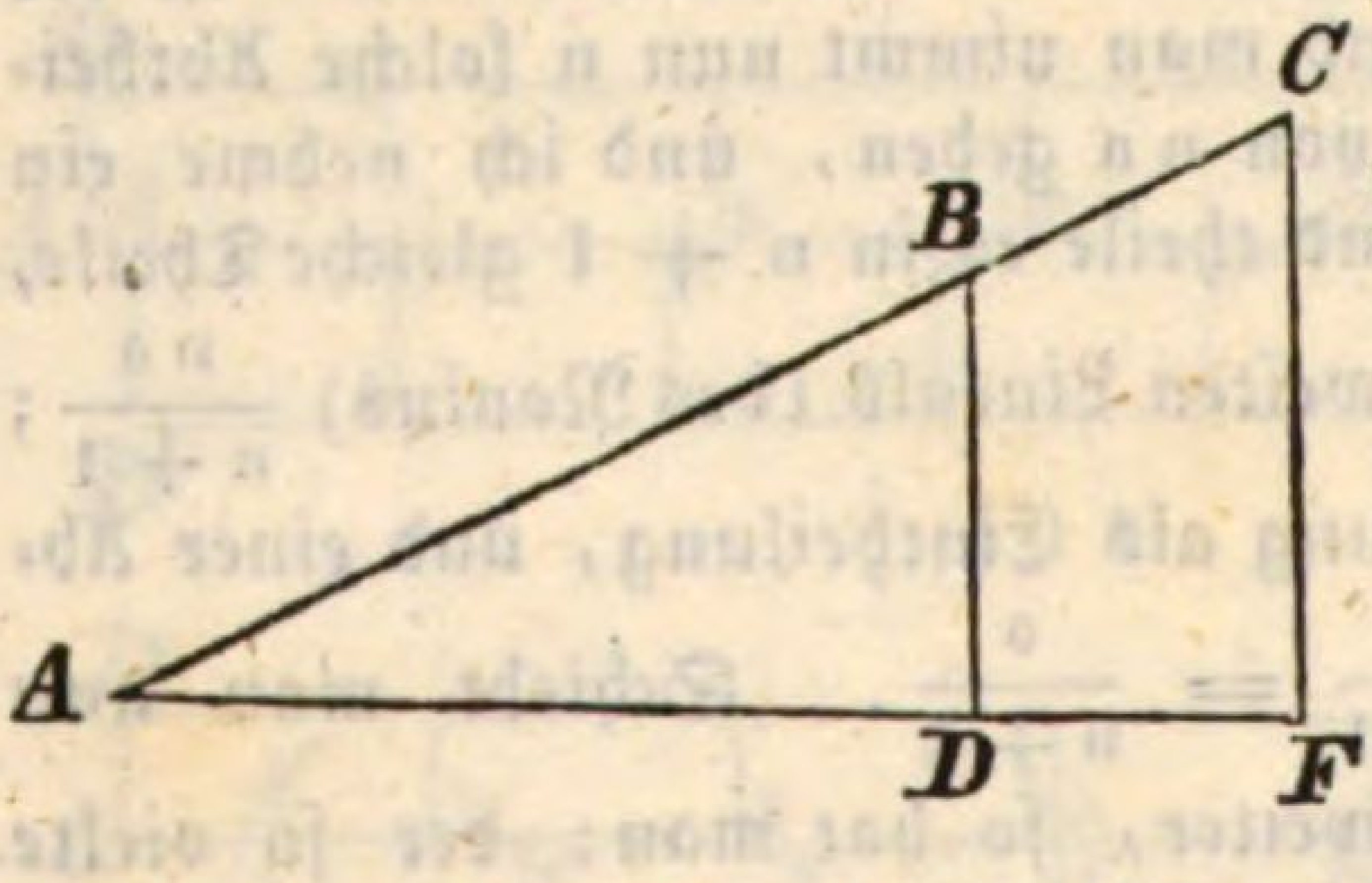
So viel nur, um unseren Lesern die ersten Grundbegriffe zu geben, von einer in der Praxis sehr häufig angewandten Art, von Unterabtheilungen von Längen.

§. 169. **Eine gerade Linie in drei Theile zu theilen, die sich wie m : n : p verhalten sollen.**

Die zu theilende Gerade verbindet man mit einer willkürlichen langen Geraden, von der man drei Stücke abschneidet, die sich wie m : n : p verhalten; den letzten Abtheilungspunkt verbindet man mit dem andern Endpunkte der gegebenen Geraden, durch die andern Abtheilungspunkte ziehet man gleichlaufende mit der zuletzt gezogenen Geraden.

§. 170. **Zu drei gegebenen Geraden die vierte Proportionirte zu finden.**

Fig. 174.



Es seyen die gegebenen drei Geraden a, b, c, so mache ich entweder 1) AB = a, BC = b, und AD = c, ziehe BD, durch C die Gleichlaufende CF ∥ BD, so ist

a : b = c : DF,

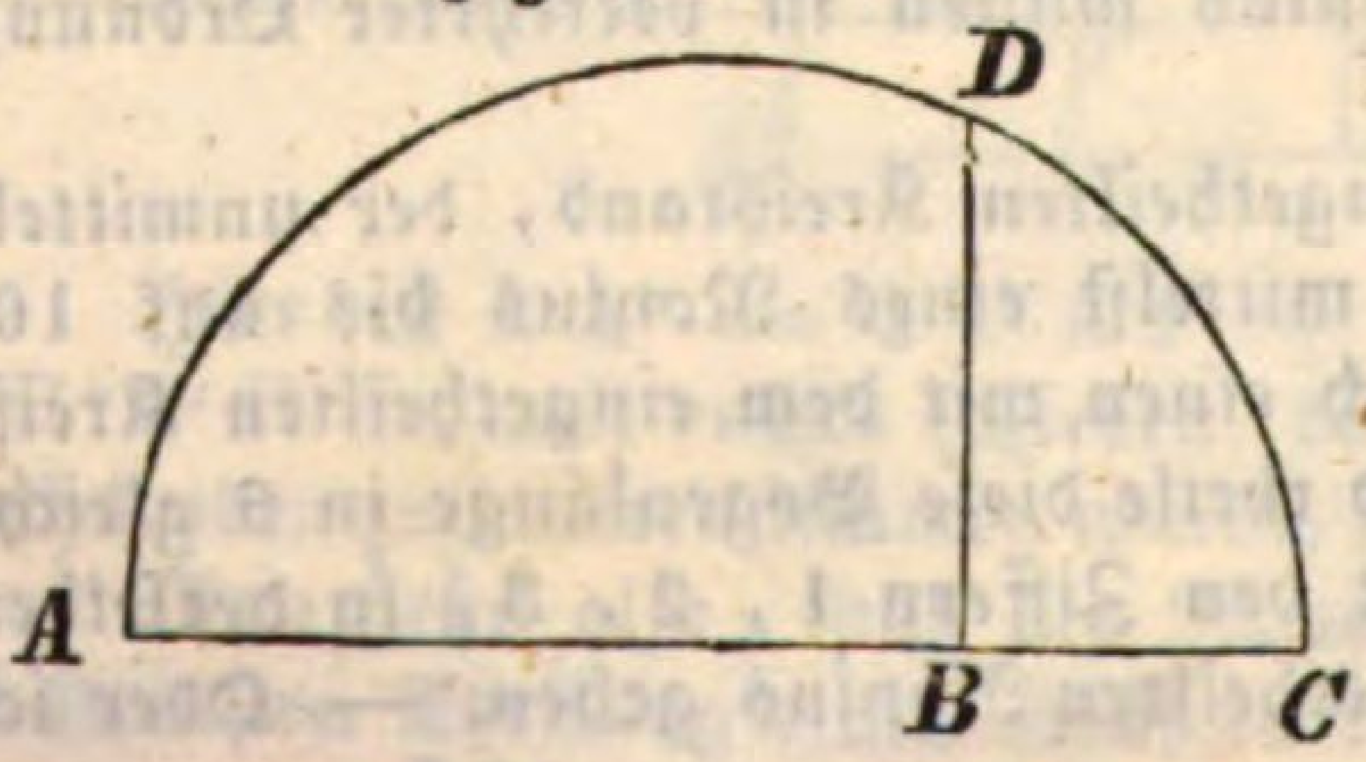
daher die DF die verlangte vierte Proportionirte.

Oder 2) ich mache AB = a; AC = b; AD = c, ziehe BD und CF ∥ BD, so ist a : b = c : AF, und hier ist AF die vierte Proportionirte.

§. 171. **Zu zwei Geraden a, b die dritte stätig Proportionirte zu finden, d. h. das x in der Proportion a : b = b : x bestimmen.** Diese Aufgabe ist nur ein einzelner Fall der vorhergehenden.

§. 172. **Die mittlere Proportionirte zwischen zwei gegebenen Geraden a und b zu finden, d. h. das x in folgender Proportion zu bestimmen: a : x = x : b.**

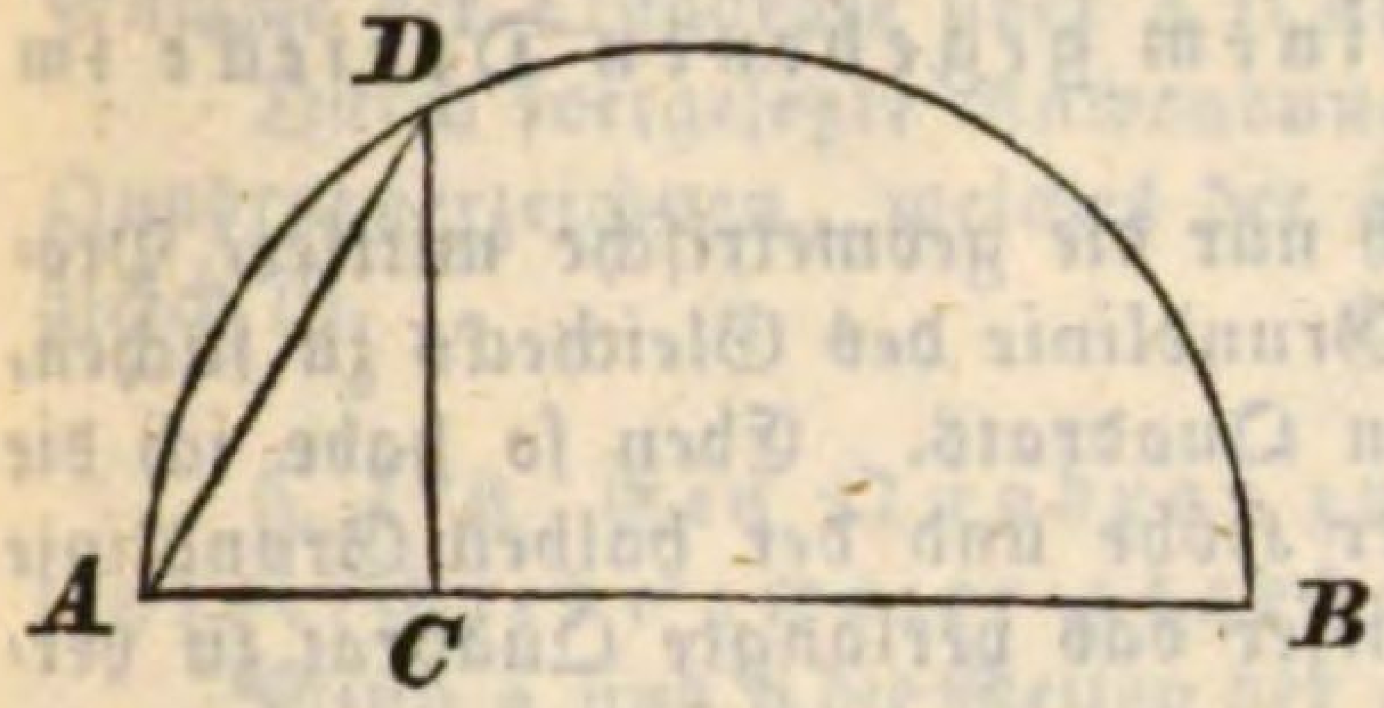
Fig. 175. I.



Auf einer Geraden trage ich AB = a, und BC = b auf; beschreibe über AC als Durchmesser einen Halbkreis; im Punkte B errichte ich das Loth BD bis an den Kreisumfang, so ist

a : BD = BD : b.

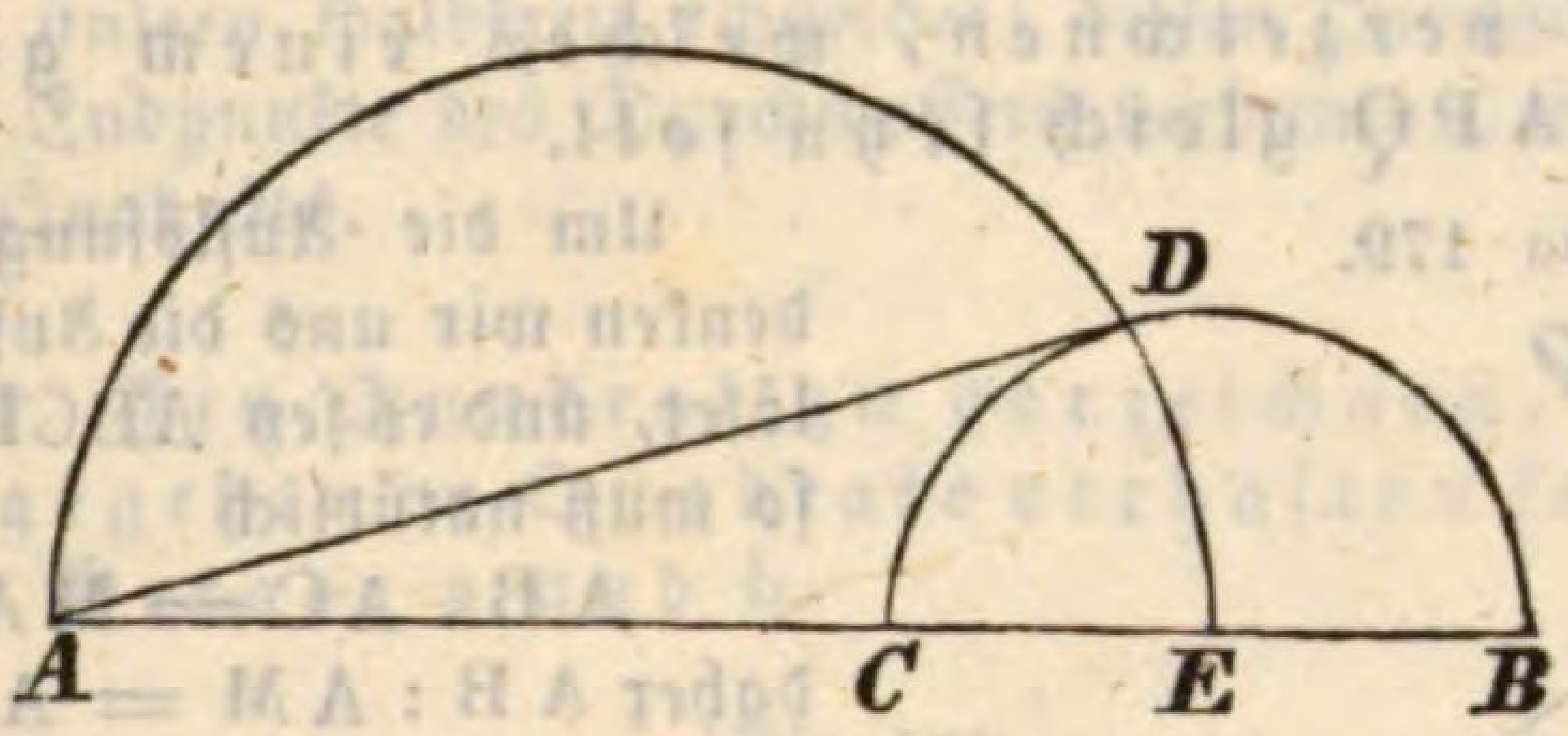
Fig. 176. II.



Ich mache AB = a, AC = b; errichte über A B als Durchmesser einen Halbkreis, und in C errichte ich ein Loth CD, verbinde D mit A, so hat man:

a : AD = AD : b.

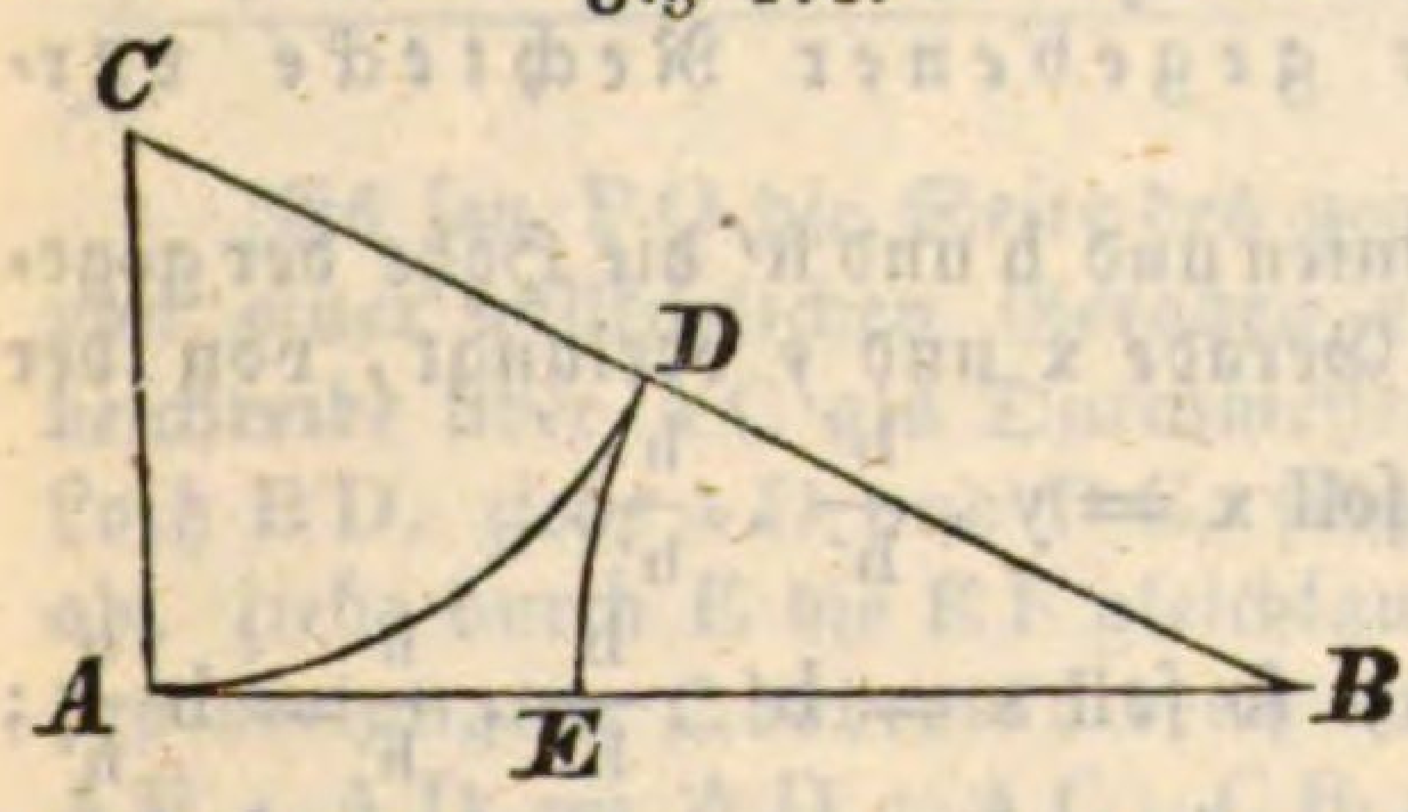
Fig. 177. III.



Ich mache AB = a; AC = b, halbire a — b = BC in E, beschreibe aus E mit CE einen Halbkreis, und eben so über AE einen Halbkreis, wo beide sich schneiden D verbinde mit A, so hat man a : AD = AD : b.

§. 173. Eine gerade Linie AB im äußeren und mittleren Verhältnisse theilen.

Fig. 178.



Ich errichte in A ein Loth AC = ½ AB; verbinde C mit B, beschreibe aus C mit dem Halbmesser CA einen Kreisbogen, der die CB in D schneidet, und aus B mit dem Halbmesser BD einen Bogen, der die AB in E schneidet; denn jedes Berührungsstück beim Kreise ist die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Schnittlinie und ihrem Stücke außerhalb des Kreises; um die ganze Schnittlinie zu haben, müßte ich BC über C hinaus verlängern, so daß das verlängerte Stück = CD wäre, daher die ganze Schnittlinie = CB + CD oder AB + BD ist; daher hat man:

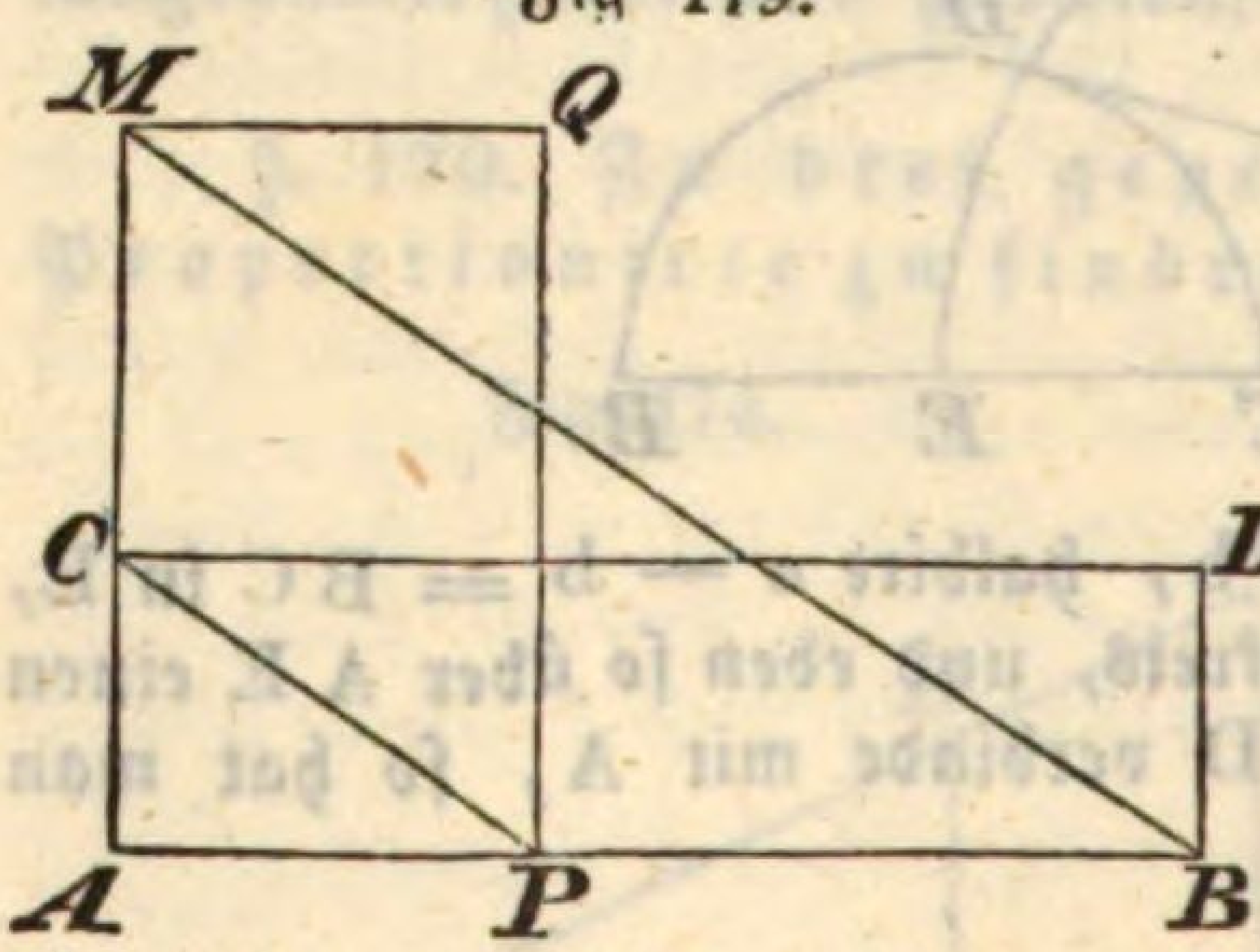
AB + BD : AB = AB : BD; da BD = BE, so ist
AB + BE : AB = AB : BE, und daher
BE + AB — AB : AB = AB — BE : BE, oder
BE : AB = AE : BE, oder
AE : BE = BE : AB, was verlangt wurde.

§. 174. Ein Quadrat zu construiren, welches einem gegebenen Gleichecke oder einem gegebenen Dreiecke im Flächeninhalte gleich sey.

Zu diesem Behufe brauche ich nur die geometrische mittlere Proportionale zwischen der Höhe und Grundlinie des Gleichecks zu suchen, so ist dieß die Seite des verlangten Quadrats. Eben so habe ich die mittlere Proportionale zwischen der Höhe und der halben Grundlinie des Dreiecks zu suchen, um auf dieser das verlangte Quadrat zu verzeichnen

§. 175. Auf einer gegebenen Geraden AB ein Rechteck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Rechtecke MAPQ gleich seyn soll.

Fig 179.



Um die Auflösung zu finden, denken wir uns die Aufgabe als gelöset, und es sey ABCD = MAPQ, so muß natürlich

$$AB \,.\, AC = MA \,.\, AP,$$

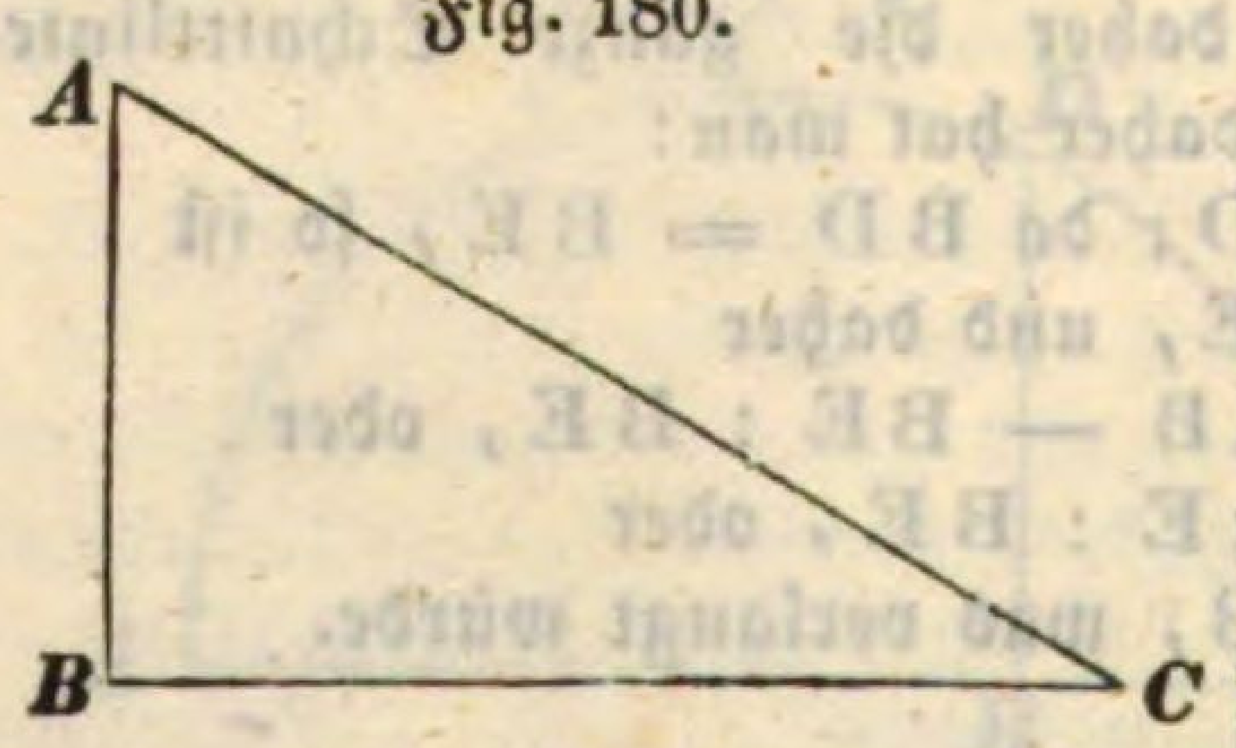
daher $AB : AM = AP : AC$; es ist daher die verlangte Höhe AC die vierte Proportionirte zu AB, AM, AP; um also AC zu finden, verbinde ich B mit M und ziehe durch P die CP ∥ MB, so ist AC die verlangte Höhe, und nach der Verzeichnung von CD und BD hat man das verlangte Rechteck.

§. 176. Zwei Gerade zu verzeichnen, die sich wie die Flächeninhalte zweier gegebener Rechtecke verhalten.

Es seyen b und b′ die Grundlinien und h und h′ die Höhe der gegebenen Rechtecke, so werden zwei Gerade x und y verlangt, von der Eigenschaft $\frac{x}{y} = \frac{b}{b'} \,.\, \frac{h}{h'}$; daher soll $x = y \,.\, \frac{b}{b'} \,.\, \frac{h}{h'}$.

Nimmt man nun $y = b'$ an, so soll $x = b' \,.\, \frac{b}{b'} \,.\, \frac{h}{h'} = b\,\frac{h}{h'}$; ich brauche also nun zu h′, h, b die vierte Proportionirte zu suchen, um x zu erhalten, und habe somit der Forderung Genüge geleistet.

Fig. 180.



§. 177. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches zwei gegebenen Quadraten zusammen genommen gleich seyn soll.

Es seyen die Seiten der zwei gegebenen Quadrate AB und BC, so verzeichnet man ein rechtwinklichtes Dreieck, dessen Katheten AB und BC sind, so

ist dann das Quadrat über der Hypothenuse A C verzeichnet, gleich der Summe der Quadrate über A B und B C.

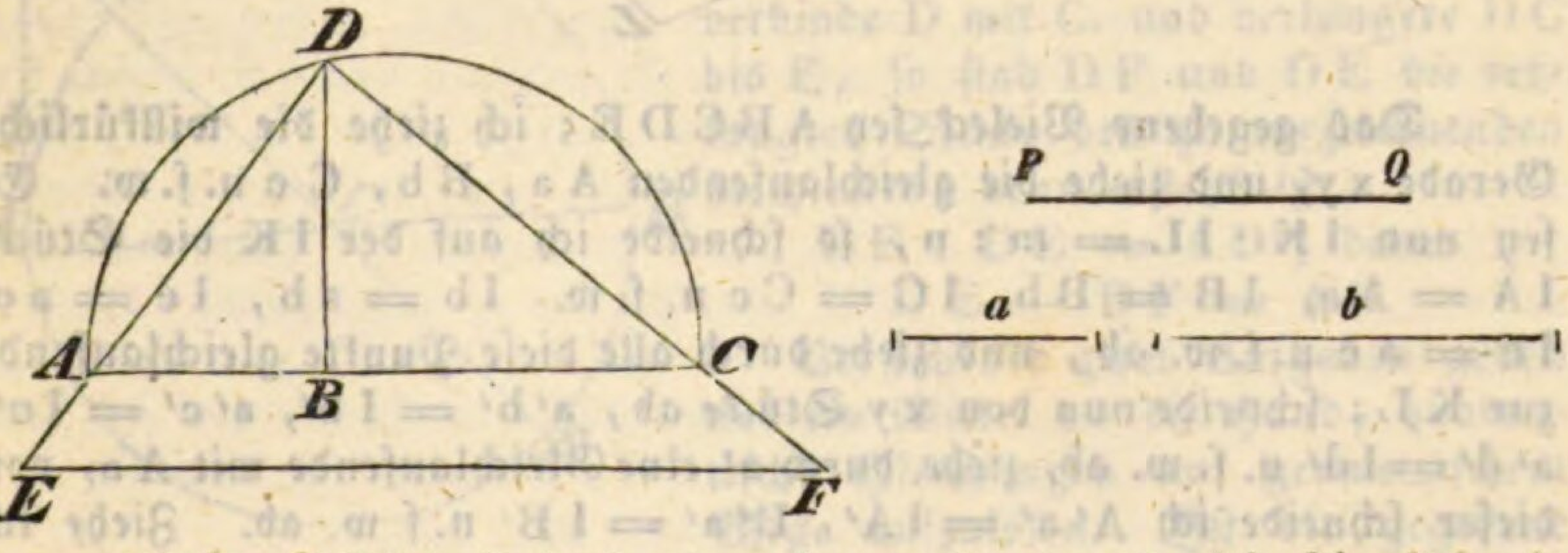
Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens kann man ein Quadrat verzeichnen, welches der Summe 3, 4, 5 u. s. w. Quadraten gleich ist.

§. 178. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches dem Unterschiede zweier gegebener Quadrate gleich ist.

Sind a und b die Seiten der gegebenen Quadrate, und ist a > b, so verzeichne ich über a als Durchmesser einen Halbkreis, vom Endpunkte des Durchmessers beschreibe ich mit einem Halbmesser = b einen Bogen, der unsern Halbkreis schneidet; dieser Durchschnittspunkt mit dem andern Endpunkte des Durchmessers verbunden, ist die Seite des verlangten Quadrats.

§. 179. Ein Quadrat zu verzeichnen, welches sich zu einem gegebenen Quadrate verhalten soll, wie zwei gegebene Gerade a und b.

Fig. 181.

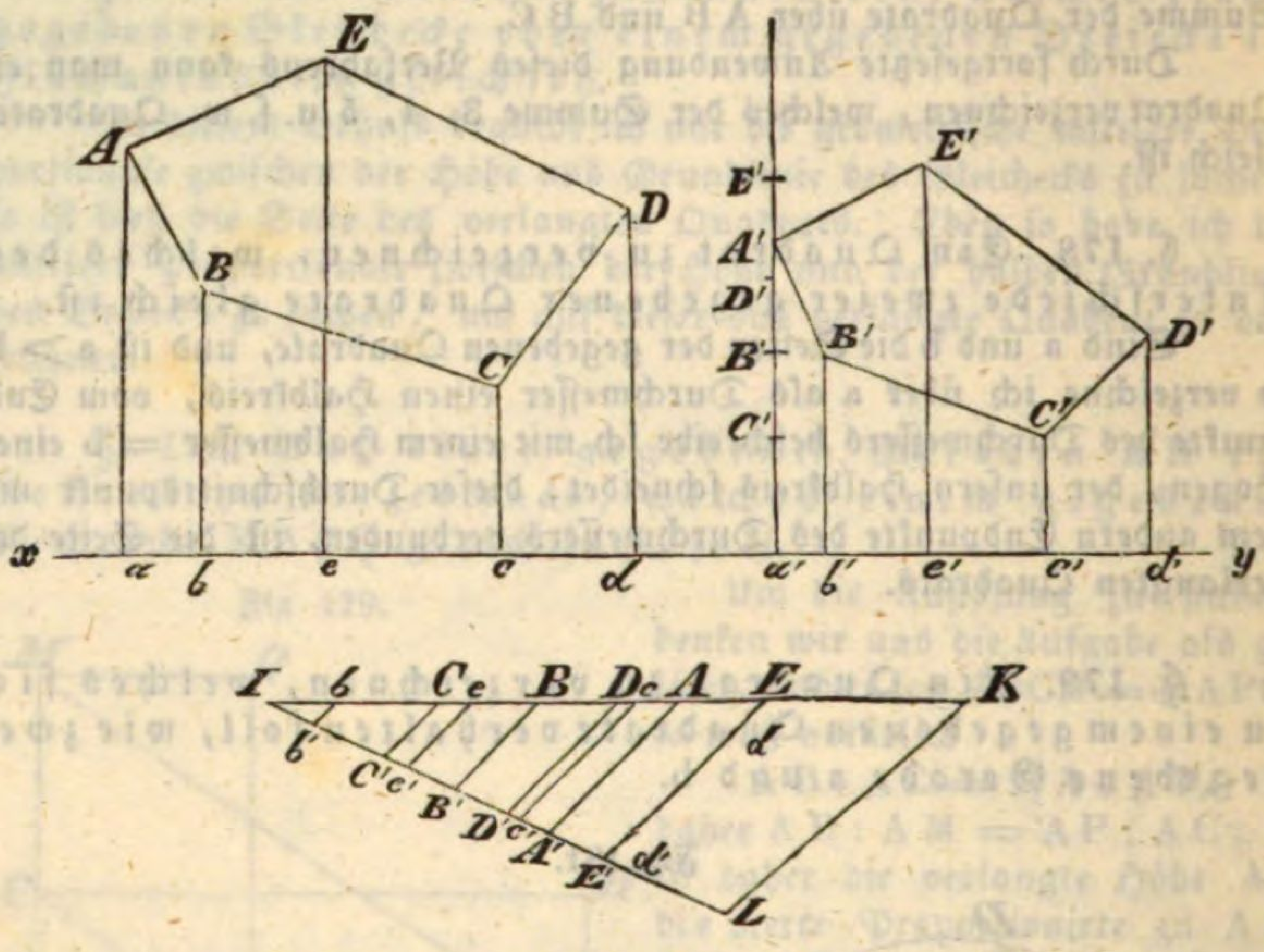


Es sey P Q die Seite des gegebenen Quadrats, ich schneide mir von einer willkürlichen Geraden ein Stück A B = a, B C = b ab, beschreibe über A C als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in B das Loth B D, ziehe A D und D C, schneide von A D ein Stück D E = P Q ab, ziehe durch E die E F gleichlaufend mit A C, so ist D F die Seite des verlangten Quadrats; denn da

$AB : AD = AD : AC$; $CB : CD = CD : AC$, so hat man: $AB = \frac{AD^2}{AC}$; $BC = \frac{CD^2}{AC}$, daher $AB : BC = AD^2 : CD^2$; da ferner $AD : CD = DE : DF$, so ist $DE^2 : DF^2 = AB : BC$; also somit $PQ^2 : DF^2 = a : b$.

§. 180. Ein Vieleck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Vielecke ähnlich seyn soll, und deren gleichliegende Seiten sich wie m zu n verhalten sollen.

Fig 182.

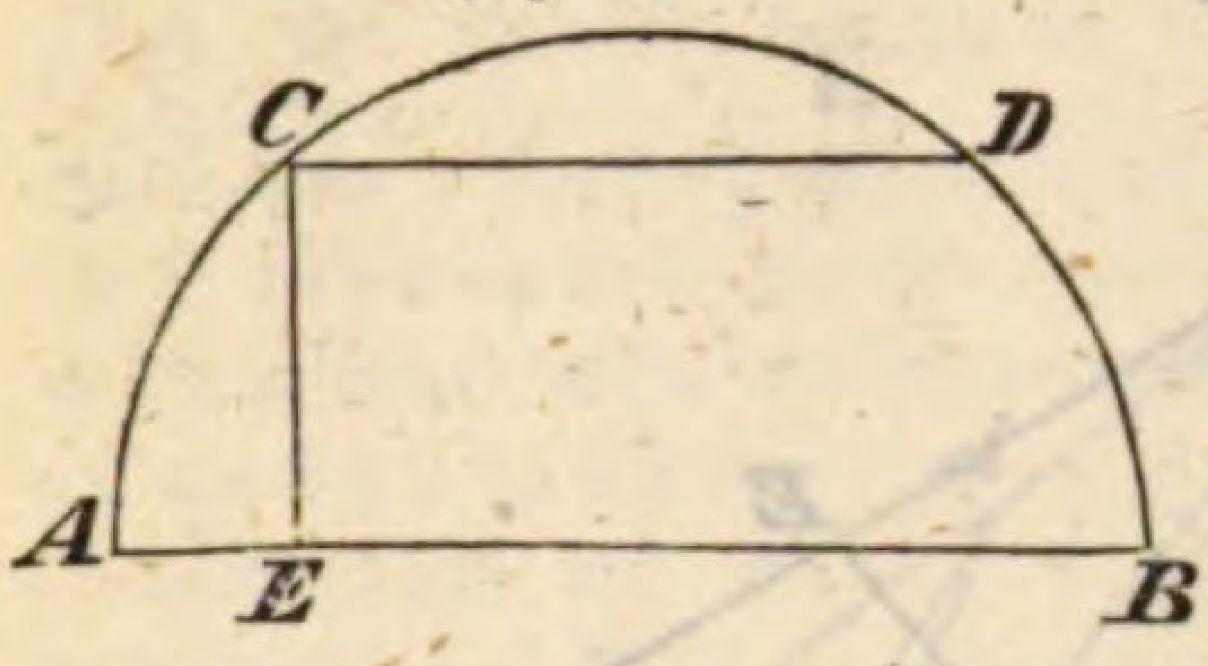


Das gegebene Vieleck sey ABCDE; ich ziehe die willkürliche Gerade xy, und ziehe die gleichlaufenden Aa, Bb, Cc u. s. w. Es sey nun IK : IL = m : n, so schneide ich auf der IK die Stücke IA = Aa, IB = Bb, IC = Cc u. s. w. Ib = ab, Ie = ae, Ic = ac u. s. w. ab, und ziehe durch alle diese Punkte gleichlaufende zur KL; schneide nun von xy Stücke ab, a'b' = Ib', a'c' = Ic', a'd' = Id' u. s. w. ab, ziehe durch a' eine Gleichlaufende mit Aa, von dieser schneide ich A'a' = IA', B'a' = IB' u. s. w. ab. Ziehe ich nun durch b'c'd'e' mit Aa Gleichlaufende, und durch B'C'D'E' mit xy Gleichlaufende, so geben die zusammengehörenden Durchschnittspunkte die verlangten Punkte A'B'C'D'E', die gehörig mit einander verbunden, die verlangte Figur herstellen.

Sollen sich die Flächeninhalte der beiden ähnlichen Vielecke wie m : n verhalten, so verzeichnet man sich nach der Aufgabe im vorhergehenden Paragraphe die Seite eines Quadrats, die sich zu dem Quadrate einer Seite des gegebenen Vielecks verhalte wie m : n, so hat man das Verhältniß zweier gleichliegenden Seiten des gegebenen und des zu verzeichnenden Vielecks.

§. 181. **Ein Rechteck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Quadrate gleich seyn soll, und wo die Summe von Höhe und Grundlinie einer bestimmten Länge gleich seyn soll.**

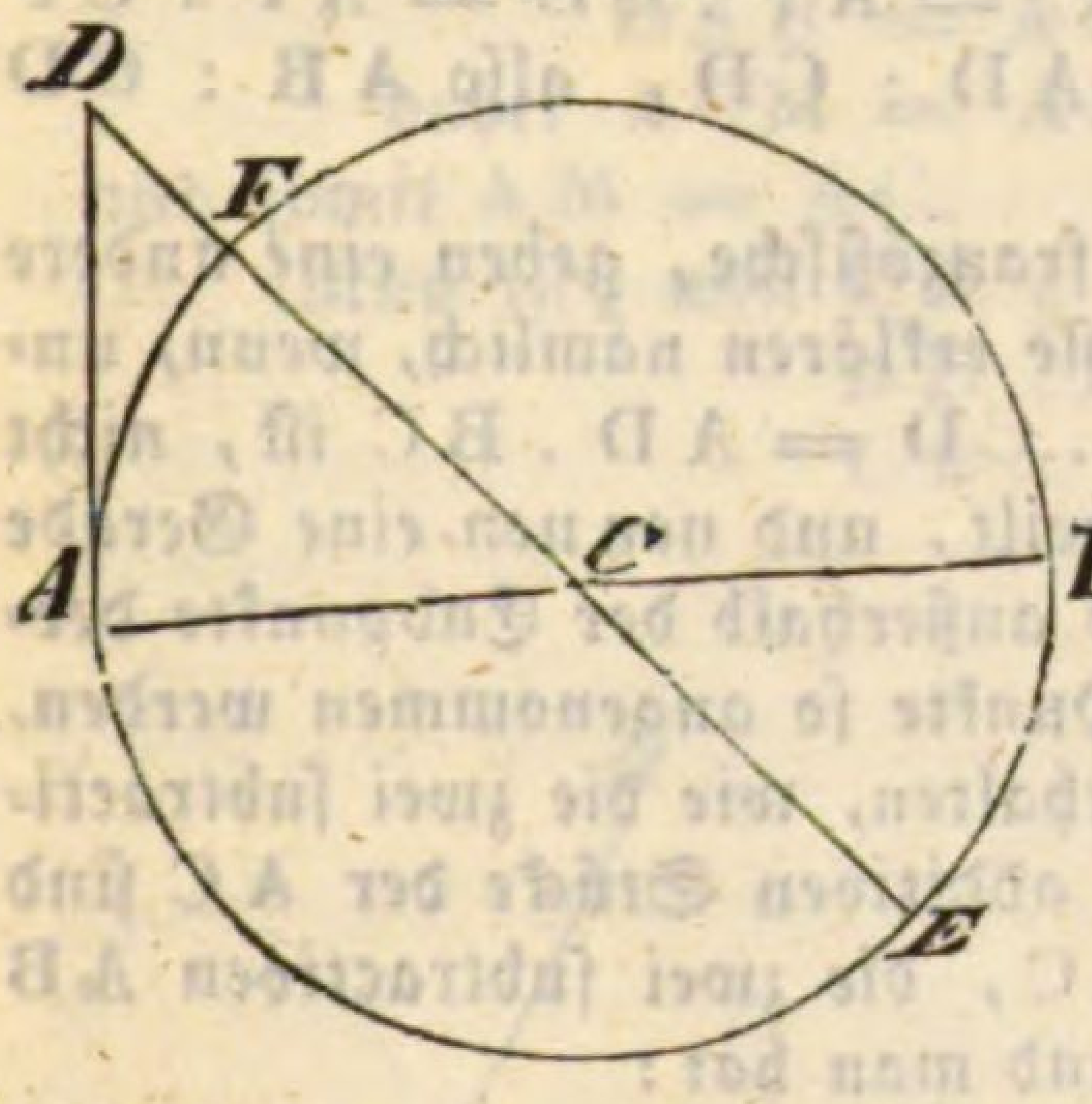
Fig. 183.



Es sey A B die Summe von Höhe und Grundlinie des zu verzeichnenden Rechtecks; in einem Abstande von A B, der gleich ist der Seite des gegebenen Quadrats, ziehe ich die C D gleichlaufend mit A B, von dem Punkte C, wo diese Gleichlaufende den Kreisumfang trifft, fälle ich das Loth C E auf A B, so sind A E und E B die verlangten Stücke des Rechteckes; denn $AE + EB = AB$, und $AE \cdot EB = EC^2 =$ dem gegebenen Quadrate.

§. 182. **Ein Rechteck zu verzeichnen, welches einem gegebenen Quadrate gleich ist, und wo der Unterschied von Höhe und Grundlinie einer gegebenen Geraden gleich seyn soll.**

Fig. 184.



Es sey A B der gegebene Unterschied der beiden Seiten des Rechtecks; ich errichte in A das Berührungsstück A D gleich der Seite des gegebenen Quadrats, verbinde D mit C, und verlängere D C bis E, so sind D F und D E die verlangten Stücke des zu verzeichnenden Rechteckes; denn erstens ist

$$DF \cdot DE = AD^2, \text{ dann}$$

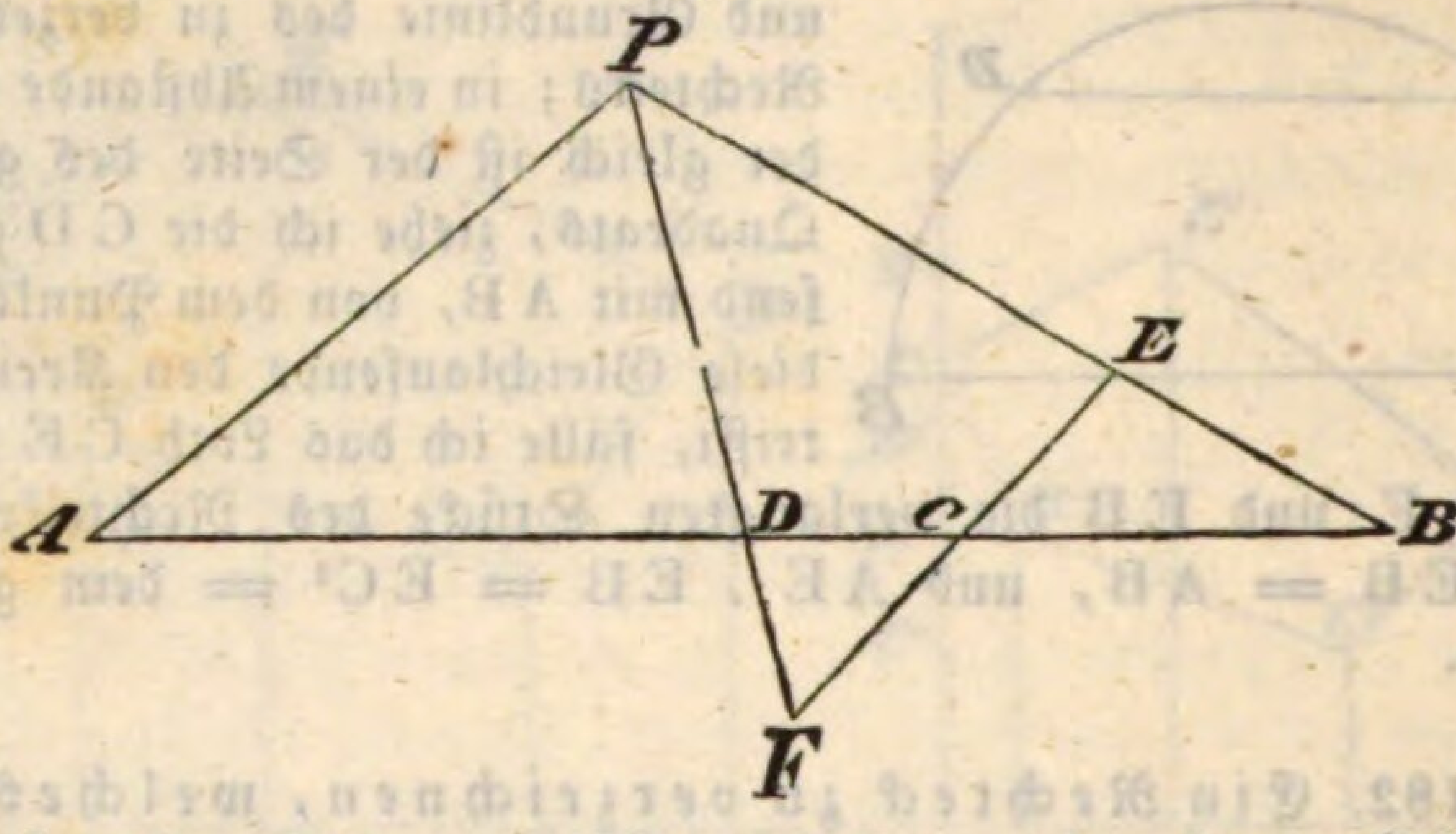
$$DE - DF = AB.$$

Vorstehende zwei Aufgaben geben uns ein Mittel an die Hand, quadratische Gleichungen auf geometrischem Wege aufzulösen. Ist die gegebene Gleichung $x^2 - px + q = o$, so ist hier p die Summe, und q das Produkt der Wurzeln, ist also in der vorhergehenden Aufgabe $AB = q$, und $EC = \sqrt{q}$; so sind A E und E B die verlangten Wurzeln der Gleichung. Hat die Gleichung aber die Form $x^2 - px - q = o$, so ist eine Wurzel positiv, die andere negativ, hier ist also p der Unterschied der Wurzeln; dieselben bloß numerisch betrachtet, und q das Produkt. Ist daher in der zweiten der vorhergehenden Aufgaben $AB = p$, und $AD = \sqrt{q}$, so sind D F und D E die zwei Wurzeln, von denen eine positiv, die andere negativ zu nehmen ist.

§. 183. **Eine gerade Linie harmonisch zu theilen.**

Nach unserer früheren Erklärung wissen wir, daß eine Gerade harmonisch getheilt ist, wenn in ihr zwei Punkte so bestimmt werden, daß das Produkt der beiden äußeren Stücke gleich ist dem Produkte aus dem mittleren in die ganze Linie.

Fig. 185.



Es sey die AB harmonisch zu theilen; ich nehme willkürlich den Punkt P an, verbinde diesen mit A und B, nehme in der AB den Punkt C willkürlich an, ziehe CE ‖ AP, mache CF = CE, verbinde F mit P, so schneidet diese die AB in D, und die AB ist harmonisch getheilt; denn es ist AB : BC = AP : CE = AP : CF = AD : DC; daher AB : BC = AD : CD, also AB : CD = AD . BC.

Einige Mathematiker, namentlich französische, geben eine andere Erklärung der harmonischen Theilung; sie erklären nämlich, wenn, unsere letzte Figur im Auge behaltend, AB . CD = AD . BC ist, nicht die AB, sondern die AC harmonisch getheilt, und nennen eine Gerade harmonisch getheilt, wenn innerhalb und außerhalb der Endpunkte derselben, doch in der Geraden selbst zwei Punkte so angenommen werden, daß die zwei additiven Stücke sich so verhalten, wie die zwei subtractiven. In unserer Figur haben wir die additiven Stücke der AC sind AD und DC, dann AD + DC = AC, die zwei subtractiven AB und BC, denn AB — BC = AC, und man hat:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \text{ oder } \frac{BA}{BC} = \frac{BA - BD}{BD - BC}.$$

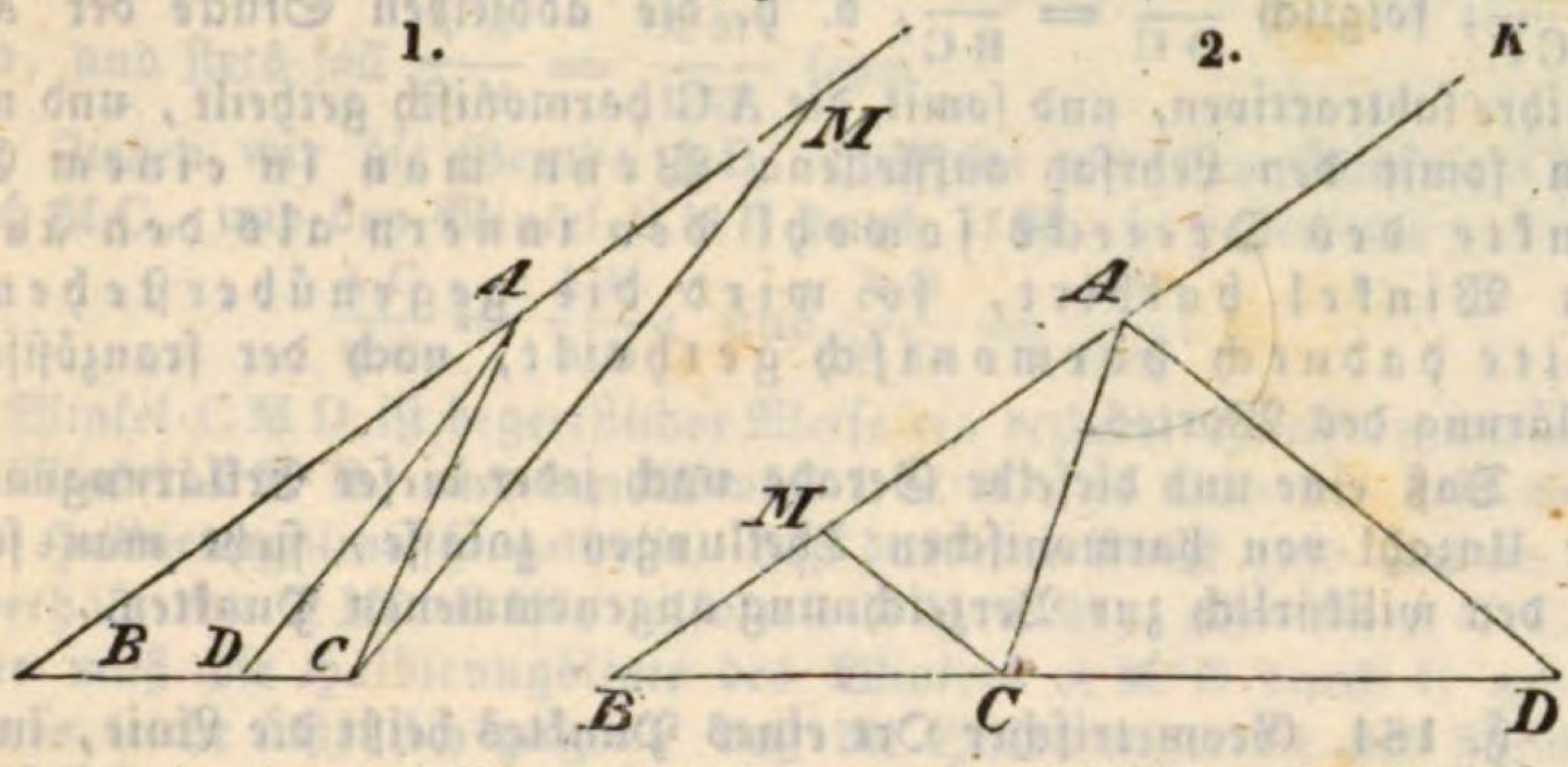
Die drei Stücke BA, BD, BC heißen harmonisch proportionirt, schon nach der Erklärung der alten Griechen, daß nämlich von drei Zahlen die größte zur kleinsten sich so verhält, wie der Ueberschuß der größeren über die mittlere, zum Ueberschusse der mittleren über die kleinste. Die mittlere, hier BD, heißt das harmonische Mittel zwischen der größeren AB und der kleinsten BC (so sind die Zahlen 3, 4 und 6 harmonisch proportionirt; denn $\frac{6}{3} = \frac{6-4}{4-3}$, und 4 ist das harmonische Mittel zwischen 3 und 6).

Wir wollen nun zeigen, wie man nach der französischen Erklärung des Worts eine Gerade harmonisch theilet.

Zu diesem Behufe bedürfen wir folgenden Satzes:

Wenn man in einem Dreiecke einen inneren oder äußeren Winkel halbirt, so wird die gegenüberstehende Seite in zwei Stücke getheilt, die sich wie die anliegenden Seiten verhalten.

Fig. 186.



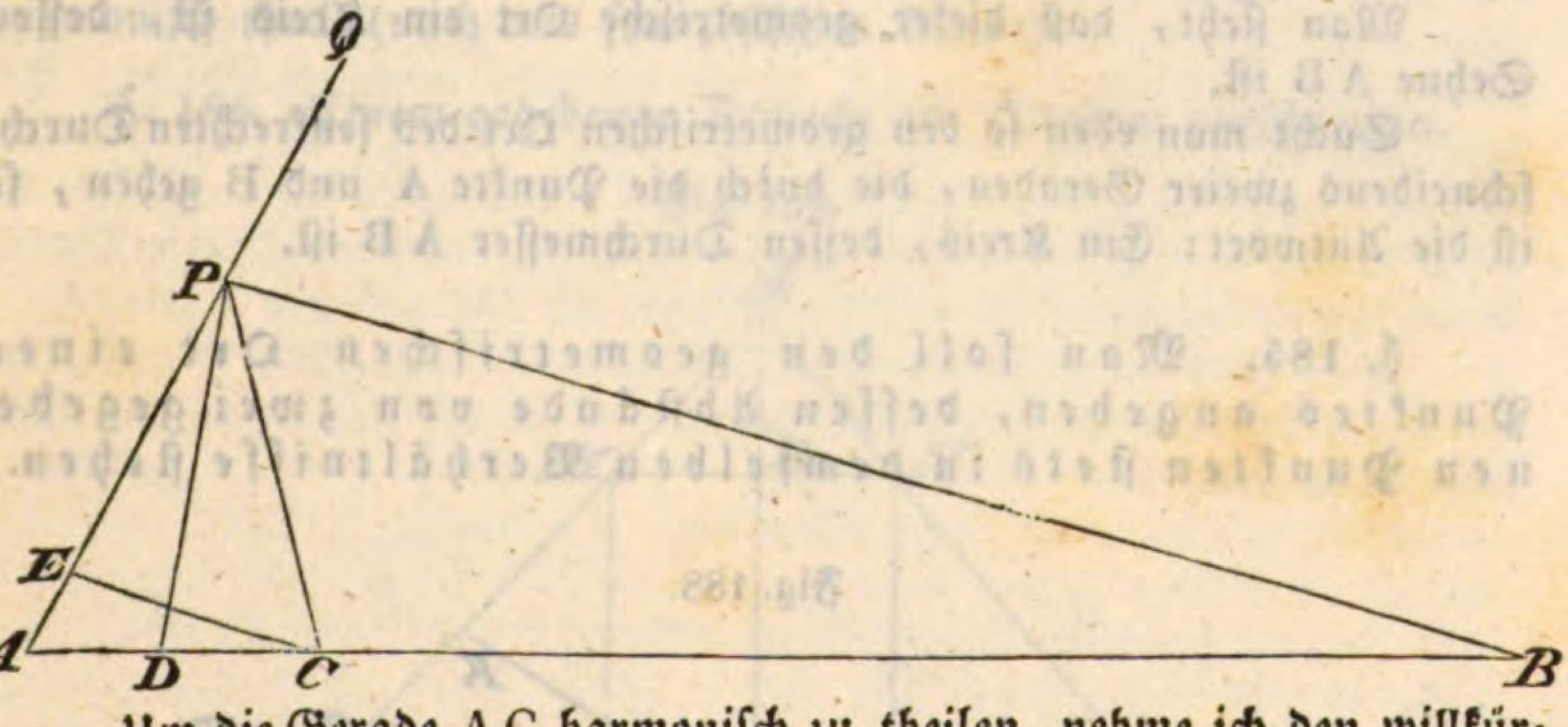
Ist in (1) BAD = DAC, in (2) CAD = DAK, so hat man in beiden Fällen BD : DC = AB : AC; denn ziehet man CM ‖ AD, so hat man:

in (1) DAC = ACM   in (2) DAC = ACM
DAB = AMC   DAK = AMC;
daher ACM = AMC   daher ACM = AMC,

und somit AM = AC.

Nun ist, weil CM ‖ AD ist
BD : DC = AB : AM, und daher
CD : DC = AM : AC.

Fig. 187.



Um die Gerade AC harmonisch zu theilen, nehme ich den willkürlichen Punkt P an, verbinde AP und PC, verlängere AP nach Q, und nun halbire ich sowohl den Winkel APC, als auch seinen Nebenwinkel, den äußeren Winkel CPQ durch PD und PB, so ist durch diese Linien die AC harmonisch getheilt in den Punkten D und B; denn erstens hat man, da der Winkel APC halbirt wurde, $\frac{AD}{DC} = \frac{AP}{PC}$, da aber auch der äußere Winkel CPQ halbiret wurde, so ist auch $\frac{AB}{BC}$

$= \frac{AP}{CP}$; folglich $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$, d. h. die additiven Stücke der AC, wie ihre subtractiven, und somit die AC harmonisch getheilt, und man kann somit den Lehrsatz aufstellen: **Wenn man in einem Eckpunkte des Dreiecks sowohl den innern als den äußeren Winkel halbirt, so wird die gegenüberstehende Seite dadurch harmonisch getheilt**, nach der französischen Erklärung des Wortes.

Daß eine und dieselbe Gerade nach jeder dieser Erklärungsarten eine Unzahl von harmonischen Theilungen zulasse, sieht man schon aus den willkürlich zur Verzeichnung angenommenen Punkten.

§. 184. Geometrischer Ort eines Punktes heißt die Linie, in der der fragliche Punkt stets liegen muß, um irgend einer geforderten Eigenschaft stets zu entsprechen. Man fragt z. B. um den geometrischen Ort des Punktes, der stets von einem gegebenen Punkte O den Abstand = a habe, so ist die leichte Antwort: der geometrische Ort des fraglichen Punktes ist der Umfang eines Kreises aus dem Punkte O mit dem Halbmesser = a.

Eben so ist der geometrische Ort eines Punktes, der stets denselben Abstand = a von einer gegebenen Geraden hat, eine mit der gegebenen gleichlaufenden Geraden im Abstande = a.

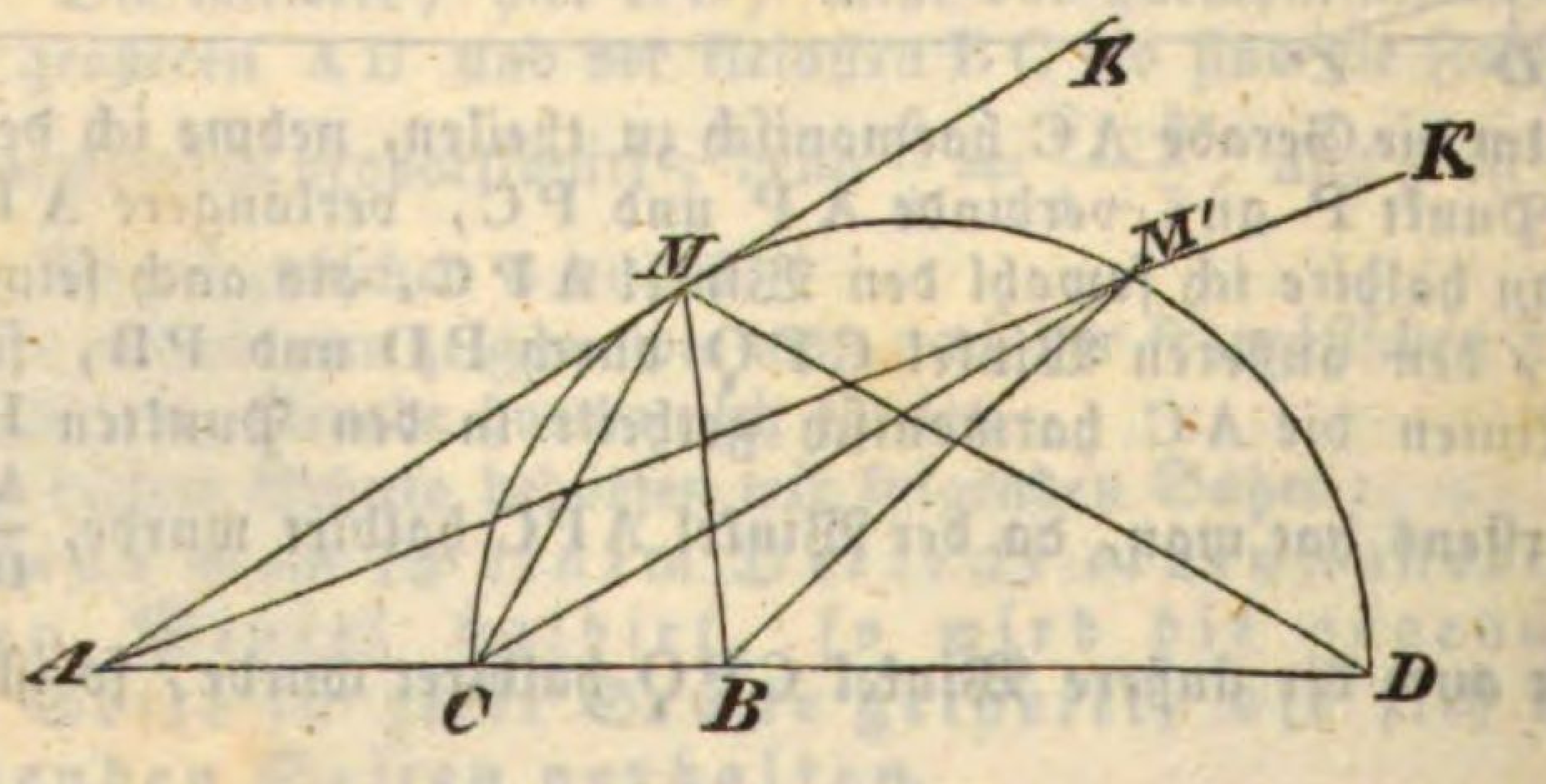
Man fragt um den geometrischen Ort des Scheitels eines Winkels, dessen Schenkel stets durch die zwei Endpunkte einer bestimmten Geraden AB durchgehen.

Man sieht, daß dieser geometrische Ort ein Kreis ist, dessen Sehne AB ist.

Sucht man eben so den geometrischen Ort des senkrechten Durchschneidens zweier Geraden, die durch die Punkte A und B gehen, so ist die Antwort: Ein Kreis, dessen Durchmesser AB ist.

§. 185. **Man soll den geometrischen Ort eines Punktes angeben, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten stets in demselben Verhältnisse stehen.**

Fig. 188.



Es sey der Punkt M in einer seiner Lagen, und M′ in einer andern, und stets soll $\frac{AM}{BM} = \frac{AM'}{BM'}$ seyn.

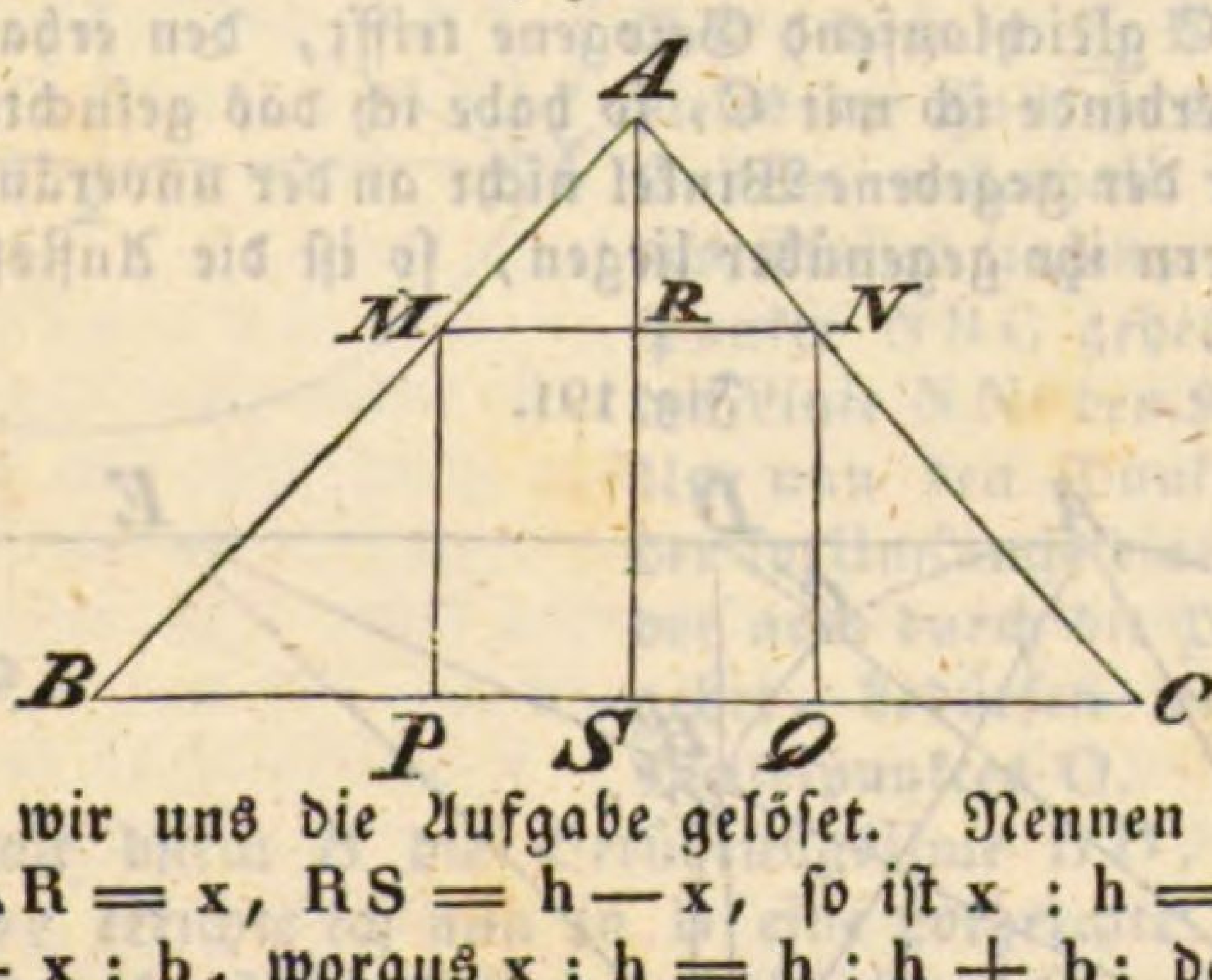
Ziehen wir die Gerade AB, halbiren wir den Winkel AMB durch MC, und den Winkel BMK durch DM, so haben wir:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BM}; \text{ und } \frac{AD}{BD} = \frac{AM}{BM};$$

der Winkel CMD ist begreiflicher Weise ein rechter. Halbiren wir auch den Winkel AM′B, und den Winkel BM′K′, so wird die AB durch diese Halbirungslinie so getheilt, daß das eine Stück zum andern sich so verhält wie AM′ : BM′, also wie AM : BM, also wie AC : CB; daher muß die Halbirungslinie des Winkels AM′B durch C gehen; eben so leicht läßt sich zeigen, daß die Halbirungslinie des Winkels BM′K durch D gehen muß. Ich mag nun den Punkt M′ annehmen, wo ich will, sobald AM′ : BM′ = AM : BM ist, so wird immer die Halbirungslinie des Winkels AM′B durch C, die des Winkels BM′K durch D durchgehen; da nun sowohl CMD, also auch CM′D in jeder Lage des Punktes M′ ein rechter Winkel ist, so wird der Punkt M′ stets in einem Kreise liegen müssen, der CD zu seinem Durchmesser hat. Oder der geometrische Ort von Punkten, deren Abstände von den Endpunkten einer gegebenen Geraden stets in einem bestimmten Verhältnisse stehen, liegt im Umfange eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der gegebenen Geraden liegt, und zwar findet man die Endpunkte des Durchmessers, wenn man die gegebene Gerade harmonisch theilt (nach dem französischen Sinne).

§. 186. Einem gegebenen Dreiecke ein Quadrat einschreiben.

Fig. 189.



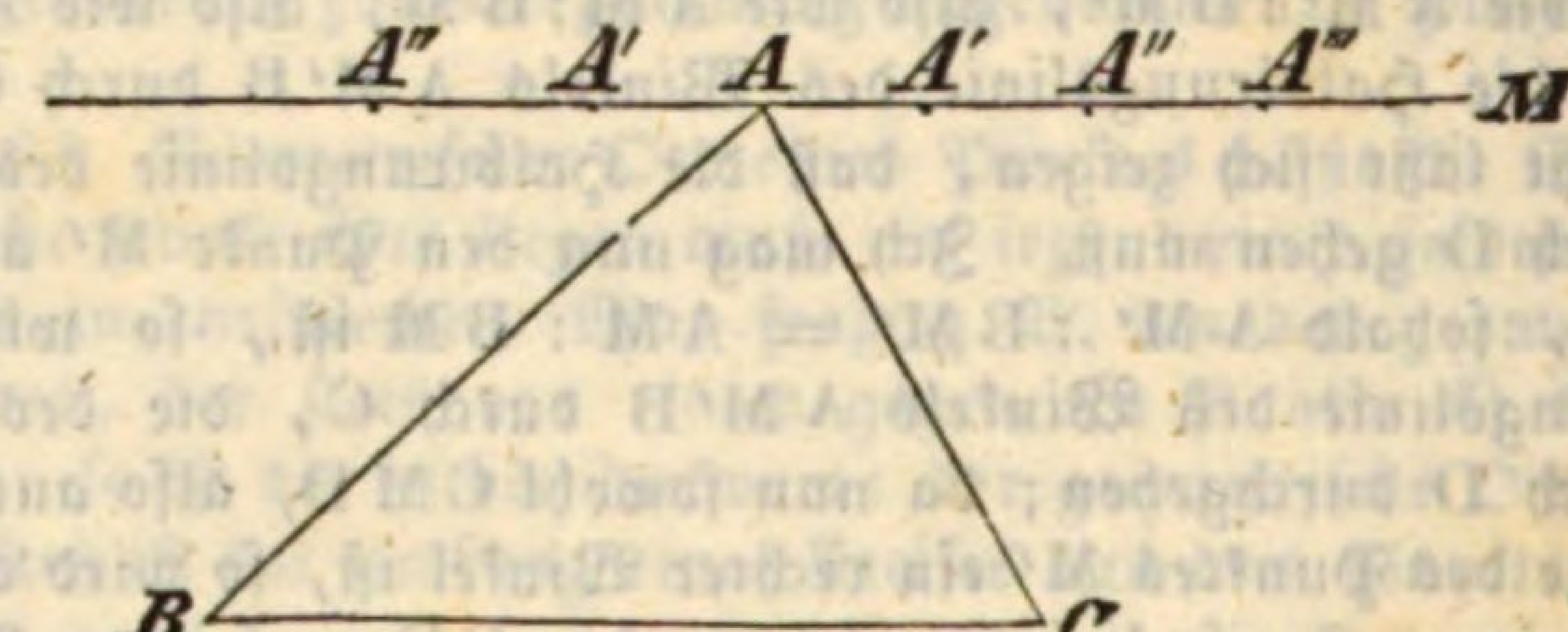
Denken wir uns die Aufgabe gelöset. Nennen wir AS = h, BC = b, AR = x, RS = h — x, so ist x : h = MN : b oder x : h = h — x : b, woraus x : h = h : h + b; daher AM : AB = h : h + b; ich habe also AB in zwei Theile zu theilen, die sich wie h zu b verhalten; ich erreiche dieses, wenn ich AS verlängere, und die Verlängerung gleich b mache, den Endpunkt davon mit B verbinde, und zu dieser Linie aus S eine gleichlaufende ziehe, welche die AB in dem gesuchten Punkte M einschneidet.

III. Verwandlung der Figuren.

Wir verstehen unter Verwandlung: die Verzeichnung einer Figur, die, gegebene Bedingungen erfüllend, einer gegebenen Figur an Flächeninhalt gleich ist.

§. 187. **Ein Dreieck in ein anderes Dreieck verwandeln, welches einen gegebenen Winkel enthalten soll, und eine Seite des Dreiecks soll dabei unverändert bleiben.**

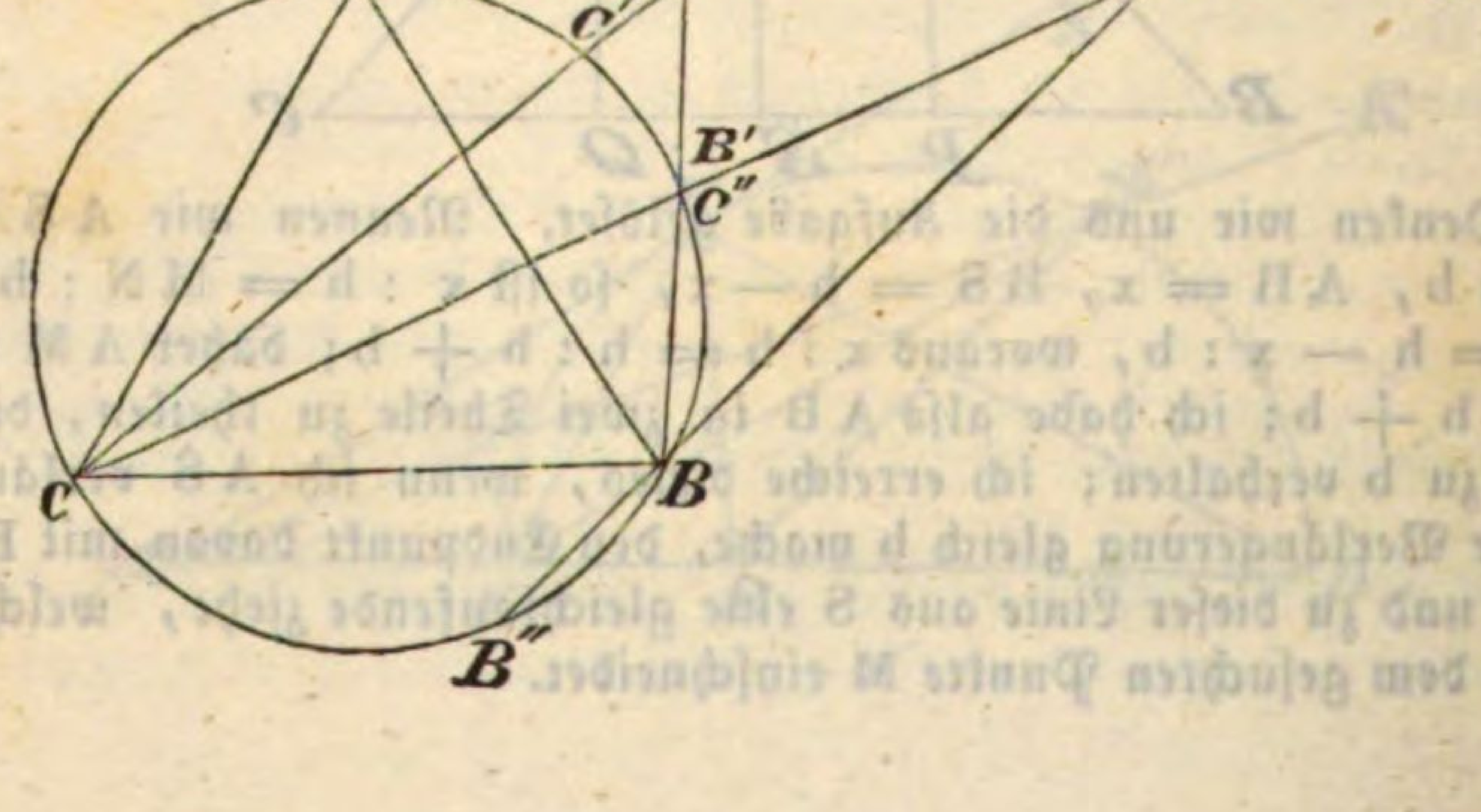
Fig. 190.



Es sey das Dreieck ABC; ziehen wir durch A eine Gleichlaufende AM mit BC. Nehmen wir nun in AM die Punkte A′, A″, A‴, $A_{,}$ $A_{,,}$ u. s. w. an; denken wir uns diese Punkte mit B und C verbunden, so erhalten wir eine Reihe von Dreiecken, die alle denselben Flächeninhalt mit ABC, und alle BC zu ihrer Grundlinie haben; wie man sieht, können wir den Winkel B und eben so C von allen möglichen Größen haben. Soll also der gegebene Winkel an der unveränderten Seite liegen, so ist die Aufgabe jederzeit lösbar. Ich verzeichne mir nämlich an B den gegebenen Winkel, so daß BC der eine Schenkel ist, den anderen Schenkel verlängere ich, bis er die durch A mit BC gleichlaufend Gezogene trifft, den erhaltenen Durchschnittspunkt verbinde ich mit C, so habe ich das gesuchte Dreieck.

Soll aber der gegebene Winkel nicht an der unverändert zu lassenden BC, sondern ihr gegenüber liegen, so ist die Auflösung der Aufgabe beschränkt.

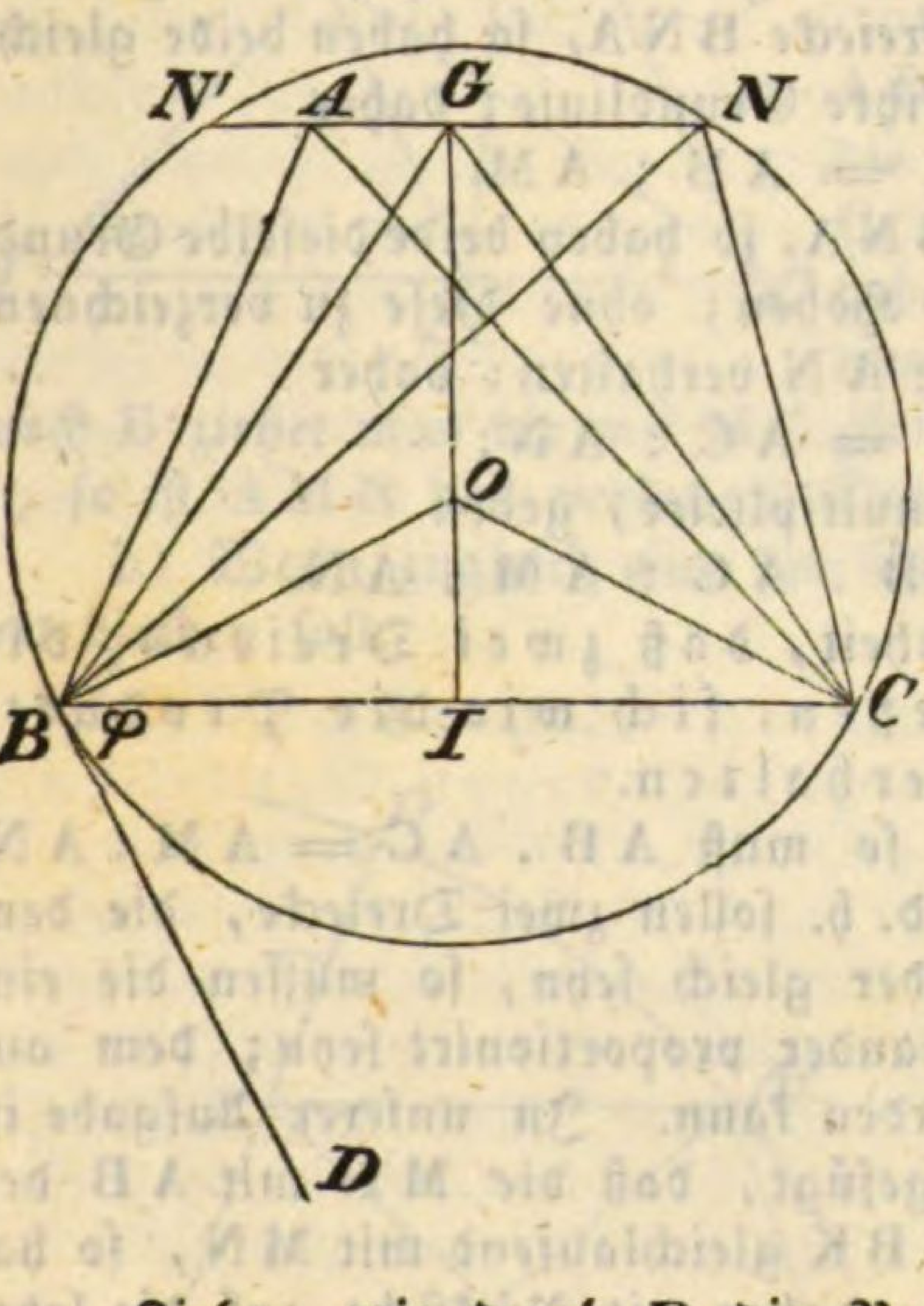
Fig 191.



Es sey das Dreieck A B C, und zwar nehmen wir dasselbe gleichschenklicht an; es sey A C = B A, so kann ich wohl unzählige Dreiecke mit demselben Flächeninhalte auf der Seite B C bilden, wo der der B C gegenüberstehende Winkel kleiner ist, als der Winkel C A B, aber kein Dreieck gleich dem Dreiecke A B C, wo der der B C gegenüber stehende Winkel größer ist als B A C; denn ziehen wir durch A die mit B C gleichlaufende A K, und nehmen wir in derselben die Punkte D und E an, die wir mit C und B verbinden, so muß jeder der Winkel C D B und C E B kleiner seyn als C A B, und eben so jeder andere Winkel, der entsteht, wenn ich einen Punkt der A K mit C und B verbinde; denn der Winkel B A C hat zu seinem Maße den Bogen $\frac{BC}{2}$, der Winkel C D B, $\frac{1}{2}$(B C — B′ C′), der Winkel C E B, $\frac{1}{2}$ (BC — B C″). Wie man sieht, werden die Winkel desto kleiner, je weiter man vom Punkte A den Scheitel wegrückt.

Um nun die Aufgabe zu lösen, das Dreieck A B C in ein anderes gleich großes zu verwandeln, welches auf der Grundlinie B C steht, und der der B C gegenüberstehende Winkel die gegebene Größe φ haben soll, denken wir uns die Aufgabe gelöset.

Fig. 192.



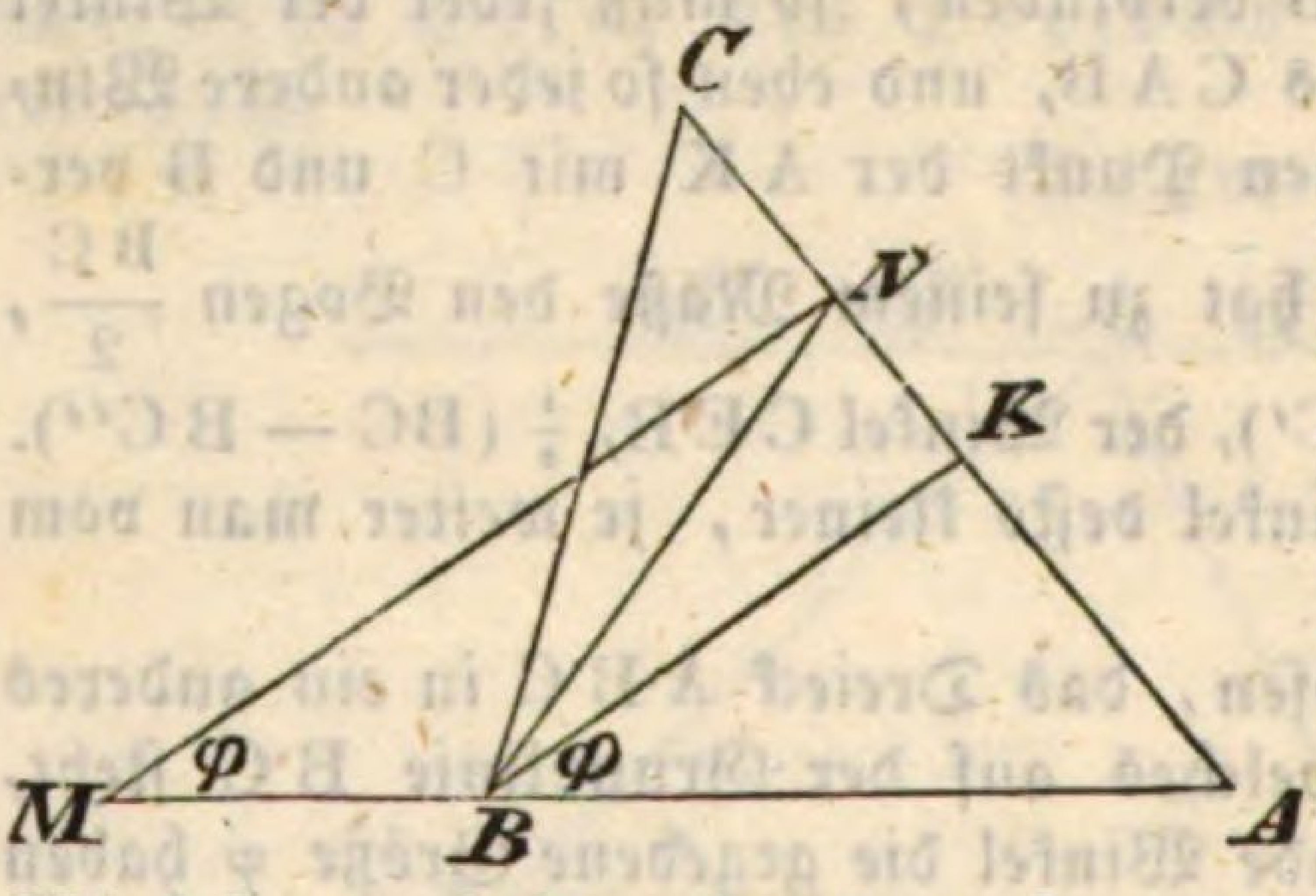
Es sey das gegebene Dreieck A B C das gesuchte Dreieck B N C, der Winkel B N C habe die gegebene Größe φ^0, so muß die Linie N N′ mit B C gleichlaufend seyn, weil A B C = N B C; damit die Aufgabe möglich sey, muß der Winkel φ kleiner seyn, als der Winkel am Scheitel des gleichschenklichten Dreiecks auf B C, zwischen B C und N N′, d. h. $\varphi \leqq$ B G C; ist aber dieses der Fall, so kann der Punkt G nicht außerhalb des Umfanges des Kreises liegen, der durch die Punkte N B C gehet; daher muß die Linie N N′ den Kreis schneiden. Um nun den Punkt N zu finden, der im Umfange eines Kreises liegt, der noch durch die Punkte B und C gehet, bedürfen wir der Lage des Mittelpunktes O.

Ziehen wir durch B die Berührungslinie B D, so ist D B C = B N C = φ; errichte ich nun in B eine Lothrechte auf BD, und im Halbirungspunkte I der B C die lothrechte I G, so schneiden sich beide im Mittelpunkte des verlangten Kreises. Nach dieser Zerlegung haben wir also folgende Verzeichnung.

An der unverändert zu bleibenden B C verzeichnet man den Winkel D B C = φ^0 = dem gegebenen Winkel, in B errichtet man eine

Lothrechte auf BD, und im Halbirungspunkte I der BC ebenfalls eine Lothrechte, beide schneiden sich in O; aus O mit dem Halbmesser BO beschreibt man einen Kreis. Liegt die Spitze A des gegebenen Dreiecks außerhalb des Kreises, so ist die Aufgabe unmöglich; liegt sie innerhalb, so ziehe ich durch N eine gleichlaufende mit BC, wo diese den Kreis schneidet, da sind die verlangten Punkte N′ und N.

Fig. 193.



188. **Ein Dreieck in ein anderes gleich großes zu verwandeln, welches einen Winkel unverändert, und einen zweiten einem gegebenen Winkel gleichen Winkel haben soll.**

Es soll das Dreieck ABC, mit Beibehaltung des Winkels A, in ein anderes gleich großes verwandelt werden, welches den Winkel φ enthalte. Denken wir uns diese Aufgabe aufgelöset, und das verlangte Dreieck sey MNA, die MN muß die CB zwischen C und B schneiden, sonst ist ja entschieden MNA größer als ABC. Vergleichen wir das Dreieck MNA mit dem Dreiecke BNA, so haben beide gleiche Höhen und verhalten sich also wie ihre Grundlinie; daher

$$BNA : MNA = AB : AM.$$

Vergleichen wir ABC mit BNA, so haben beide dieselbe Grundlinie, verhalten sich also wie ihre Höhen; ohne diese zu verzeichnen, sehen wir, daß diese sich wie AC : AN verhalten; daher

$$ABC : BNA = AC : AN;$$

beide Proportionen mit einander multiplicirt, geben

$$ABC : MNA = AB \,.\, AC : AM \,.\, AN.$$

Wir sehen bei dieser Gelegenheit, **daß zwei Dreiecke, die denselben Winkel einschließen, sich wie die Produkte der anliegenden Seiten verhalten.**

Da nun ABC = MNA, so muß AB . AC = AM . AN, daher AB : AM = AN : AC; d. h. sollen zwei Dreiecke, die denselben Winkel einschließen, einander gleich seyn, so müssen die einschließenden Seiten verkehrt zu einander proportionirt seyn; dem auf unzählige Art genüge geleistet werden kann. In unserer Aufgabe ist noch die nähere Bedingung hinzugefügt, daß die MN mit AB den Winkel φ machen soll; ziehen wir BK gleichlaufend mit MN, so hat man; AB : AM = AK : AN, daher mit Rücksicht auf die letzte Proportion AK : AN = AN : AC. Es ist also AN die mittlere geometrische Proportionale zwischen AK und AC. Es ist uns aber der Punkt K gegeben, weil der Winkel φ gegeben ist. Wir haben also folgende Auflösung unserer Aufgabe. Ich verzeichne in B eine Gerade BK, die mit AB den gegebenen Winkel φ macht, suche zwischen AK und AC die mittlere geometrische Proportionale AN, durch N ziehe ich die MN gleichlaufend mit BK, so hat man das verlangte Dreieck MNA.

Durch Vorstehendes ist die Aufgabe gelöset, ein Dreieck zu verzeichnen, das dem Dreiecke ABC gleich, und dem Dreiecke A′B′C′ ähnlich ist; ich darf nur das Dreieck ABC in ein Dreieck verwandeln, welches mit Beibehaltung des Winkels A den Winkel C′ hat; dieses neue Dreieck verwandle ich in ein Dreieck, welches mit Beibehaltung des Winkels C′ den Winkel B′ hat.

Durch Rechnung die Aufgabe gelöset, hat man, wenn h, b, h′, b′, H, B die Höhen und Grundlinien des gleichen, dem ähnlichen und des zu suchenden Dreiecks sind,

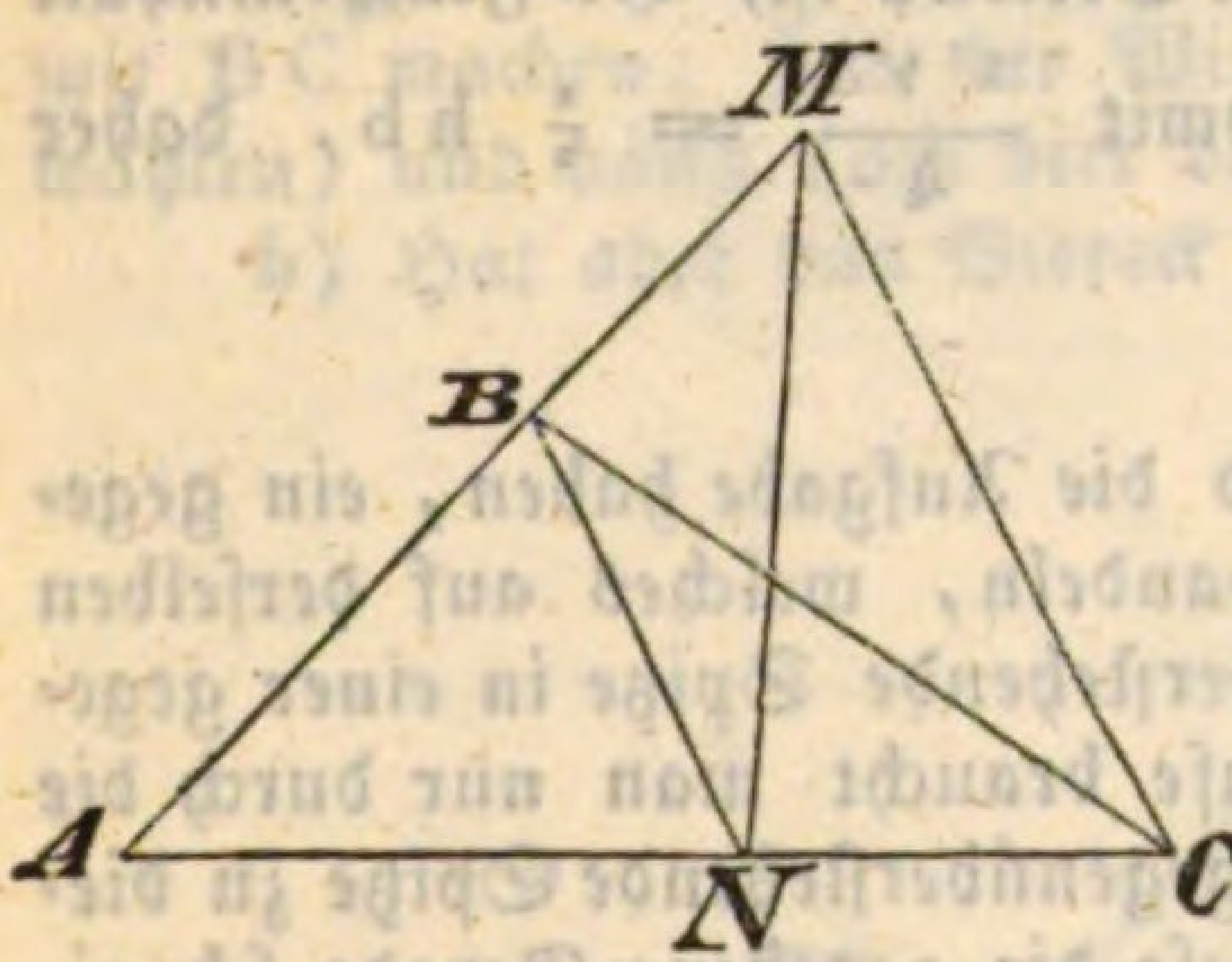
$$HB = hb; \quad \frac{H}{B} = \frac{h'}{b'}, \text{ daher } H^2 = \frac{hh'b}{b'}; \quad B^2 = \frac{hbb'}{h'},$$

wornach die Verzeichnung leicht zu machen.

§. 189. Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Seite enthalten soll.

a) Wenn zugleich ein anliegender Winkel unverändert bleiben soll.

Fig. 194.



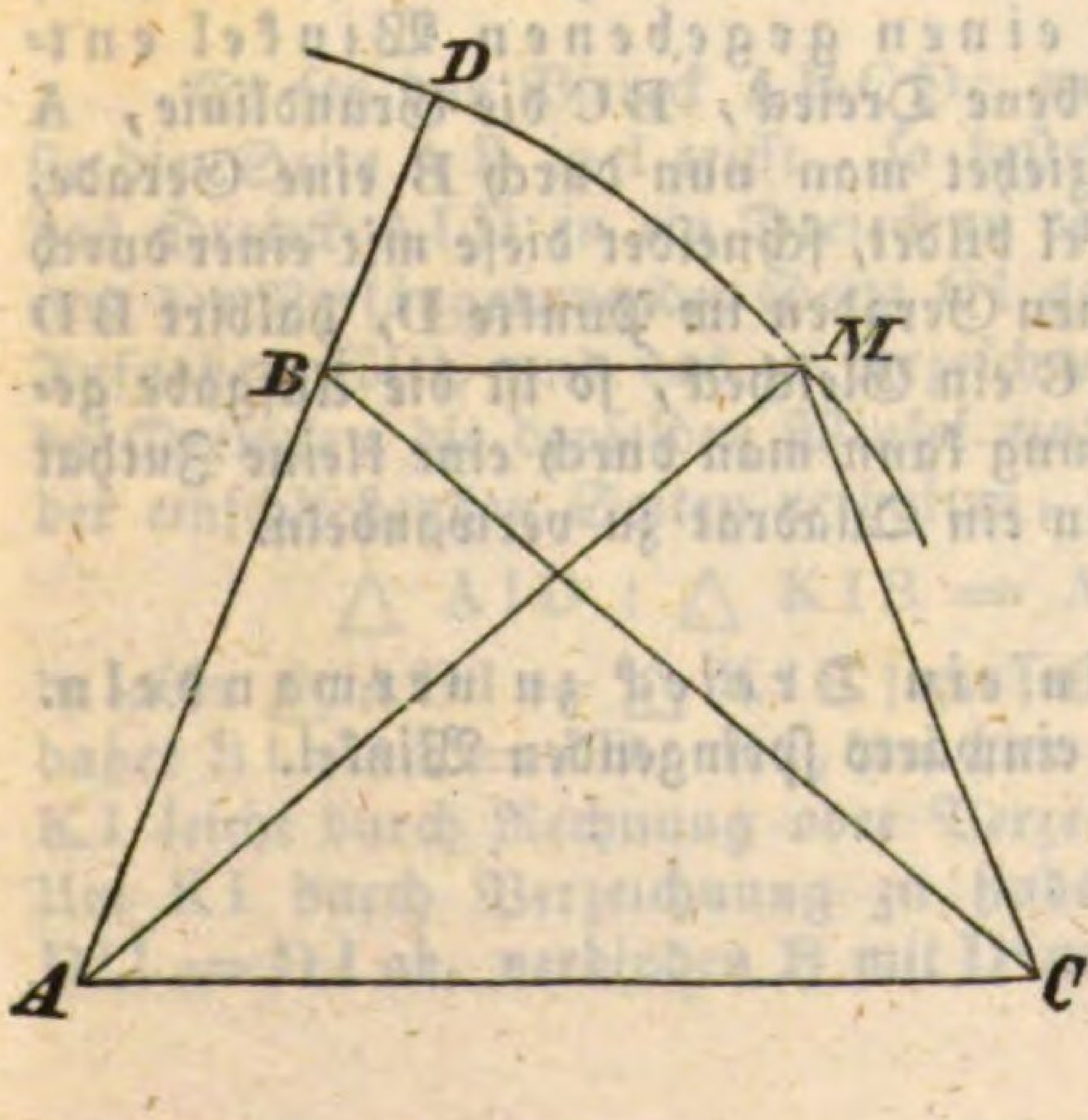
Es soll das Dreieck BAC in ein gleich großes MAN verwandelt werden, welches den Winkel A, und an diesem anliegend die Seite AM enthalten soll. Denken wir uns die Aufgabe aufgelöset, so muß natürlich

AB . AC = AM . AN, daher

AB : AM = AN : AC seyn; daher die Gerade BN ∥ MC, da aber M, C, B gegeben sind, so ist auch N gegeben, und man hat folgende Verzeichnung. — Man verbindet M mit C, durch B ziehet man die mit MC gleichlaufende BN, verbindet M mit N, so ist AMN das verlangte Dreieck.

b) Wenn zugleich eine der Seiten des Dreiecks dabei unverändert bleiben soll.

Fig. 195.



Es soll das Dreieck ABC in ein gleich großes Dreieck AMC verwandelt werden, welches nebst der Seite AC eine der AD gleiche Seite enthält. Denken wir uns wieder die Aufgabe gelöset, so muß, da △ AMC = △ ABC ist, die Gerade BM ∥ AC seyn, und da AD = AM ist, so muß M im Umfange eines Kreises aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AD liegen, also M liegt im Durchschnittspunkte der durch B mit AC gleichlaufend gezogenen Geraden, und im

Umfange eines aus A mit D als Halbmesser gezogenen Kreises, wodurch M gegeben ist, wornach man also leicht die Verzeichnung angeben kann.

c) Wenn der der neuen Seite gegenüberstehende Winkel ein Winkel des gegebenen Dreiecks seyn soll (z. B. A).

Ich verwandle nach a) dieses Paragraphes das gegebene Dreieck in ein Dreieck, wo eine Seite des Dreiecks die gegebene Größe habe, und nach dem vorhergehenden Paragraphe mache ich eine zweite Verwandlung, so daß der der neuen Seite gegenüberstehende Winkel = A werde.

§. 190. Nach dem Vorhergehenden wird es keinem Anstande unterliegen, jedes Dreieck in ein gleich großes gleichseitiges zu verwandeln. Obwohl wir hier die Hülfe der Rechnung der durch bloße Verzeichnung vorziehen wollten. Ist h die Höhe und b die Grundlinie, also $\frac{1}{2}$ hb der Flächeninhalt des gegebenen Dreiecks, so ist, wenn x die Seite des zu suchenden gleichseitigen Dreiecks ist, der Flächeninhalt desselben gleich $\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$. Man hat somit $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}hb$, daher $x = \sqrt{\frac{2hb}{\sqrt{3}}}$, $x = 1{\cdot}07457\sqrt{hb}$.

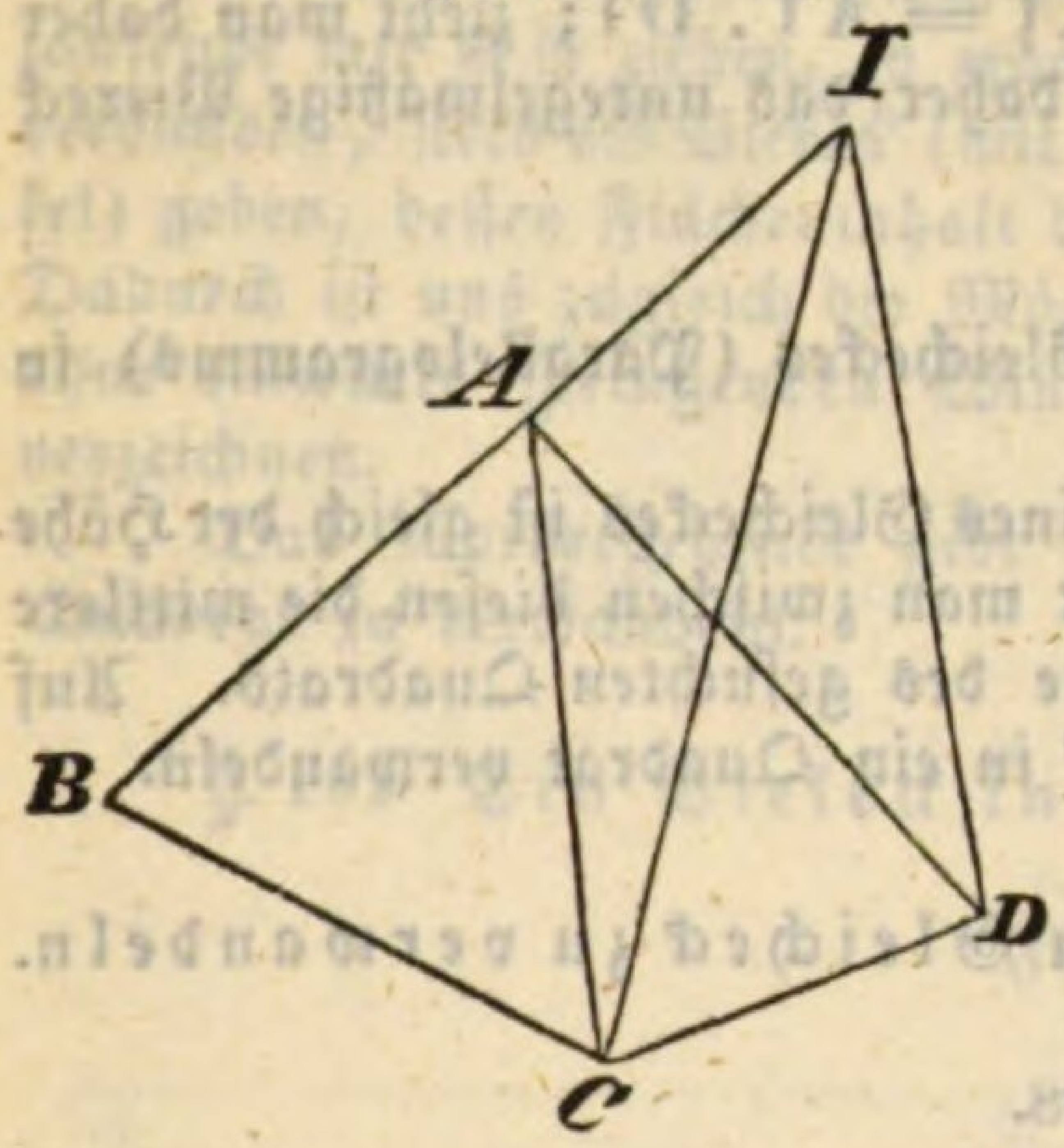
Eben so wenig Schwierigkeit wird die Aufgabe haben, ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches auf derselben Grundlinie stehet, und wo die gegenüberstehende Spitze in einer gegebenen Geraden liegt. Zu diesem Behufe braucht man nur durch die der Grundlinie des gegebenen Dreiecks gegenüberstehende Spitze zu dieser eine gleichlaufende zu ziehen, wo diese die gegebene Gerade schneidet, dort ist die verlangte Spitze. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann man ein gegebenes Dreieck in ein anderes verwandeln, dessen drei Spitzen in drei gegebenen Geraden liegen.

§. 191. **Ein Dreieck in ein Parallelogramm (Gleicheck) zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel enthält.** Es sey ABC das gegebene Dreieck, BC die Grundlinie, A die gegenüberstehende Spitze; ziehet man nun durch B eine Gerade, die mit BC den gegebenen Winkel bildet, schneidet diese mit einer durch A mit BC gleichlaufend gezogenen Geraden im Punkte D, halbirt BD in I, und bildet aus BI und BC ein Gleicheck, so ist die Aufgabe gelöset. Mittelst dieser Verzeichnung kann man durch eine kleine Zuthat die Aufgabe lösen, ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

§. 192. **Ein Viereck in ein Dreieck zu verwandeln.**

a) Das Viereck habe keinen einwärts springenden Winkel.

Fig. 196.



Es sey das Viereck ABCD; um dieses in ein Dreieck zu verwandeln, ziehet man AC; nun kann ich das Dreieck ACD in ein anderes verwandeln, welches auf der Grundlinie AC liegt, und dessen Scheitel durch AB gehet; zu diesem Behufe wissen wir nach dem Früheren hat man die AB zu verlängern, und durch D die mit AC gleichlaufende ID zu ziehen; I mit C verbunden, gibt ein Dreieck IAC = ACD, weil beide gleiche Höhe und dieselbe Grundlinie haben, daher

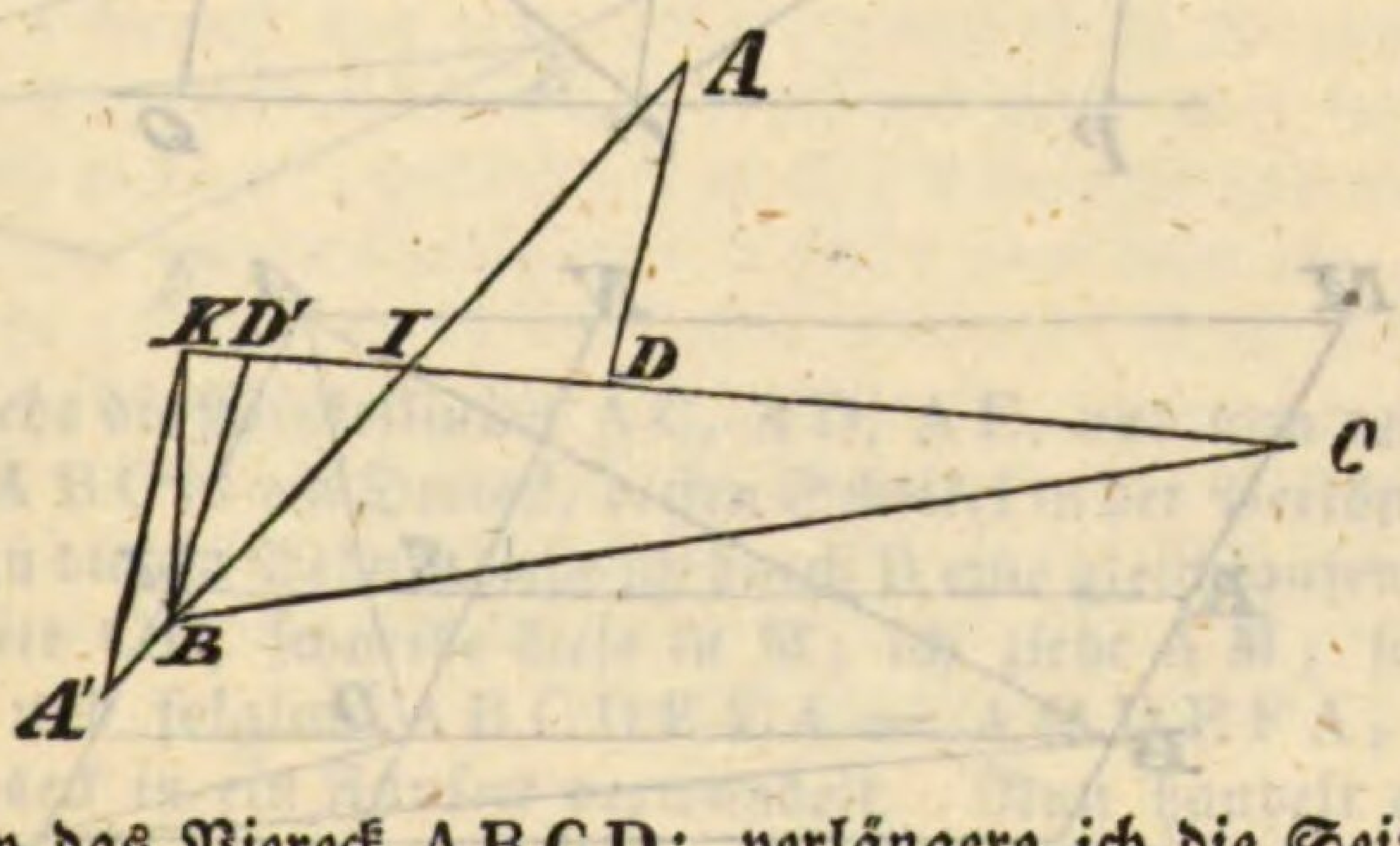
ABC + ACD = ABC + IAC;

folglich ABCD = BCI.

Wie man sieht, sind hier mehrere Auflösungen möglich Statt z. B. AB zu verlängern, könnten wir dieß mit BC machen; statt die Winkellinie AC zu ziehen, kann man BD wählen, und dann auch hier doppelt verfahren.

b) Hat aber das Viereck einen einwärts springenden Winkel.

Fig 197.



Es sey das Viereck ABCD; verlängere ich die Seite CD, bis sie die Seite AB in I trifft, so besteht meine ganze Aufgabe darin, das Dreieck AID in ein Dreieck zu verwandeln, welches von der BI und der Verlängerung der Seite CI gebildet wird; denken wir uns die Aufgabe gelöset, und das zu verzeichnende Dreieck wäre KIB, so muß, da Dreiecke, die denselben Winkel einschließen, sich wie die Produkte der einschließenden Seiten verhalten, nothwendig seyn

$$\triangle\ AID : \triangle\ KIB = AI \,.\, ID : KI \,.\, BI,$$

da aber $\triangle$ ADI = $\triangle$ KIB seyn soll, so muß AI . ID = KI . BI, daher BI : AI = ID : KI, wo hier BI, AI, ID gegeben, und also KI leicht durch Rechnung oder Verzeichnung gefunden werden kann. Um KI durch Verzeichnung zu finden, schneiden wir A′I = AI, D′I = DI ab, verbinden B mit D′ und ziehen durch A′ eine gleichlau-

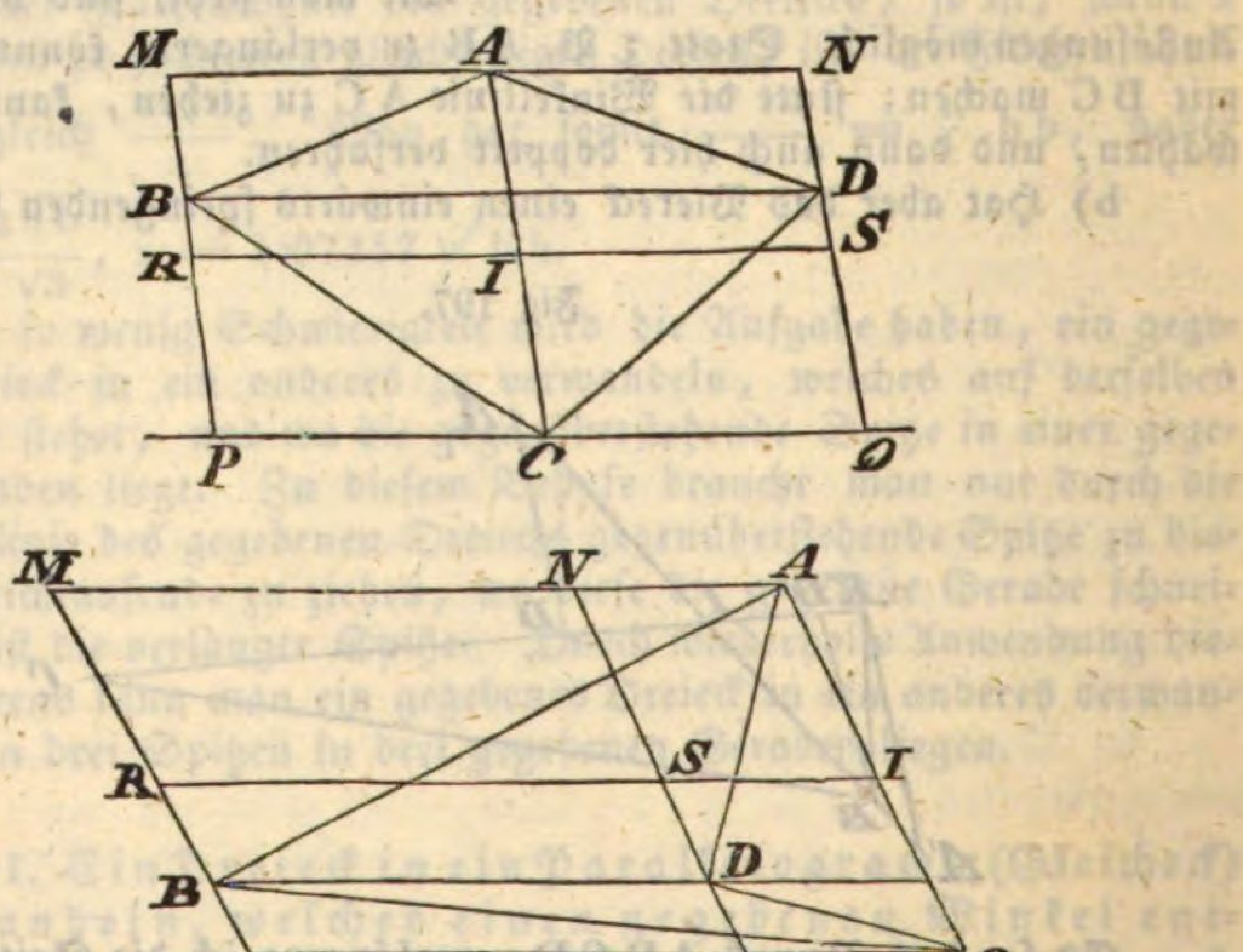
fende A'K mit BD', so hat man: BI : A'I = D'I : KI, d. h. BI : AI = DI : KI, daher BI . KI = AI . DI; zieht man daher BK, so ist △ KIB = △ IAD; daher das unregelmäßige Viereck ABCD gleich dem Dreiecke BKC.

§. 193. Verwandlung eines Gleicheckes (Parallelogramms) in ein Quadrat.

Man weiß, der Flächeninhalt eines Gleicheckes ist gleich der Höhe multiplicirt mit der Grundlinie, sucht man zwischen diesen die mittlere Proportionale, so ist dieses die Seite des gesuchten Quadrats. Auf ähnliche Art läßt sich auch ein Dreieck in ein Quadrat verwandeln.

§. 194. Ein Viereck in ein Gleicheck zu verwandeln.

Fig. 198.



Es sey das Viereck ABCD; ich ziehe die Winkellinien AC und BD, und durch die Punkte A und C gleichlaufende mit BD und durch B und D gleichlaufende mit AC, wodurch das Gleicheck MNPQ entsteht. Auf den ersten Blick sieht man, daß unser Viereck ABCD die Hälfte des Gleichecks MNPQ ist. Halbirt man also AC in I, und ziehet RS ∥ BD, so ist MNSR = ABCD. Man sieht hier zugleich daraus, daß: der Flächeninhalt irgend eines Vierecks gleich dem halben Flächeninhalte eines Gleichecks, welches von den beiden Winkellinien gebildet wird.

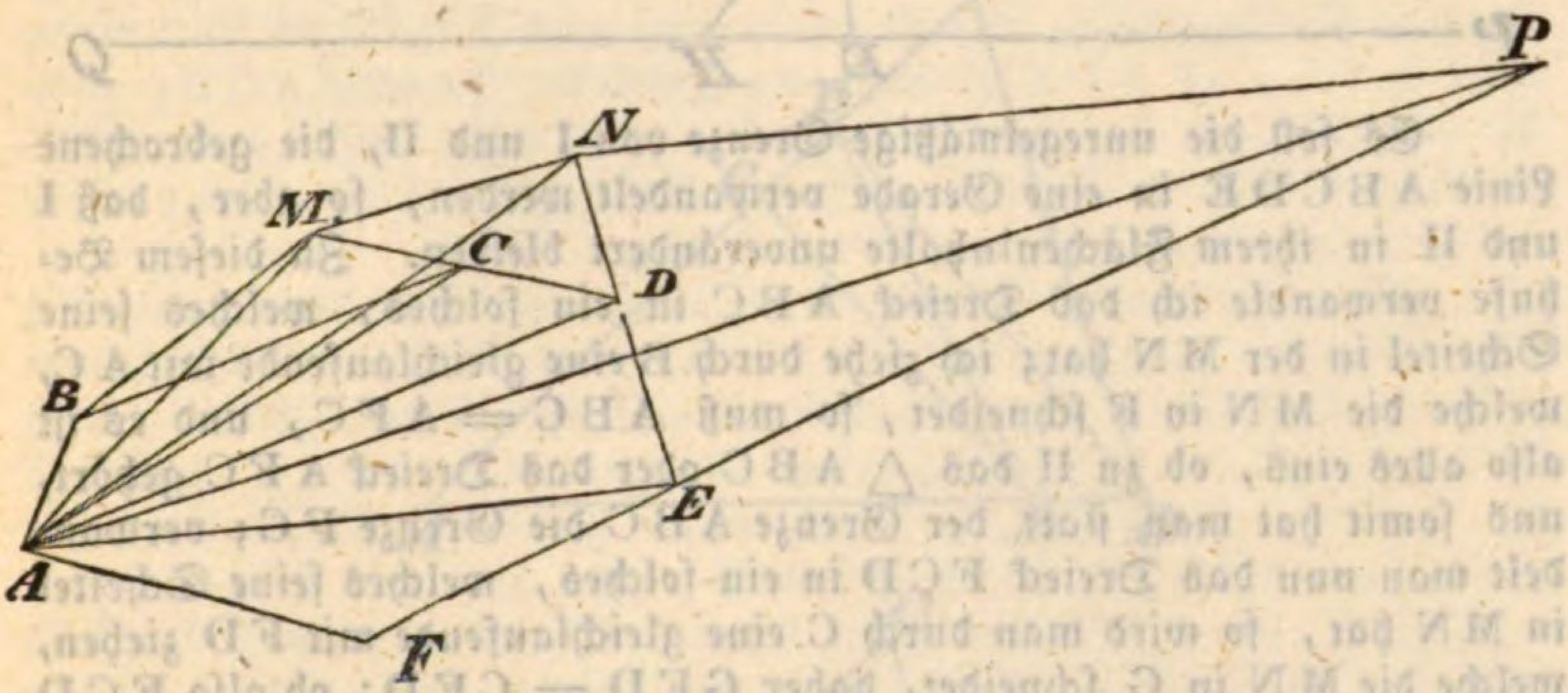
Man sieht zugleich, daß einem und demselben Gleichecke sich unzählige Vierecke von demselben Flächeninhalte einschreiben lassen. Man darf nur einen Punkt A in MN und einen Punkt B in MP anneh-

men, durch A eine Gleichlaufende mit MP und durch B eine Gleichlaufende mit MN ziehen, so erhält man vier Punkte, die, mit einander verbunden, stets ein Viereck (mit oder ohne einwärts springenden Winkel) geben, dessen Flächeninhalt die Hälfte des gegebenen Gleichecks ist. Dadurch ist uns zugleich die Möglichkeit gegeben, ein Viereck mit und ohne einwärts springenden Winkel von gegebenem Flächeninhalte zu verzeichnen.

Das Vorhergehende gibt uns die Mittel, jedes Viereck in ein Quadrat zu verwandeln.

§. 195 Ein Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 199.

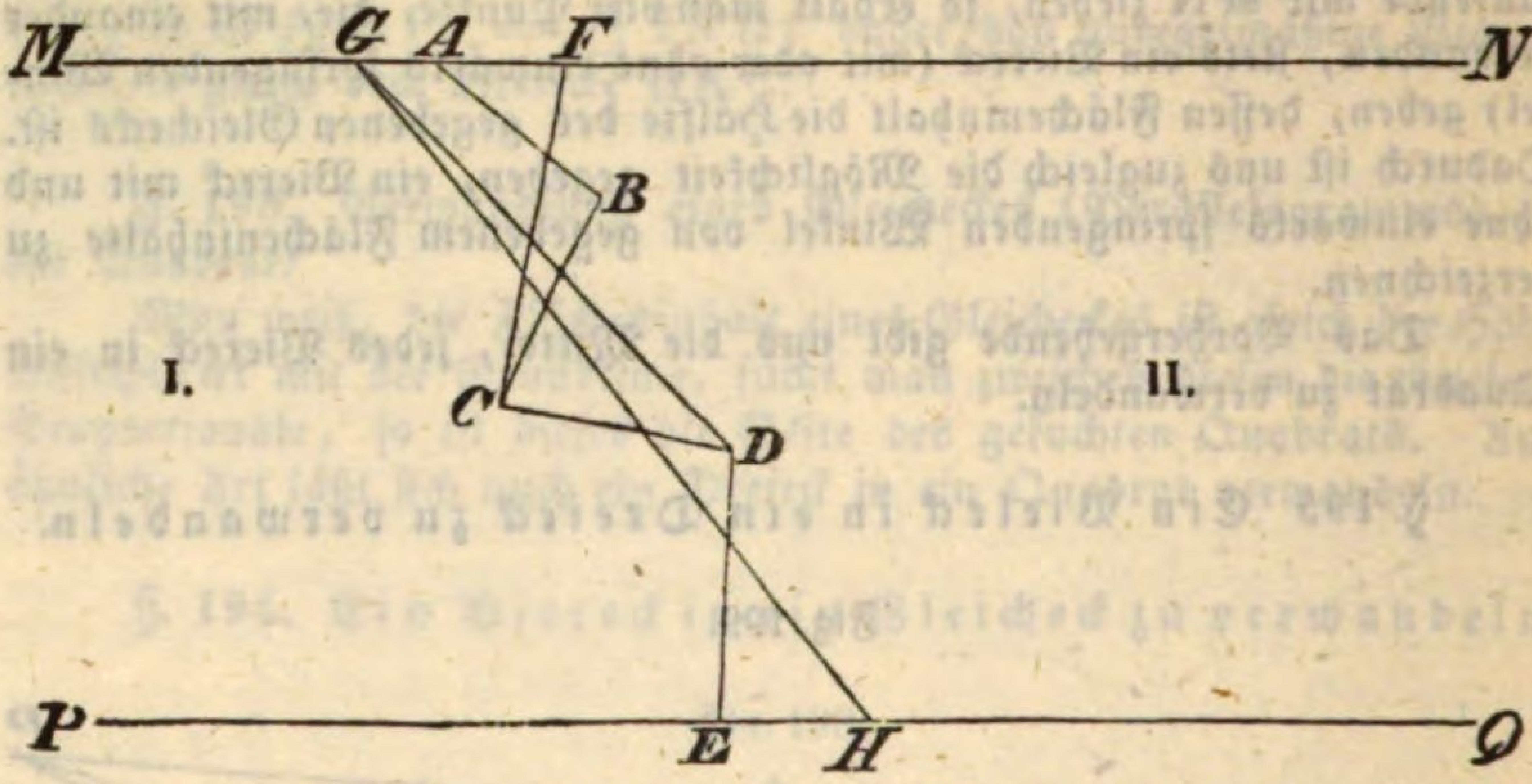


Ich ziehe die Winkellinien AC, AD, AE, und nun verwandle ich das Dreieck ABC in ein Dreieck, dessen Scheitel in der Verlängerung von CD liegt; zu diesem Behufe ziehe ich durch B eine gleichlaufende mit AC, die verlängerte CD, schneide diese in M; ich ziehe AM, so ist AMC = ABC, und folglich ABCDEFA = AMDEFA, und somit ist das Sechseck in ein Fünfeck verwandelt. Nun handelt es sich, das Dreieck AMD in ein Dreieck zu verwandeln, dessen Scheitel in der Verlängerung von DE liegt. Man ziehet daher MN ∥ AD, und verlängert DE, verbindet A mit N, so hat man AMD = AND, daher AMDEFA = ANEFA; nun ziehe ich NP ∥ AE, verlängere EF und verbinde A mit P, daher ANE = AEP, und somit ANEFA = APF, daher ist unser Vieleck ABCDEFA = APF.

Man sieht aus der Lösung der Aufgabe, daß sich Vielecke auf verschiedene Art in ein Dreieck verwandeln lassen, daher man noch nähere Bestimmungen der Aufgabe hinzufügen kann.

§. 196. Die unregelmäßige Grenze zweier Stücke in eine gerade Linie zu verwandeln.

Fig. 200.

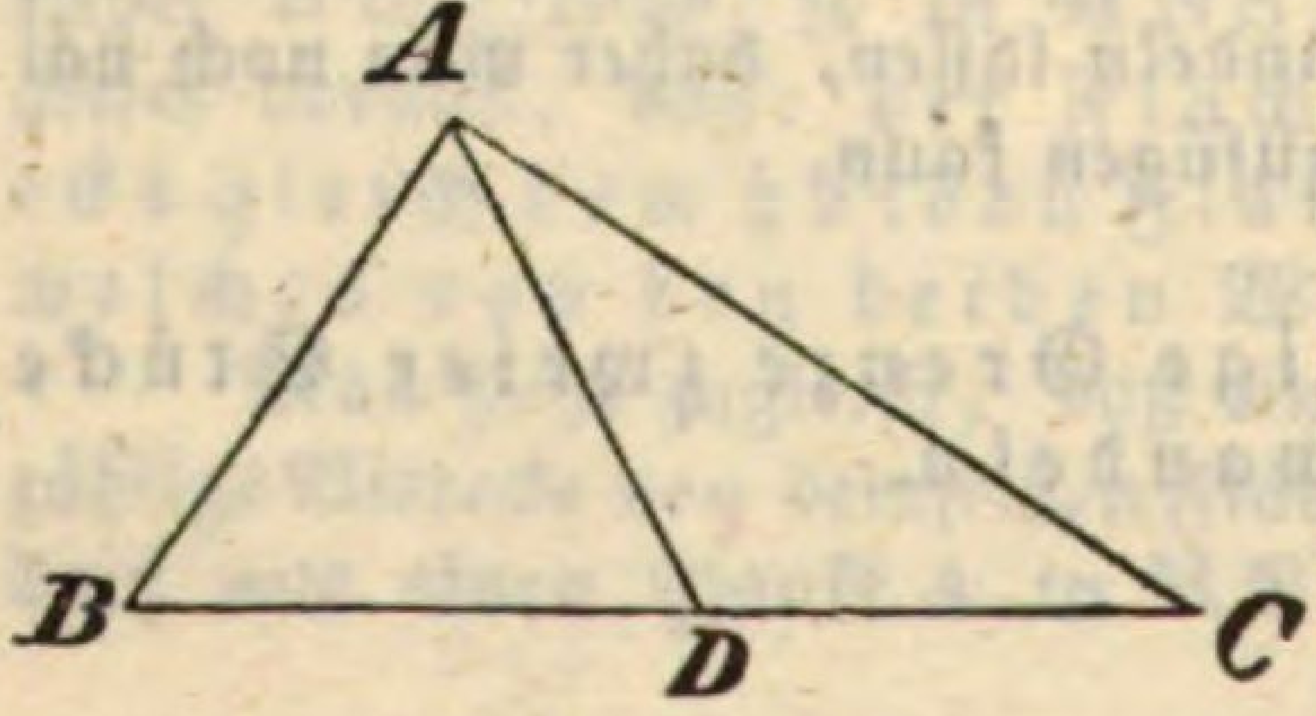


Es soll die unregelmäßige Grenze von I und II, die gebrochene Linie ABCDE in eine Gerade verwandelt werden, so aber, daß I und II in ihrem Flächeninhalte unverändert bleiben. Zu diesem Behufe verwandle ich das Dreieck ABC in ein solches, welches seine Scheitel in der MN hat; ich ziehe durch B eine gleichlaufende mit AC, welche die MN in F schneidet, so muß ABC = AFC, und es ist also alles eins, ob zu II das △ ABC oder das Dreieck AFC gehört, und somit hat man statt der Grenze ABC die Grenze FC; verwandelt man nun das Dreieck FCD in ein solches, welches seine Scheitel in MN hat, so wird man durch C eine gleichlaufende mit FD ziehen, welche die MN in G schneidet, daher GFD = CFD; ob also FCD oder GFD zu I gehört, ist alles eins, daher hat man statt der Grenze FCD die Grenze GD, d. h. statt der Grenze ABCD die Grenze GD, oder statt ABCDE die GDE. Ziehet man nun durch D eine gleichlaufende mit GE, welche die PQ in H schneidet, so ist GDE = GEH, und somit ist GH die verlangte Grenze.

IV. Theilung der Figuren.

§. 197. **Es soll ein Dreieck durch eine durch einen Eckpunkt gehende Theilungslinie in zwei Theile getheilt werden, die sich wie m : n verhalten.**

Fig. 201.

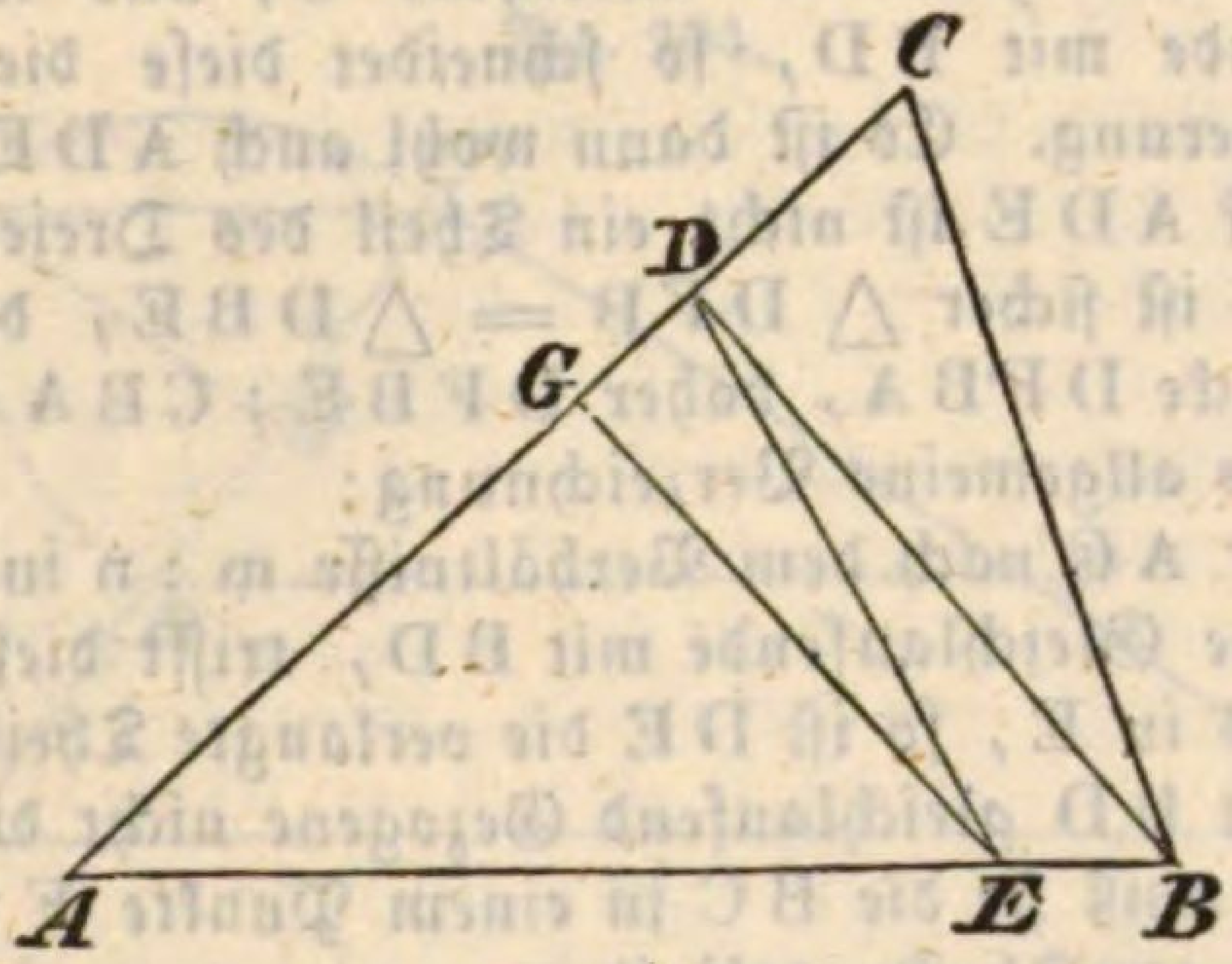


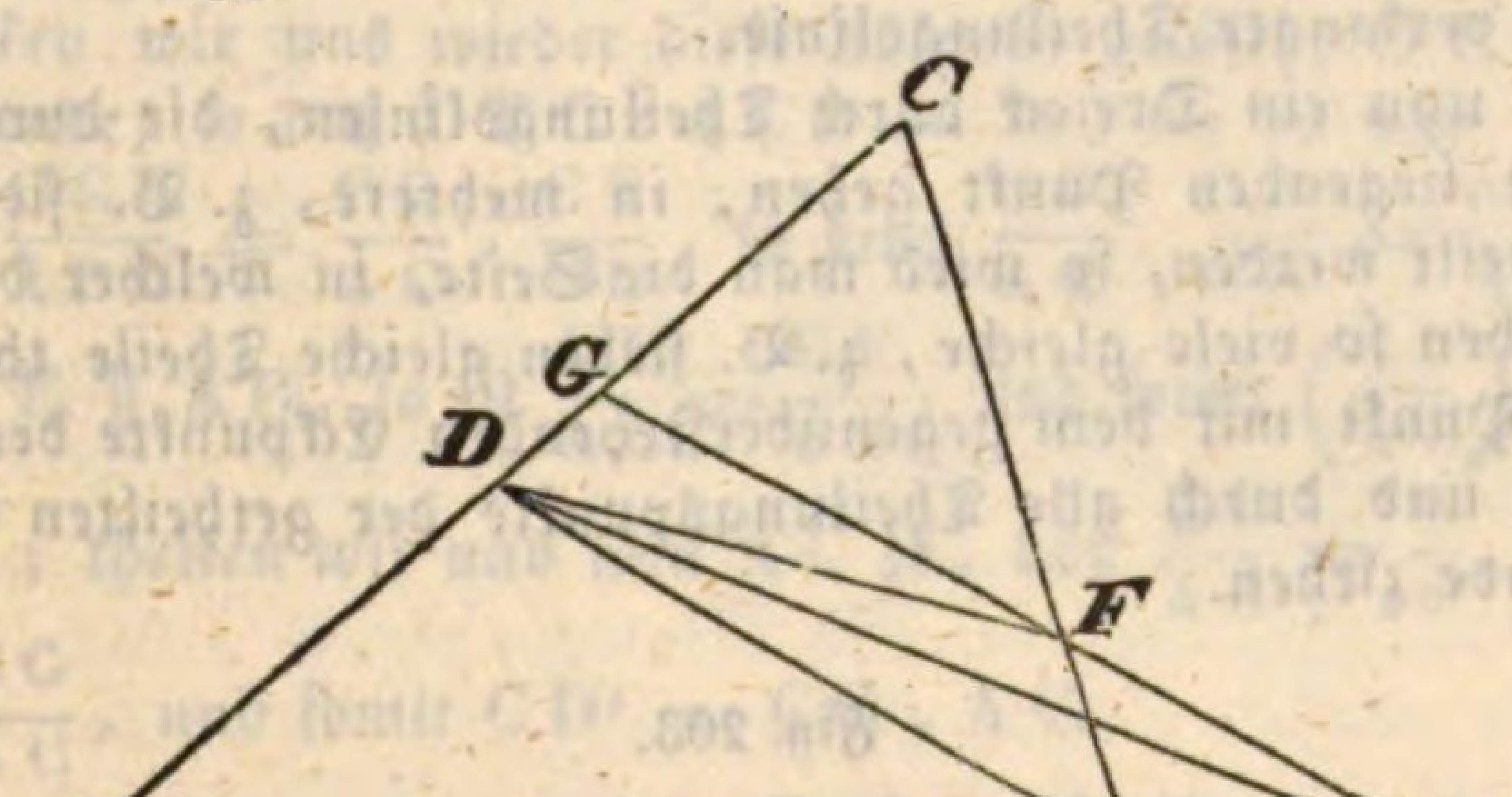
Ist AD die gesuchte Theilungslinie, so werden die Dreiecke ABD und ADC, die dieselbe Höhe haben, sich wie ihre Grundlinien verhalten; soll ABD : ADC = m : n, so hat man nichts anders zu thun, als BC in zwei Stücke BD und DC zu theilen, die sich wie m : n verhalten; man verbindet dann D mit A, und die Aufgabe ist gelöset.

Soll daher das Dreieck ABC in eine beliebige Zahl gleicher Dreiecke getheilet werden, die durch A durchgehen, so wird man BC in eben so viele gleiche Theile theilen, und die Theilungspunkte mit A verbiuden.

§. 198. Ein gegebenes Dreieck ABC mittelst einer durch einen in der Seite AC gegebenen Punkt D gehenden Geraden so in zwei Theile zu theilen, daß der dem Winkel A enthaltende Theil zum ganzen Dreiecke sich verhalte wie m : n (wo natürlich $m < n$).

Fig. 202.





Denken wir uns diese Aufgabe aufgelöset, und DE sey die verlangte Gerade, so also, daß $ADE : ACB = m : n$ sey; da nun aber $ADE : ABC = AD \, . \, AE : AC \, . \, CB$, so muß also

$$AD \, . \, AE : AC \, . \, AB = m : n;$$

hier ist die einzige unbekannte AE, man kann sie durch diese Proportion bestimmen, und hat

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AC}{AD} \, . \, \frac{m}{n} \text{ oder } AE = \frac{AC}{AD} \, . \, \frac{m}{n} \, . \, AB \quad (1).$$

Würde sich $\frac{AD}{AC} = \frac{m}{n}$ verhalten, so hätte man $AE = AB$, und die verlangte Gerade wäre dann DB. Theilen wir nun AC nach dem Ver-

hältnisse m : n in dem Punkte G, so daß $\frac{AG}{AC} = \frac{m}{n}$, so haben wir hier zwei Fälle zu unterscheiden, entweder liegt D oberhalb oder unterhalb G. Wir haben, wenn man in der Gleichung (1) statt

$$\frac{m}{n} \text{ das } \frac{AG}{AC} \text{ setzet, } AE = \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AG}{AC} \cdot AB,$$

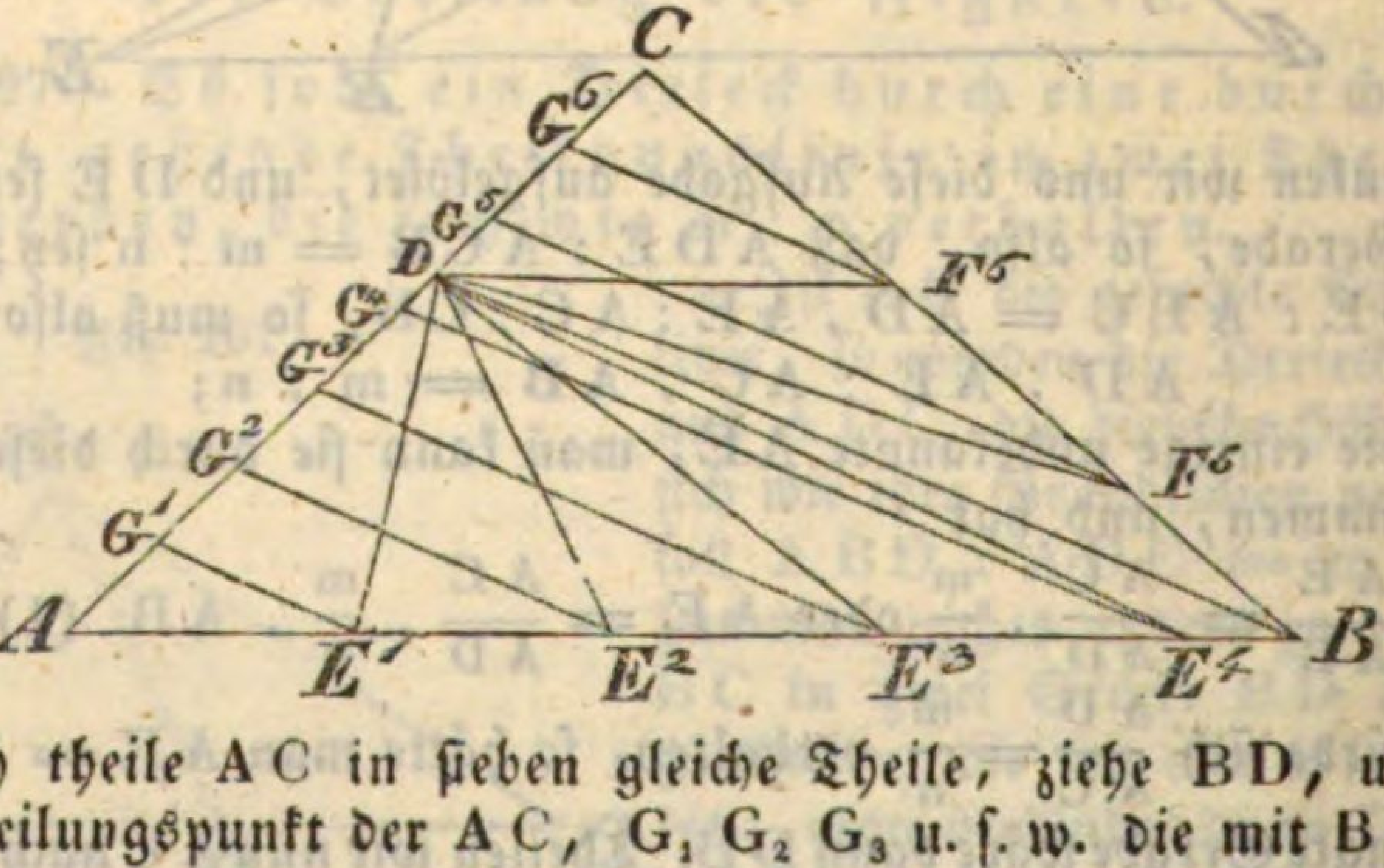
woraus $\frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD}$, woraus natürlich folgt, daß BD ∥ GE ist; da nun B, D, G gegebene Punkte sind, so hat man folgende Verzeichnung: Man verbindet den gegebenen Punkt D mit B, und ziehet durch G die mit BD gleichlaufende GE, verbindet D mit E, so hat man die gesuchte DE.

Liegt aber der Punkt D unterhalb G, und ich ziehe durch G eine gleichlaufende mit BD, so schneidet diese die Seite AB erst in ihrer Verlängerung. Es ist dann wohl auch ADE : ACB = m : n, aber das Dreieck ADE ist nicht ein Theil des Dreiecks ACB; ziehe ich aber DF, so ist sicher △ DFB = △ DBE, daher auch ADE gleich dem Vierecke DFBA, daher DFBE : CBA = m : n; daher hat man folgende allgemeine Verzeichnung:

Man theilt AC nach dem Verhältnisse m : n in dem Punkte G, zieht durch G eine Gleichlaufende mit BD, trifft diese die AB innerhalb des Dreiecks in E, so ist DE die verlangte Theilungslinie; trifft diese durch G mit BD gleichlaufend Gezogene nicht die AB innerhalb des Dreiecks, so muß sie die BC in einem Punkte F schneiden, dann ist DF die verlangte Theilungslinie.

Soll nun ein Dreieck durch Theilungslinien, die durch einen in einer Seite liegenden Punkt gehen, in mehrere, z. B. sieben gleiche Theile getheilt werden, so wird man die Seite, in welcher dieser Punkt liegt, in eben so viele gleiche, z. B. sieben gleiche Theile theilen, den gegebenen Punkt mit dem gegenüberstehenden Eckpunkte des Dreieckes verbinden, und durch alle Theilungspunkte der getheilten Seite dazu gleichlaufende ziehen.

Fig. 203.



Ich theile AC in sieben gleiche Theile, ziehe BD, und durch jeden Theilungspunkt der AC, G_1 G_2 G_3 u. s. w. die mit BD gleich-

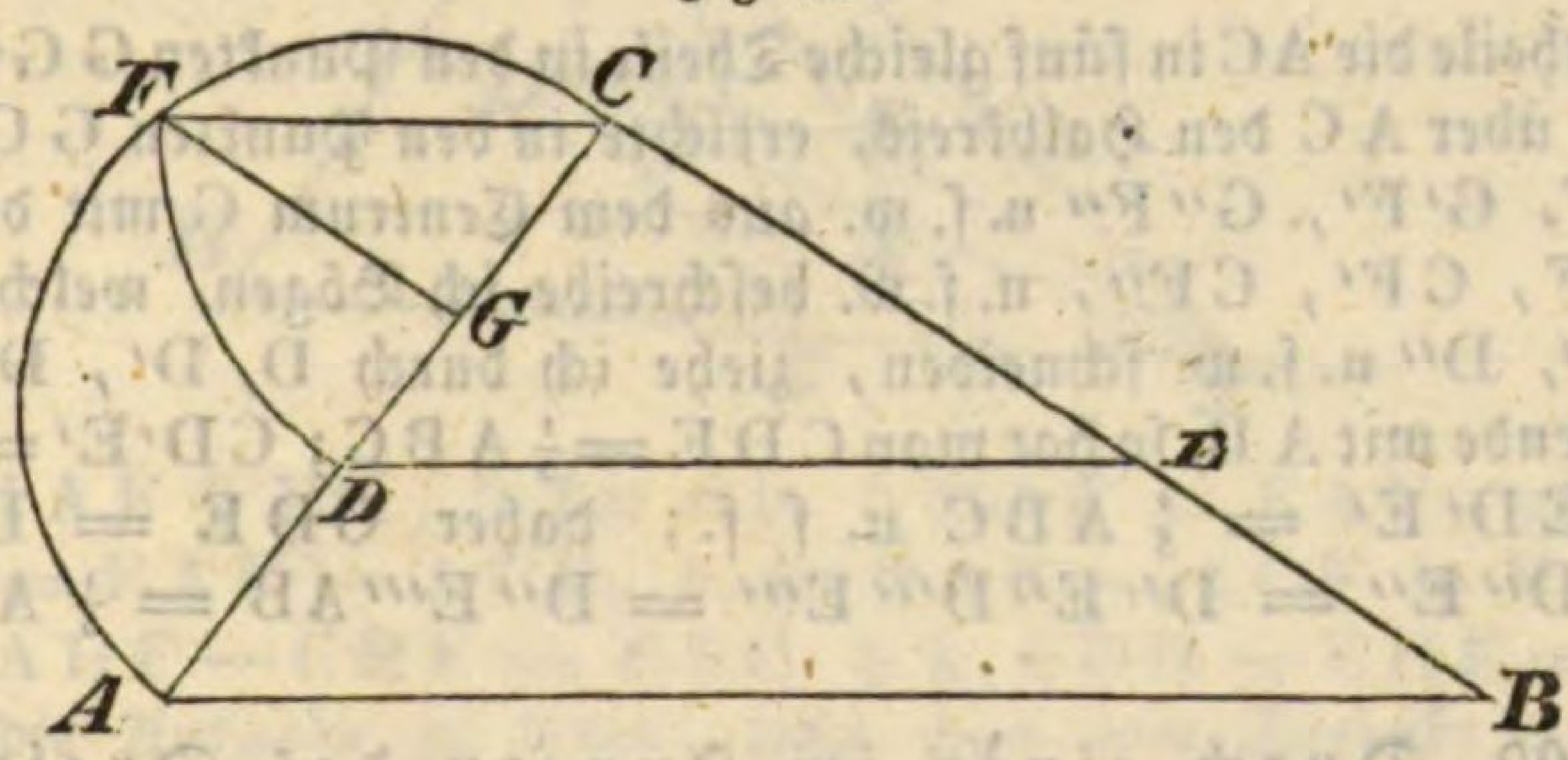
laufenden G_1 E_1 G_2 E_2 u. s. w., schneiden diese nicht mehr die AB, so schneiden sie die CB in F_5 F_6.

Da $AG_1 : AC = 1 : 7$, so folgt nach dem Früheren $ADE_1 = \frac{1}{7} ACB$
» $AG_2 : AC = 2 : 7$ » » » » $ADE_2 = \frac{2}{7} ACB$
» $AG_3 : AC = 3 : 7$ » » » » $ADE_3 = \frac{3}{7} ACB$ u. s. f.,
und man hat so:

$$ADE_1 = E_1DE_2 = E_2DE_3 = E_3DE_4 = E_4DF_5B = DF_5F_6 = CDF_6 = \frac{1}{7} ACB.$$

§. 199. **Von einem Dreiecke durch eine mit einer Seite des Dreiecks gleichlaufende Gerade ein Stück abschneiden, welches sich zum Dreiecke verhält wie m:n.**

Fig. 204.



Denken wir uns wieder diese Aufgabe gelöset; DE sey die verlangte Gerade, so daß $DEC : ACB = m : n$; da nun

$$\frac{DCE}{ABC} = \frac{CD}{AC} \cdot \frac{CE}{CB}, \text{ so muß } \frac{CD}{AC} \cdot \frac{CE}{CB} = \frac{m}{n},$$

da aber $DE \parallel AB$, so ist $\frac{CD}{AC} = \frac{CE}{CB}$, und somit $\left(\frac{CD}{AC}\right)^2 = \frac{m}{n}$ oder $\frac{CD^2}{AC^2} = \frac{m}{n}$; theilen wir uns nun AC so, daß $\frac{CG}{AC} = \frac{m}{n}$, so hat man $\frac{CD^2}{AC^2} = \frac{CG}{AC}$, und somit $CD^2 = CG \, . \, AC$.

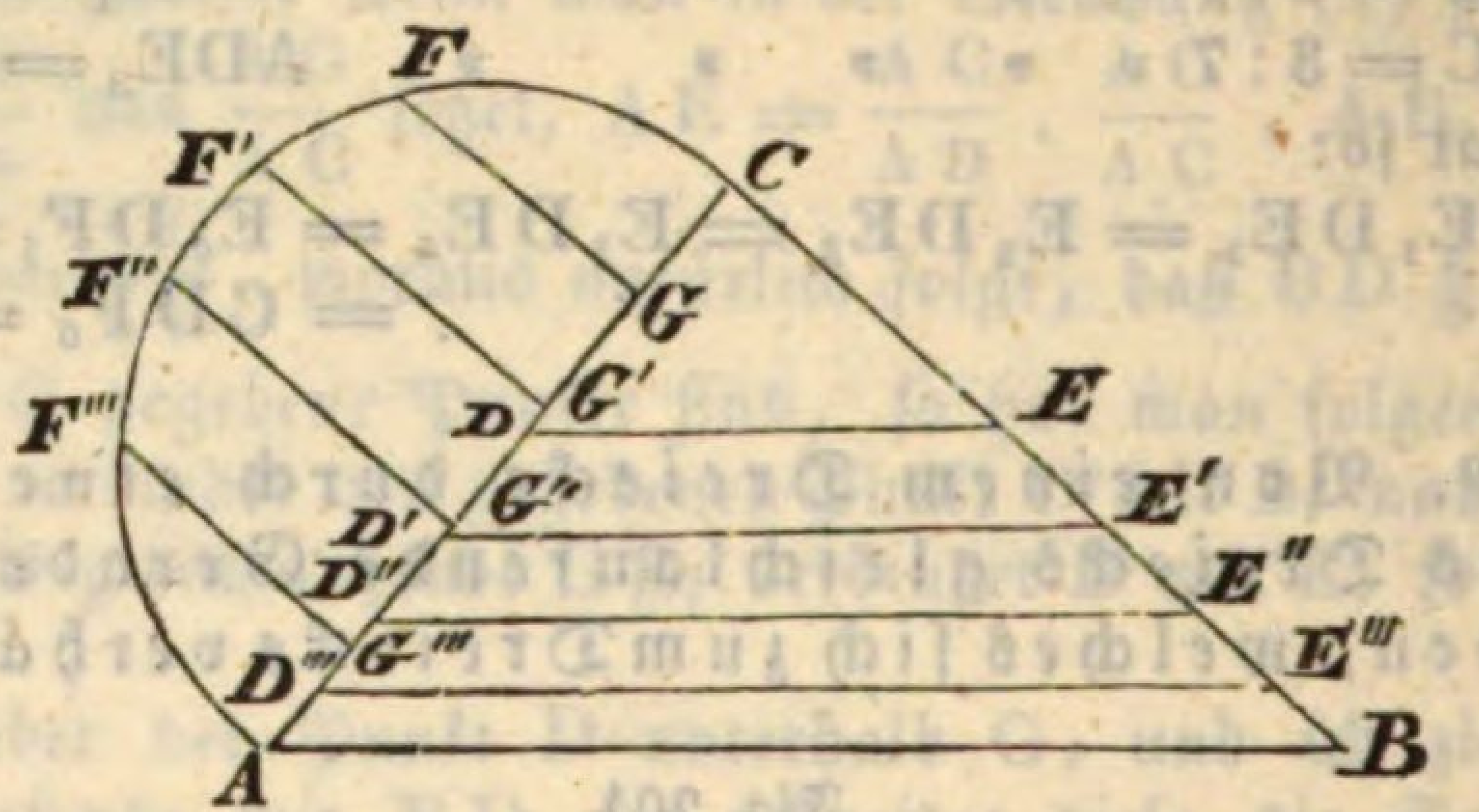
Da nun CG und AC bekannt sind, so ist es auch CD. Man wird also zwischen CG und AC die mittlere Proportionale suchen, zu diesem Behufe über AC als Durchmesser einen Halbkreis beschreiben, in G ein Loth errichten FG, so wird FG die mittlere Proportionale zwischen CG und AC seyn, daher muß $CD = CF$ seyn; daher ein Kreis aus C mit dem Halbmesser CF beschreiben, uns den zu suchenden Punkt D abschneidet. Um also von ABC ein Dreieck abzuschneiden, dessen neue Seite $\parallel$ AB, und welches sich zu ABC wie $m : n$ verhaltet, wird man AC im Verhältnisse wie $m : n$ theilen, im Punkte G, zwischen AG und AC die mittlere Proportionale suchen, wodurch man den Punkt D findet, zieht man dann

$DE \parallel AB$, so ist $CDE : ABC = m : n$.

Hieraus ergibt sich, wie man durch mit einer Seite gleichlaufen-

den Theilungslinien ein Dreieck in mehrere, z. B. fünf gleiche Theile theilet.

Fig. 205.

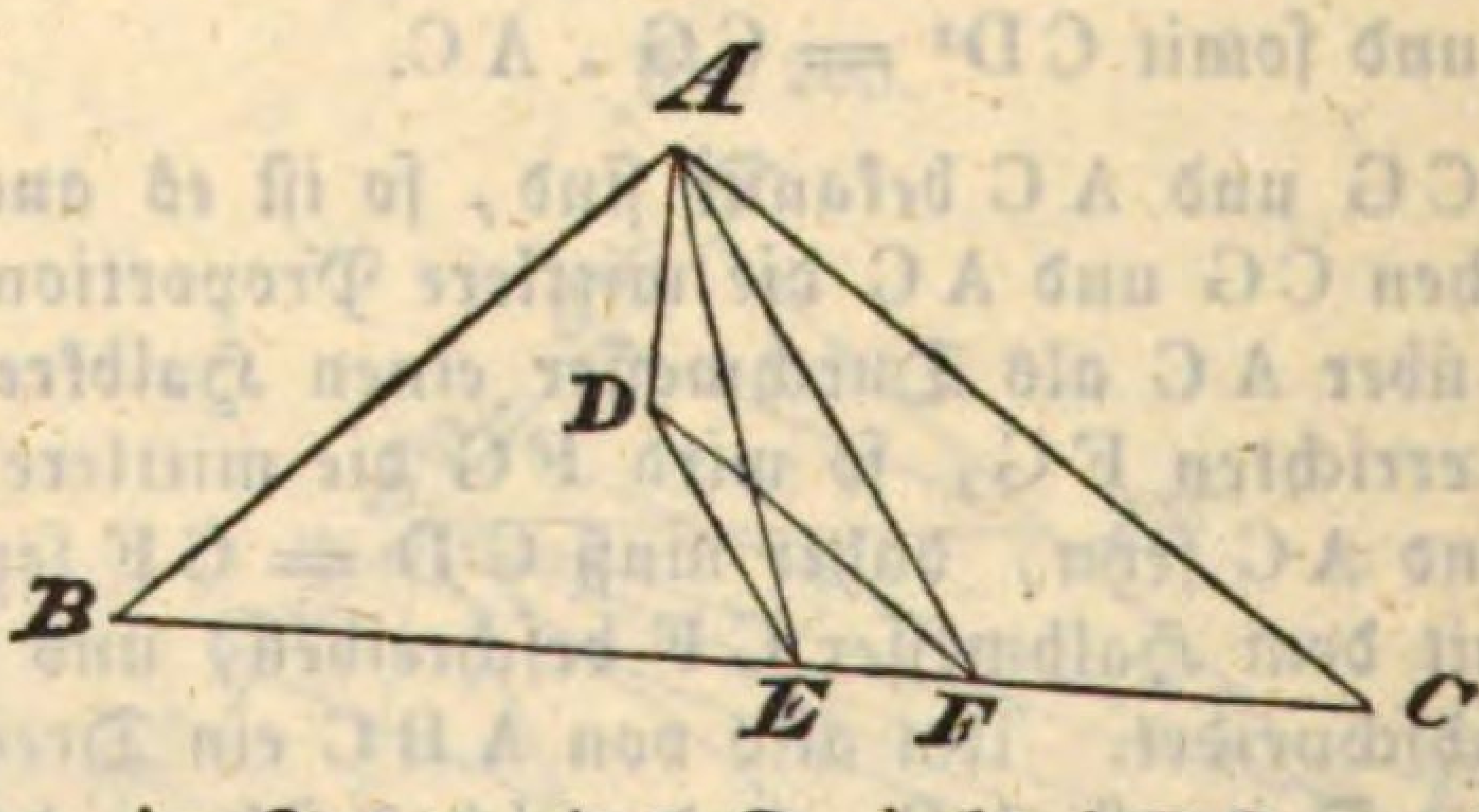


Ich theile die AC in fünf gleiche Theile in den Punkten G G′ G″ G‴, beschreibe über AC den Halbkreis, errichte in den Punkten G G′ G″ G‴ Lothe GF, G′F′, G″F″ u. s. w. aus dem Centrum C mit dem Halbmesser CF, CF′, CF″, u. s. w. beschreibe ich Bögen, welche die AC in D, D′, D″ u. s. w. schneiden, ziehe ich durch D, D′, D″ u. s. w. gleichlaufende mit AB, so hat man CDE $= \frac{1}{5}$ ABC; CD′E′ $= \frac{2}{5}$ ABC, daher DED′E′ $= \frac{1}{5}$ ABC u. s. f.; daher CDE = DED′E′ = D′E′D″E″ = D″E″D‴E‴ = D‴E‴AB $= \frac{1}{5}$ ABC.

§. 200. **Durch einen im Innern des Dreiecks liegenden Punkt das Dreieck in zwei Theile theilen, die sich wie m : n verhalten.**

Im Allgemeinen werden zwei Grenzlinien, die durch den gegebenen Punkt gehen, nothwendig seyn, wovon eine willkürlich ist. (Wir wollen später die Lösung dieser Aufgabe durch eine einzige Grenzlinie zeigen.) Nehmen wir zuerst an, die eine Grenzlinie gehe durch einen Eckpunkt des Dreiecks.

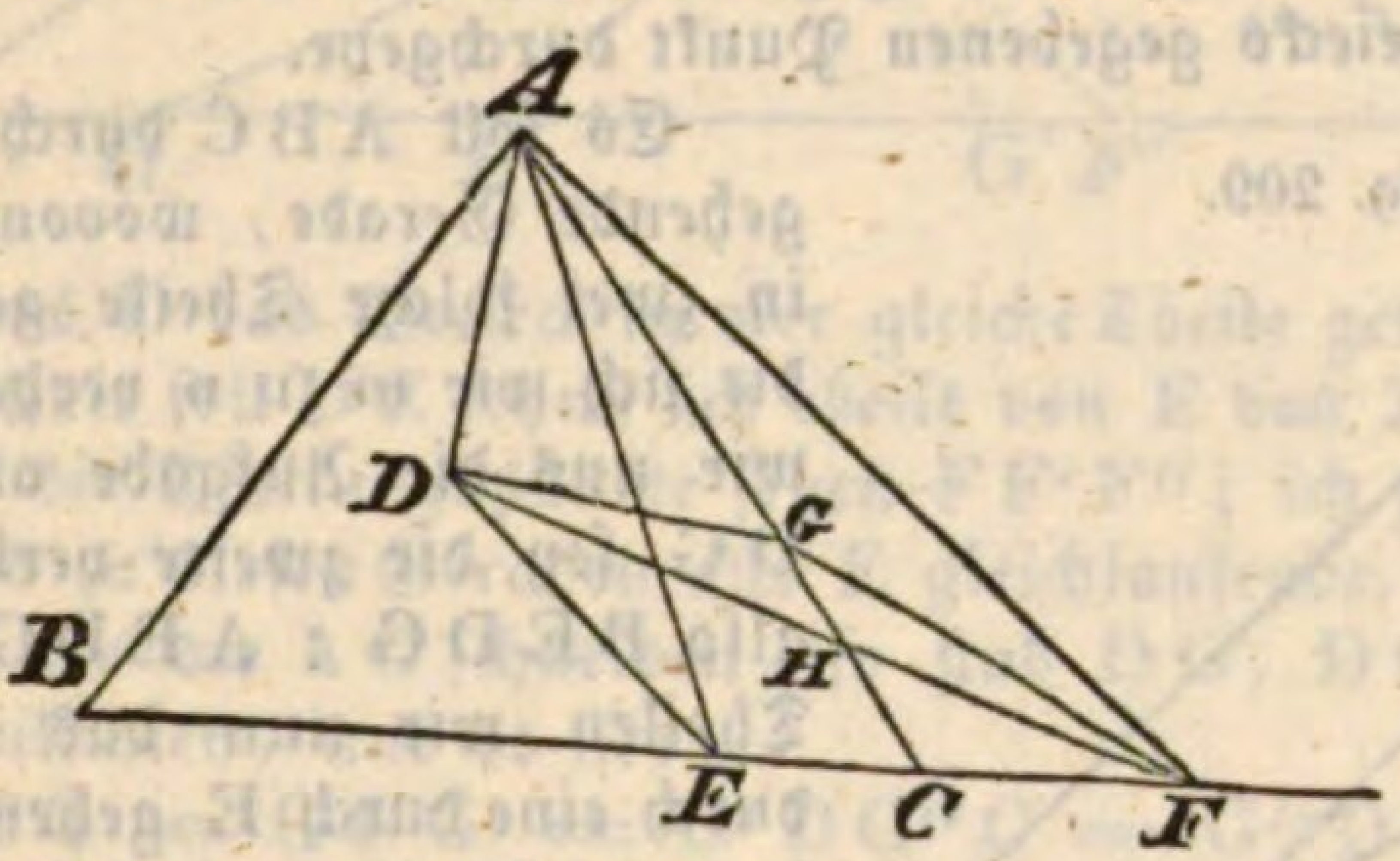
Fig. 206.



Es sey der im Innern des Dreiecks ABC gegebene Punkt D. Man zieht AD, und es wird eine Gerade DF dergestalt verlangt, daß die Figur BADF zu ADFC sich verhalte wie m : n. Theilet man die BC so, daß BE : EC = m : n, so ist sicher BAE : EAC = m : n, daher EAC $= \frac{n}{m+n}$. ABC; es muß daher die Figur ADFC = EAC

seyn, oder wenn man beiderseits FAC wegnimmt, EAF = DAF, damit aber dieses sey, muß DE ∥ AF seyn, wodurch wir die Auflösung unserer Aufgabe erhalten. — Man wird nämlich BC in E nach dem Verhältnisse m : n theilen, D mit E verbinden, durch A die AF ∥ DE ziehen, D mit F verbinden. — Hiebei kann es aber geschehen, daß der Punkt außerhalb des Dreiecks fällt. Wir wollen sehen, was da zu thun ist.

Fig. 207.

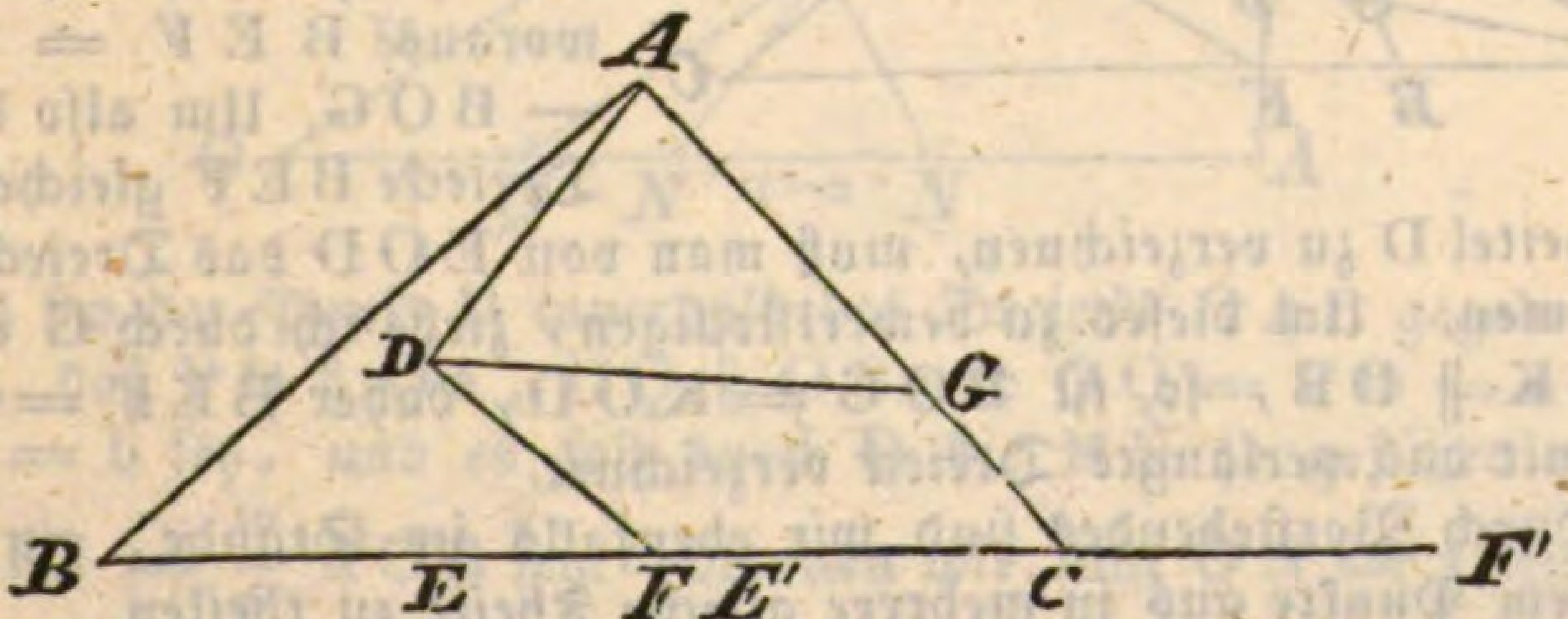


Weil AF ∥ DE, so hat man △DAF = EAF, also DAF — ACF = EAF — ACF, d. h. DAF — ACF = EAC oder DAF — AHF — CHF = EAC, d. h. ADH — CHF = EAC; um also die Aufgabe zu lösen, muß man vom Dreiecke ADH ein Stück = CHF so wegnehmen, daß die Theilungslinie durch D durchgeht; es muß also die Gerade DG so gezogen werden, daß DH . GH = CH . HF, d. h. DH : HF = CH : GH, d. h. es muß durch F eine Gerade GF ∥ CD gezogen, dann ist DGH = HCF, daher da ADH — CHF = EAC ist, folglich ADH — DGH = EAC hat man ADG = EAC, und somit die Aufgabe gelöset.

Fällt also F außerhalb des Dreiecks, so zieht man durch F eine mit DC Gleichlaufende, und wo diese (hier in G) einschneidet, die andere Seite, diesen Punkt verbindet man mit dem gegebenen.

Dieß eröffnet uns den Weg, ein Dreieck in mehrere gleiche Theile zu theilen, wo die Theilungslinien alle durch einen im Inneren gegebenen Punkt durchgehen sollen.

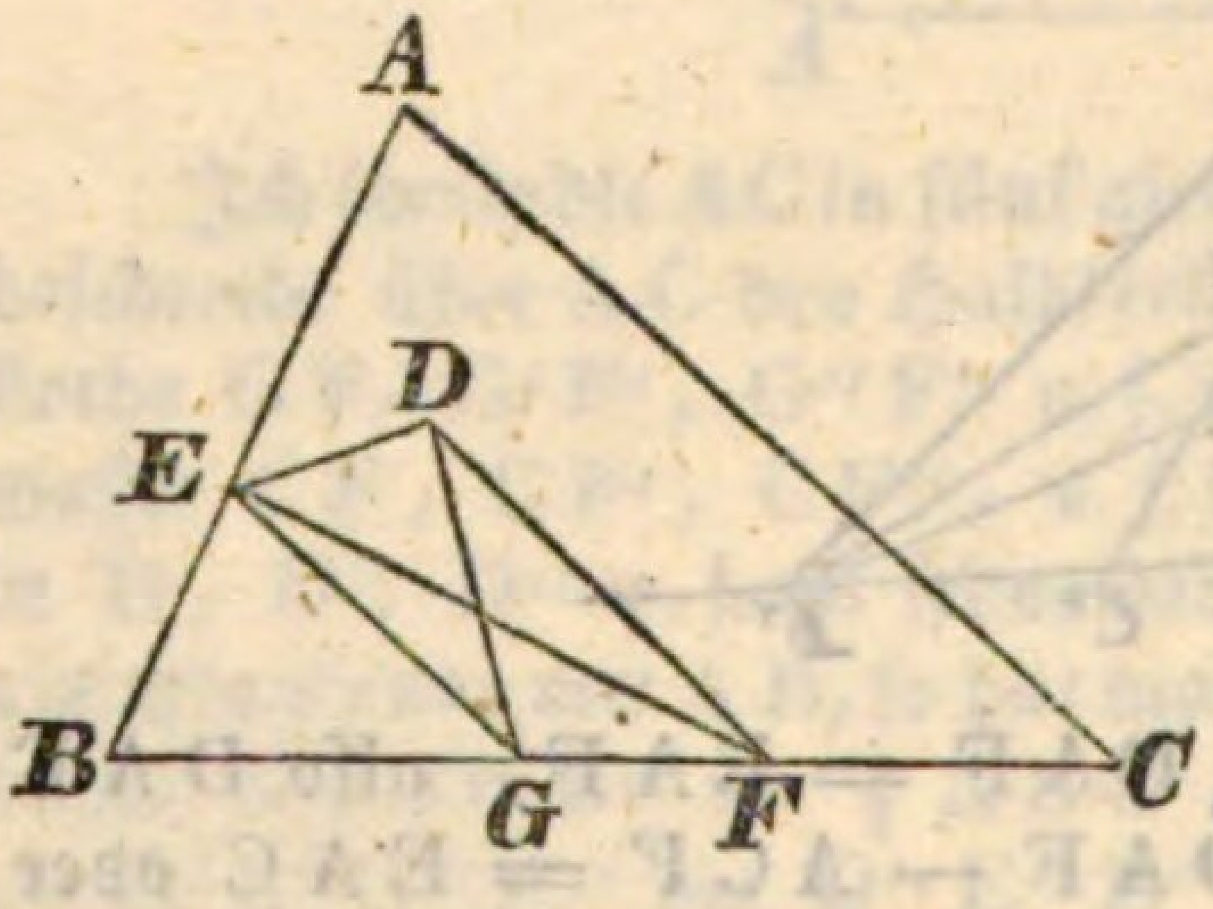
Fig. 208.



Es soll z. B. das Dreieck ABC durch Theilungslinien, die durch D gehen, in drei gleiche Theile getheilt werden. — Ich theile die Seite BC in drei gleiche Theile, ziehe durch A eine Gerade AF ∥ DE, eben so durch A die AF′ ∥ DE′, und da F′ außerhalb des Dreiecks fällt, durch F′ die GF′ ∥ CD, so sind DF, DG und die gegebene DA die verlangten Theilungslinien, und die Figuren ADFB = FCGD = DGA.

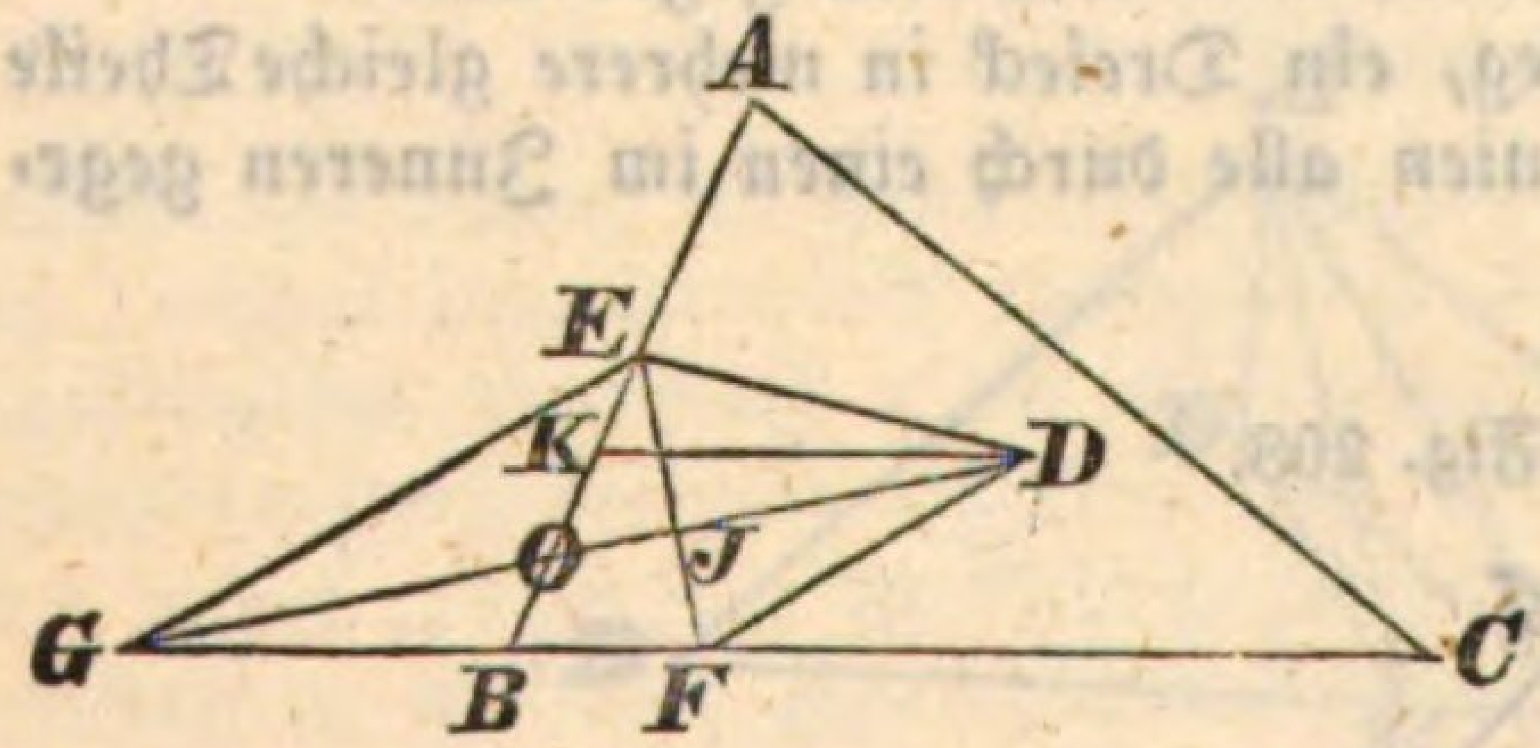
Nehmen wir zweitens an, es werde verlangt, daß eine Theilungslinie durch den im Inneren gegebenen Punkt und durch einen in der Seite des Dreiecks gegebenen Punkt durchgehe.

Fig. 209.



Es soll ABC durch zwei durch D gehende Gerade, wovon eine DE ist, in zwei solche Theile getheilt werden, die sich wie m zu n verhalten. Denken wir uns die Aufgabe aufgelöset, und DG sey die zweite verlangte Gerade, also BEDG : AEDGC = m : n. Theilen wir nun das Dreieck ABC durch eine durch E gehende Gerade EF in zwei Theile, die sich wie m : n verhalten, so also, daß $BEF = \frac{m}{m+n} ABC$, und da auch $BEDG = \frac{m}{m+n} ABC$ seyn soll, so muß BEDG = BEF seyn, daher muß BEDG — BEG = BEF — BEG, d. h. EDG = EFG, daher muß DF ∥ EG seyn, wodurch also der Punkt G gegeben ist. Man wird daher durch E eine Gerade ziehen, so daß $BEF = \frac{m}{m+n} ABC$ ist, dann durch E die EG ∥ DF, G mit D verbinden, wodurch die Aufgabe gelöset ist.

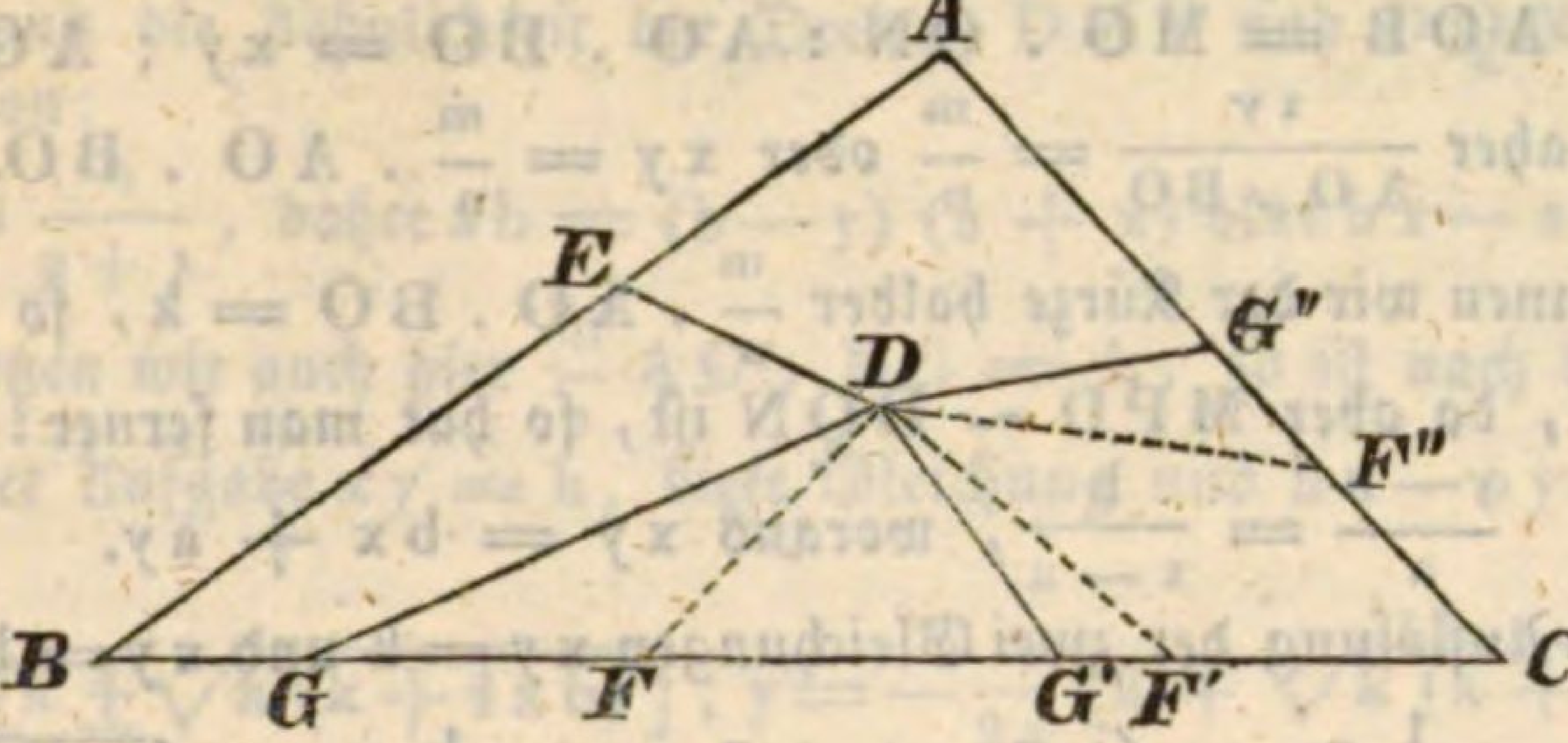
Fig. 210.



Es falle aber nun der Punkt G außerhalb des Dreiecks, so hat man GFD = EFD, daher, wenn man beiderseits FID wegnimmt, GIF = EID, und beiderseits EOI hinzugegeben, GIF + EOI = EOD oder GOB + BEF = EOD, woraus BEF = EOD — BOG. Um also das dem Dreiecke BEF gleiche Dreieck am Scheitel D zu verzeichnen, muß man von EOD das Dreieck BOG wegnehmen. Um dieses zu bewerkstelligen, ziehe ich durch G eine Gerade GK ∥ DB, so ist BOG = KOD, daher BEF = KED, und somit das verlangte Dreieck verzeichnet.

Durch Vorstehendes sind wir ebenfalls im Stande, ein Dreieck von einem Punkte aus in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Fig. 211.

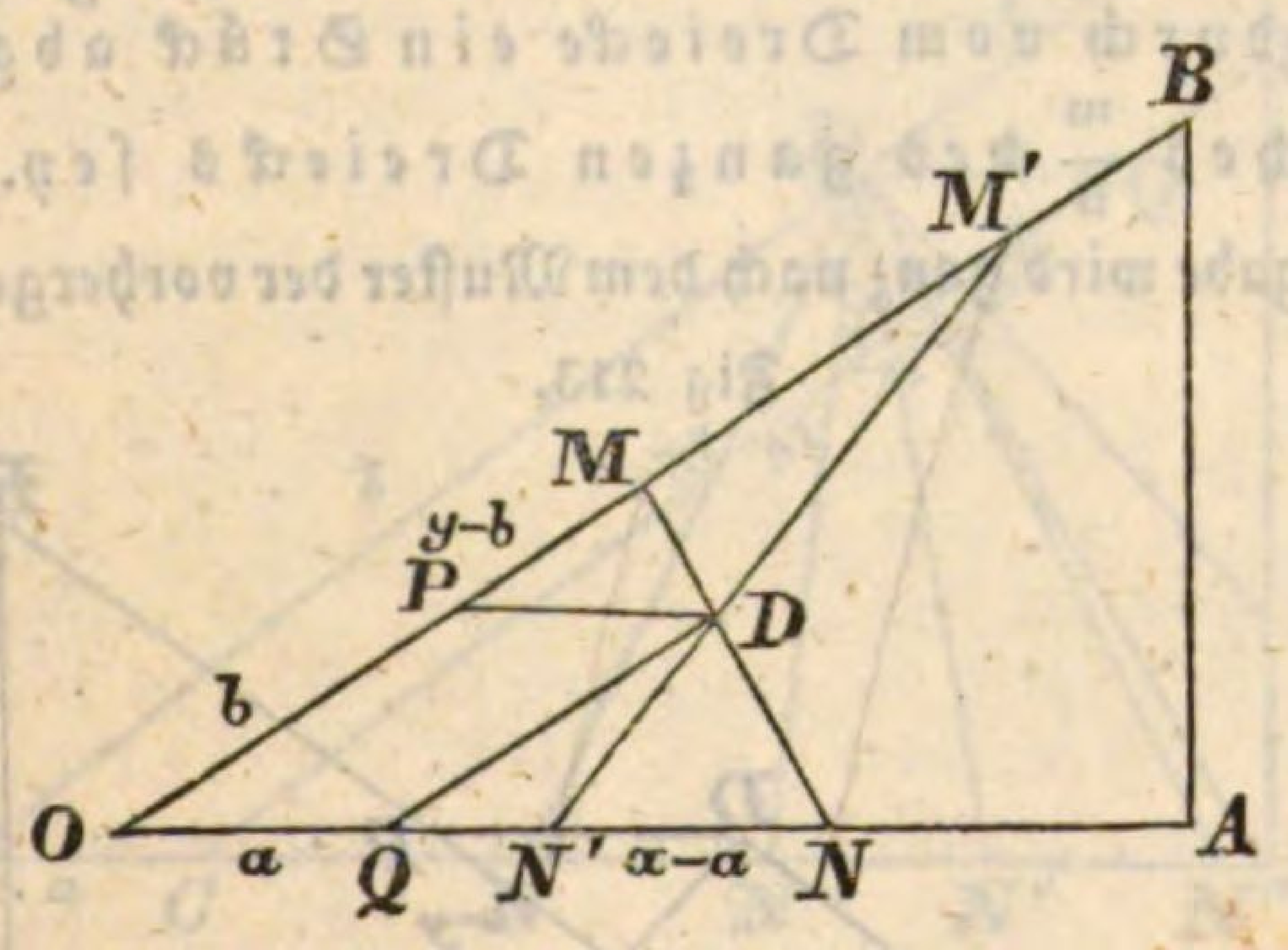


Es soll aus D das Dreieck in vier gleiche Theile getheilt werden; eine Theilungslinie soll DE seyn; ich theile von E das Dreieck in vier gleiche Theile; die Theilungspunkte seyen F F′ F″; ich ziehe nun DF DF′ DF″ und zu diesen Geraden aus E gleichlaufende, die in G und G′ die BC in G″ die AC schneiden, so sind DG, DG′, DG″ die verlangten Theillinien, und es ist:

$$DEBG = GDG' = G'DG''C = G''DEA.$$

§. 201. Es soll durch einen innerhalb eines Dreiecks liegenden Punkt eine Gerade so durchgeführt werden, daß der dadurch abgeschnittene Inhalt ein $\frac{m}{n}$ des Dreiecks sey. Wir wollen diese Aufgabe durch Rechnung auflösen. Die Lage des Punktes soll durch die Größe der mit den Schenkeln des Winkels gleichlaufenden Stücke gegeben seyn.

Fig. 212.



Es sey der Punkt D innerhalb des Dreiecks OAB gegeben, und zwar so, daß PD ∥ OA, DQ ∥ OB und $OQ = PD = a$, $DQ = OP = b$ sey, und es soll durch D die MN so geführt werden, daß $MON = \frac{m}{n}\, AOB$ sey. Nennen wir nun $ON = x$ und OM

$= y$, so ist zur Verzeichnung des Dreiecks MON nur die Größe von x und y nothwendig. Man hat nun, da

$$MON : AOB = MO \,.\, ON : AO \,.\, BO = xy : AO \,.\, BO,$$

daher $\frac{xy}{AO \,.\, BO} = \frac{m}{n}$ oder $xy = \frac{m}{n} \,.\, AO \,.\, BO.$

Nennen wir der Kürze halber $\frac{m}{n} \,.\, AO \,.\, BO = k$, so hat man $xy = k$, da aber $MPD \sim DQN$ ist, so hat man ferner:

$$\frac{y - b}{a} = \frac{b}{x - a}, \text{ woraus } xy = bx + ay.$$

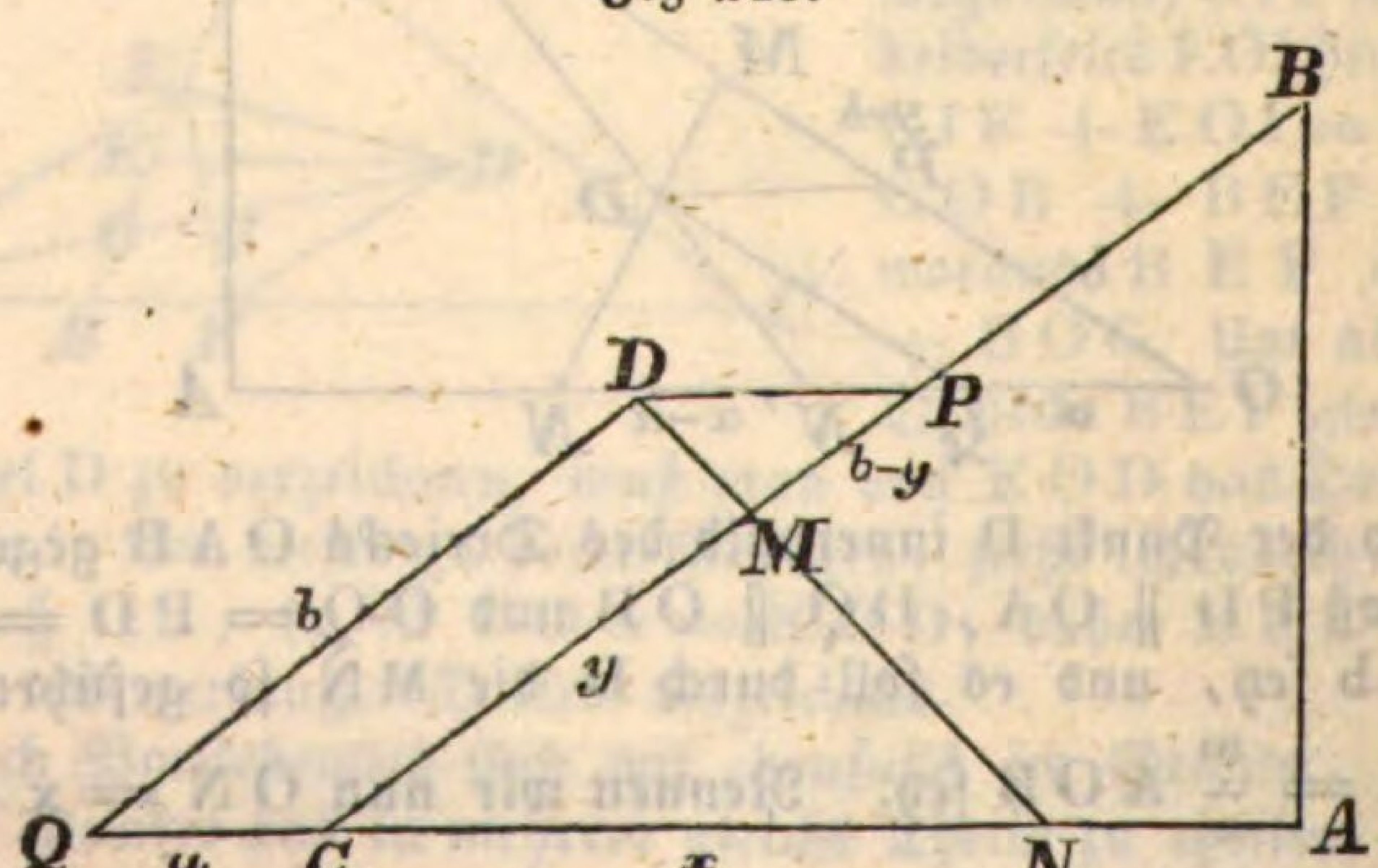
Die Auflösung der zwei Gleichungen $xy = k$ und $xy = bx + ay$ gibt uns $x = \frac{1}{2b}[k \pm \sqrt{k(k - 4ab)}]$; $y = \frac{1}{2a}[k \mp \sqrt{k(k - 4ab)}]$.

Soll die Auflösung möglich seyn, so muß $k > 4ab$ seyn. Der kleinstmögliche Werth von k, für den noch eine Auflösung möglich ist, ist für $k = 4ab$, dann ist $x = 2a$, $y = 2b$; dann ist aber D der Halbirungspunkt der MN. Das kleinstmögliche Dreieck also, das ich durch eine durch D gehende Gerade von dem Winkel AOB abschneiden kann, ist dasjenige, was ich durch eine Gerade abschneide, die in D halbirt wird. Die Verzeichnung dieses Dreiecks und ein rein geometrischer Beweis dieses Satzes hat keine Schwierigkeit.

Um die praktische Anwendung dieses Satzes zu zeigen, sey: $AO = 24$; $BO = 29$; $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, $a = 6$, $b = 9$, also $k = 232$, so erhält man: $x = \frac{1}{18}(232 \pm \sqrt{232 \,.\, 16})$; $y = \frac{1}{18}(232 \mp \sqrt{232 \,.\, 16})$; daher $x = 16{\cdot}3$; $y = 14{\cdot}25$ oder $x = 9{\cdot}5$, $y = 24{\cdot}4$; die erstere Auflösung gibt uns die Linie MN, die zweite M′N′.

§. 202. Es soll durch einen außerhalb eines Dreiecks liegenden Punkt eine Gerade so gezogen werden, daß dadurch vom Dreiecke ein Stück abgeschnitten werde, welches $\frac{m}{n}$ des ganzen Dreiecks sey. Die Auflösung dieser Aufgabe wird ganz nach dem Muster der vorhergehenden gehen.

Fig 213.



Der gegebene Punkt sey D, $DP \parallel AC$, $DQ \parallel BC$; $DP = QC = a$, $DQ = CP = b$; DMN sey die zu suchende Gerade, so gibt uns die Aehnlichkeit der Dreiecke DMP und DQN folgende Proportion:

$\frac{b-y}{a} = \frac{b}{a+x}$, daher $ab = (b-y)(a+x)$ oder $bx - ay = xy$.

Setzen wir auch hier $\frac{m}{n} AC \,.\, BC = k$, so ist nach dem Verlangen der Aufgabe $xy = k$, diese Gleichung und $bx - ay = k$ geben uns

$$x = \tfrac{1}{2b}\left[k \pm \sqrt{k(k+4ab)}\right];\; y = -\frac{1}{2a}\left[k \mp \sqrt{k(k+4ab)}\right].$$

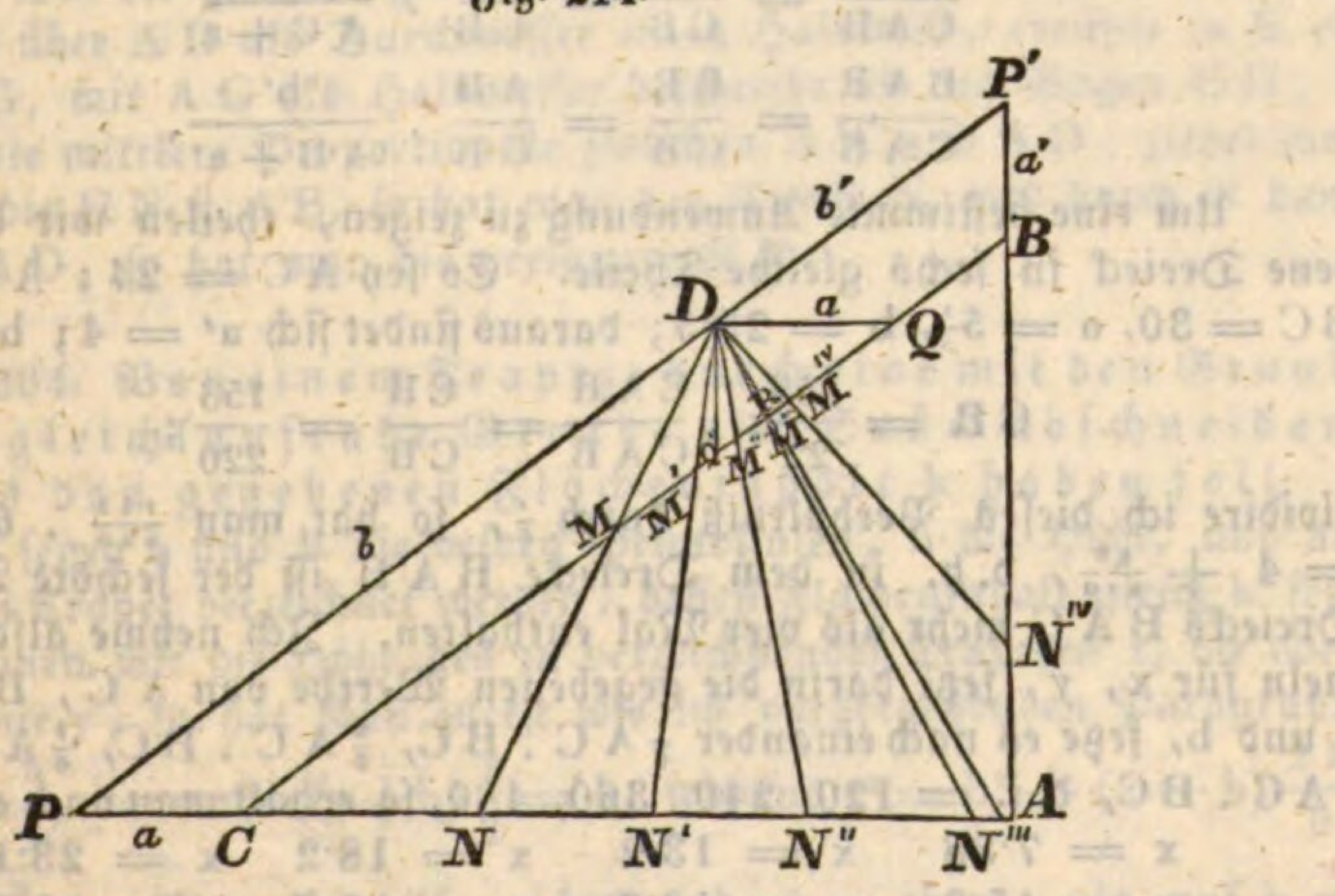
Es sey für einen speziellen Fall $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$; $AC = 24$; $BC = 30$, daher $k = 240$; $a = 6$; $b = 17 \cdot 5$; also $4ab = 420$; $k + 4ab = 660$, $\sqrt{k(k+4ab} =$ sehr nahe 398; hieraus erhält man:

$$x = \tfrac{1}{35}[240 \pm 398];\; y = -\tfrac{1}{12}[240 \mp 398];$$

daher entweder $x = 18 \cdot 2$, $y = 13 \cdot 1$ oder $x = -4 \cdot 5$, $y = -53$; durch die zweite Auflösung wird vom Dreiecke, welches durch die Verlängerung über den Scheitel der AC und BC entsteht, ein Dreieck = CMN abgeschnitten.

Das Vorstehende gibt uns nun ein Mittel an die Hand, durch Gerade, welche durch einen Punkt außerhalb des Dreiecks gehen, ein Dreieck in mehrere gleiche Theile zu theilen.

Fig. 214.



Es sey der gegebene Punkt D, dessen Lage durch $DQ = a$ und $PD = b$, welche zu AC und BC gleichlaufend sind, gegeben ist. Eben so ist die Lage von D gegen B durch $DP' = b'$ und $DQ' = a'$ gegeben. Ist aber a und b gegeben, so ist es dadurch auch a' und b',

denn man hat: $\frac{b+b'}{BC} = \frac{AC+a}{AC} = \frac{AB+a'}{AB}$;

daher $a' = a \cdot \frac{AB}{AC}$; $b' = BC\left(1 + \frac{a}{AC}\right) - b$.

Wie man nun von dem Winkel C durch A aus ein Dreieck von bestimmtem Flächeninhalt abschneiden kann, so kann man dieses auch von dem Winkel B. Nennt man dann das von AB abzuschneidende Stück x, das von BC y, so erhält man ganz ähnliche Gleichungen wie früher. Um also das Dreieck ABC in n gleiche Theile zu theilen, ziehe ich AD, welches die BC in R schneidet, und berechne nun den Flächeninhalt des Dreiecks RAC, und das Verhältniß von RAC und BAC, ist nun $RAC = \frac{p}{n} ABC$, wobei z. B. $m < p < m + 1$ ist, wobei m und $m + 1$ die unmittelbar auf einander folgenden ganzen Zahlen sind, zwischen welchen p liegt (wenn nicht zufälliger Weise p eine ganze Zahl ist), so schneide ich von RAC nach einander m Dreiecke ab, deren jedes $= \frac{1}{n} ABC$; dann von RAB nach und nach $n - 1 - m$ Dreiecke $= \frac{1}{n} ABC$, so bleibt noch um A eine Figur übrig, die auch $\frac{1}{n} ABC$ gleich ist.

Aus den gegebenen Stücken AB. AC, BC, a und b läßt sich der Flächeninhalt von RAC und RAB bestimmen, ohne weitere Messung.

$$\frac{CR}{b} = \frac{AC}{AC+a};\quad \frac{BR}{b'} = \frac{AB}{AB+a'};\quad CR + BR = BC$$

$$\frac{CAR}{CAB} = \frac{CR}{CB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{b}{AC+a}$$

$$\frac{BAR}{CAB} = \frac{BR}{CB} = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{b'}{AB+a'}.$$

Um eine bestimmte Anwendung zu zeigen, theilen wir das gegebene Dreieck in sechs gleiche Theile. Es sey $AC = 24$; $AB = 18$, $BC = 30$, $a = 5\frac{1}{3}$, $b = 25{\cdot}5$; daraus findet sich $a' = 4$; $b' = 11\frac{1}{6}$

$$CR = \frac{459}{22};\quad \frac{CAR}{CAB} = \frac{CR}{CB} = \frac{153}{220};$$

dividire ich dieses Verhältniß durch $\frac{1}{6}$, so hat man $\frac{153}{220} \cdot 6 = \frac{918}{220} = 4 + \frac{38}{220}$, d. h. in dem Dreiecke RAB ist der sechste Theil des Dreiecks BAC mehr als vier Mal enthalten. Ich nehme also die Formeln für x, y, setze darin die gegebenen Werthe von AC, BA, BC a und b, setze es nach einander $\frac{1}{6}AC \cdot BC$, $\frac{2}{6}AC \cdot BC$, $\frac{3}{6}AC \cdot BC$, $\frac{4}{6}AC \cdot BC$, d. i. $= 120$, 240 360, 480, so erhält man nach einander:

$x = 7{\cdot}88$	$x = 13{\cdot}2$	$x = 18{\cdot}2$	$x = 23{\cdot}1$
$y = 15{\cdot}2$	$y = 18{\cdot}2$	$y = 19.7$	$y = 20{\cdot}7$

schneidet diese Stücke, und zwar die x von der CA, die y von der CB ab, so hat man die Theilungslinien MN, M′N′, M″N″, M‴N‴.

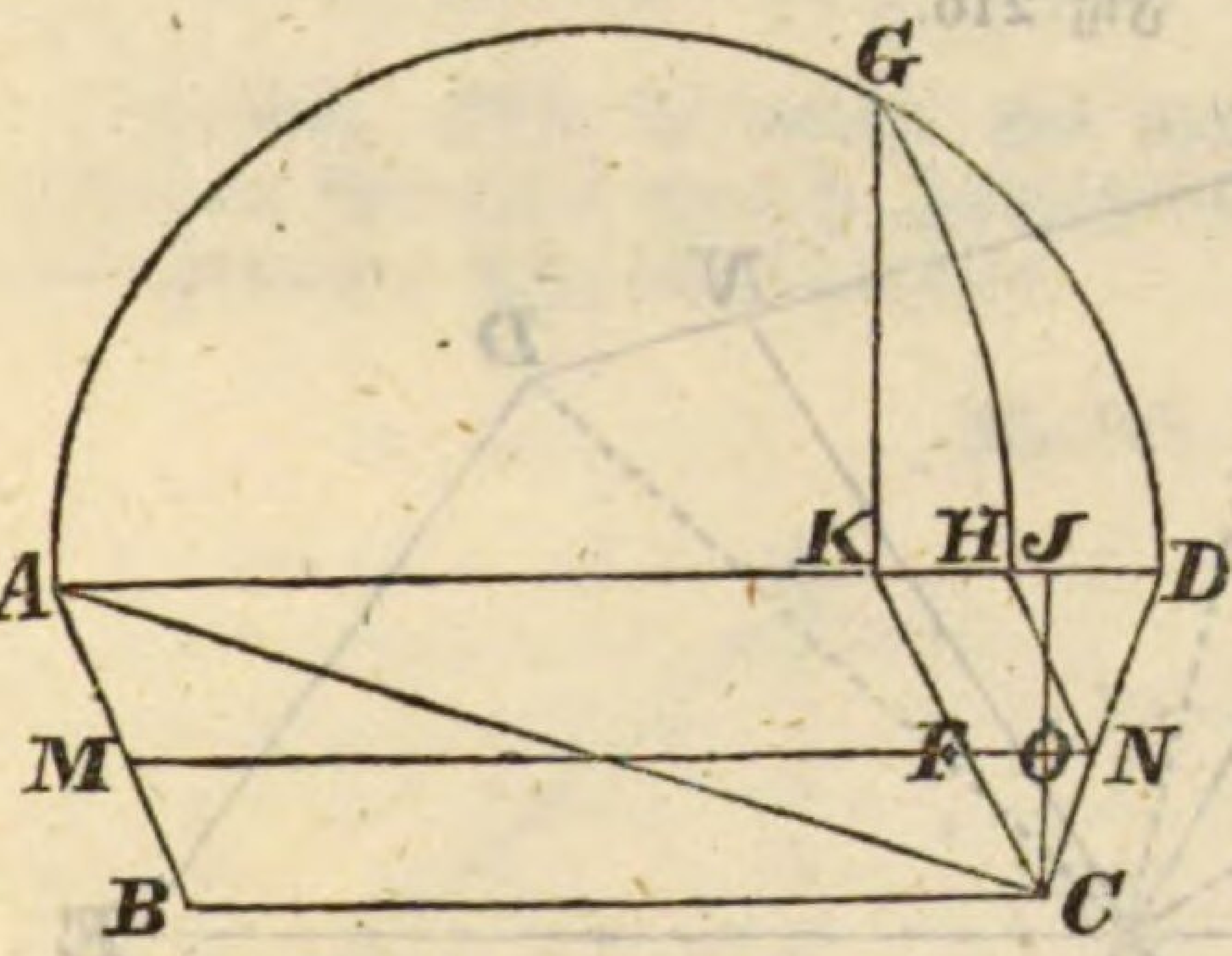
Wendet man nun dieselbe Formel vom Punkte B, und setzet $k = \frac{1}{6} \cdot BC \cdot AB = 90$, $a' = 4$; $b' = 11\frac{1}{6}$, so erhält man:

$x = 11$; $y = 8{\cdot}2$, schneidet x von BA und y von BC ab, so erhält man $M^{IV} N^{IV}$, so daß $M^{IV} B N^{IV} = \frac{1}{6}$ BAC ist, und somit hat man:

$$CMN = MM'NN' = M'M''N'N'' = M''M'''N''N'''$$
$$= M'''N'''AN^{IV}M^{IV} = M^{IV}BN^{IV}.$$

§. 203. Von einem Trapeze soll durch eine mit der Grundlinie gleichlaufende Gerade ein Stück abgeschnitten werden, welches dem Dreiecke, welches durch die Winkellinie entsteht, gleich ist.

Fig. 215.



Es sey von dem Trapeze ABCD ein Stück MNBC = ABC abzuschneiden, wo MN ∥ BC sey. Es sey AD = a; BC = b, die Höhe CI = h; nennen wir MN = y, CO = x, so hat man, wenn CK ∥ AB, KD : FN = IC : OC; daher $\frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{x}$; ferner, da ABC = MNBC ist $(y+b)x = bh$, daher $\frac{a-b}{y-b} = \frac{y+b}{b}$, woraus $y^2 = ab$; $y = \sqrt{ab}$. Es ist also MN das geometrische Mittel der beiden Grundlinien, um also MN zu verzeichnen, muß ich zwischen AK und AD die mittlere geometrische Proportionale suchen, beschreibt man also über AD als Durchmesser einen Halbkreis, errichte in K ein Loth KG, mit AG als Halbmesser beschreibe ich den Bogen GH, so ist AH die mittlere Proportionale zwischen AK und AD; ziehet man durch H die HN ∥ AB, so hat man den Punkt N, und durch N dann MN ∥ AD, so hat man die verlangte MN.

§. 204. Von einem Trapeze durch eine mit den Grundlinien gleichlaufende Gerade ein Stück abschneiden, welches den gegebenen Flächeninhalt k haben soll.

Es seyen a und b die beiden Grundlinien, h die Höhe, und auf b soll ein Trapez verzeichnet werden, dessen Flächeninhalt gleich k seyn soll; nennen wir die Höhe des zu verzeichnenden Trapezes x, die obere Grundlinie y, so hat man zuerst wie im vorhergehenden Paragraphe $\frac{a-b}{y-b} = \frac{h}{x}$, dann aber $(y+b)\frac{x}{2} = k$, woraus $y^2 = b^2 + (a-b)\frac{2k}{h}$; $x = \frac{2k}{y+b}$. Man hat also nichts anders zu thun, als auf b ein Loth = x zu errichten, und durch den Endpunkt eine gleichlaufende zu b zu ziehen, um die gegebene Aufgabe aufzulösen.

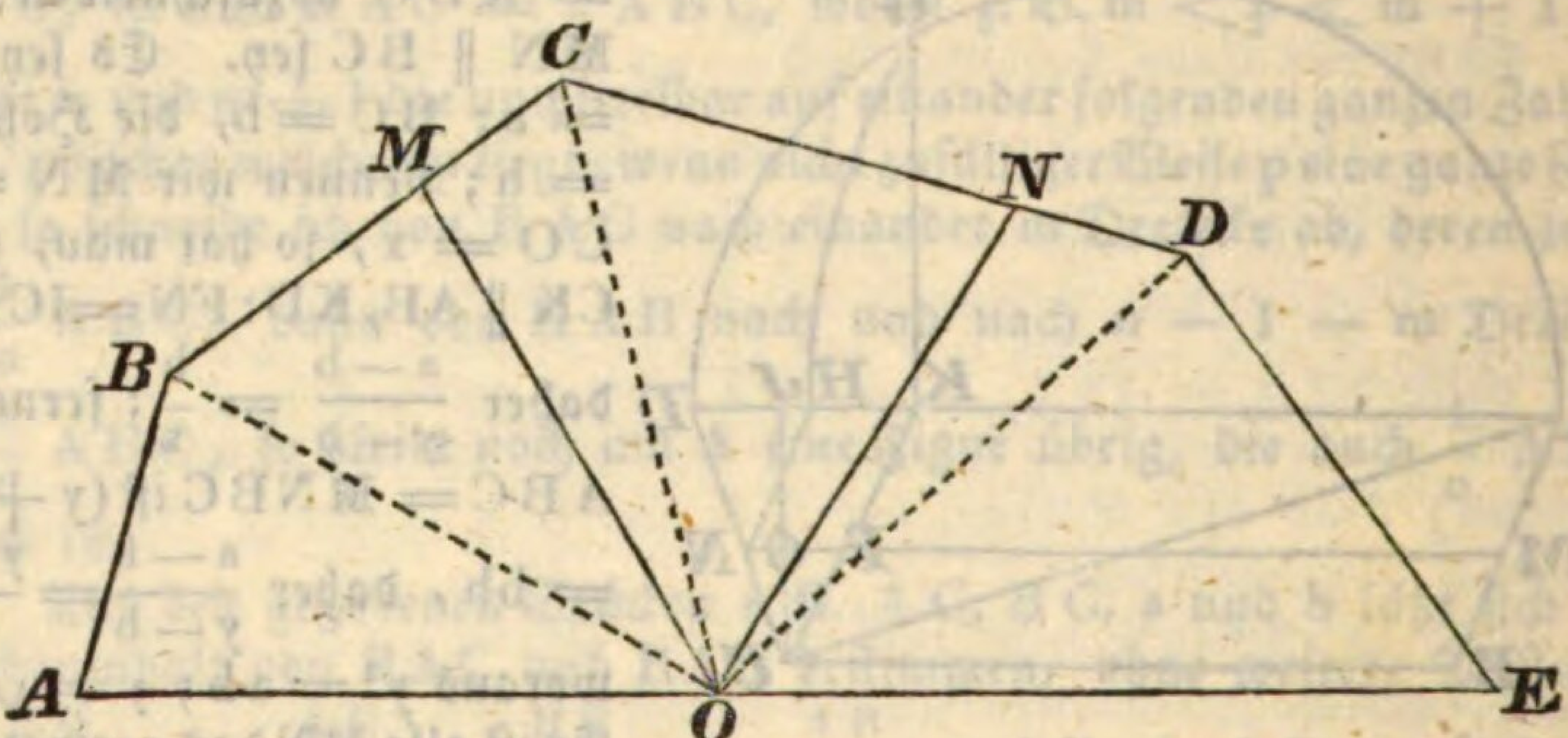
Will man von dem gegebenen Trapeze ein $\frac{m}{n}$ des ganzen ab-

schneiden, so ist $k = \frac{m}{n}(a+b)\frac{h}{2}$; daher $y^2 = b^2 + \frac{m}{n}(a^2 - b^2)$ und $x = \frac{m}{n} \cdot \frac{a+b}{y+b} \cdot h$.

Es leuchtet von selbst ein, daß man dadurch ein Trapez in so viel gleiche Theile theilen kann, als man nur will.

§. 205. **Wie man ein Vieleck durch Gerade, die von einem Punkte ausgehen, in mehrere gleiche Theile theilet, wollen wir durch ein Beispiel zeigen.**

Fig. 216.



Es sey das Fünfeck ABCDE; von dem Punkte O aus soll dies Vieleck in drei gleiche Theile getheilt werden. Ich messe die Seiten, und finde AB = 12, BC = 18, CD = 24, DE = 18; fälle von O aus Lothe auf AB, BC, CD, DE und finde diese Lothe = 23, 22, 21·5, 22 und habe somit für die Flächeninhalte der Dreiecke, die entstehen, wenn man O mit den Endpunkten des Vielecks verbindet:

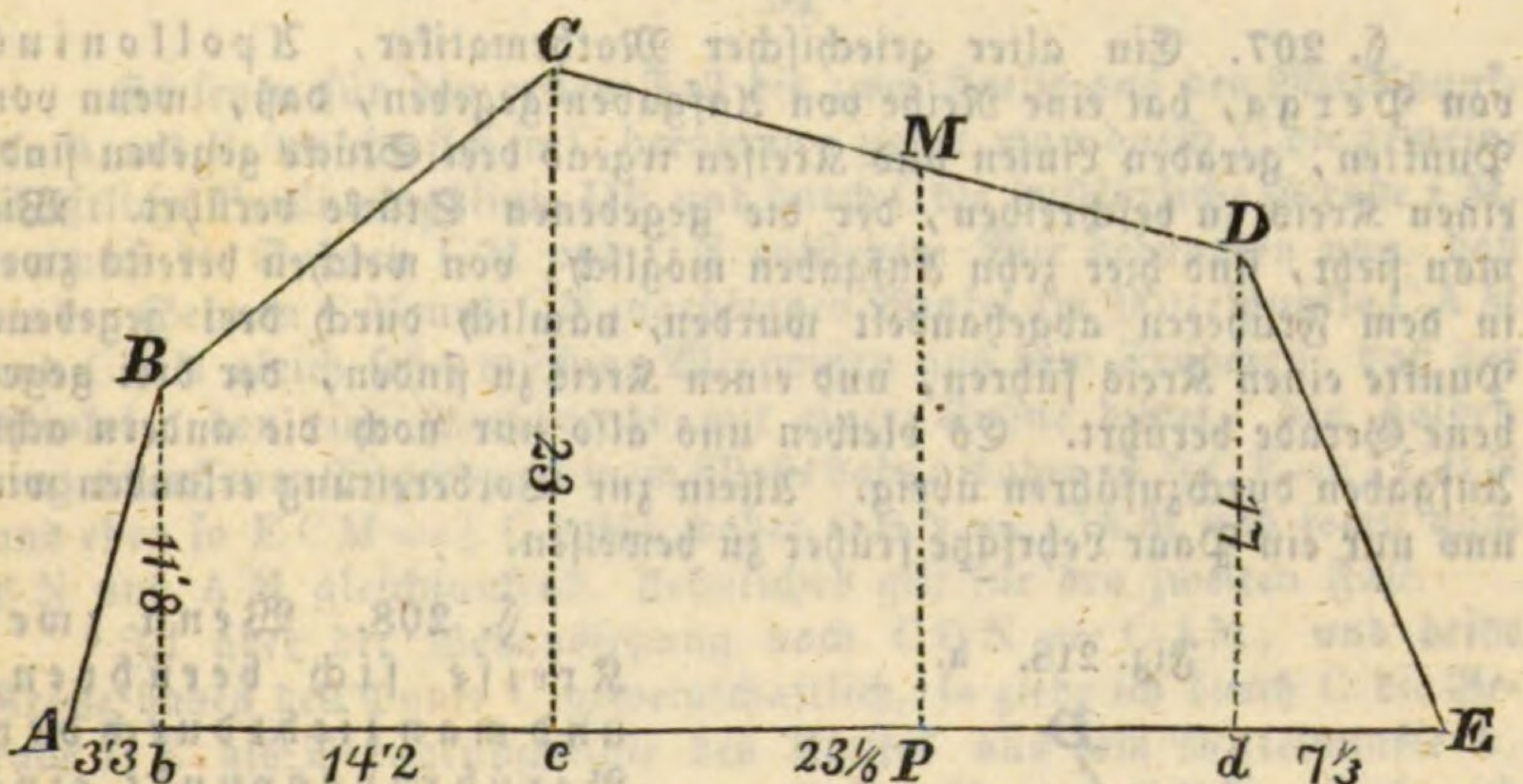
ABO = 138, BOC = 198, COD = 258, DOE = 198, ihre Summe oder der Flächeninhalt des ganzen Fünfecks = 792; da nun die Größe vom dritten Theile $\frac{792}{3} = 264$ ist, so muß ich das Fünfeck also in drei Theile theilen, jeder gleich 264; da nun ABO = 138; 264 — 138 = 126 ist, so muß ich vom Dreiecke BOC ein Stück abschneiden = 126; da aber die Höhe von BOC gleich 22 ist, so wird die Grundlinie eines Dreiecks von der Höhe = 22, welches den Flächeninhalt = 126 hat, gleich seyn $\frac{126}{11} = 11\frac{5}{11}$, schneide ich also BM $= 11\frac{5}{11}$ ab, so ist BMO = 126, daher ABO + BMO = 138 + 126 = 264, daher das Viereck ABMO = 264 gleich dem dritten Theile des Fünfecks. Da MOC = BOC — BOM = 198 — 126 = 72 ist, und 264 — 72 = 192, so muß man von COD ein Dreieck abschneiden, dessen Flächeninhalt = 192 ist, da aber die Höhe von COD gleich 21·5, so ist die Grundlinie eines Dreiecks von dieser Höhe, welches 192 zum Flächeninhalte hat, gleich $\frac{192}{10.75} = 17.86$, schneide

ich also CN = 17·86 ab, so ist CON = 192, daher MOC + CON = 72 + 192 = 264; daher das Viereck MCNO = 264 dem dritten Theil des Fünfecks. Da nun NOD = COD — CON = 258 — 192 = 66 und DOE = 198, so ist NOD + DOE = 66 + 198 = 264, daher das Viereck NDEO = 264 gleich dem dritten Drittel des Fünfecks ist.

Ganz dieselbe Art und Weise der Theilung wird befolgt, wenn der Punkt, durch den die Theilungslinien gehen sollen, in einem Eckpunkte oder innerhalb des Vielecks liegt, und ganz ähnlich wird man verfahren, wenn man nicht in gleiche Theile, sondern in gegebene proportionirte Theile zu theilen hat.

§. 206. Eben so wollen wir durch ein Beispiel zeigen, **wie man ein Vieleck durch gleichlaufende Gerade in mehrere gleiche Theile theilet.**

Fig. 217.



Es soll das Fünfeck durch Theilungslinien, die senkrecht auf AE sind, in drei gleiche Theile getheilt werden. Ich fälle also die Bb, Cc, Dd lothrecht auf AE; messe alle Stücke, die zur Berechnung der Trapeze und Dreiecke nothwendig sind, aus, und erhalte so:

ABb = 19·5; BCbc = 247·1; CDcd = 463·3; DEd = 62·3.

Also das ganze Vieleck = 792·2, daher der dritte Theil davon = 264·1; da das Dreieck ABb = 19·5 und 264·1 — 19·5 = 244·6, so muß ich vom Trapeze BCbc ein Stück abschneiden = 244·6, so daß von diesem gegen Cc hin nur ein Stück übrig bleibt = 2·5. Wir könnten nach der Formel die Höhe des hinwegzunehmenden Trapezes berechnen; allein jedenfalls sehen wir, daß die Höhe so klein seyn wird, daß wir zu demselben Ziele gelangen, wenn wir das von Cc aus wegzunehmende Trapez als ein Rechteck ansehen, dessen Höhe dann $\frac{2·5}{23} = 0·1$ ist.

Aber ein 0·1 ist für unsern Maßstab hier so klein, daß die Theilungslinie mit der Cc zusammenfällt.

Es sey DdMP = 463·3 — 264·1 = 199 2, oder besser, da wir uns zu dem CDcd noch die 2·5 aus BCbc hinzuzudenken haben, 465·8—264·1 = 201·7. Wir haben also von CDcd von Dd aus 201·7 abzuschneiden. Diese 201·7 + DdE sind gleich 201·7 + 62·3 = 264·0.

Nach unsern Formeln, §. 204, ist $y^2 = b^2 + \frac{(a-b)2k}{h}$, oder wenn wir F den Flächeninhalt des ganzen Trapezes nennen, von dem wir den gegebenen Flächeninhalt abschneiden,

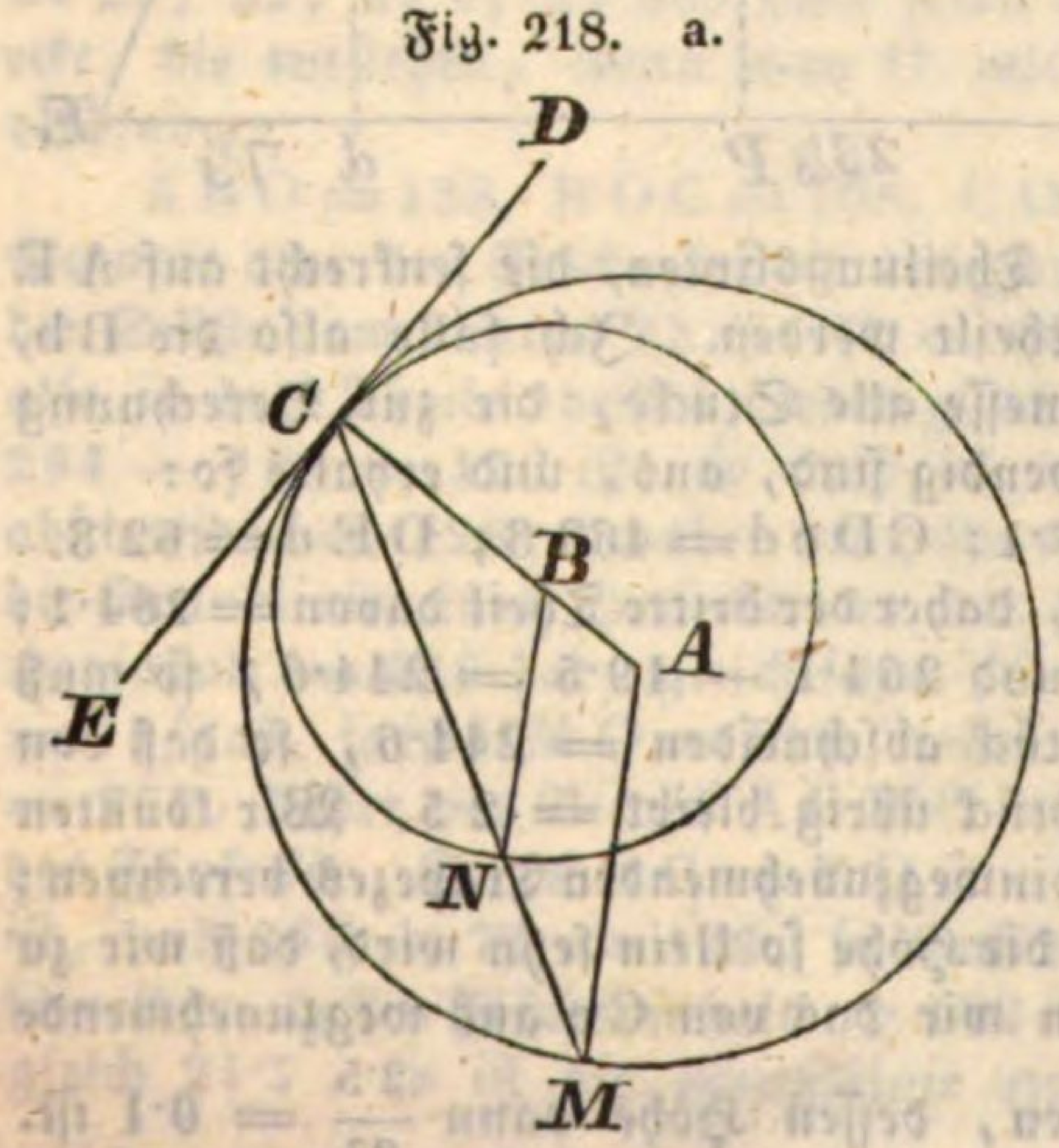
$$y^2 = b^2 + (a^2 - b^2)\frac{k}{F} \text{ und } x = \frac{2k}{y+b},$$

hier ist a = 23; b = 17; h = $23\frac{1}{6}$; k = 201·7, man hat somit, da F = 463 3 y = 19·83; x = 10·97; ich schneide DP = 10·97 ab, so ist dann ABCc = CcPM = MDEP.

V. Die Apollonischen Aufgaben.

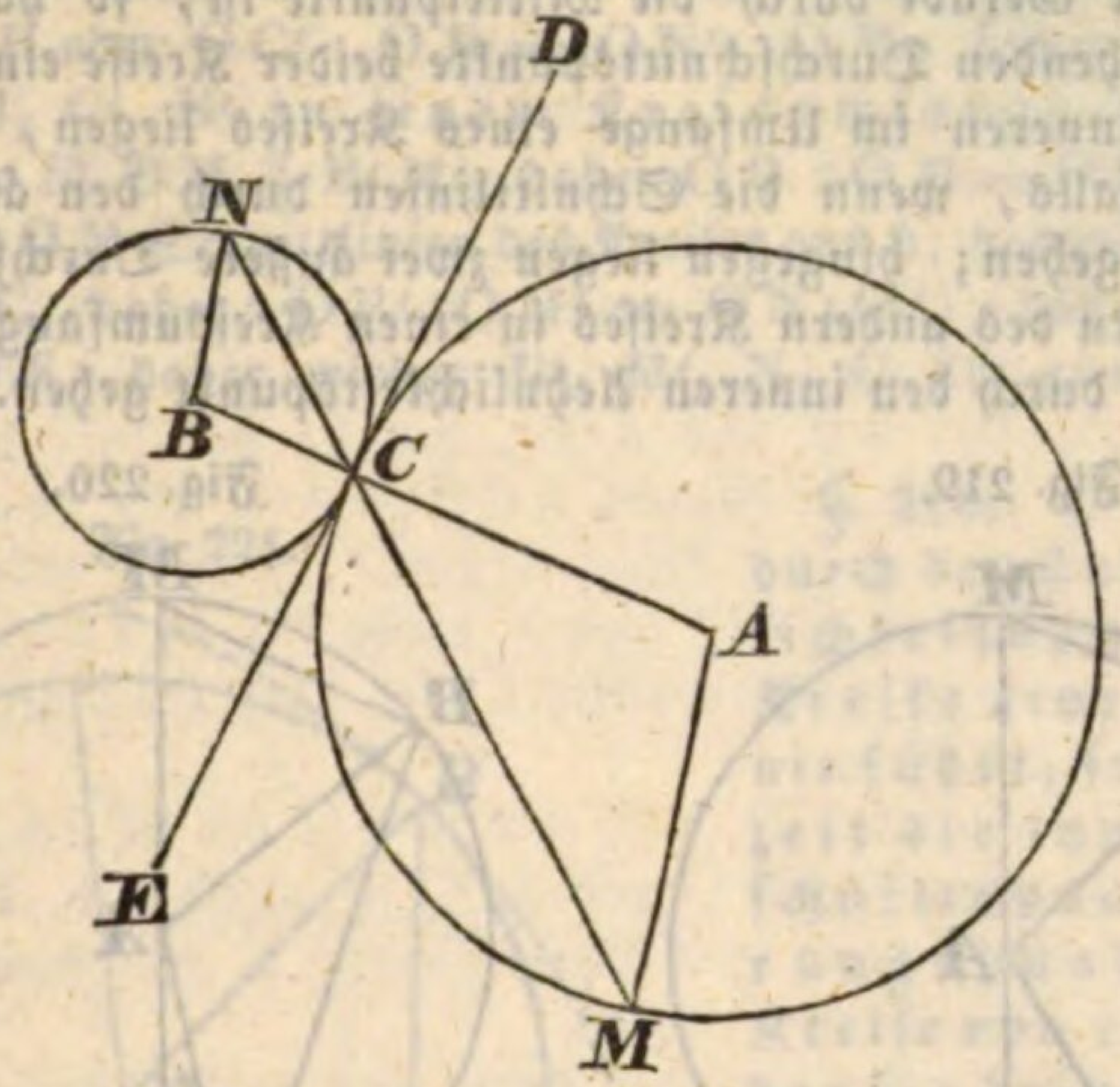
§. 207. Ein alter griechischer Mathematiker, Apollonius von Perga, hat eine Reihe von Aufgaben gegeben, daß, wenn von Punkten, geraden Linien und Kreisen irgend drei Stücke gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, der die gegebenen Stücke berührt. Wie man sieht, sind hier zehn Aufgaben möglich, von welchen bereits zwei in dem Früheren abgehandelt wurden, nämlich durch drei gegebene Punkte einen Kreis führen, und einen Kreis zu finden, der drei gegebene Gerade berührt. Es bleiben uns also nur noch die andern acht Aufgaben durchzuführen übrig. Allein zur Vorbereitung erlauben wir uns nur ein Paar Lehrsätze früher zu beweisen.

Fig. 218. a.



§. 208. Wenn zwei Kreise sich berühren, und man zieht durch den Berührungspunkt eine Gerade, so werden die zwei dadurch entstehenden Sehnen der beiden Kreise gleichen Mittelpunktwinkeln entsprechen; und umgekehrt: wenn zwei Kreise einen Punkt gemeinschaftlich haben, und man zieht durch diesen Punkt eine Gerade, und die dadurch entstehenden Sehnen gehören gleichen Mittelpunktwinkeln an, so berühren sich die Kreise.

b.



Es seyen für den ersten Fall die zwei Kreise aus den Mittelpunkten A und B, welche sich in C berühren; ziehet man durch C die gemeinschaftliche Berührungslinie DE und durch C die willkürliche Gerade CM, wodurch die Sehnen CM und CN entstehen. Wir behaupten nun, daß die den Sehnen CM und CN zugehörigen Winkel am Mittelpunkte CAM und CBN gleich seyn müssen. Wir wissen aus dem Früheren, daß der Winkel, den eine Berührende mit einer Sehne bildet, den halben eingeschlossenen Bogen zu seinem Maße habe; daher ist NCE $= \frac{1}{2}$ CBN und eben so ECM $= \frac{1}{2}$ CAM; daher CBN $=$ CAM und somit auch BN und AM gleichlaufend. Aehnliches gilt für den zweiten Fall.

Ist aber der Voraussetzung nach CBN $=$ CAM, und beide Kreise haben den Punkt C gemeinschaftlich, so ziehe ich durch C die Gerade DE als Berührungslinie des Kreises aus dem Mittelpunkte A, so ist ECM $= \frac{1}{2}$ CAM, daher auch ECM $= \frac{1}{2}$ CBN. Ziehe ich nun durch C auch eine Berührungslinie zum Kreise des Mittelpunktes B, so muß diese mit der DE zusammenfallen; denn die durch C den Kreis aus B berührend zu ziehende Gerade muß mit der CN einen Winkel bilden, gleich $\frac{1}{2}$ CBN, daher gleich ECN; daher muß diese Gerade mit DE zusammenfallen, und somit berühren sich beide Kreise.

§. 209. Den Durchschnittspunkt der zwei äußeren Berührungslinien zweier Kreise nennt man ihren **äußeren Aehnlichkeitspunkt**, den Durchschnittspunkt ihrer inneren Berührungslinien ihren **inneren Aehnlichkeitspunkt**.

Ziehet man durch einen Aehnlichkeitspunkt irgend eine Gerade, welche beide Kreise schneidet, so sind stets die Mittelpunktwinkel der dadurch entstehenden Kreisabschnitte einander gleich, und die dazu gehörigen Halbmesser paarweise gleichlaufend.

Zieht man durch einen Aehnlichkeitspunkt zwei Schnittlinien, deren eine die Gerade durch die Mittelpunkte ist, so haben die acht dadurch entstehenden Durchschnittspunkte beider Kreise eine solche Lage, daß die vier inneren im Umfange eines Kreises liegen, und die vier äußeren ebenfalls, wenn die Schnittlinien durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt gehen; hingegen liegen zwei äußere Durchschnittspunkte mit dem innern des andern Kreises in einen Kreisumfange, wenn die Schnittlinien durch den inneren Aehnlichkeitspunkt gehen.

Fig. 219.

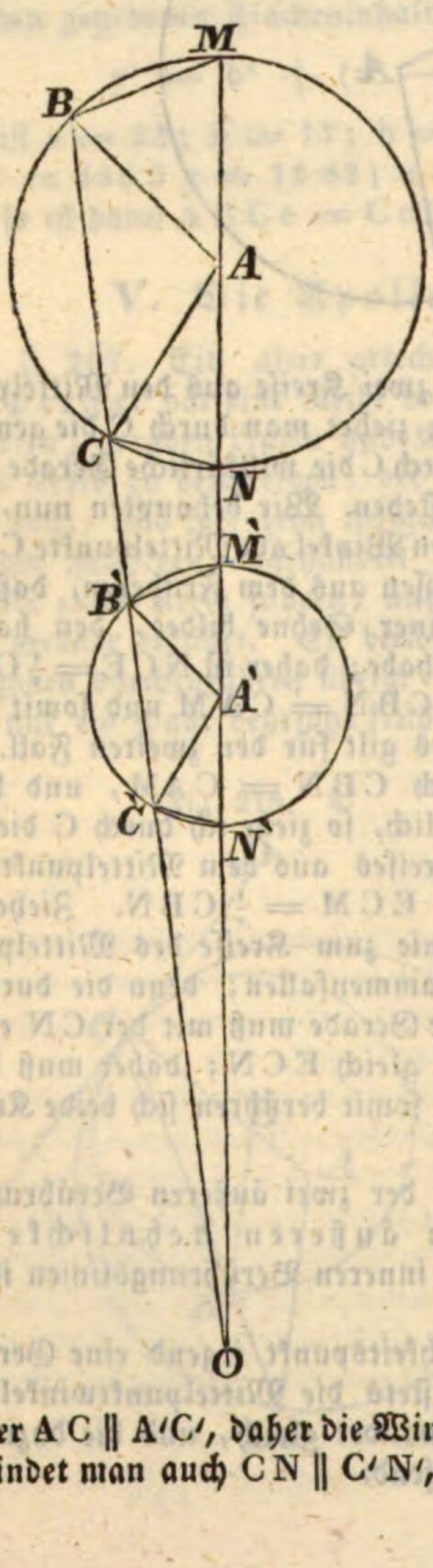
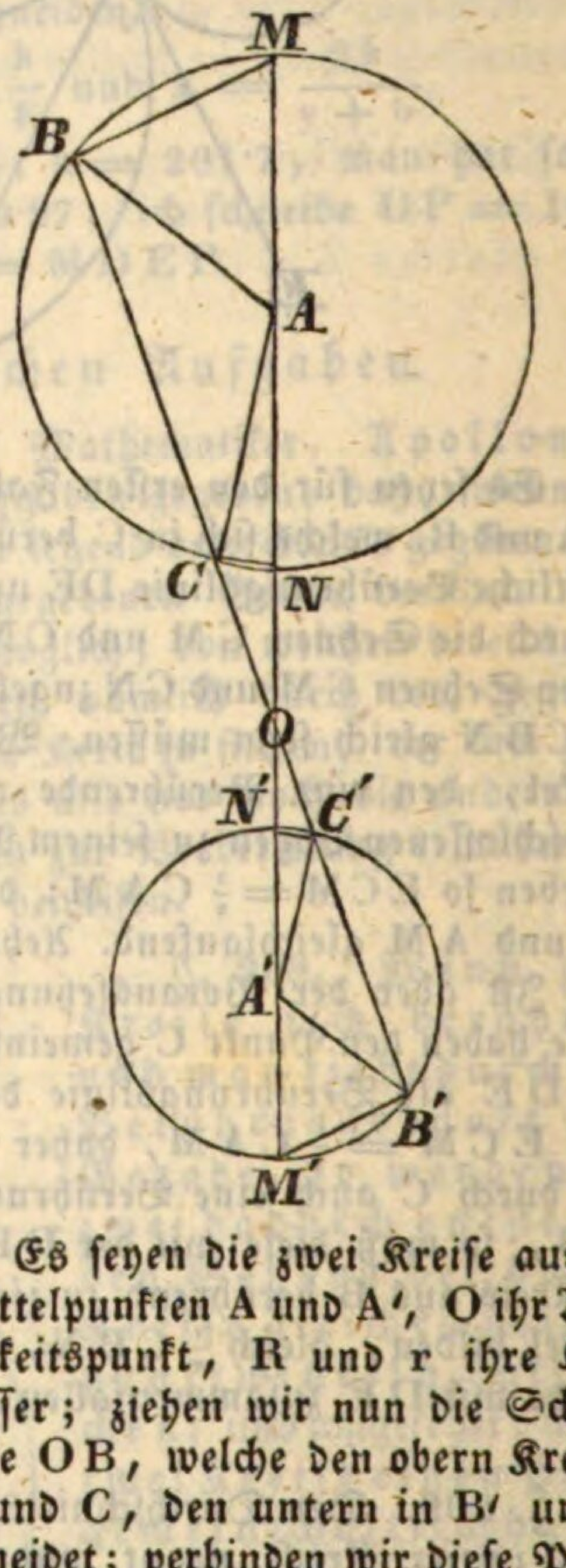


Fig. 220.

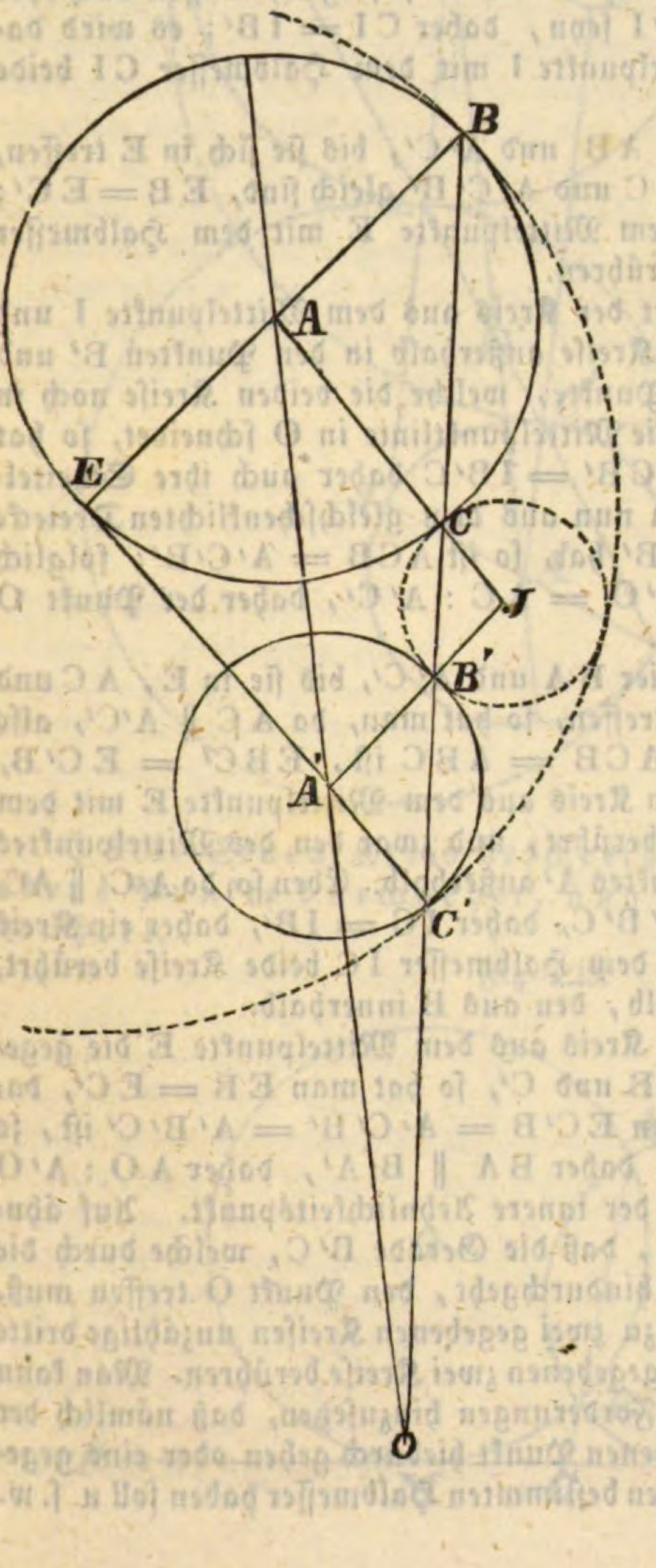


Es seyen die zwei Kreise aus den Mittelpunkten A und A', O ihr Aehnlichkeitspunkt, R und r ihre Halbmesser; ziehen wir nun die Schnittlinie OB, welche den obern Kreis in B und C, den untern in B' und C' schneidet; verbinden wir diese Punkte mit ihren Mittelpunkten, so hat man, da $AO : A'O = R : r$, $AO : A'O = AB : A'B'$, daher $AB \parallel A'B'$, eben so $AO : A'O = AC : A'C'$; daher $AC \parallel A'C'$, daher die Winkel $BAC = B'A'C'$. Weil $AC \parallel A'C'$, so findet man auch $CN \parallel C'N'$, und daher $OC : ON = OC' : ON'$,

da aber O B und O M Schnittlinien des Kreises aus dem Mittelpunkte A sind, so hat man OC : ON = OM : OB, daher OC′ : ON′ = OM : OB oder OC′ . OB = ON′ . OM, somit liegen also die Punkte B, M, C′, N′ in einem Kreisumfange.

Eben so ist BM ∥ B′M′, daher OB : OM = OB′ : OM′, da aber OB und OM Schnittlinien des Kreises aus A, hat man: OB : OM = ON : OC, daher: OB′ : OM′ = ON : OC, daher OB′ . OC = OM′ . ON, daher wieder B′, M′, N, C in einem Kreisumfange.

Fig. 221.



§. 210. I. Wenn man durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Schnittlinie führt, so sind jederzeit die innern Durchschnittspunkte Berührungspunkte beider Kreise von einem Kreise, der sie beide außerhalb berührt, und umgekehrt: Werden zwei Kreise von einem dritten beiderseits außerhalb berührt, so liegen die beiden Berührungspunkte mit dem äußeren Aehnlichkeitspunkte beider gegebenen Kreise in einer geraden Linie.

II. Wenn man durch den äußeren Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise eine Schnittlinie führt, so sind jederzeit die äußeren Durchschnittspunkte Berührungspunkte beider Kreise durch einen dritten Kreis, der sie beide innerhalb berührt, und umgekehrt: Werden zwei Kreise durch einen dritten beide innerhalb berührt, so liegen die beiden Berührungspunkte mit dem äußeren Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden.

III. Ziehet man durch den innern Aehnlichkeitspunkt eine Schnittlinie, so sind immer ein äußerer und ein innerer Durchschnittspunkt Berührungspunkte eines Kreises, der den einen der Kreise von Innen, den anderen von Außen berührt, und umgekehrt: Werden zwei Kreise von einem dritten ungleichartig berührt, so liegen je zwei Berührungspunkte dieses dritten Kreises mit dem inneren Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden.

Man verlängert A C und A′B′, bis sie sich in I schneiden; da nun A C ‖ A′C′, so ist der Winkel A C B = A′C′B′, da aber A′C′B′ = A′B′C′, so hat man A C B = A′B′C′, folglich müssen auch ihre Scheitelwinkel B′C I = C B′I seyn, daher C I = I B′; es wird daher ein Kreis aus dem Mittelpunkte I mit dem Halbmesser C I beide Kreise außerhalb berühren.

Verlängert man eben so A B und A′C′, bis sie sich in E treffen, so hat man, da die Winkel A B C und A′C′B′ gleich sind, E B = E C′; daher wird ein Kreis aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser E B beide Kreise innerhalb berühren.

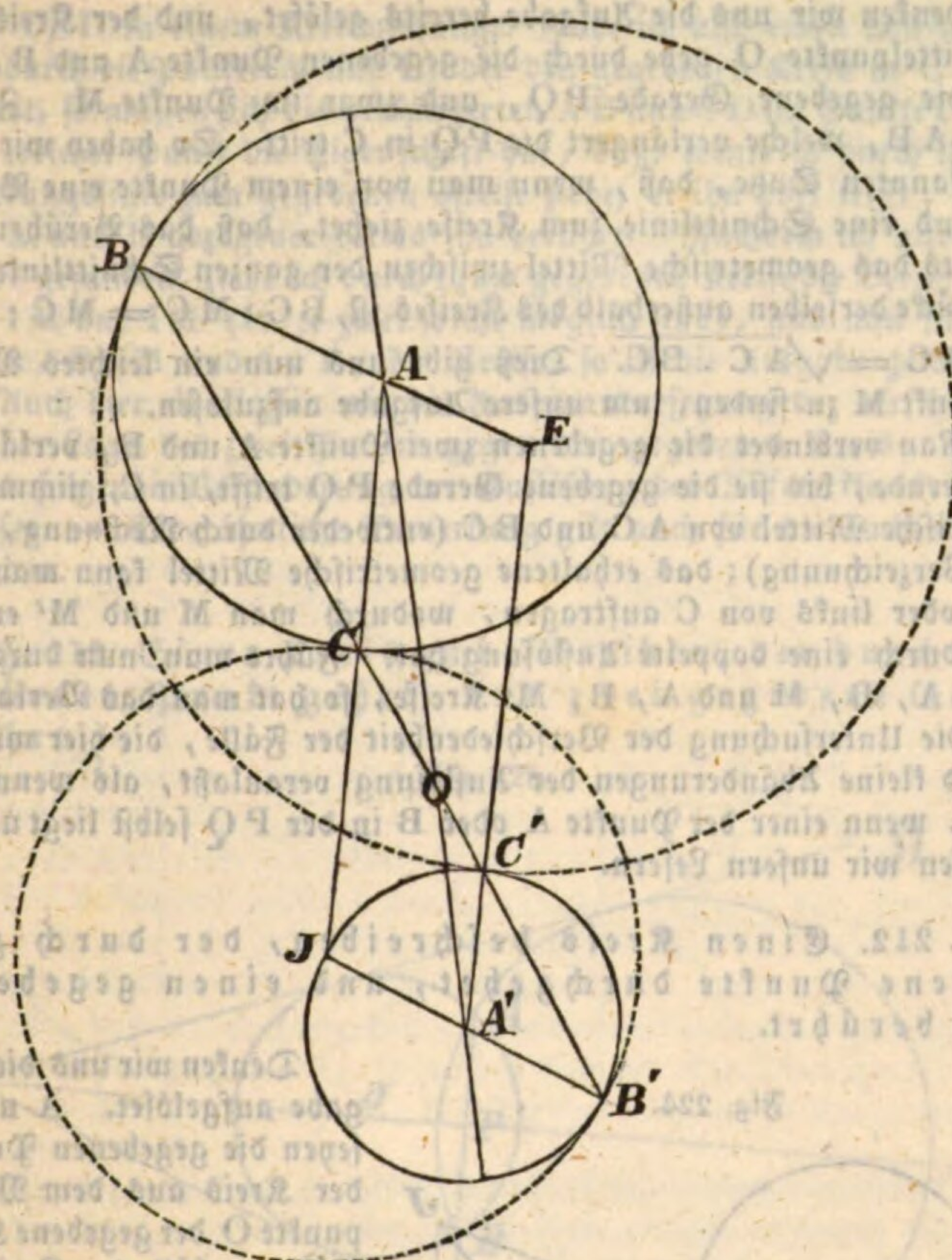
Umgekehrt. Berührt der Kreis aus dem Mittelpunkte I und mit dem Halbmesser C I beide Kreise außerhalb in den Punkten B′ und C, und man verbindet diese Punkte, welche die beiden Kreise noch in den Punkten B und C′ und die Mittelpunktlinie in O schneidet, so hat man, da C I = I B′, also I C B′ = I B′C daher auch ihre Scheitelwinkel A C B = A′B′C′; da nun aus dem gleichschenklichten Dreiecke A′B′C′ man A′B′C′ = A′C′B′ hat, so ist A C B = A′C′B′; folglich A C ‖ A′C′, daher A O : A′O = A C : A′C′, daher der Punkt O der äußere Aehnlichkeitspunkt.

Verlängert man auch hier B A und A′C′, bis sie in E, A C und A′B′, bis sie in I zusammentreffen, so hat man, da A C ‖ A′C′, also A C B = E C′B, und da A C B = A B C ist, E B C′ = E C′B, daher E B = E C′, daher ein Kreis aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser E B beide Kreise berührt, und zwar den des Mittelpunktes A innerhalb, den des Mittelpunktes A′ außerhalb. Eben so, da A′C′ ‖ A C, so ist I C B′ = A′C′B′ = A′B′C, daher I C = I B′, daher ein Kreis aus dem Mittelpunkte I mit dem Halbmesser I C beide Kreise berührt, und zwar den aus A außerhalb, den aus B innerhalb.

Umgekehrt berührt der Kreis aus dem Mittelpunkte E die gegebenen Kreise in den Punkten B und C′, so hat man E B = E C′, daher E B C′ = E C′B; da nun E C′B = A′C′B′ = A′B′C′ ist, so hat man E B C′ = A′B′C′, daher B A ‖ B′A′, daher A O : A′O = A B : A′B′, daher ist O der innere Aehnlichkeitspunkt. Auf ähnliche Art läßt sich auch zeigen, daß die Gerade B′C, welche durch die Berührungspunkte B′ und C hindurchgeht, den Punkt O treffen muß.

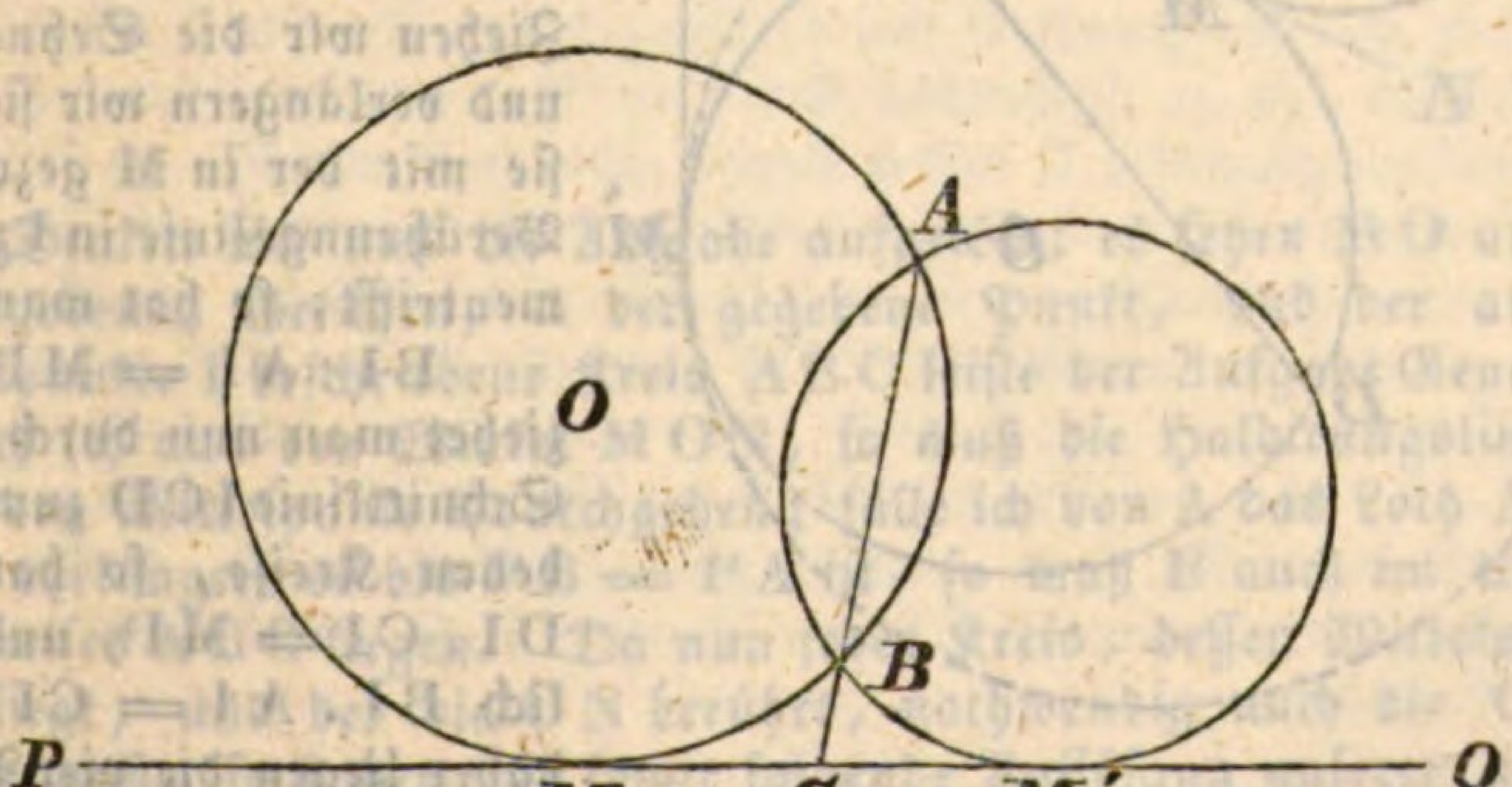
Wir sehen daraus, daß zu zwei gegebenen Kreisen unzählige dritte Kreise möglich sind, welche die gegebenen zwei Kreise berühren. Man kann also noch näher bestimmende Forderungen hinzusetzen, daß nämlich der dritte Kreis durch einen gegebenen Punkt hiedurch gehen oder eine gegebene Gerade berühren, oder einen bestimmten Halbmesser haben soll u. s. w.

Fig 222.



§. 211. Einen Kreis beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte durchgehet, und eine gegebene Gerade berühret.

Fig 223.



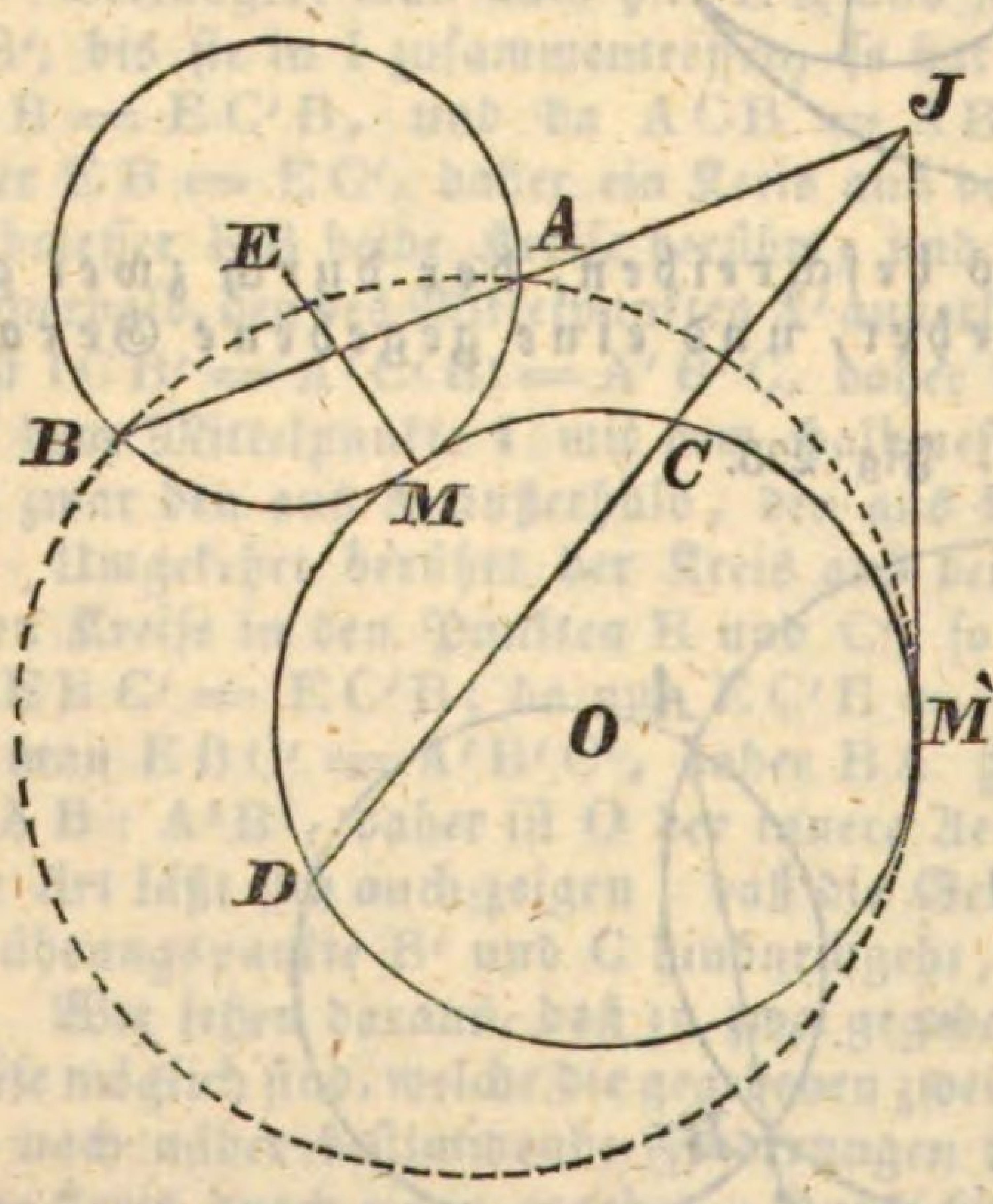
Denken wir uns die Aufgabe bereits gelöset, und der Kreis aus dem Mittelpunkte O gehe durch die gegebenen Punkte A und B, berühre die gegebene Gerade PQ, und zwar im Punkte M. Ziehen wir die AB, welche verlängert die PQ in C tritt. So haben wir nach dem bekannten Satze, daß, wenn man von einem Punkte eine Berührende und eine Schnittlinie zum Kreise ziehet, daß das Berührungsstück stets das geometrische Mittel zwischen der ganzen Schnittlinie und dem Stücke derselben außerhalb des Kreises ist, $BC : MC = MC : AC$; daher $MC = \sqrt{AC \cdot BC}$. Dieß gibt uns nun ein leichtes Mittel den Punkt M zu finden, um unsere Aufgabe aufzulösen.

Man verbindet die gegebenen zwei Punkte A und B, verlängert diese Gerade, bis sie die gegebene Gerade PQ trifft, in C, nimmt das geometrische Mittel von AC und BC (entweder durch Rechnung, oder durch Verzeichnung); das erhaltene geometrische Mittel kann man nun rechts oder links von C auftragen, wodurch man M und M′ erhält, und dadurch eine doppelte Auflösung hat. Führt man nun durch die Punkte A, B, M und A, B, M′ Kreise, so hat man das Verlangte.

Die Untersuchung der Verschiedenheit der Fälle, die hier möglich ist, und kleine Abänderungen der Auflösung veranlaßt, als wenn $AB \parallel PQ$, wenn einer der Punkte A oder B in der PQ selbst liegt u. s. w. überlassen wir unsern Lesern.

§. 212. **Einen Kreis beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte durchgehet, und einen gegebenen Kreis berührt.**

Fig. 224.



Denken wir uns die Aufgabe aufgelöset. A und B seyen die gegebenen Punkte, der Kreis aus dem Mittelpunkte O der gegebene Kreis, und es erfülle der Kreis aus dem Mittelpunkte E die Aufgabe, daß er durch A und B durchgehe, und den gegebenen Kreis in M berühre. Ziehen wir die Sehne AB, und verlängern wir sie, bis sie mit der in M gezogenen Berührungslinie in I zusammentrifft; so hat man:

$$BI : AI = MI^2;$$

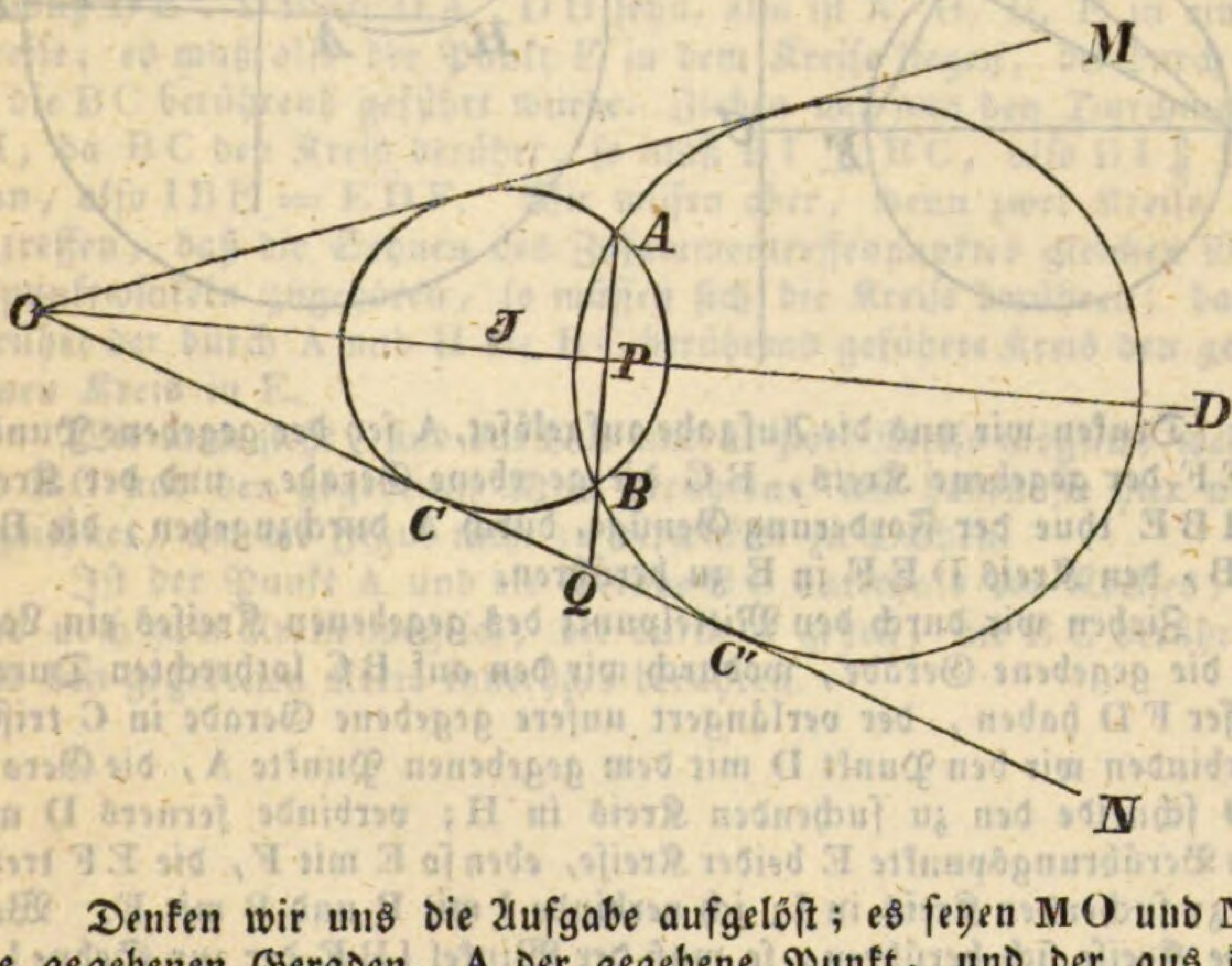
ziehet man nun durch I eine Schnittlinie ICD zum gegebenen Kreise, so hat man $DI \cdot CI = MI^2$, und folglich $BI \cdot AI = CI \cdot DI$, daher liegen die vier Punkte

A, B, C, D in einem Kreisumfange. Ziehe ich also einen willkürlichen Kreis durch die Punkte A und B, der den gegebenen Kreis in C und D schneidet, so müssen sich die verlängerten AB und CD im Punkte I schneiden, welcher Punkt die Eigenschaft hat, daß, wenn ich durch ihn eine Berührungslinie zum gegebenen Kreise ziehe, er ihn dort trifft, wo ein durch A und B gezogener Kreis ihn berührt. Nachdem ich also so den Punkt I gefunden, ziehe ich durch I zum gegebenen Kreise die Berührungslinien I M und I M′ (da je zwei solche möglich sind), und nun führe ich durch A, B, M und A, B, M′ Kreise, so ist die Aufgabe gelöset.

Auch hier überlassen wir die Auseinandersetzung der verschiedenen Fälle der Lage der zwei Punkte gegen den gegebenen Kreis, und die daraus folgende Veränderung der Auflösung der Aufmerksamkeit unserer Leser. — Eine ähnliche Bemerkung gilt auch für die nachfolgenden Aufgaben.

§. 213. **Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt gehet, und zwei gegebene Gerade berührt.**

Fig 225.



Denken wir uns die Aufgabe aufgelöst; es seyen M O und N O die gegebenen Geraden, A der gegebene Punkt, und der aus dem Mittelpunkte I beschriebene Kreis A B C leiste der Aufgabe Genüge. — Halbire ich nun den Winkel M O N, so muß die Halbirungslinie O D durch den Mittelpunkt I durchgehen; fälle ich von A das Loth A P auf O D, verlängere es bis P B = P A ist, so muß B auch im Umfange des Kreises A B C liegen. Da nun jeder Kreis, dessen Mittelpunkt in O D liegt, und der die O N berührt, nothwendig auch die O M berühren muß, so haben wir somit folgende Auflösung unserer Aufgabe.

Man fälle von A ein Loth auf die Halbirungslinie O D, verlängere das Loth auf der andern Seite, bis das verlängerte Stück dem Lothe gleich ist; durch diese zwei Punkte nun (hier A und B) führe man einen Kreis, der die O N berühret. Zu diesem Behufe braucht man nur $CQ = \sqrt{AQ \cdot BQ}$ rechts und links von Q aufzutragen, und so sieht man, daß zwei Kreise der Aufgabe Genüge leisten.

§. 214. Einen Kreis zu beschreiben, der durch einen gegebenen Punkt gehet, und eine gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berühret.

Fig. 226.

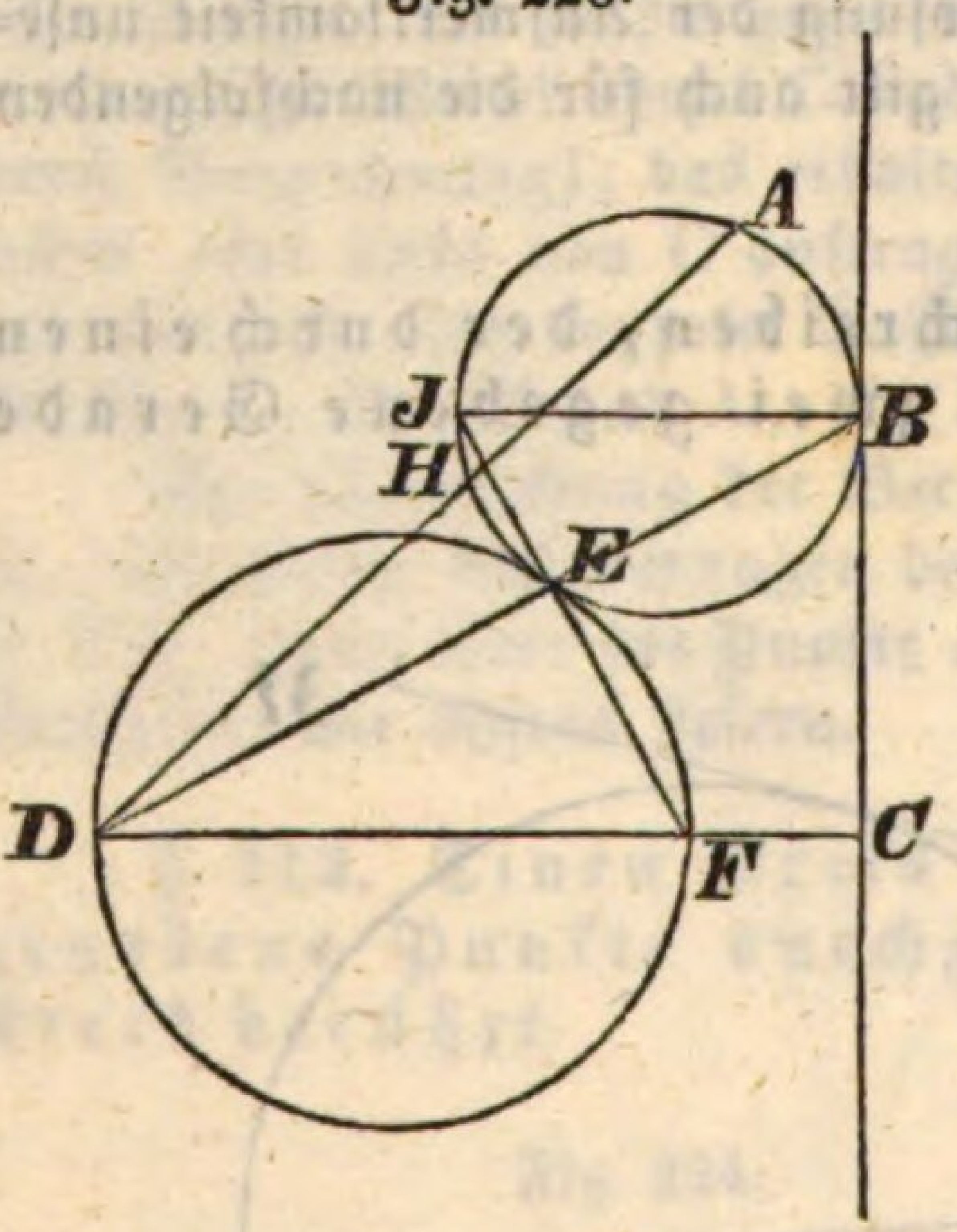
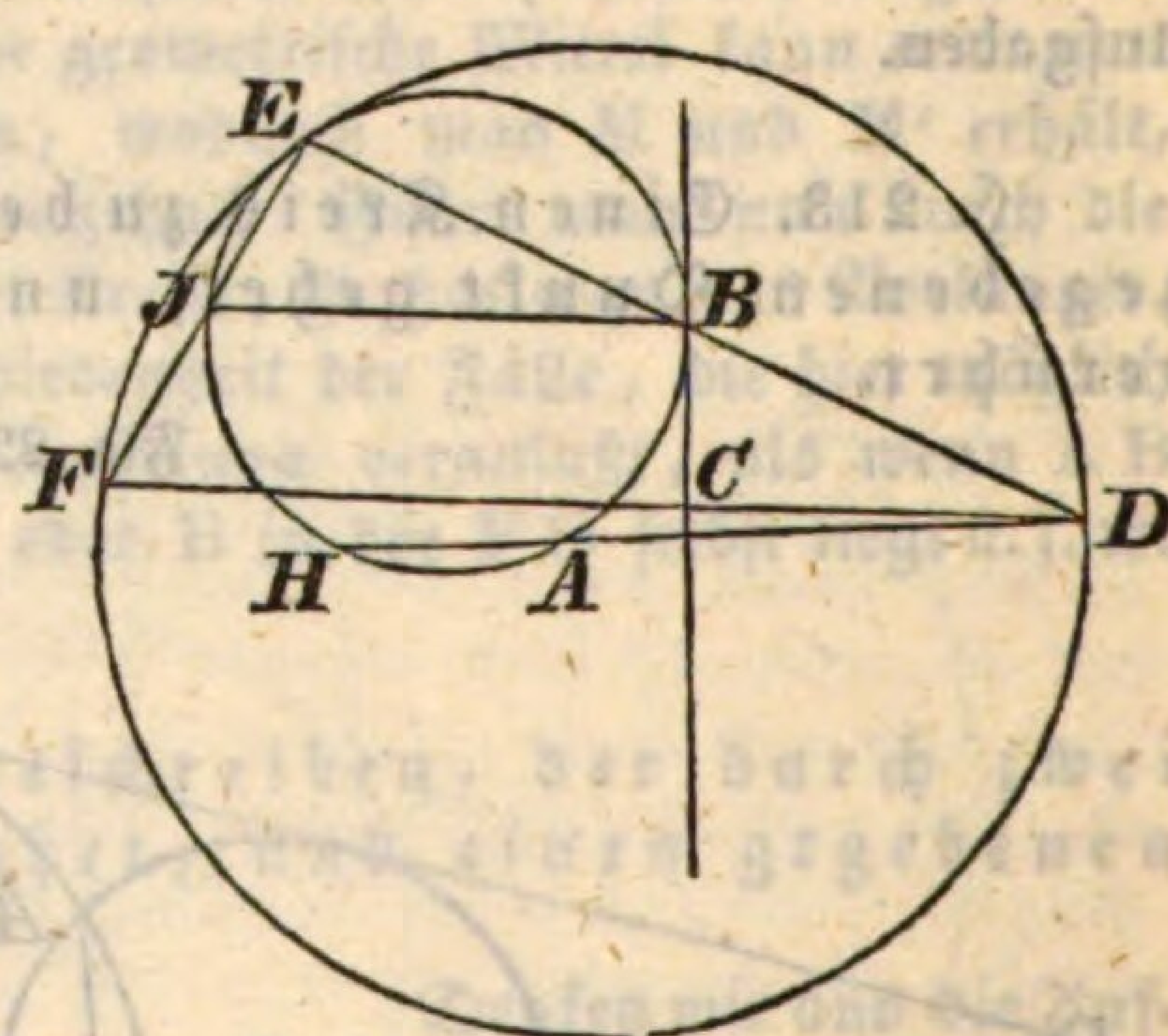


Fig. 227.



Denken wir uns die Aufgabe aufgelöset, A sey der gegebene Punkt, D E F der gegebene Kreis, B C die gegebene Gerade, und der Kreis A H B E thue der Forderung Genüge, durch A durchzugehen, die B C in B, den Kreis D E F in E zu berühren.

Ziehen wir durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises ein Loth auf die gegebene Gerade, wodurch wir den auf B C lothrechten Durchmesser F D haben, der verlängert unsere gegebene Gerade in C trifft. Verbinden wir den Punkt D mit dem gegebenen Punkte A, die Gerade A D schneide den zu suchenden Kreis in H; verbinde ferners D mit dem Berührungspunkte E beider Kreise, eben so E mit F, die E F treffe den zu suchenden Kreis in I; ich verbinde I mit B und B mit E. Weil beide Kreise sich berühren, so muß der Winkel I B E der zur Sehne I E gehört, gleich seyn dem Winkel E D F, der zur Sehne E F gehört, nach §. 207; daher muß I B $\|$ D F seyn; und somit I B senkrecht seyn auf B C, da aber der Kreis I A E B die Gerade B C berührt, so muß I B der Durchmesser seyn, daher muß I E B $= 90°$, daher I E B $=$ D E F, daher, da nun F E I eine Gerade ist, so muß B E D auch eine gerade Linie seyn.

Da nun $BEF = 90°$ und $BCF = 90°$, so ist das Viereck BCFE dem Kreise einschreibbar; denkt man sich nun durch BEFC einen Kreis, so sind BD und CD seine Schnittlinien, daher $DC . DF = DE . DB$; da aber A, B, H, E in einem Kreise liegen, so hat man $DH . DA = DE . DB$ und somit $DH . DA = DF . DC$; da nun DF, DC, DA lauter Punkte, die gegeben sind, verbinden, so gibt die letzte Proportion ein Mittel DH zu finden, und dadurch den Punkt H zu bestimmen; ist der Punkt H gefunden, so brauche ich nur durch A und H einen Kreis zu führen, der die BC berührt, so habe ich den zu suchenden Kreis ABHE.

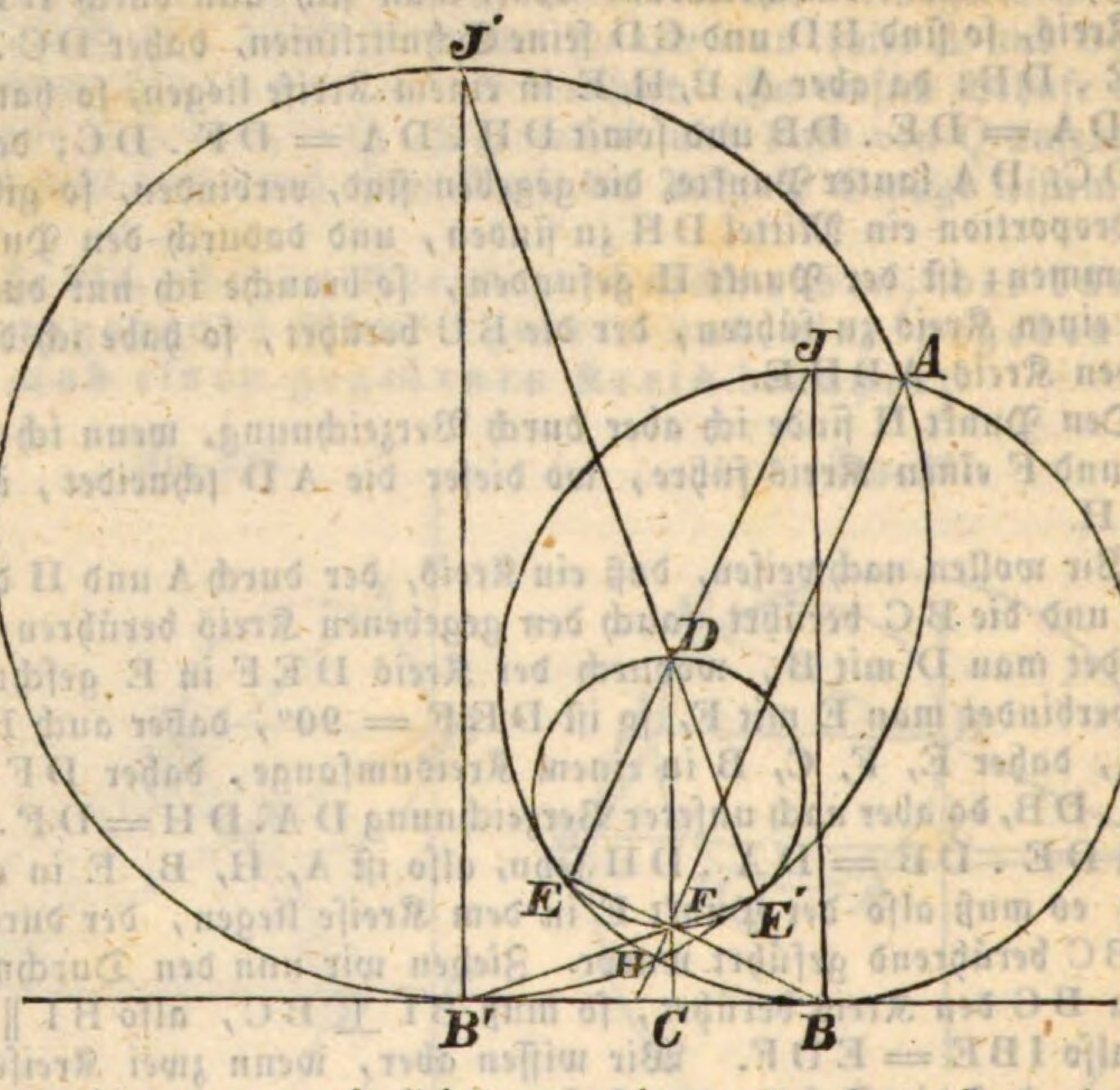
Den Punkt H finde ich aber durch Verzeichnung, wenn ich durch A, C und F einen Kreis führe, wo dieser die AD schneidet, ist der Punkt H.

Wir wollen nachweisen, daß ein Kreis, der durch A und H durchgehet, und die BC berührt, auch den gegebenen Kreis berühren wird. Verbindet man D mit B, wodurch der Kreis DEF in E geschnitten wird, verbindet man E mit F, so ist $DEF = 90°$, daher auch $BEF = 90°$, daher E, F, C, B in einem Kreisumfange, daher $DF . DC = DE . DB$, da aber nach unserer Verzeichnung $DA . DH = DF . DC$, so muß $DE . DB = DA . DH$ seyn, also ist A, H, B, E in einem Kreise; es muß also der Punkt E in dem Kreise liegen, der durch A, H die BC berührend geführt wurde. Ziehen wir nun den Durchmesser BI, da BC den Kreis berührt, so muß $BI \perp BC$, also $BI \parallel DF$ seyn, also $IBE = EDF$. Wir wissen aber, wenn zwei Kreise sich so treffen, daß die Sehnen des Zusammentreffenpunktes gleichen Mittelpunktwinkeln zugehören, so müssen sich die Kreise berühren; daher berührt der durch A und H die BC berührend geführte Kreis den gegebenen Kreis in E.

Wie man sieht, sind durch A und H zwei Kreise möglich, welche die BC und den gegebenen Kreis berühren; wir haben sie hier nicht gezeichnet, um die Figur nicht zu verwickelt zu machen.

Ist der Punkt A und die Gerade BC unterhalb des Kreises, so sind noch zwei Kreise möglich, die durch A gehen, die BC berühren, und den gegebenen Kreis innerhalb berühren.

Fig. 228.



Verbindet man nämlich den gegebenen Punkt A, statt wie früher, mit D, jetzt mit F, macht HF so groß, daß HF . FA = FD . DC, legt man durch A und H einen Kreis, der die BC berührt, nämlich den Kreis ABHEI, verbindet F mit B, verlängert FB, bis es in E den Umfang des gegebenen Kreises schneidet, verbindet E mit D, verlängert ED, bis es den Umfang des Berührungskreises in I schneidet, so ist DEF = 90°, und folglich, wenn man IB ziehet, dieses der Durchmesser des Berührungskreises.

Da DEF = 90°; FCB = 90°, so wird ein Kreis, dessen Durchmesser BD ist, durch E und C durchgehen; daher liegen die Punkte D, E, C, B im Umfange eines Kreises, daher DF . FC = EF . FB; da nun nach unserer Verzeichnung DF . FC = HF . FA ist, so hat man EF . FB = HF . FA, daher B, H, E, A im Umfange eines Kreises, daher liegt der Punkt E in beiden Kreisen DEF und AHB; da nun die Sehne EF sowohl als EB zu gleichen Mittelpunktwinkeln gehören, da EDF = EIB (weil DF ‖ IB), so berühren sich beide Kreise im Punkte E.

Ganz auf diese Weise gehet die Folgerung für den zweiten Kreis AE'HB'I, der durch A und H die BC in B' berührend gelegt ist.

§. 215. Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene Gerade und einen gegebenen Kreis berührt.

Damit die Aufgabe möglich sey, muß stets der gegebene Kreis

zwischen den gegebenen Geraden enthalten seyn. Hiebei sind nun noch immer zwei Fälle möglich, entweder berührt der zu suchende Kreis den gegebenen auswendig oder inwendig, gegen die gegebenen Geraden wird der zu suchende Kreis immer inwendig seyn. Denken wir uns wieder die Aufgabe gelöset.

Fig. 229.

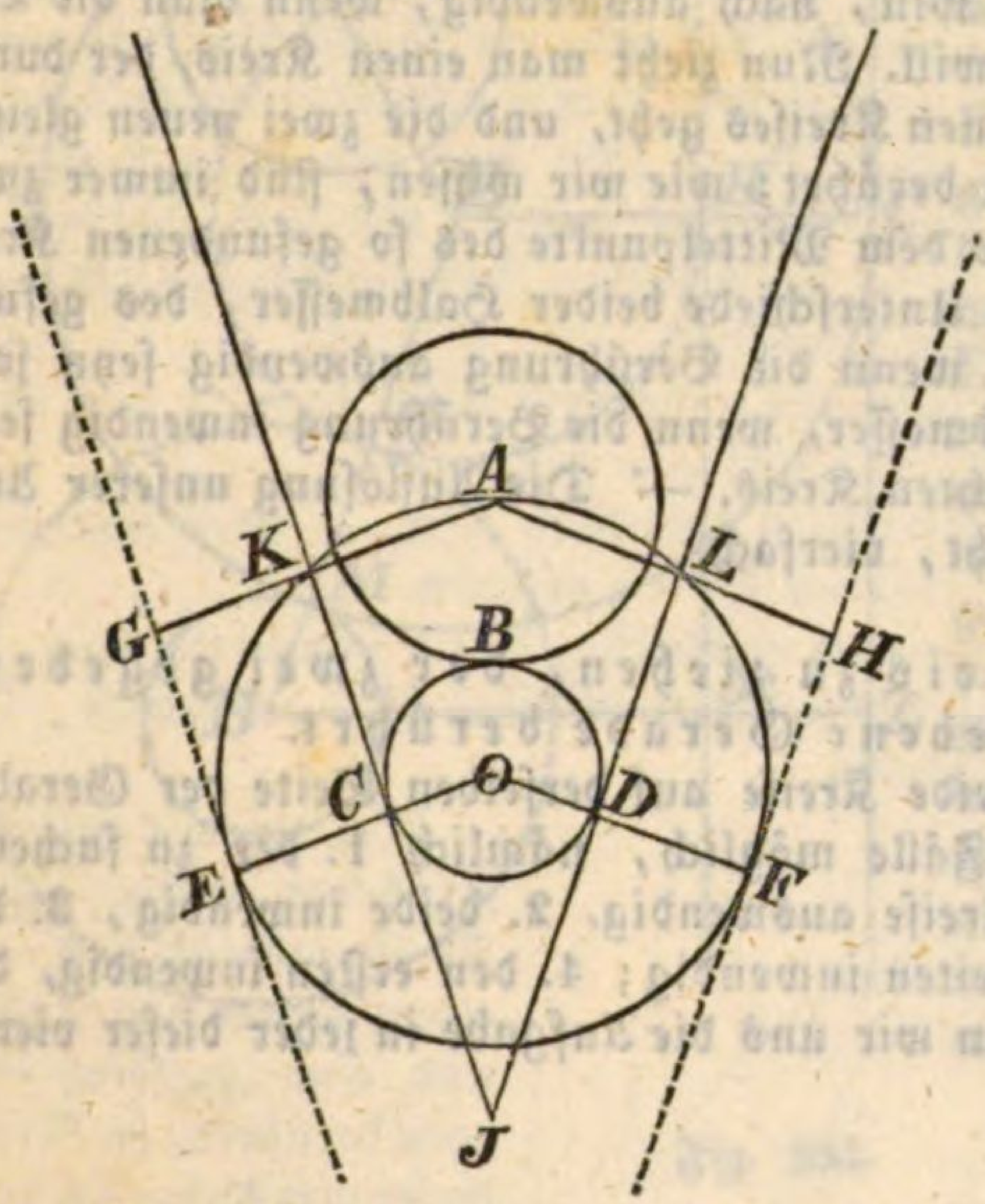
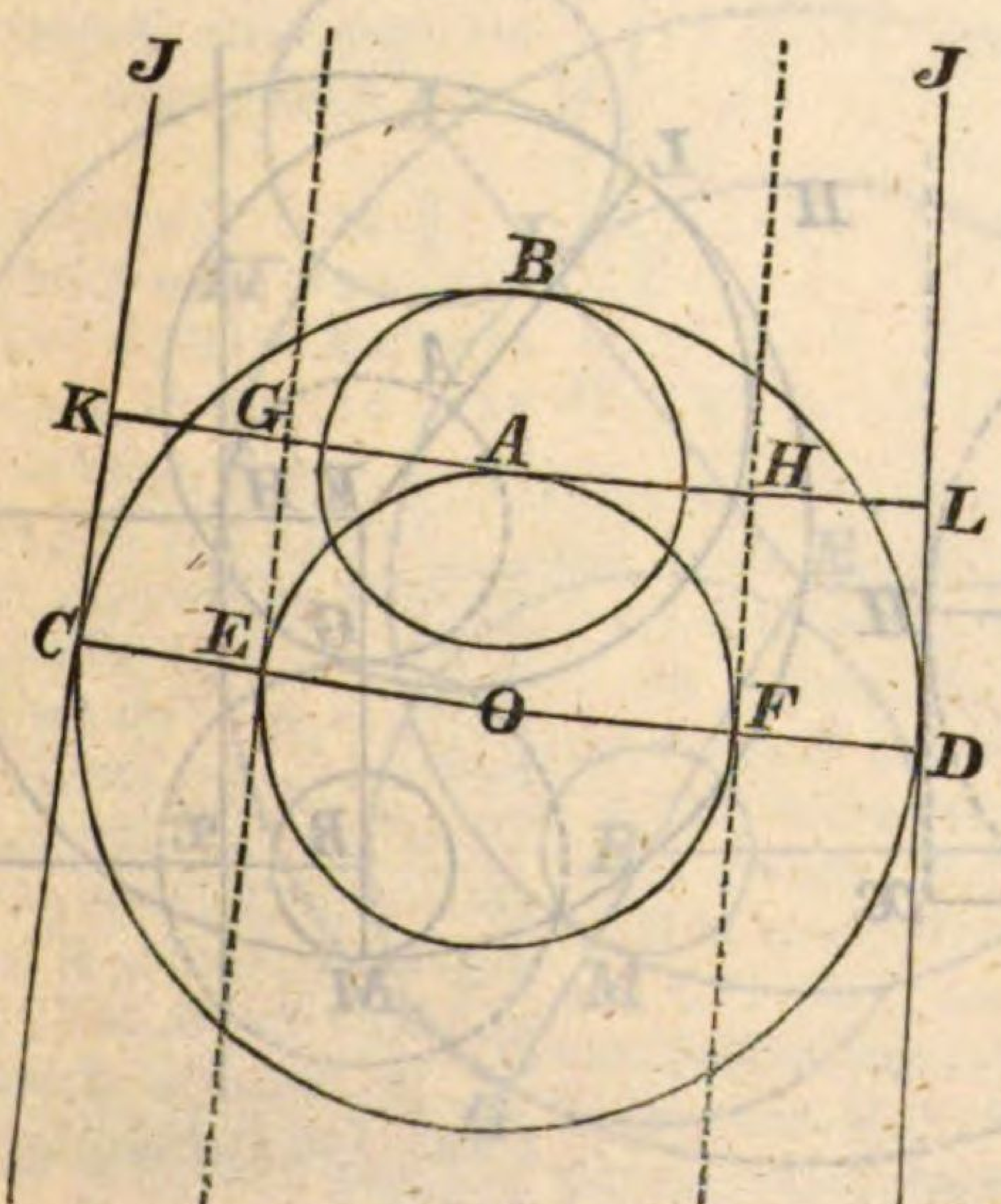


Fig 230.



Es sey A der Mittelpunkt, AB der Halbmesser des gegebenen Kreises, CI und DI die gegebenen Geraden; es sey O der Mittelpunkt, und OB der Halbmesser des zu suchenden Kreises; beschreibe ich nun aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO einen Kreis, fälle von O auf CI und ID die Lothe CO und OD (was lauter Mittel sind, um das zu Suchende mit dem Gegebenen zu verbinden), die CO und OD treffen den Umfang des Kreises aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO in den Punkten E und F; zieht man nun durch E und F Gerade, die mit CI und DI gleichlaufend sind, die Geraden GE und HF, so sind diese entschieden Berührungslinien des Kreises aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO, und dieser Kreis also ist ein Kreis, der durch A durchgeht, und die Geraden GE und FH, welche in dem Abstande CE = GK = DF = LH = AB gleich dem Halbmesser des gegebenen Kreises mit den gegebenen Geraden gleichlaufen. Dadurch ist also die Lage des Kreises aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser AO gegeben; ist aber dieses der Fall,

dann braucht man nur aus O mit dem Halbmesser AO — AB einen Kreis zu beschreiben, um die gegebene Aufgabe gelöset zu haben. — Man hat daher folgende Auflösung.

In einem Abstande, der dem Halbmesser des gegebenen Kreises gleich ist, zieht man gleichlaufende Gerade mit den gegebenen zwei Geraden. Man zieht diese Gleichlaufenden nach inwendig, wenn man die Berührung inwendig haben will, nach auswendig, wenn man die Berührung auswendig haben will. Nun zieht man einen Kreis, der durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises geht, und die zwei neuen gleichlaufend gezogenen Geraden berührt; wie wir wissen, sind immer zwei solche Kreise möglich. Aus dem Mittelpunkte des so gefundenen Kreises beschreibt man mit dem Unterschiede beider Halbmesser, des gefundenen und des gegebenen, wenn die Berührung auswendig seyn soll, mit der Summe dieser Halbmesser, wenn die Berührung inwendig seyn soll, so hat man den gesuchten Kreis. — Die Auflösung unserer Aufgabe ist also, wie man sieht, vierfach.

§. 216. Einen Kreis zu ziehen, der zwei gegebene Kreise und eine gegebene Gerade berührt.

Begreiflich müssen beide Kreise auf derselben Seite der Geraden seyn, und nun sind vier Fälle möglich, nämlich 1. der zu suchende Kreis berührt die beiden Kreise auswendig, 2. beide inwendig, 3. den ersten auswendig, den zweiten inwendig; 4. den ersten inwendig, den zweiten auswendig. Denken wir uns die Aufgabe in jeder dieser viererlei Arten aufgeloset.

Fig. 231.

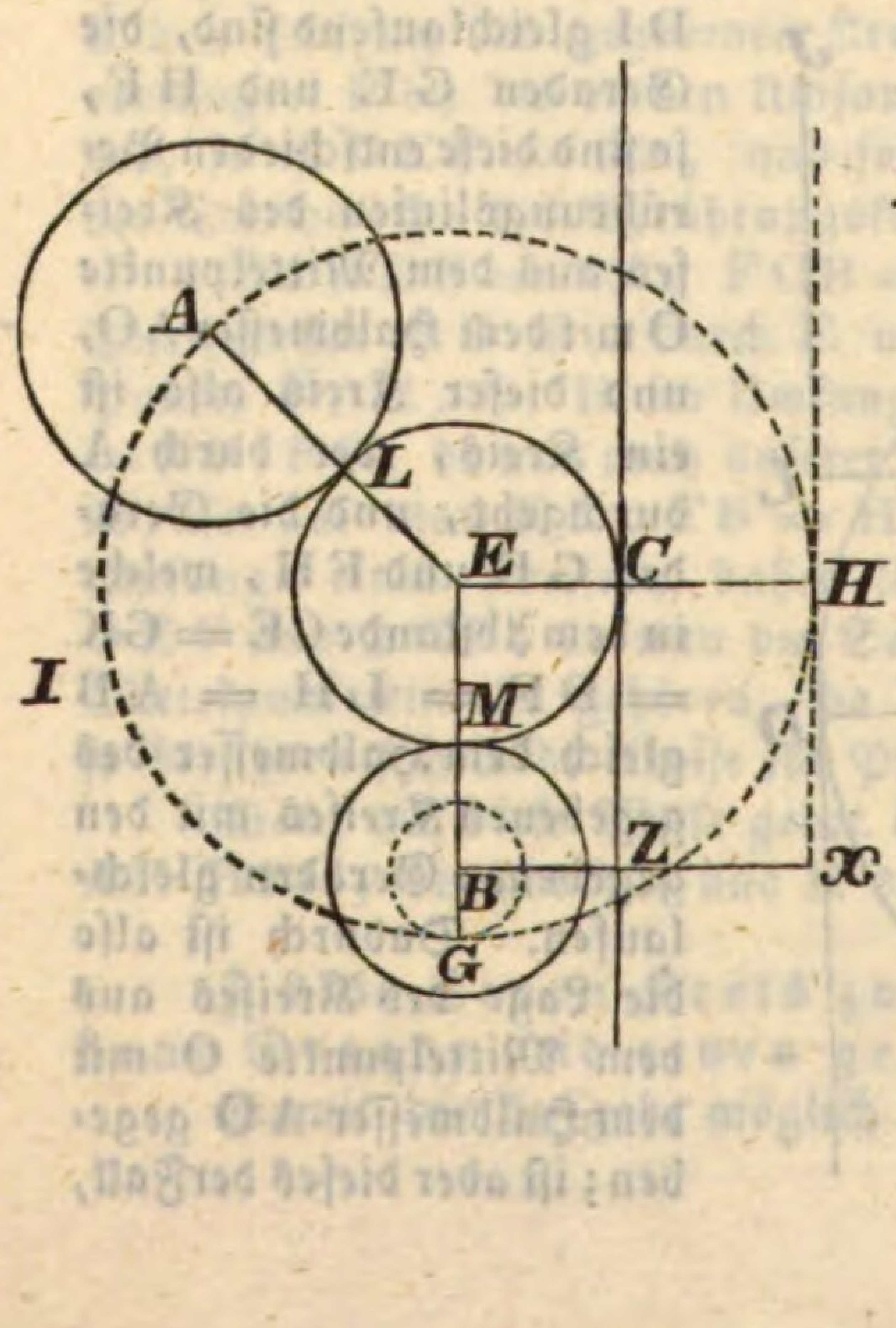


Fig. 232.

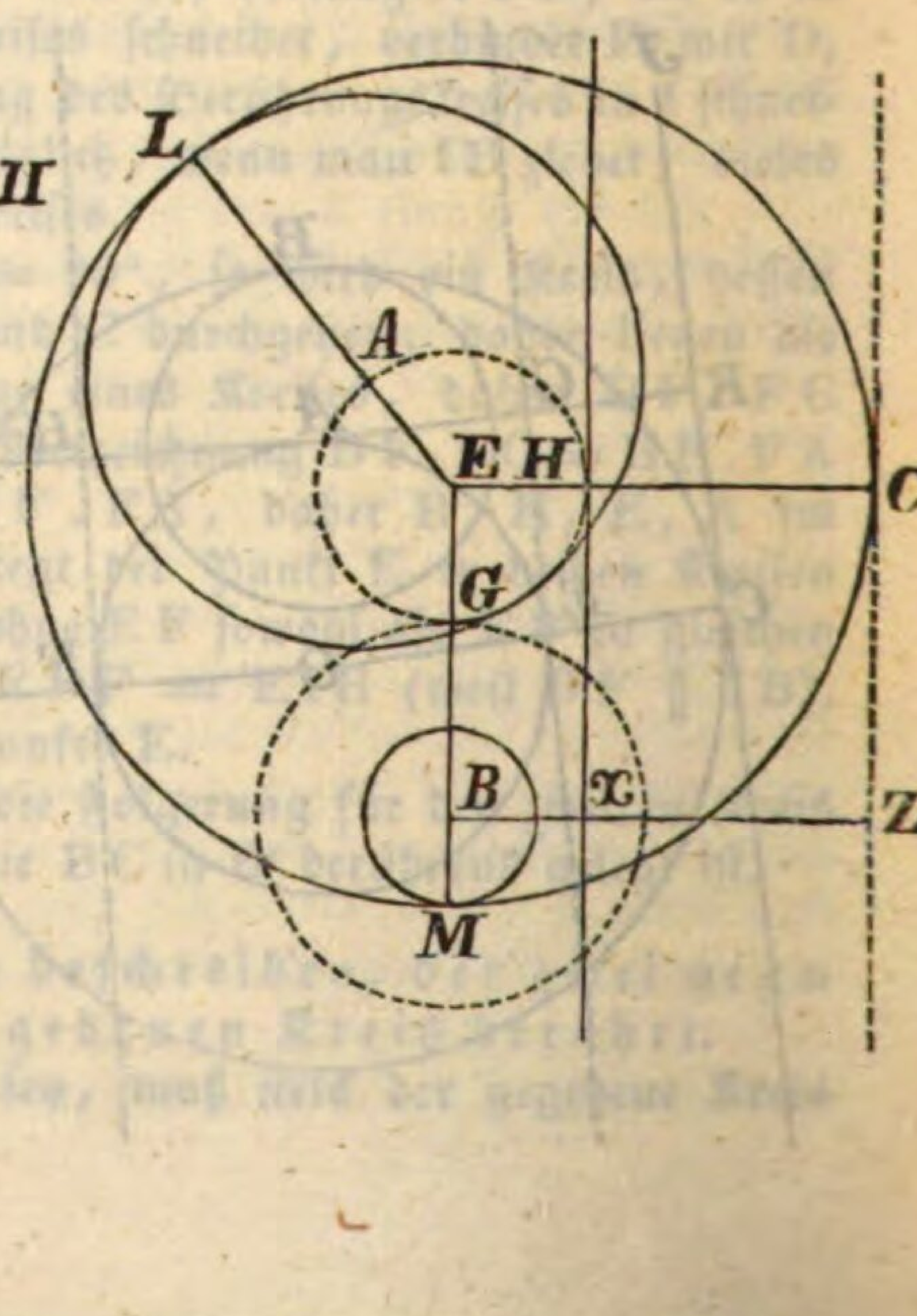
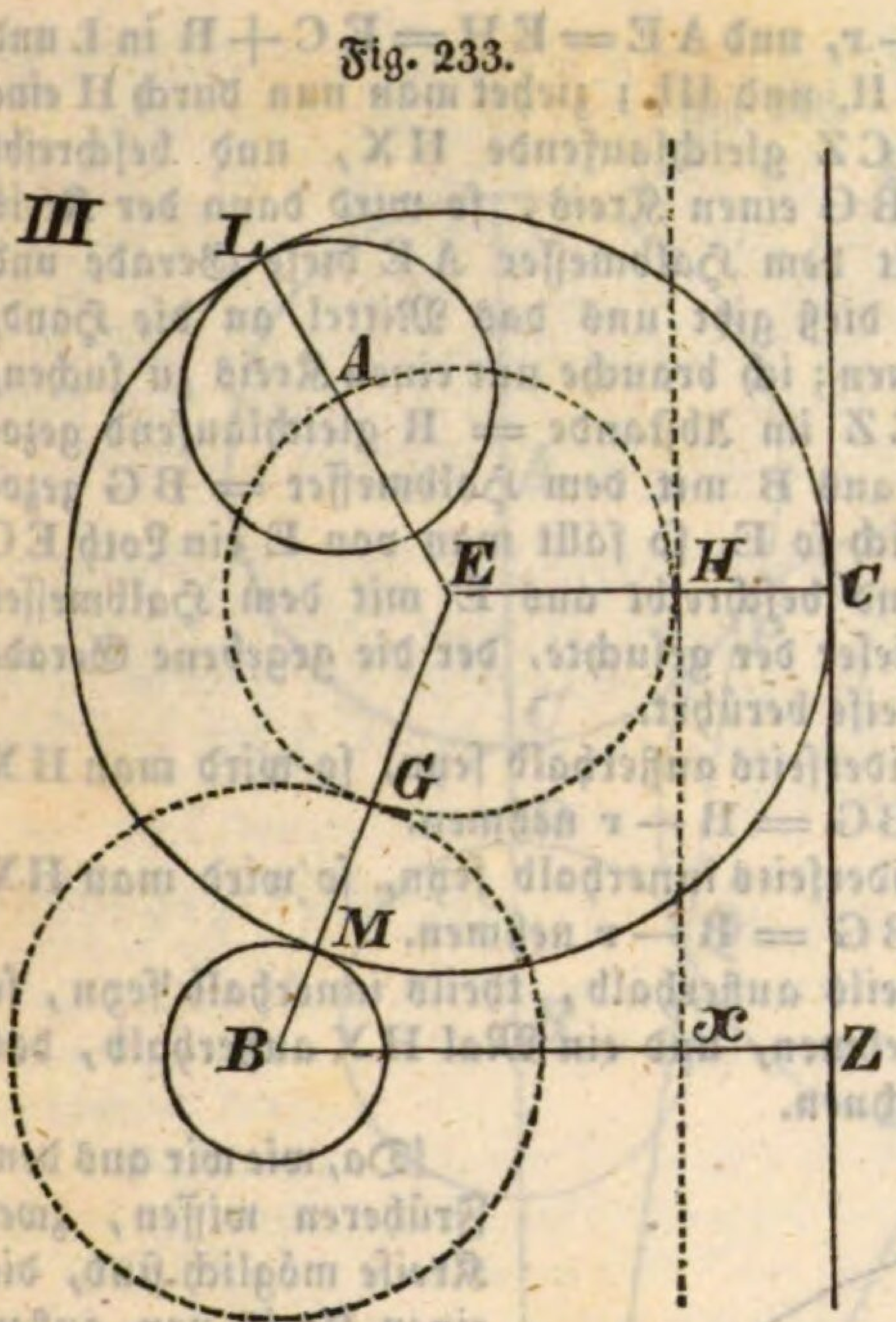
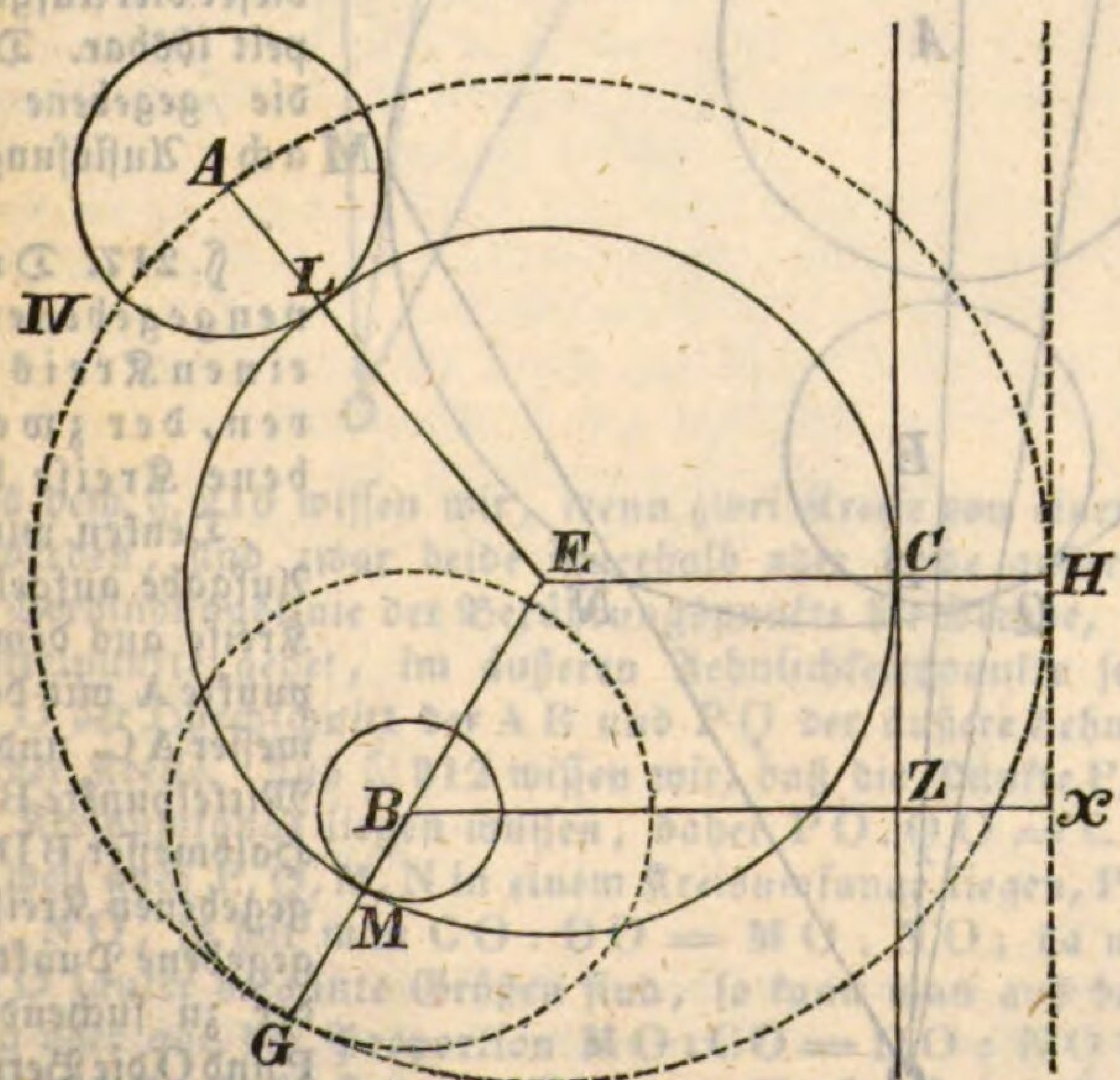


Fig. 233.



Die Kreise aus den Mittelpunkten A und B mit den Halbmessern AL und BM seyen die gegebenen Kreise, die CZ die gegebene Gerade. Verbinde ich den Mittelpunkt E des zu suchenden Kreises mit A und B, und fälle von E das Loth EC auf die gegebene Gerade, beschreibe dann aus E mit dem Halbmesser AE einen Kreis, der die EB in G trifft, während EB von dem zu suchenden Kreise in M getroffen wird, die EC wird in H von diesem Kreise getroffen. So ist, wenn wir den Halbmesser des gegebenen Kreises aus A mit R, und den des gegebenen Kreises aus B mit r bezeichnen, in allen vier Figuren MG = R; und da MB = r ist, so hat man in I. u. II. BG = R — r;

Fig. 234.



in III. und IV. BG = R + r, und AE = EH = EC + R in I. und IV., und gleich EC — R in II. und III.; ziehet man nun durch H eine mit der gegebenen Geraden CZ gleichlaufende HX, und beschreibt aus B mit dem Halbmesser BG einen Kreis, so wird dann der Kreis aus dem Mittelpunkte E mit dem Halbmesser AE diese Gerade und diesen Kreis berühren, und dieß gibt uns das Mittel an die Hand, den Mittelpunkt E zu bestimmen; ich brauche nur einen Kreis zu suchen, der durch A geht, die mit CZ im Abstande = R gleichlaufend gezogene Gerade HX, und den aus B mit dem Halbmesser = BG gezogenen Kreis berührt. Habe ich so E, so fällt man von E ein Loth EC auf die gegebene Gerade, und beschreibt aus E mit dem Halbmesser = EC einen Kreis, so ist dieser der gesuchte, der die gegebene Gerade und die beiden gegebenen Kreise berührt.

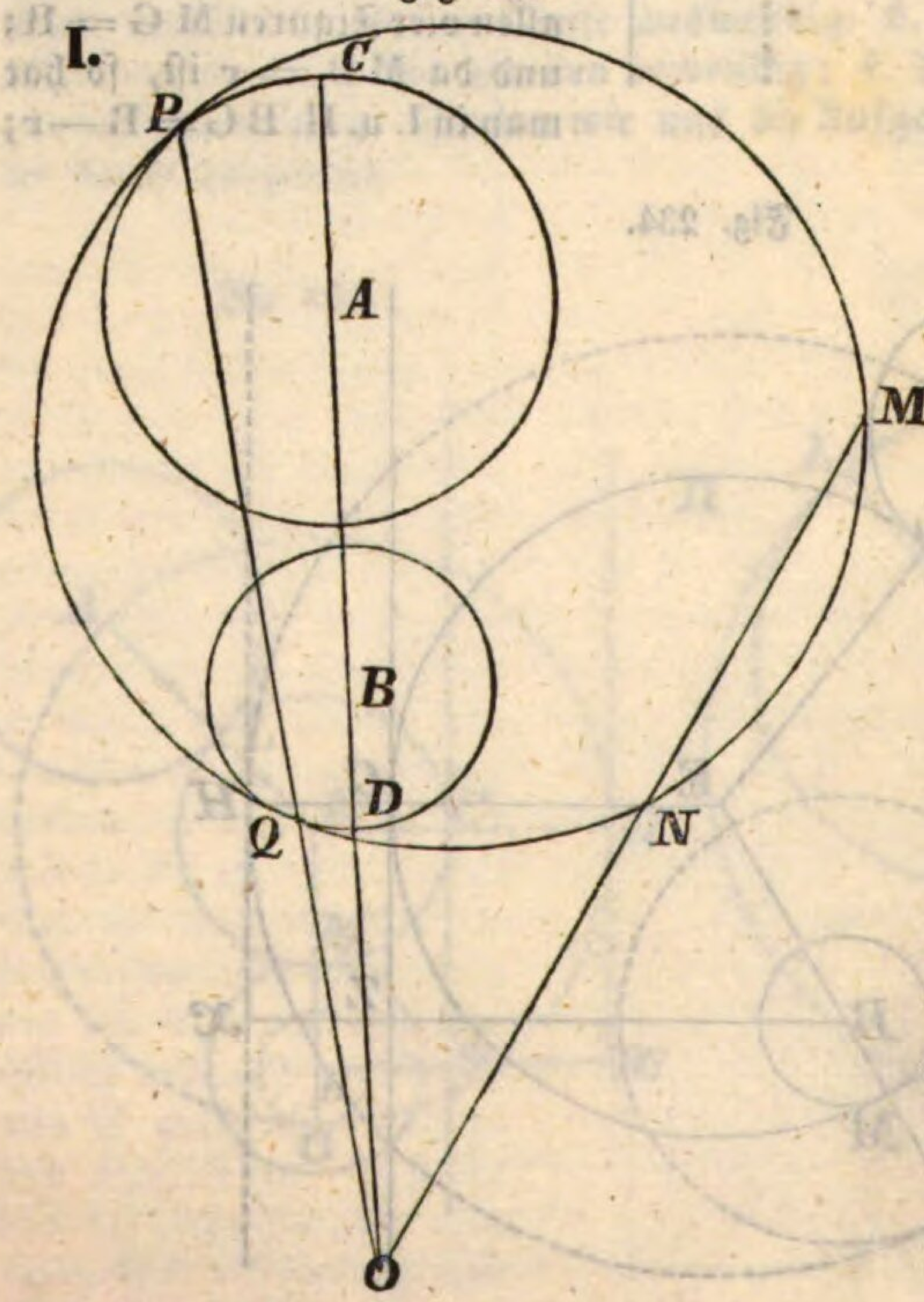
Soll die Berührung beiderseits außerhalb seyn, so wird man HX außerhalb verzeichnen, und BG = R — r nehmen.

Soll die Berührung beiderseits innerhalb seyn, so wird man HX innerhalb verzeichnen, und BG = R — r nehmen.

Soll die Berührung theils außerhalb, theils innerhalb seyn, so wird man BG = R + r nehmen, und ein Mal HX außerhalb, das andere Mal innerhalb verzeichnen.

[Da, wie wir aus dem Früheren wissen, zwei Kreise möglich sind, die einen Kreis von außen und eine gegebene Gerade berühren, so ist jede dieser vier Aufgaben doppelt lösbar. Daher hat die gegebene Aufgabe acht Auflösungen.

Fig. 235.

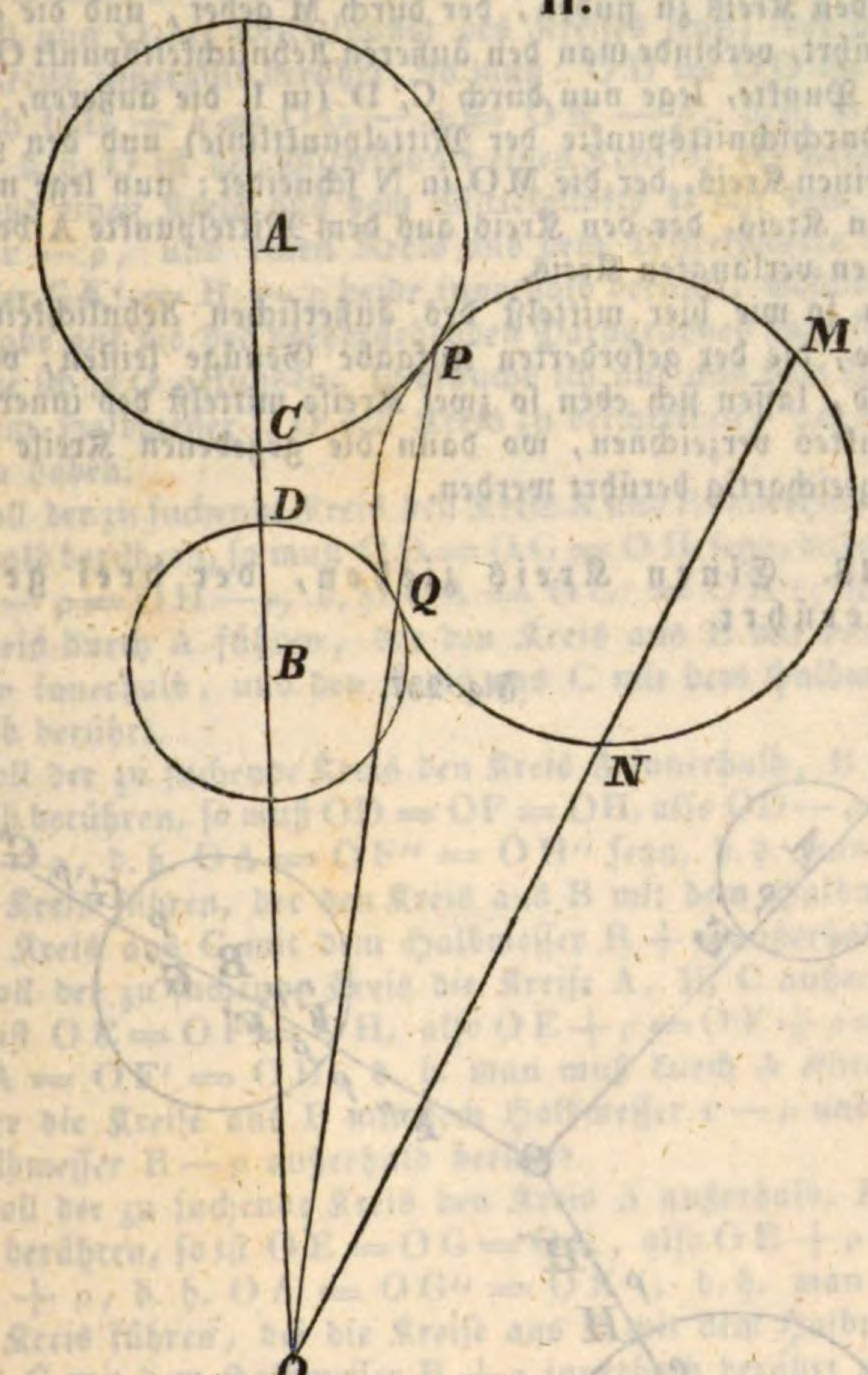


§. 217. **Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu führen, der zwei gegebene Kreise berührt.**

Denken wir uns die Aufgabe aufgelöset, die Kreise aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AC, und aus dem Mittelpunkte B mit dem Halbmesser BD seyen die gegebenen Kreise, M der gegebene Punkt, MNPQ der zu suchende Kreis, P und Q die Berührungspunkte.

Fig. 236.

II.



Aus dem §. 210 wissen wir, wenn zwei Kreise von einem dritten berührt werden, und zwar beide innerhalb oder beide außerhalb, so wird die Verbindungslinie der Berührungspunkte die Gerade, die durch beide Mittelpunkte gehet, im äußeren Aehnlichkeitspunkte schneiden; daher ist O der Durchschnitt der A B und P Q der äußere Aehnlichkeitspunkt beider Kreise. Aus §. 212 wissen wir, daß die Punkte P, C, Q, D in einem Kreisumfange liegen müssen, daher PO . QO = CO . DO, da nun, weil auch P, Q, M, N in einem Kreisumfange liegen, PO . QO = MO . NO, so hat man CO . DO = MO . NO; da nun CO, DO, MO lauter bekannte Größen sind, so kann man aus der letzten Gleichung oder aus der Proportion MO : CO = DO : NO das NO und somit den Punkt N finden. Hat man N, so ist der Kreis, der

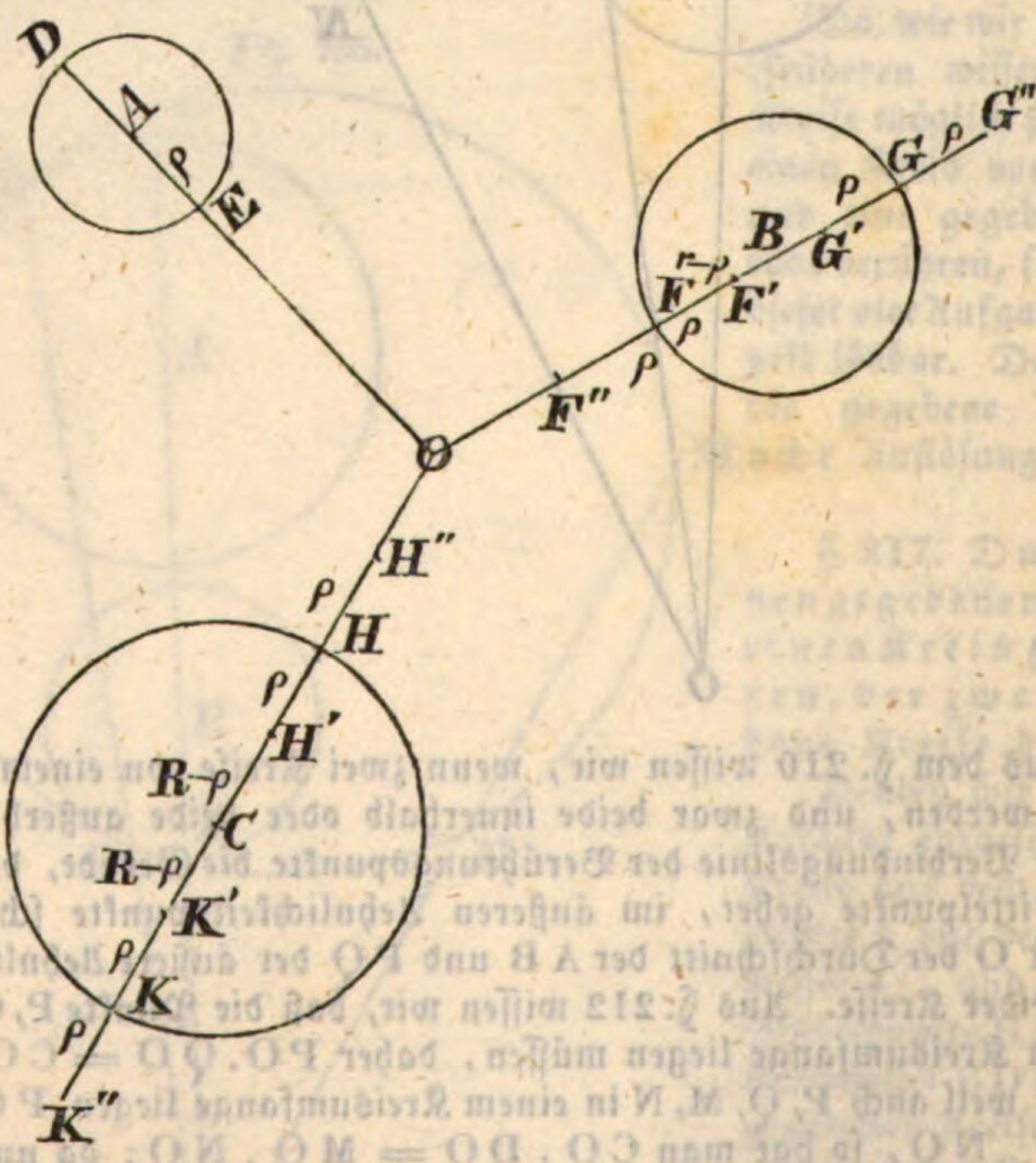
durch M und N gehet, und den Kreis aus A mit dem Halbmesser CA berührt, der zu suchende Kreis, und hat somit folgende Auflösung.

Um den Kreis zu finden, der durch M gehet, und die gegebenen Kreise berührt, verbinde man den äußeren Aehnlichkeitspunkt O mit dem gegebenen Punkte, lege nun durch C, D (in I. die äußeren, in II. die inneren Durchschnittspunkte der Mittelpunktlinie) und den gegebenen Punkt M einen Kreis, der die MO in N schneidet; nun lege man durch M, N einen Kreis, der den Kreis aus dem Mittelpunkte A berührt, so hat man den verlangten Kreis.

Eben so wie hier mittelst des äußerlichen Aehnlichkeitspunktes zwei Kreise, die der geforderten Aufgabe Genüge leisten, verzeichnet worden sind, lassen sich eben so zwei Kreise mittelst des inneren Aehnlichkeitspunktes verzeichnen, wo dann die gegebenen Kreise von dem dritten ungleichartig berührt werden.

§. 218. **Einen Kreis ziehen, der drei gegebene Kreise berührt.**

Fig. 237.



Es seyen die drei gegebenen Kreise im Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AD = ρ; im Mittelpunkte B mit dem Halbmesser BF = r, und im Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CH = R. Es sey O der

Mittelpunkt des zu suchenden Kreises; verbinden wir O mit A, B, C, und verlängern diese Geraden bis an die Umfänge, und schneiden $GG' = GG'' = FF' = FF'' = HH' = HH'' = KK' = KK'' = \rho$ ab.

Soll nun O der Mittelpunkt des Kreises seyn, der die drei gegebenen Kreise innerhalb berührt, so muß: $OD = OG = OK$ seyn, daher auch $OD - \rho = OG - \rho = OK - \rho$, d. h. $OA = OG = OK'$, d. h. O ist der Mittelpunkt eines Kreises, der durch A durchgehet, und einen Kreis aus dem Mittelpunkte B mit dem Halbmesser $BG' = r - \rho$, und einen Kreis aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser $CK' = R - \rho$ beide innerhalb berührt, wodurch also unsere Aufgabe auf die des vorhergehenden Paragraphes zurückgeführt ist; denn habe ich so O gefunden, so brauche ich nur aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser D O den Kreis zu beschreiben, um die Aufgabe gelöset zu haben.

Soll der zu suchende Kreis den Kreis A und B innerhalb, den Kreis C außerhalb berühren, so muß $OD = OG = OH$ seyn, daher $OD - \rho = OG - \rho = OH - \rho$, d. h. $OA = OG' = OH''$; ich muß also einen Kreis durch A führen, der den Kreis aus B mit dem Halbmesser $r - \rho$ innerhalb, und den Kreis aus C mit dem Halbmesser $R + \rho$ außerhalb berührt.

Soll der zu suchende Kreis den Kreis A innerhalb, B und C aber außerhalb berühren, so muß $OD = OF = OH$, also $OD - \rho = OF - \rho = OH - \rho$, d. h. $OA = OF'' = OH''$ seyn, d. h. man muß durch A einen Kreis führen, der den Kreis aus B mit dem Halbmesser $r + \rho$ und den Kreis aus C mit dem Halbmesser $R + \rho$ außerhalb berührt.

Soll der zu suchende Kreis die Kreise A, B, C außerhalb berühren, so ist $OE = OF = OH$, also $OE + \rho = OF + \rho = OH + \rho$, d. h. $OA = OF' = OH'$, d. h. man muß durch A einen Kreis ziehen, der die Kreise aus B mit dem Halbmesser $r - \rho$ und aus C mit dem Halbmesser $R - \rho$ außerhalb berührt.

Soll der zu suchende Kreis den Kreis A außerhalb, B und C innerhalb berühren, so ist $OE = OG = OK$, also $OE + \rho = OG + \rho = OK + \rho$, d. h. $OA = OG'' = OK''$, d. h. man muß durch A einen Kreis führen, der die Kreise aus B mit dem Halbmesser $r + \rho$ und aus C mit dem Halbmesser $R + \rho$ innerhalb berührt u. s. w. Wie man sieht, sind hier acht Auflösungen möglich.

Soll die Berührung der Kreise aus den Mittelpunkten				so muß man einen Kreis durch A ziehen, der die Kreise aus dem Mittelpunkte		
	A,	B,	C seyn,		B,	C berührt
1.	innerh.	innerh.	innerh.	m. d. Halbm.	$r-\rho$ inn.	$R-\rho$ inn.
2.	innerh.	innerh.	außerh.		$r-\rho$ inn.	$R+\rho$ auß.
3.	innerh.	außerh.	innerh.		$r+\rho$ auß.	$R-\rho$ inn.
4.	innerh.	außerh.	außerh.		$r+\rho$ auß.	$R+\rho$ auß.
5.	außerh.	innerh.	innerh.		$r+\rho$ inn.	$R+\rho$ inn.
6.	außerh.	innerh.	außerh.		$r+\rho$ inn.	$R-\rho$ auß.
7.	außerh.	außerh.	innerh.		$r-\rho$ auß.	$R+\rho$ inn.
8.	außerh.	außerh.	außerh.		$r-\rho$ auß.	$R-\rho$ auß.

Dadurch bekommt man den gesammten Mittelpunkt, wornach sich der fragliche Kreis leicht beschreiben läßt. Die Lösung dieser letztern Aufgabe schließt die Lösung aller vorhergehenden Apollonischen Aufgaben in sich; denn ist $\rho = o$, so hat man zwei Kreise und einen Punkt, und man hat nur vier Kreise zur Auflösung, wo die Kreise 1,5; 2,6; 3,7 und 4,8 dieselben werden. Ist $\rho = o$ und $r = o$ also ein Kreis und zwei Punkte, so hat man nur zwei Kreise zur Auflösung. Ist $R = \rho = r = o$, so bleibt nur ein Kreis übrig.

Kömmt statt eines Kreises eine gerade Linie, so ist das so viel, als hätte man einen Kreis mit einem Halbmesser, der unendlich groß ist. Ist so z. B. $r = \infty$, so hat man doch acht Auflösungen, statt der Kreise mit den Halbmessern $r + \rho$ und $r - \rho$ zu beschreiben; hat man natürlich zur Geraden in den Abständen $+ \rho$ und $- \rho$ gleichlaufende Gerade zu ziehen. Durch diese Betrachtung gelangt man, wie man sieht, zu unserer Auflösung in §. 216. Wäre nebst $r = \infty$ auch $R = \infty$, so hat man zu den gegebenen Geraden gleichlaufende Gerade in den Abständen $+ \rho$ und $- \rho$ zu ziehen, und dann durch den Punkt einen Kreis zu ziehen, der diese neu gezogene Gerade berührt, wodurch man auf die Auflösung in §. 215 gelangt.

Viertes Buch.

Trigonometrie.

§. 219. Wir haben im Vorhergehenden gesehen, in welcher wichtigen Wechselbeziehung die Länge gerader Linien zur Größe ihres Richtungsunterschiedes stehe, z. B. die Größe der Seiten eines Dreiecks zur Größe der ihnen gegenüberstehenden Winkeln.

Um diesen Zusammenhang und wechselseitigen Einfluß besser einsehen und genauer bestimmen zu können, haben die Geometer eine Reihe von Hülfsgrößen erdacht, welche zunächst der Gegenstand gegenwärtiger Betrachtung seyn werden, und deren systematische Darstellung man gewöhnlich Trigonometrie nennt.

§. 220. Denken wir uns bei einem Winkel den einen Schenkel fest und den andern beweglich, was hinreicht, damit der Winkel alle möglichen Größen erreichen könne. Schneidet man nun von dem beweglichen Schenkel eines Winkels ein Stück gleich der Einheit des Längenmaßes vom Scheitel an ab, fällt von diesem Endpunkte ein Loth auf die Richtung des unbeweglichen Schenkels, so heißt die Zahl, welche die Länge dieses Lothes ausdrückt, der Sinus dieses Winkels.

Fig. 238.

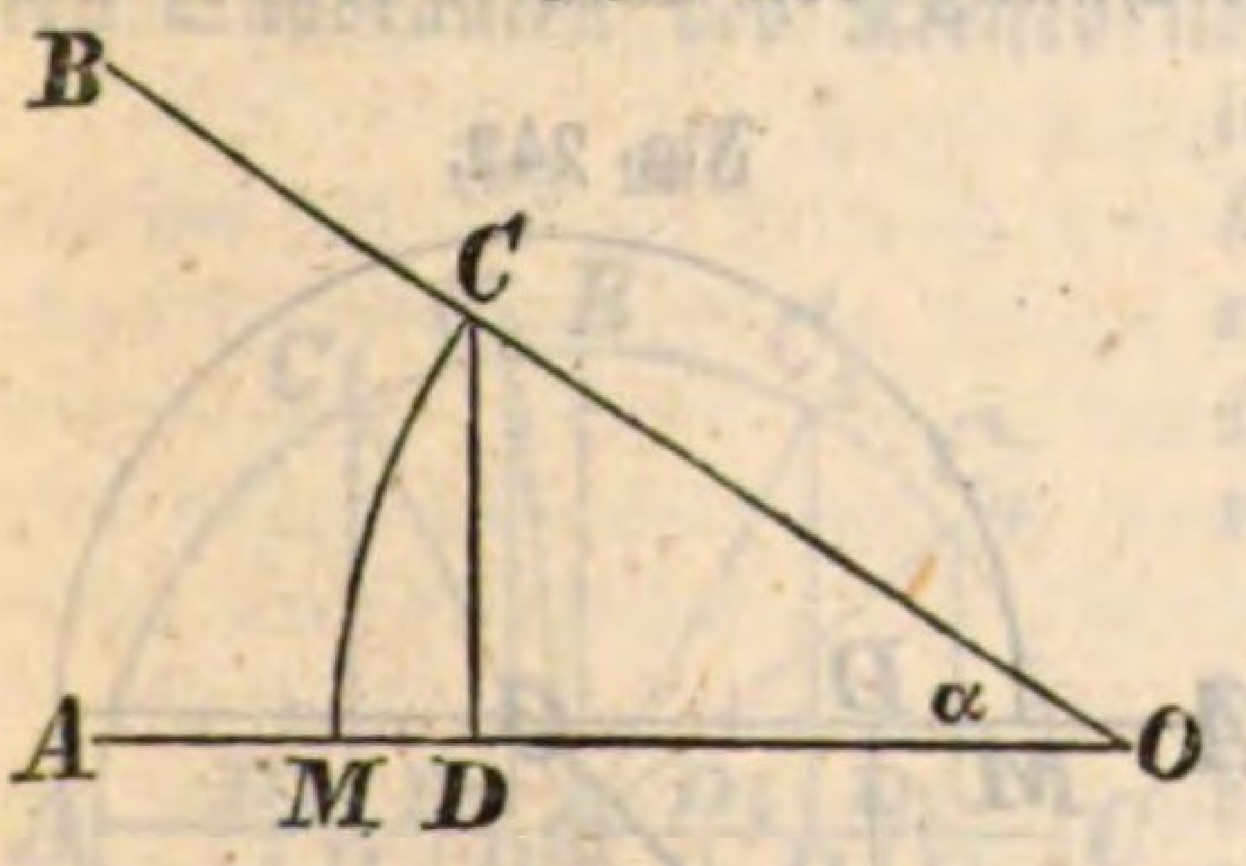
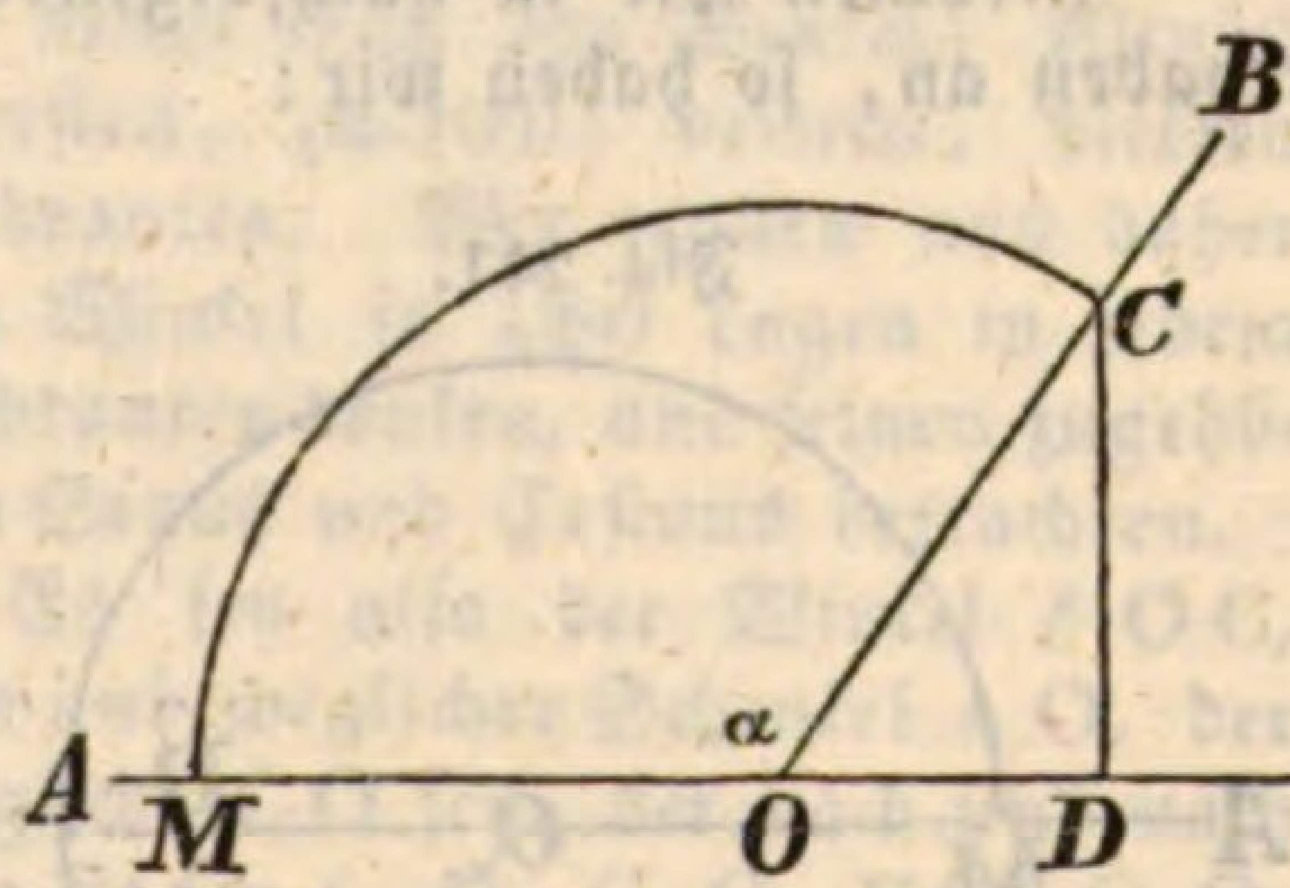


Fig. 239.

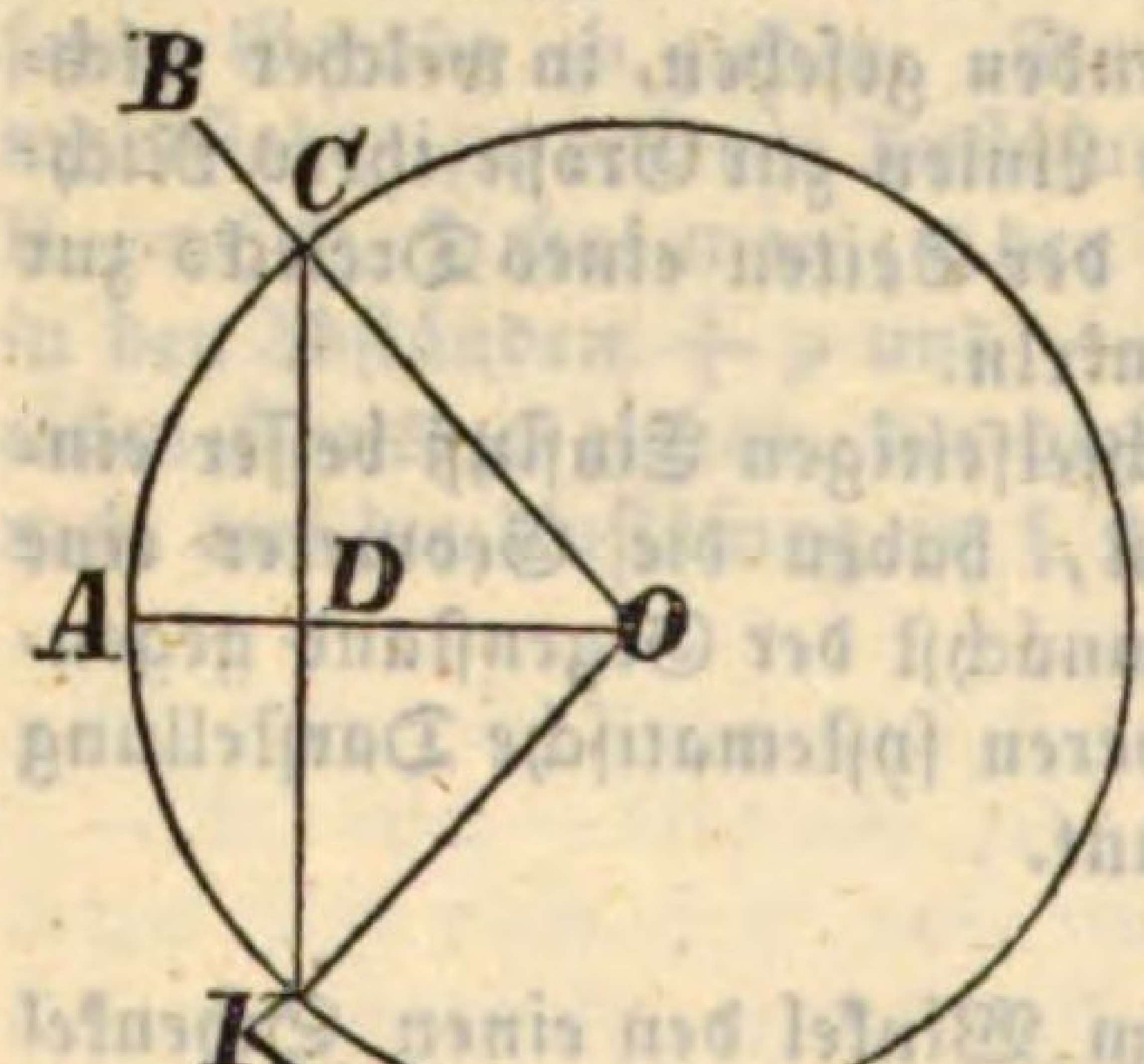


Ist so der Winkel $BOD = \alpha$; nimmt man AO als den unbeweglichen Schenkel, BO als den beweglichen; schneidet man $CO = 1$ ab, fällt von C das Loth CD auf AO, so heißt die Größe des Stückes CD der Sinus von α, und man schreibt $CD = \sin \alpha$. (Indem man

sich hier unter CD ihre Länge vorstellt.) Wie man leicht sieht, wird die Gerade, welche die Größe des Sinus gibt, nur dann innerhalb des Winkels fallen, wenn der Winkel spitzig ist; dagegen, wenn der Winkel stumpf ist, außerhalb des Winkels. Da ein Mittelpunktwinkel, und sein zugehöriger Bogen stets gleich viel Grade haben, so beziehet man den Sinus eines Winkels eben so auf den Bogen, der ihm zugehört, für den Halbmesser = 1, und daher schreibt man auch CD = sin CM.

Eine andere Erklärung des Sinus, welche aber genau auf dasselbe hinausgeht, ist diese: **der Sinus ist die halbe Sehne des doppelten Bogens für den Halbmesser = 1.**

Fig. 240.



Es sey der Winkel AOB; aus C mit CO = 1 beschreibe ich einen Kreis, fälle das Loth CD auf AO, verlängere es bis an den Umfang in K, so ist der Bogen CK = 2 Mal so groß als der Bogen AC und COK = 2 . AOC, und wie man sieht, ist also CD die halbe Sehne des doppelten Bogens.

Das Stück in der Richtung des unbeweglichen Schenkels, welches zwischen dem Scheitel und dem Sinus liegt, heißt der Cosinus des Winkels oder Bogens, der für den Halbmesser = 1 zu diesem Winkel gehört.

So ist in unserer letzten Figur DO = cos α allein mit dem Unterschiede, daß wir beim spitzigen Winkel α das DO als positiv, beim stumpfen Winkel α das DO als negativ zu betrachten haben.

Eben so werden wir den Sinus eines Winkels als negativ zu betrachten haben, wenn er in entgegengesetzter Richtung den unbeweglichen Schenkel trifft, was dann der Fall seyn wird, wenn der betreffende Winkel ein erhabener ist, oder größer als 180°.

Nehmen wir in nachfolgender Zeichnung den Winkel AOB als erhaben an, so haben wir:

Fig. 241.

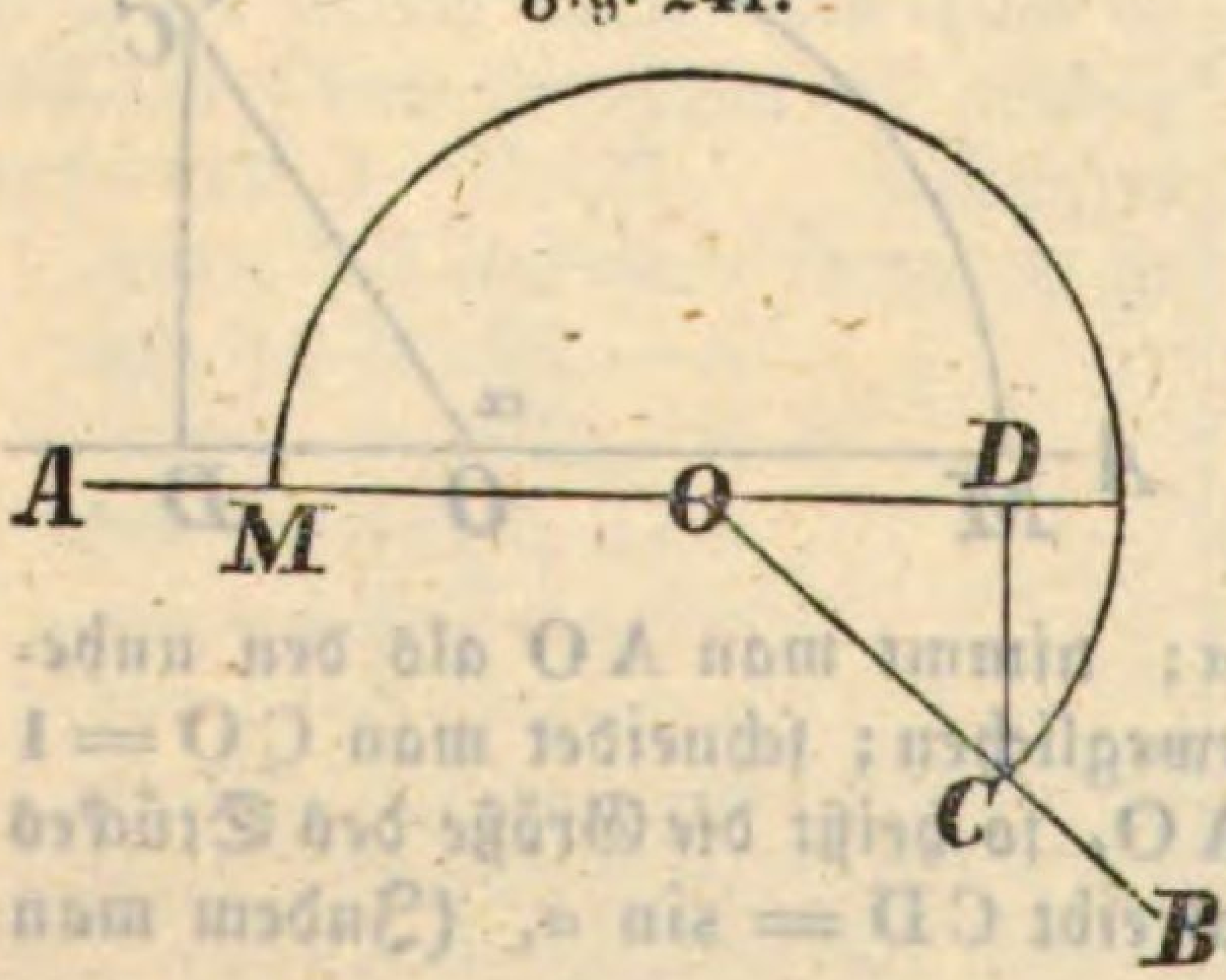
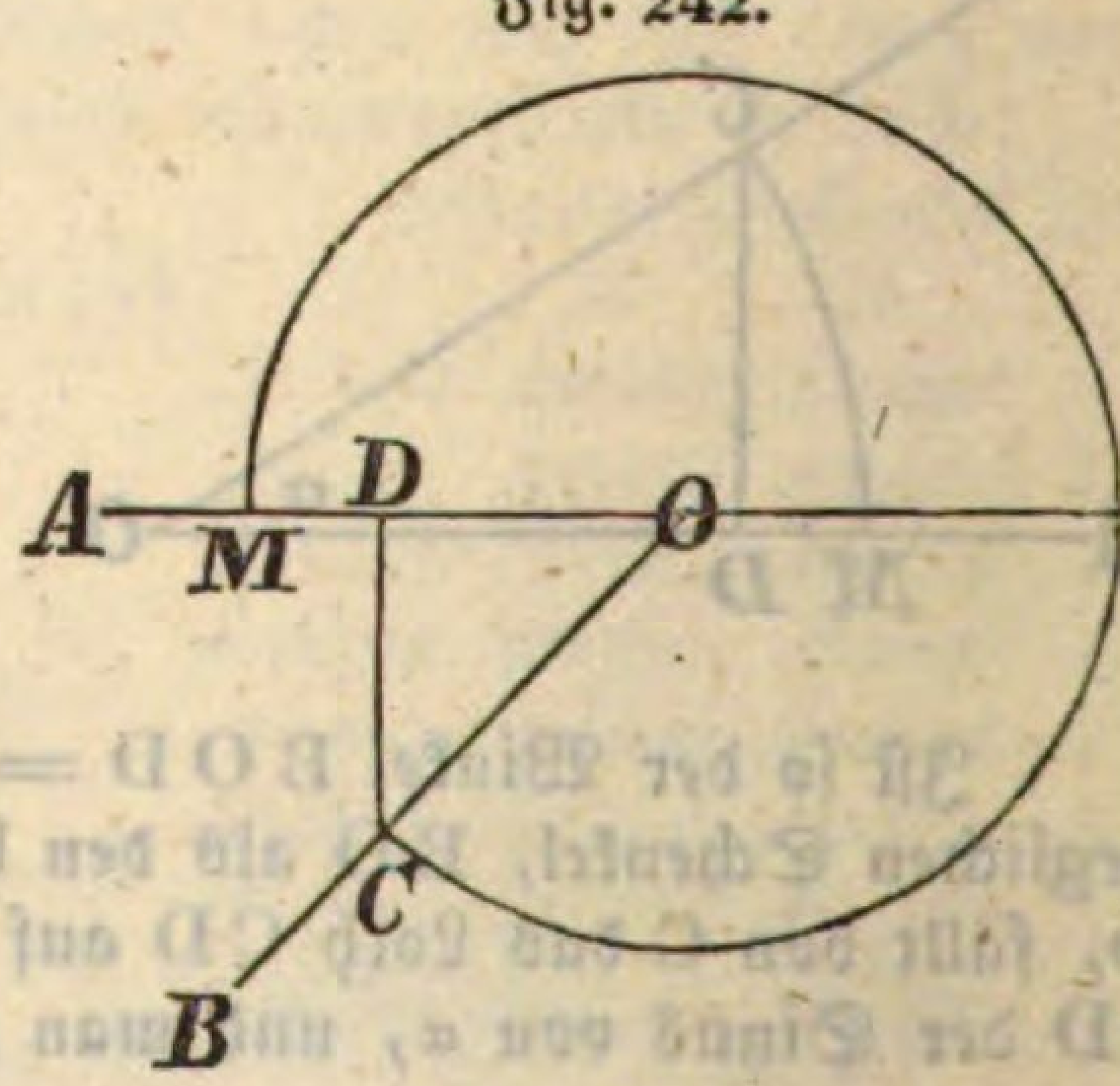


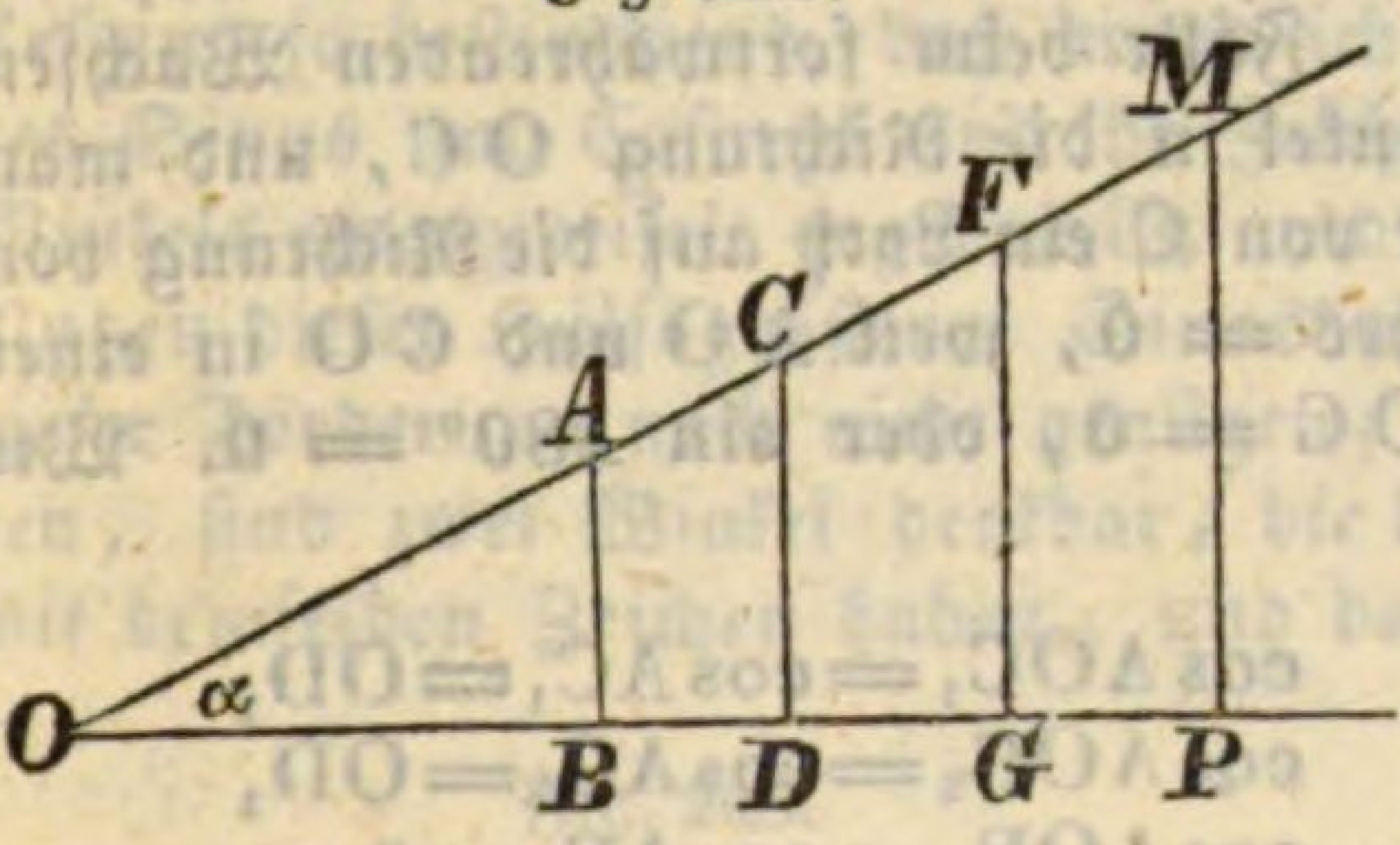
Fig. 242.



Und hier ist C D der Sinus des erhabenen Winkels A O B oder des Bogens C M, und wir müssen ihn hier beiderseits als negativ betrachten; der Cosinus aber, d. i. O D, ist hier in der ersten Figur negativ, in der zweiten positiv.

Die Länge des Stückes, welches als Längeneinheit angenommen wird, hat auf die Größe des Sinus gar keinen Bezug; denn es sey der Winkel α; nehme ich nun OA, OC oder OF oder OM gleich 1, und fälle von A, C, F, M die Lothe AB, CD, FG, MP, so ist der Sinus α nach und nach durch die Stücke AB, CD, FG, MP vorgestellt, deren Zahlengröße aber immer dieselbe ist; denn aus der Aehnlichkeit obiger Dreiecke folgt ja:

Fig. 243.

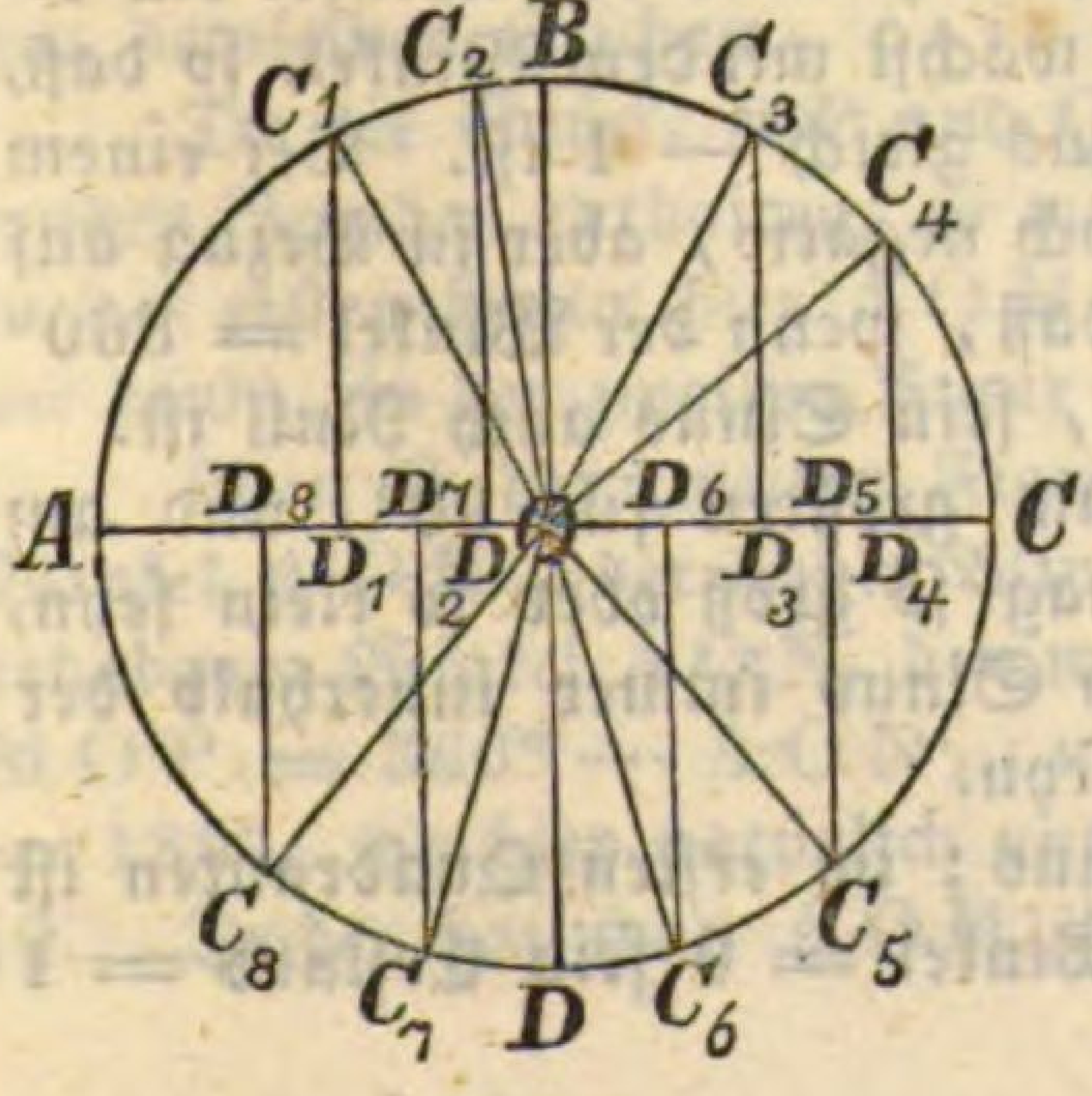


$$\frac{AB}{AO} = \frac{CD}{CO} = \frac{FG}{FO} = \frac{MP}{MO};$$

daher sich jede der den Sinus vorstellenden Geraden zu seiner zugehörenden Einheit auf dieselbe Art verhält, also dieselbe Zahl als Sinus gibt. Daher manche Schriftsteller, z. B. Engländer, dieses beständige Verhältniß der Kathete zur Hypothenuse den Sinus des gegenüberstehenden Winkels nennen, und dieß als Grunderklärung annehmen.

§. 221. Um den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen der Größe eines Winkels und seines ihm zugehörenden Sinus näher zu betrachten, wollen wir uns einen Winkel von 0° bis 360° stufenweise wachsend denken. Einen Winkel, der kleiner als 90° ist, nennt man einen Winkel im ersten Quadranten, einen Winkel, der $>$ 90° und $<$ 180° im zweiten Quadranten, einen Winkel von $>$ 180° und $<$ 270° im dritten und einen der $>$ 270° und $<$ 360° im vierten Quadranten. Man denkt sich nämlich den einen Schenkel unbeweglich, und je nachdem nun der andere bewegliche Schenkel im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten des Kreises liegt, nennt man den Winkel, Winkel im ersten, zweiten, dritten, vierten Quadranten. Wir wollen uns daher einen Winkel in zwei Lagen in jedem Quadranten denken, und seinen zugehörigen Sinus und Cosinus betrachten.

Fig. 244.



Es sey also der Winkel A O C, dessen unbeweglicher Schenkel A O, der bewegliche C O sey, der nach und nach in die Lagen C_1 O, C_2 O, B O, C_3 O, C_4 O u. s. w. komme. Denken wir uns ferners mit der Einheit des Längenmaßes einen Kreis beschrieben, dessen Mittelpunkt der Scheitel O des Winkels;

A C ist der Durchmesser, der in der Richtung des unbeweglichen Schenkels A O liegt; B D sey ein darauf senkrechter Durchmesser. Hat nun der bewegliche Schenkel die Richtung O B erreicht, so wird, da O B = 1 ist, wenn man von B ein Loth auf die Richtung des unbeweglichen Schenkels A O fällt, dieses Loth in die B O selbst hineinfallen; daher gibt hier B O = 1 selbst die Größe des Sinus an, und C O ist der Abstand des Sinus vom Scheitel gleich Null, daher der Cosinus des rechten Winkels gleich Null. Fällt beim fortwährenden Wachsen des Winkels der bewegliche Schenkel in die Richtung O C, und man schneidet O C = 1 ab, und fällt von C ein Loth auf die Richtung von A O, so ist die Größe dieses Lothes = 0, weil A O und C O in einer Geraden liegen, daher sin A O C = 0, oder sin 180° = 0. Wir haben somit:

$\sin AOC_1 = \sin AC_1 = C_1 D_1$;	$\cos AOC_1 = \cos AC_1 = OD_1$
$\sin AOC_2 = \sin AC_2 = C_2 D_2$;	$\cos AOC_2 = \cos AC_2 = OD_2$
$\sin AOB = \sin AB = BO = 1$;	$\cos AOB = \cos AB = 0$
$\sin AOC_3 = \sin AC_3 = C_3 D_3$;	$\cos AOC_3 = \cos AC_3 = OD_3$
$\sin AOC_4 = \sin AC_4 = C_4 D_4$;	$\cos AOC_4 = \cos AC_4 = OD_4$
$\sin AOC = \sin AC = 0$;	$\cos AOC = \cos AC = OC = -1$
$\sin AOC_5 = \sin AC_5 = C_5 D_5$;	$\cos AOC_5 = \cos AC_5 = OD_5$
$\sin AOC_6 = \sin AC_6 = C_6 D_6$;	$\cos AOC_6 = \cos AC_6 = OD_6$
$\sin AOD = \sin AD = DO = -1$;	$\cos AOD = \cos AD = o$
$\sin AOC_7 = \sin AC_7 = C_7 D_7$;	$\cos AOC_7 = \cos AC_7 = OD_7$
$\sin AOC_8 = \sin AC_8 = C_8 D_8$;	$\cos AOC_8 = \cos AC_8 = OD_8$

Ich muß hier nur bemerken, daß hier bei den Winkeln $A O C_5$, $A O C_6$ u. s. w. immer der erhabene Winkel gemeint ist, eben so bedeutet der Bogen $A C_5$ den Bogen $A B C C_5$, der Bogen A D den Bogen A B C D u. s. w.

Wie man nun leicht aus der Zeichnung sieht, ist der Sinus eines Winkels im ersten Quadranten positiv, und wird größer, wenn der Winkel größer ist; für einen rechten Winkel ist der Sinus = 1; bei einem Winkel im zweiten Quadranten ist der Sinus zwar positiv, aber abnehmend, d. h. er wird kleiner, wenn der Winkel größer wird. Für einen Winkel von 180° ist der Sinus gleich Null.

Wird der Winkel größer als 180°, d. h. wird der Winkel ein erhabener, so wird der Sinus negativ und wächst mit dem Winkel, so daß, wenn der Winkel = 270° ist, sein Sinus gleich — 1 ist. Bei einem Winkel über 270° ist zwar der Sinus noch negativ, aber in Bezug auf seine Größe wird er immer kleiner, so daß, wenn der Winkel = 360° wird, was so viel wie der Winkel = 0, sein Sinus auch Null ist.

Wir sehen also, der Sinus ist am größten für 90°, und am kleinsten für 270°, und der Winkel mag so groß oder so klein seyn, als man nur immer will, so wird sein Sinus immer innerhalb der Grenzen von + 1 und — 1 enthalten seyn.

Anders ist das Verhalten des Cosinus; im ersten Quadranten ist er positiv abnehmend, so daß für den Winkel = 0 sein Cosinus = 1

ist, und für den Winkel = 90° sein Cosinus = 0 ist. Im zweiten Quadranten wird der Cosinus negativ zunehmend, so daß er bei 180° gleich — 1 ist, im dritten Quadranten negativ abnehmend, so daß er für 270 wieder gleich 0 ist, von da an positiv zunehmend, so daß er für 360 wieder gleich 1 ist.

§. 222. Für jeden Winkel zwischen 0 und 360° sind Sinus und Cosinus so bestimmend, daß, wenn ich für einen Winkel die Größe seines Sinus und Cosinus und ihr Zeichen weiß, dadurch die Größe des Winkels ungezweifelt gegeben ist, und darin besteht auch der wesentliche Nutzen dieser Hülfsgrößen. Sinus allein und Cosinus allein würden dieser Forderung noch nicht genügen; denn wie wir gleich zeigen werden, sind zwei Winkel denkbar, die beide einen gleich großen Sinus mit demselben Zeichen haben, und doch von einander verschieden sind.

Fig. 245.

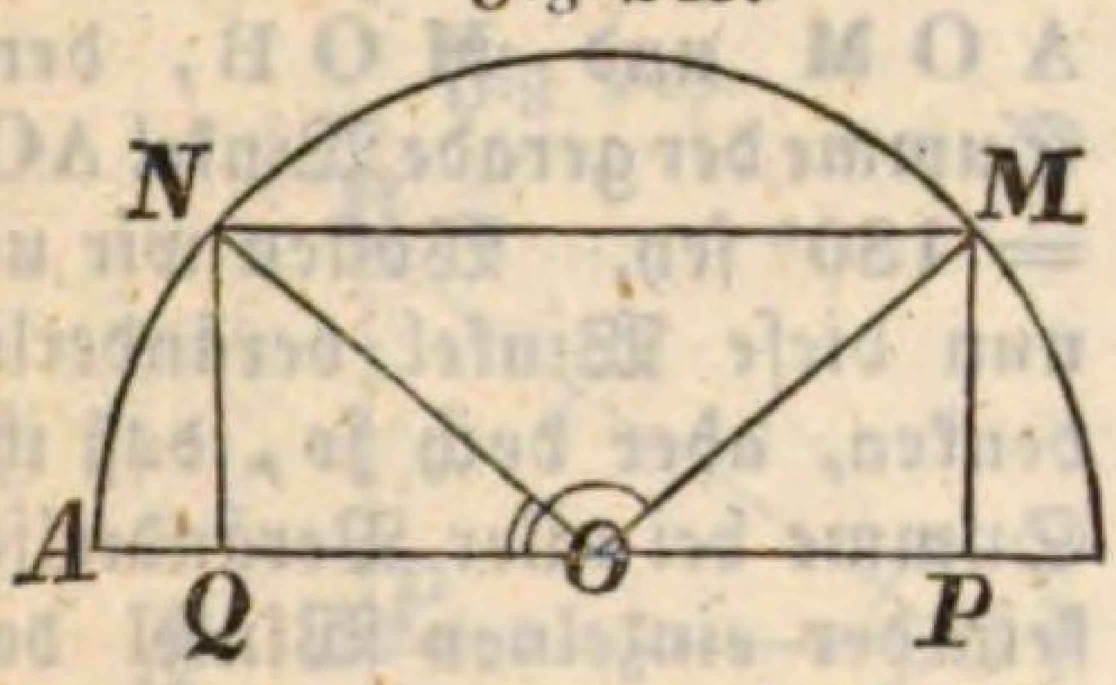
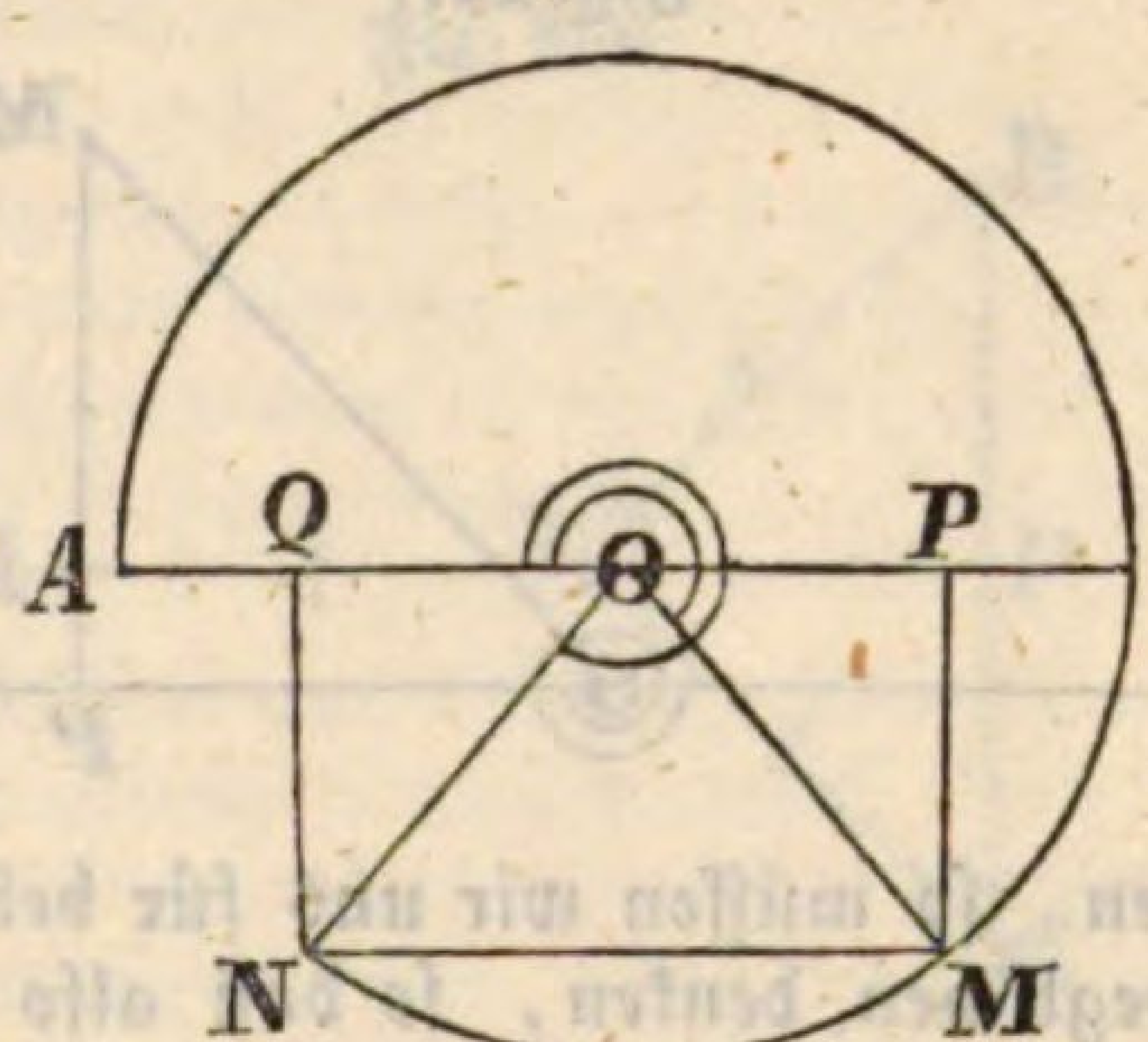


Fig. 246.



Es sey der Winkel AOM; ist nun MO = 1 und MP ⊥ AO, so ist MP = sin AOM; ziehe ich nun durch M eine Gleichlaufende mit AO, bis N, wo der Umfang des aus dem Scheitel O mit dem Halbmesser MO = 1 diese Gleichlaufende trifft, und verbinde N mit O, fälle von N das Loth NQ auf AO, so ist entschieden NQ = sin AON, und da PM = NQ, so hat man MP = sin AON und MP = sin AOM; es haben also beide entschieden von einander verschiedene Winkel AOM und AON einen gleich großen Sinus und mit demselben Zeichen.

Da die Stücke MP und QN gleich sind, als zwischen gleichlaufenden Geraden enthalten, so muß also auch AON = MOP; da nun in der ersten Figur hier AOM + MOP = 180° oder AOM + AON = 180°, in der zweiten Figur AOM — MOP = 180°.

Nun ist der zweiten Figur der Winkel MOP gleich dem hohlen Winkel AON, der hohle Winkel AON ist gleich 360° weniger dem erhabenen Winkel AON, den wir eigentlich hier im Auge haben, daher MOP = 360° — AON, und somit AOM — (360° — AON) = 180°, wo hier natürlich unter AOM der erhabene Winkel gemeint ist. Daher hat man AOM + AON — 360° = 180°, und somit

A O M + A O N = 180° + 360°, d. h die beiden erhabenen Winkel A O M und A O N machen 180° über 360°. Wie man aber aus der Natur der Sache sieht, bleibt ein Winkel unverändert, wenn man ihm 360° dazu gibt oder wegnimmt, daher wir also auch im zweiten Falle sagen können, A O M + A O N = 180°.

Wir sehen also zwei Winkel, die sich zu 180° ergänzen, haben einen gleich großen Sinus mit demselben Vorzeichen.

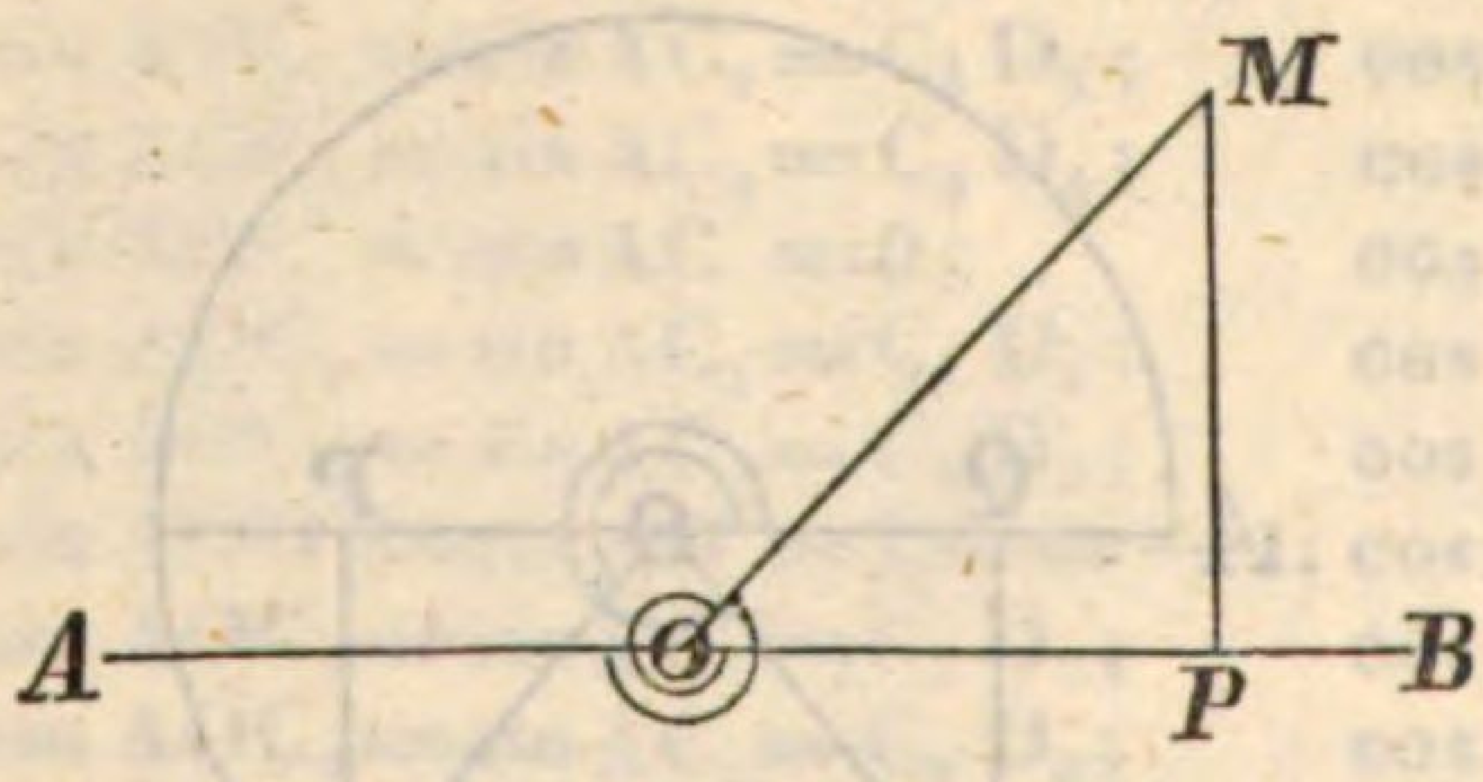
Auch ihre Cosinusse sind einander gleich, nämlich O P = O Q, nur ist der Cosinus von A O M negativ, von A O N positiv. Bezeichnet man daher den Winkel A O N durch φ^0, so ist natürlich A O M $= 180^0 - \varphi^0$, und man hat somit:

$$\sin (180^0 - \varphi^0) = \sin \varphi \text{ und } \cos (180^0 - \varphi^0) = - \cos \varphi^0,$$

und man sieht, daß dieser Bezug für jede mögliche Größe von φ gilt.

Es wird nützlich und lehrreich seyn, dasselbe Ergebniß noch durch eine andere Betrachtungsweise zu erhalten.

Fig. 247.



Es seyen die zwei Winkel A O M und M O B, deren Summe der gerade Winkel A O B = 180° sey. Wollen wir uns nun diese Winkel veränderlich denken, aber doch so, daß ihre Summe bei aller Veränderlichkeit der einzelnen Winkel doch stets 180° seyn soll, d. h. daß sie immer Nebenwinkel bleiben sollen, so müssen wir uns für beide Winkel den Schenkel M O als den beweglichen denken, so daß also für den Winkel A O M der Schenkel A O der unbewegliche, für den Winkel B O M der Schenkel B O der unbewegliche ist. Schneiden wir also von dem beweglichen Schenkel M O ein Stück M O = 1 ab, fällen von M ein Loth auf die Richtung des unbeweglichen Schenkels, so ist nach dieser Verzeichnungsweise M P zugleich der Sinus von A O M und M O B, und eben so ist O P der Cosinus von A O M und M O B, nur mit dem Unterschiede, daß O P für den Winkel M O B positiv ist, weil es in dem unbeweglichen Schenkel O B dieses Winkels selbst liegt, für den Winkel A O M liegt aber O P in der Verlängerung des unbeweglichen Schenkels A O dieses Winkels, daher O P für den Winkel A O M als negativ zu betrachten ist.

Was hier für die hohlen A O M und B O M gesagt wurde, das gilt auch für die erhabenen Winkel A O M und B O M, die wir durch kleine Kreisbögen anzudeuten gesucht haben. Die Summe dieser erhabenen Winkel ist, wie man aus der Figur leicht sieht, gleich 180°, eigentlich 180° + 360° Wir können uns die Betrachtungsweise dieser Figur verallgemeinen, indem wir uns die O M ein oder mehrere Male um 360° herumgedreht, und immer wieder in dieselbe Stellung zurückgedreht denken. Das also, was wir durch A O M bezeichnen, kann der hohle Winkel A O M seyn, der erhabene Winkel oder 360° — hohle Winkel A O M, der hohle Winkel A O M + 360, 720° — A O M,

720 + A O M, 3 360 − A O M, 3.360 + A O M, u. s. w. (wo hier A O M den hohlen Winkel bedeutet). Eben so vieler Deutungen ist der Winkel B O M fähig. Wir sehen also, φ mag wie immer groß seyn, immer ist $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin\varphi$, $\cos(180 - \varphi) = -\cos\varphi$. Das Zeichen — hier vor $\cos\varphi$ will nicht sagen, daß $\cos(180^\circ - \varphi)$ gerade immer negativ seyn müsse, sondern daß der Cosinus $(180 - \varphi)$ eben so groß, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen sey, als $\cos\varphi$, so daß, wenn $\cos\varphi$ selbst negativ wäre, dann $\cos(180^\circ - \varphi)$ positiv seyn müßte.

§. 223. Eben so wie wir jetzt zwei Winkel untersucht haben, die einen gleich großen Sinus mit demselben Vorzeichen haben, und sich nur durch das Zeichen des Cosinus unterscheiden, so gibt es auch je zwei Winkel, die denselben Cosinus mit demselben Vorzeichen haben, und sich nur durch das Zeichen ihres Sinus unterscheiden.

Fig 248.

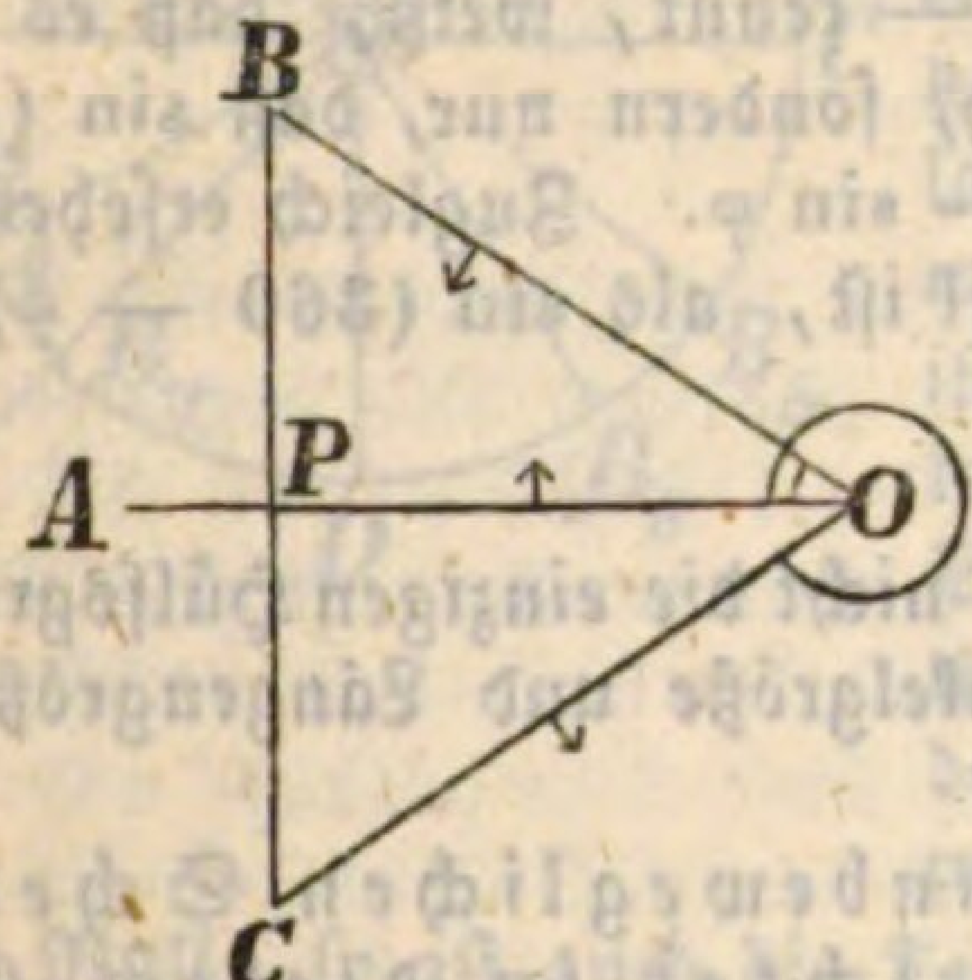
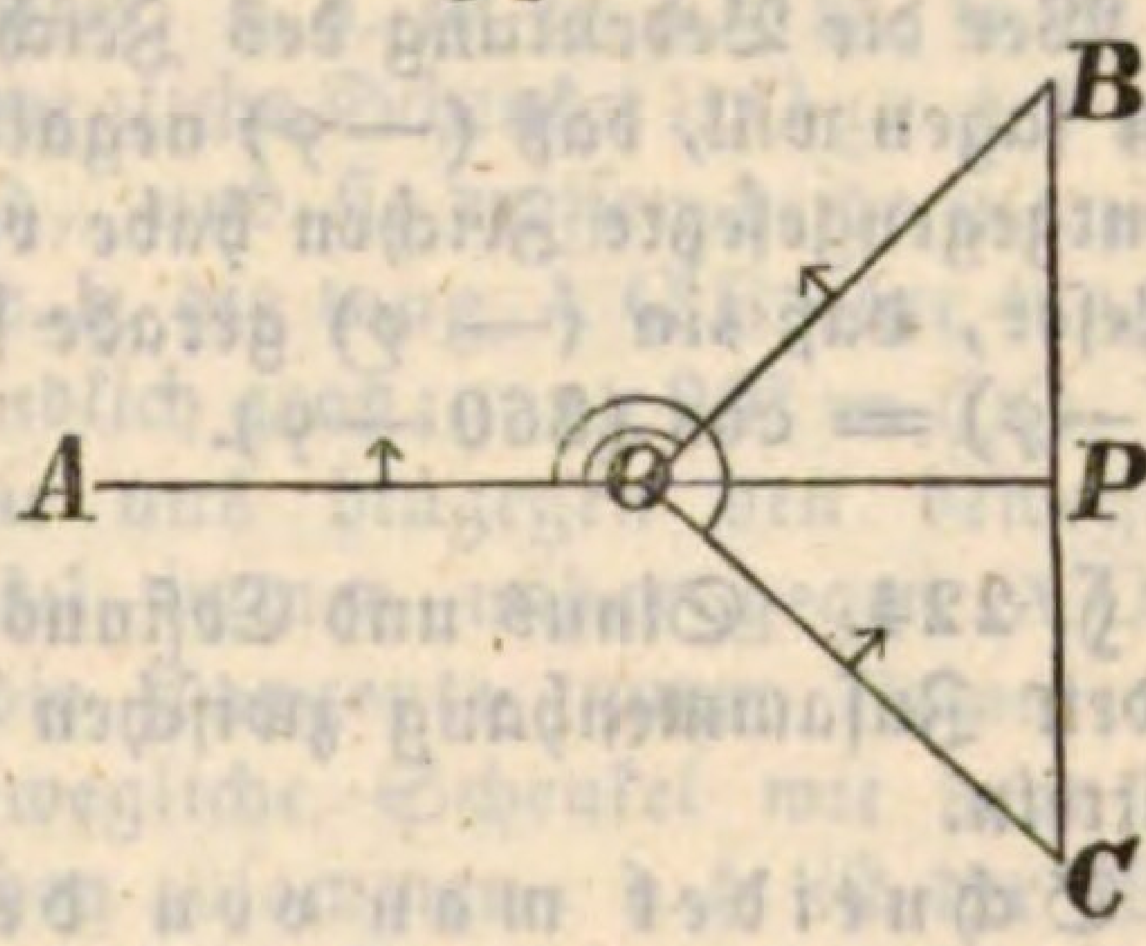


Fig. 249.



Es sey der hohle Winkel A O B und der erhabene Winkel A O C von solcher Größe, daß ihre Sinusse B P und P C in dieselbe Gerade B C kommen, so daß also beide Winkel denselben Cosinus O P mit demselben Vorzeichen haben. Damit dieses nun sey, muß der hohle Winkel P O C = A O B seyn, daher der erhabene Winkel A O C = 360° weniger dem hohlen Winkel A O B. Ist also die Summe zweier Winkel 360°, so haben sie denselben Cosinus mit demselben Vorzeichen, auch den Sinus gleich groß, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

Dasselbe gilt für den erhabenen Winkel A O B und den hohlen A O C. Allgemein können wir daher sagen, der Winkel φ mag wie immer groß seyn.

$$\cos(360^\circ - \varphi) = \cos\varphi;\ \sin(360^\circ - \varphi) = -\sin\varphi.$$

So gut wir in der Längenausdehnung eine positive und negative Richtung, ein Vorwärts und Rückwärts unterscheiden, sobald ein Anfangspunkt bestimmt ist, eben so können wir bei der Drehung eine Drehung nach vorwärts, von der entgegengesetzten nach rückwärts unterscheiden, sobald eine bestimmte Richtung festgesetzt ist, mit der die andern verglichen werden, d. h. sobald ein Schenkel eines Winkels als unbeweglich angenommen wird. Betrachten wir so den Winkel A O B

in der obigen Figur, wird nun der bewegliche Schenkel B O so gedreht, daß die mit den Pfeilen bezeichneten Seiten einander näher kommen, so wird bei dieser Bewegung des Schenkels B O der Winkel A O B immer kleiner; fällt so B O über A O, so wird der Winkel gleich Null; dreht man den Schenkel B O in dieser vermindernden Richtung noch weiter über A O hinaus, so habe ich folgerechter Weise den neuen Winkel, z. B. A O C, der von den entgegengesetzten Seiten der Schenkel gebildet wird, als negativ zu betrachten; denn habe ich den Schenkel B O bis zu O C hingedreht, so muß man den Winkel A O C zurückdrehen, d. h. in der vermehrenden Richtung drehen, um den Winkel gleich Null zu erhalten.

Ist nun der negative Winkel A O C gerade so groß als der positive A O B, so sieht man aus dieser Figur mit Leichtigkeit ein, daß sie beide zwar einen gleich großen Sinus, aber mit entgegengesetzten Zeichen, den Cosinus aber gleich groß und mit gleichen Zeichen haben, d. h. man hat für was immer für einen Winkel φ

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi;\quad \cos(-\varphi) = \cos\varphi.$$

Wer die Bedeutung des Zeichens — kennt, weiß, daß es nicht gerade sagen will, daß $(-\varphi)$ negativ sey, sondern nur, daß $\sin(-\varphi)$ das entgegengesetzte Zeichen habe von $-\sin\varphi$. Zugleich ersehen unsere Leser, daß $\sin(-\varphi)$ gerade so viel ist, als $\sin(360-\varphi)$ und $\cos(-\varphi) = \cos(360-\varphi)$.

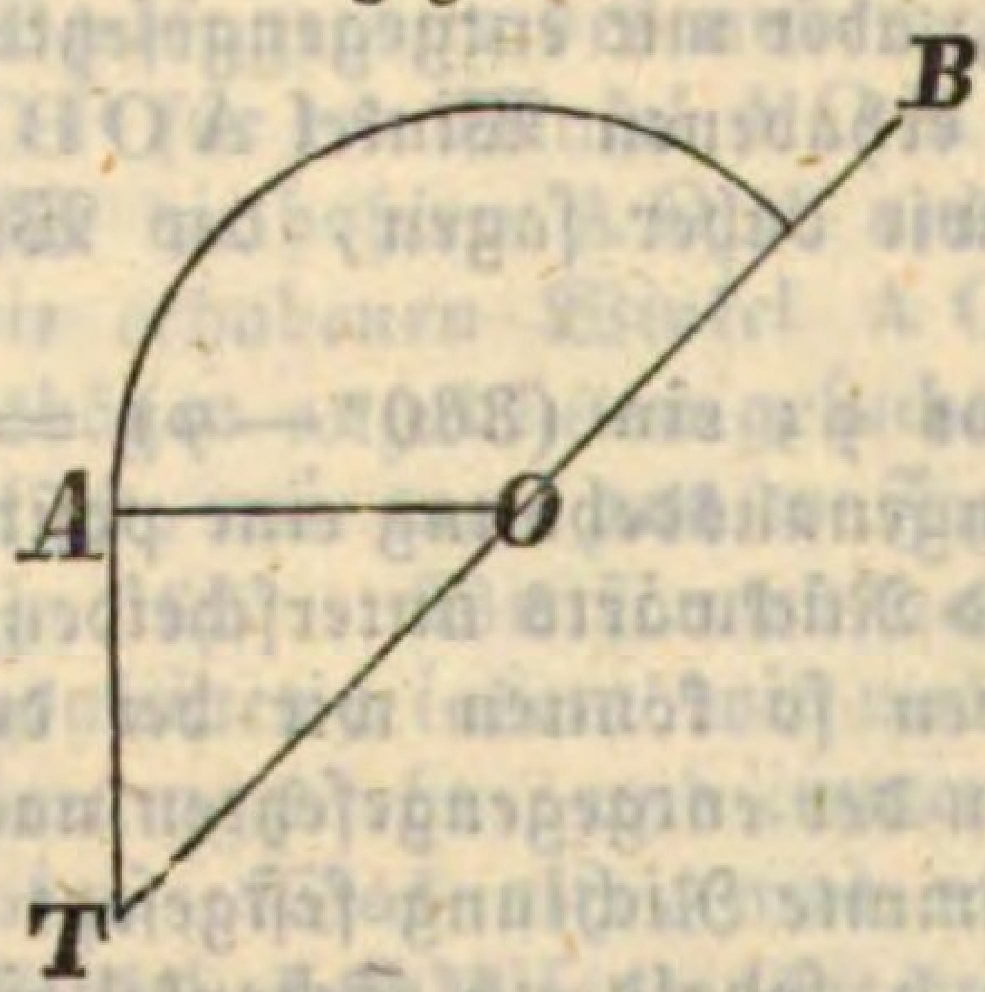
§. 224. Sinus und Cosinus sind nicht die einzigen Hülfsgrößen, um den Zusammenhang zwischen Winkelgröße und Längengröße zu vermitteln.

Schneidet man von dem unbeweglichen Schenkel ein Stück gleich Eins ab, errichtet in diesem Endpunkte ein Loth, und verlängert den beweglichen Schenkel, bis er dieses Loth trifft, so heißt die Zahl, welche die Länge des Lothes zwischen dem beweglichen und unbeweglichen Schenkel ausdrückt, die **Tangente** des Winkels, oder die **Tangente** des Bogens, der für den Halbmesser = 1 zu diesem Winkel gehört.

Fig 250.



Fig. 251.

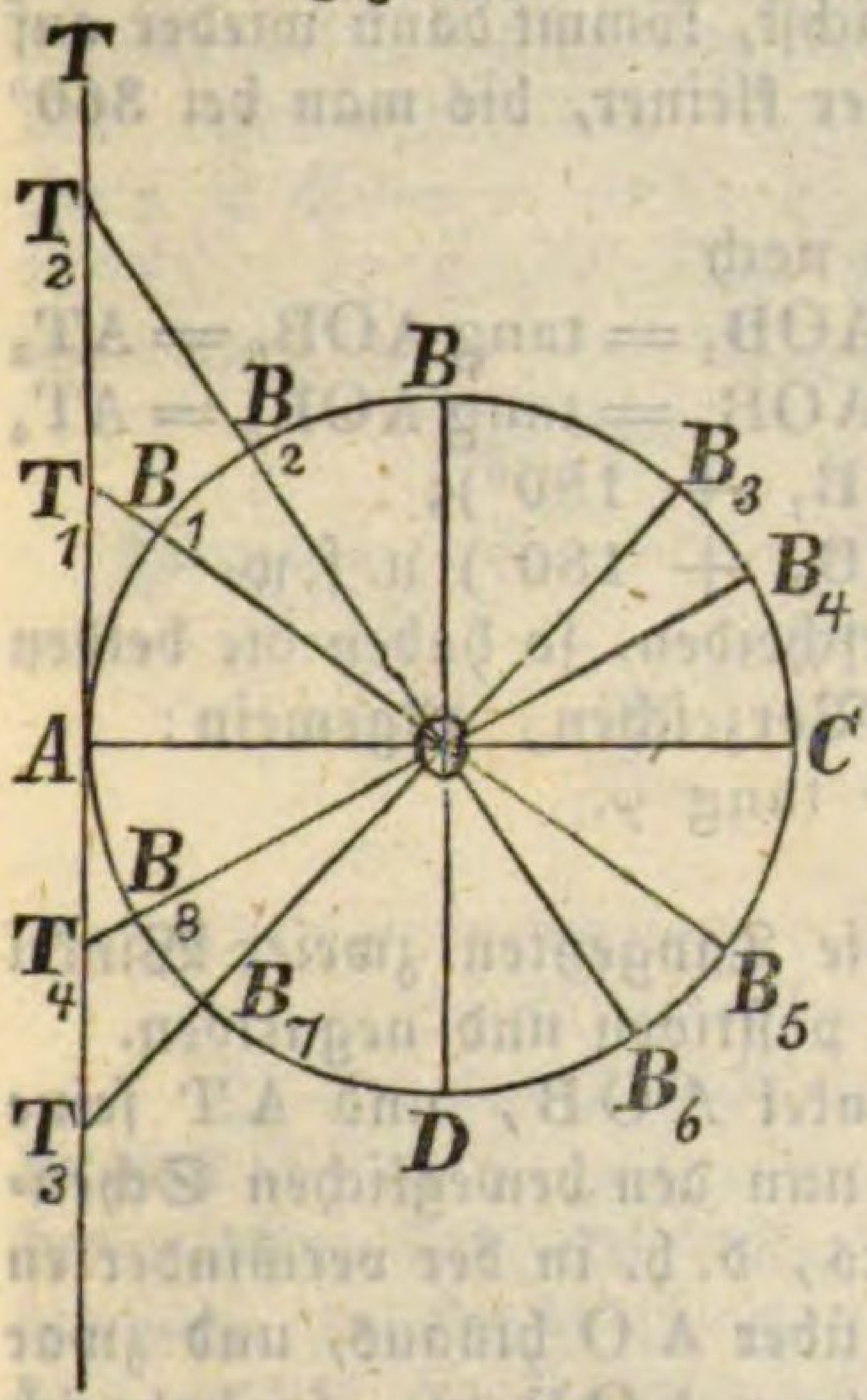


Es sey der Winkel A O B; ich schneide von dem unbeweglichen Schenkel A O ein Stück A O = 1 ab, errichte in A ein Loth auf A O, und verlängere den beweglichen Schenkel B O, bis er dieses Loth in T trifft, so ist die Zahl, welche die Größe A T ausdrückt, die Tangente von A O B; man schreibt A T = tang A O B, oder auch A T = tang A B. Es ist leicht zu sehen, daß in der ersten Figur A T positiv, in der zweiten negativ ist.

Die Zahl, welche die Größe der OT ausdrückt, heißt die Sekante des Winkels $OT = \sec AOB$.

Wie wir sehen, wird sich sowohl die Tangente, als auch die Sekante eines Winkels fortwährend ändern, wenn sich dieser Winkel verändert; um diese Beziehungen einzusehen, denken wir uns einen Winkel fortwährend wachsend, und betrachten ihn in zwei Stellungen in jedem Quadranten.

Fig. 252.



Ist AO der unbewegliche Schenkel, B_1O, B_2O, BO, B_3O, B_4O u. s. w. die jeweilige Lage des beweglichen Schenkels, so hat man, wenn die Gerade AT auf AO in A senkrecht ist, $\tang AOB_1 = AT_1$; $\tang AOB_2 = AT_2$, und je größer nun der Winkel wird, desto größer ist seine Tangente, wenn sich der Winkel einem rechten nähert, so wird die Tangente außerordentlich groß, ist der Winkel ein rechter, d. h. ist er AOB, so ist dann der bewegliche Schenkel BO zu AT gleichlaufend, und sie treffen beide nie zusammen, d. h. die tang AOB oder tang 90° ist unendlich groß; $\tang 90° = \infty$. Denken wir uns hingegen den beweglichen Schenkel immer näher gegen AO, so wird die Tangente immer kleiner; fällt der bewegliche Schenkel mit dem unbeweglichen zusammen, d. h. ist der Winkel gleich Null, so ist auch die Tangente gleich Null, $\tang 0 = 0$. Im ersten Quadranten wächst also die Tangente von 0 bis ins Unendliche. Wie der Winkel 90° überschritten hat, so wird die Tangente augenblicklich negativ, und zwar, wenn der Winkel nur wenig über 90° hat, so ist die Tangente negativ außerordentlich groß, wie der Winkel größer wird, so wird die Tangente kleiner, bleibt aber negativ, wie man sieht, hat man $\tang AOB_3 = AT_3$; $\tang AOB_4 = AT_4$. Wie sich der Winkel dem 180° nähert, so nähert sich seine Tangente immer mehr der Null, man hat dann $\tang 180° = 0$. Kömmt der Winkel über 180°, so wird die Tangente wieder positiv und wächst mit dem Winkel, $\tang AOB_5 = AT_1$; $\tang AOB_6 = AT_2$, wo hier natürlich AOB_5 und AOB_6 die erhabenen Winkel bedeuten. Wie sich unser Winkel dem erhabenen Winkel AOD, d. h. drei Rechten nähert, so wird wieder die Tangente über alle Grenzen groß, und man hat $\tang AOD = \infty$; $\tang 270° = \infty$. Wie der Winkel nur um eine Sekunde größer ist als 270°, ist die Tangente augenblicklich negativ, und zwar anfangs ungeheuer groß, wie der Winkel größer wird, so wird auch seine negative Tangente kleiner, $\tang AOB_7 = AT_3$; $\tang AOB_8 = AT_4$, wo wir hier natürlich wieder nur die erhabenen Winkel verstehen. Wird endlich der Winkel gleich 360°, so ist dann

seine Tangente wieder Null, und beim weitern Wachsen des Winkels, d. h. beim weitern Fortdrehen des beweglichen Schenkels beginnt das vorige Spiel wieder vom Anfange.

Was die Sekante betrifft, so sieht man leicht $\sec 0 = 1$, so lange der Winkel im ersten Quadranten ist, wächst seine Sekante, $\sec 90^0 = \infty$; im zweiten Quadranten fällt die Sekante auf die entgegengesetzte Seite, wird daher negativ und immer kleiner, für 180^0 wird $\sec 180^0 = -1$; von da wächst sie bis ins Unendliche, während der Winkel von 180^0 bis 270^0 wächst, kömmt dann wieder auf die entgegengesetzte Seite, und wird wieder kleiner, bis man bei 360^0 dann wieder $\sec 360^0 = 1$ hat.

Die vorstehende Zeichnung lehrt uns noch

$\tang AOB_1 = \tang AOB_5 = AT_1$; $\tang AOB_2 = \tang AOB_6 = AT_2$
$\tang AOB_3 = \tang AOB_7 = AT_3$; $\tang AOB_4 = \tang AOB_8 = AT_4$

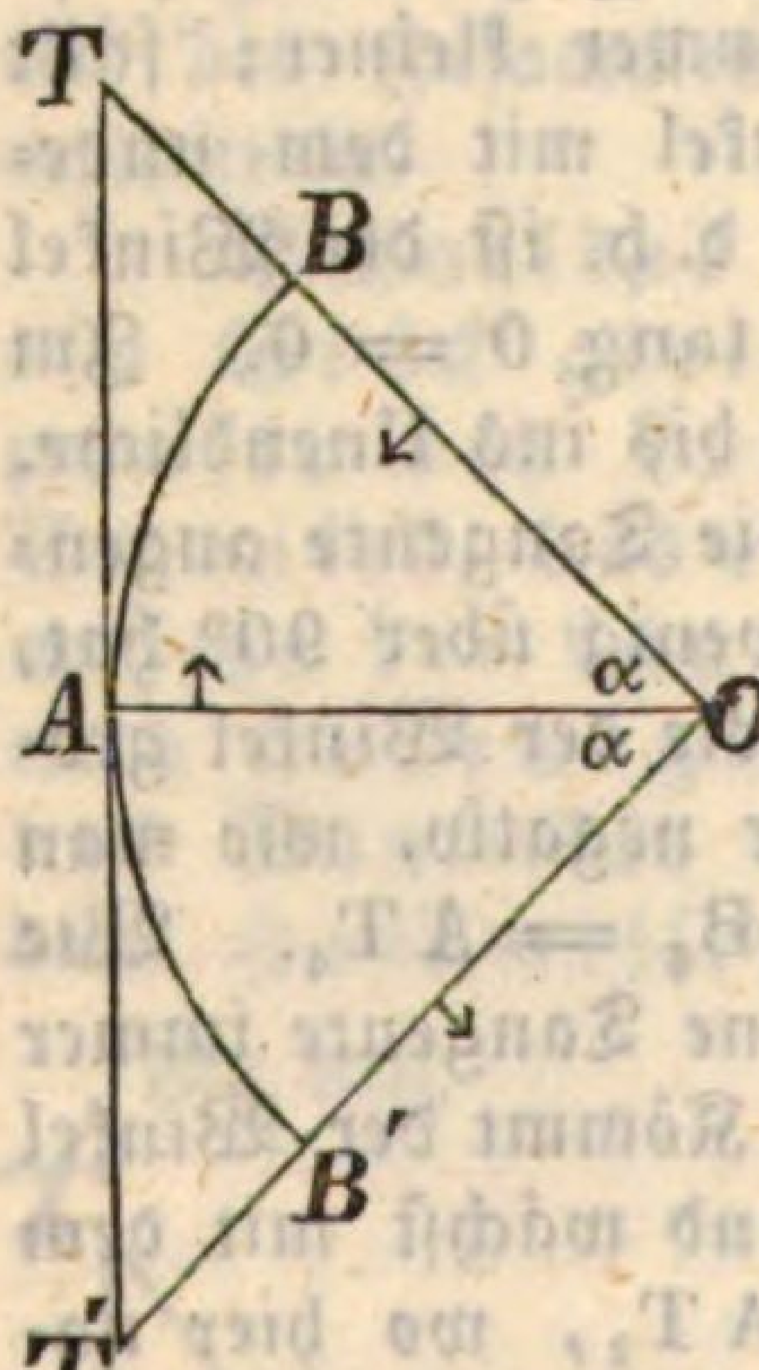
d. h. $\tang AOB_1 = \tang (AOB_1 + 180^0)$;
$\tang AOB_2 = \tang (AOB_2 + 180^0)$ u. s. w.

d. h. wenn sich zwei Winkel um 180^0 unterscheiden, so haben die beiden eine gleich große Tangente mit demselben Vorzeichen, allgemein:

$$\tang (\varphi + 180^0) = \tang \varphi.$$

§. 225. Betrachten wir nun noch die Tangenten zweier Winkel mit entgegengesetztem Zeichen, d. h. einem positiven und negativen.

Fig. 253.



Es sey der Winkel AOB, und AT seine Tangente; drehe ich nun den beweglichen Schenkel BO nach einwärts, d. h. in der verminderten Richtung, und zwar über AO hinaus, und zwar so lange, bis $AOB' = AOB$ ist, so habe ich diesen Winkel als negativ zu betrachten; ist daher $AOB = \alpha$, so ist $AOB' = -\alpha$, und wie man sieht, ist sein Tangente AT' eben so groß, als AT, aber mit entgegengesetztem Zeichen, man hat so allgemein $\tang (-\alpha) = -\tang \alpha$.

§. 226. Ziehen wir nun eben so zwei Nebenwinkel in Untersuchung.

Es seyen die zwei Nebenwinkel AOM und BOM, damit diese beiden Winkel stets Nebenwinkel bleiben bei Veränderlichkeit ihrer Größen, so werden wir die OM als den beweglichen Schenkel beider Winkel betrachten, so also, daß AO der unbewegliche Schenkel des Winkels AOM und OB der unbewegliche Schenkel des BOM ist. Schneiden wir also $AO = BO = 1$ ab, errichten in A und B Lothe auf AO und BO, verlängere den beweglichen Schenkel MO, bis er diese Lothe trifft, so hat

Fig. 254.



man AT = tang A O M; BT′ = tang B O M, und wie man leicht sich beweiset, sind beide Tangenten einander gleich, nur ist die Tangente des stumpfen Winkels negativ, und man hat so allgemein

$$\text{tang}\ (180^\circ - \varphi) = -\ \text{tang}\ \varphi.$$

§. 227. Wir kommen nun zur vierten Hülfsgröße der Beziehungen zwischen Winkeln und geraden, Linien zur Cotangente.

Wenn man in dem Scheitel eines Winkels ein Loth = 1 auf dem unbeweglichen Schenkel errichtet, durch den Endpunkt dieses Lothes eine gleichlaufende mit dem unbeweglichen Schenkel ziehet, den beweglichen Schenkel verlängert, bis er diese Gleichlaufende trifft, so heißt das dadurch abgeschnittene Stück die Cotangente des Winkels.

Fig. 255.

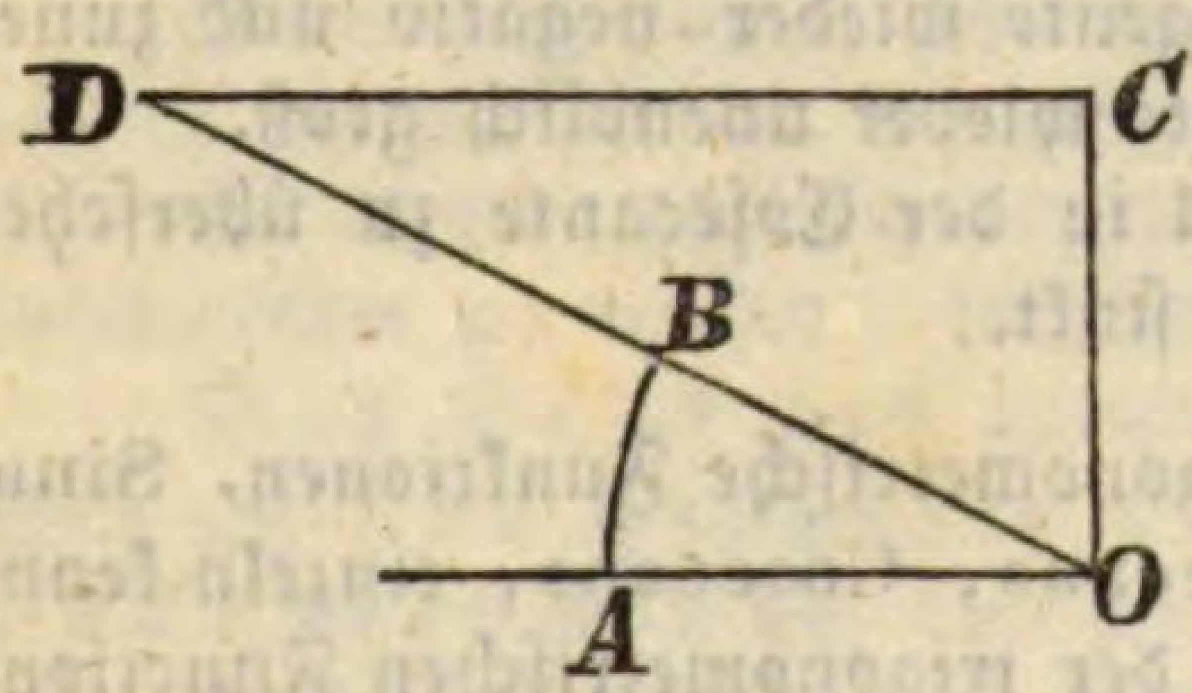
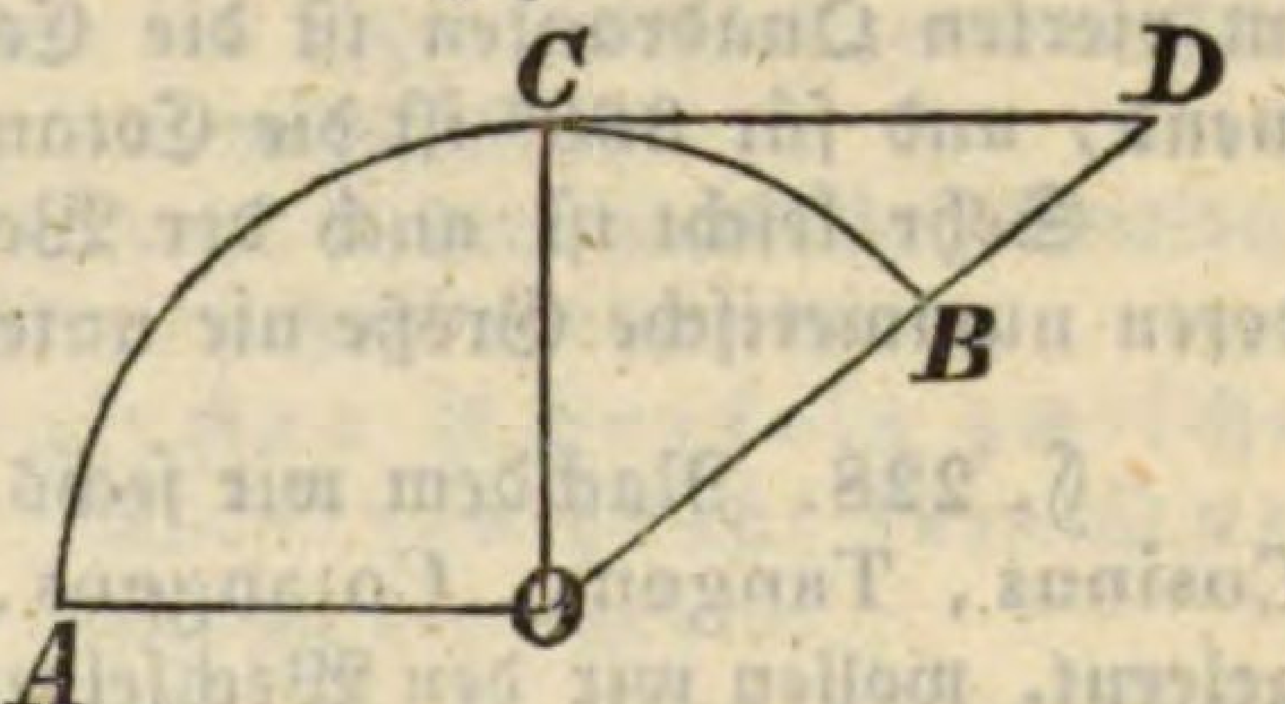


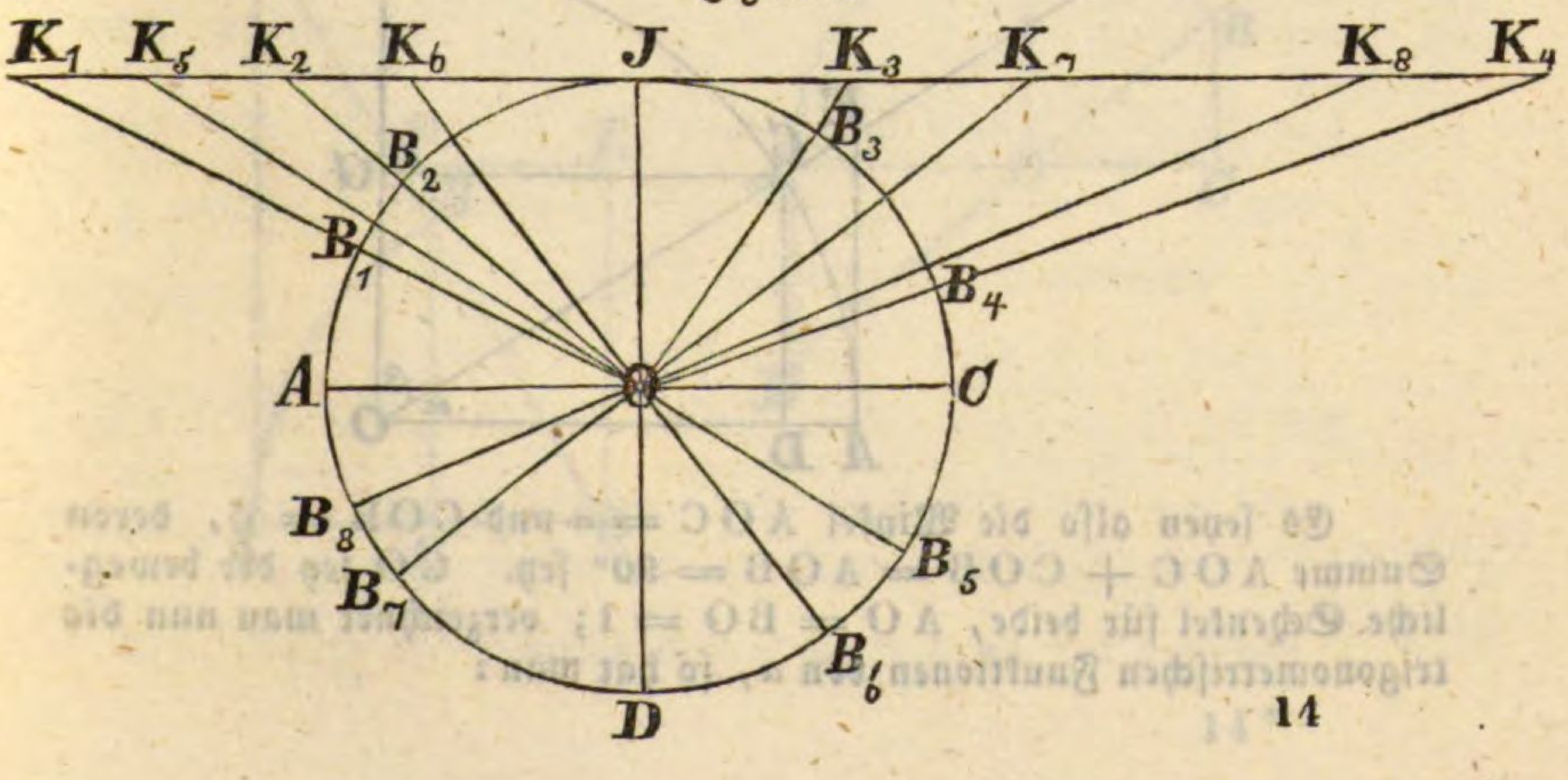
Fig. 256.



Es sey der Winkel A O B; man macht O C senkrecht auf A O, ferners O C = 1; ziehet durch C die Gerade C D ∥ A O, verlängert den beweglichen Schenkel B O, bis er die Gleichlaufende in D trifft, so ist die Zahl, welche die Größe der C D ausdrückt, die Cotangente des Winkels A O B oder des Bogens A B; C D = cot A O B; C D = cot A B, und die Zahlengröße der Geraden O D, welche den Scheitel des Winkels mit dem Endpunkte der Cotangente verbindet, heißt die Cosecante des Winkels oder Bogens. O D = cosec . A O B; O D = cosec . A B.

Betrachten wir auch hier die stufenweise Aenderung der Cotangente, wenn der Winkel von 0° bis 360° übergeht.

Fig. 257.



Iſt hier A O der unbewegliche Schenkel, B O der bewegliche, iſt $IO \perp AO$ und $IO = 1$; $IK_1 \parallel AO$, ſo hat man:

$$IK_1 = \cot AOB_1;\; IK_2 = \cot AOB_2;$$

die Cotangente wird alſo bei einem Winkel im erſten Quadranten immer kleiner, je größer der Winkel iſt. Als die Grenze haben wir hier $\cot 0 = \infty$ (denn je kleiner der Winkel, deſto größer ſeine Cotangente, für den Winkel 0 wird A O und IK_1 gleichlaufend) und $\cot 90^\circ = 0$.

$$\cot AOB_3 = IK_3;\; \cot AOB_4 = IK_4;$$

man ſieht alſo im zweiten Quadranten wird die Cotangente negativ und ſtets größer; als Grenze hat man $\cot 180^\circ = -\infty$;

$$\cot AOB_5 = IK_5;\; \cot AOB_6 = IK_6;$$

im dritten Quadranten wird die Cotangente wieder poſitiv und abnehmend; die Grenze iſt hier $\cot 270^\circ = 0$;

$$\cot AOB_7 = IK_7;\; \cot AOB_8 = IK_8;$$

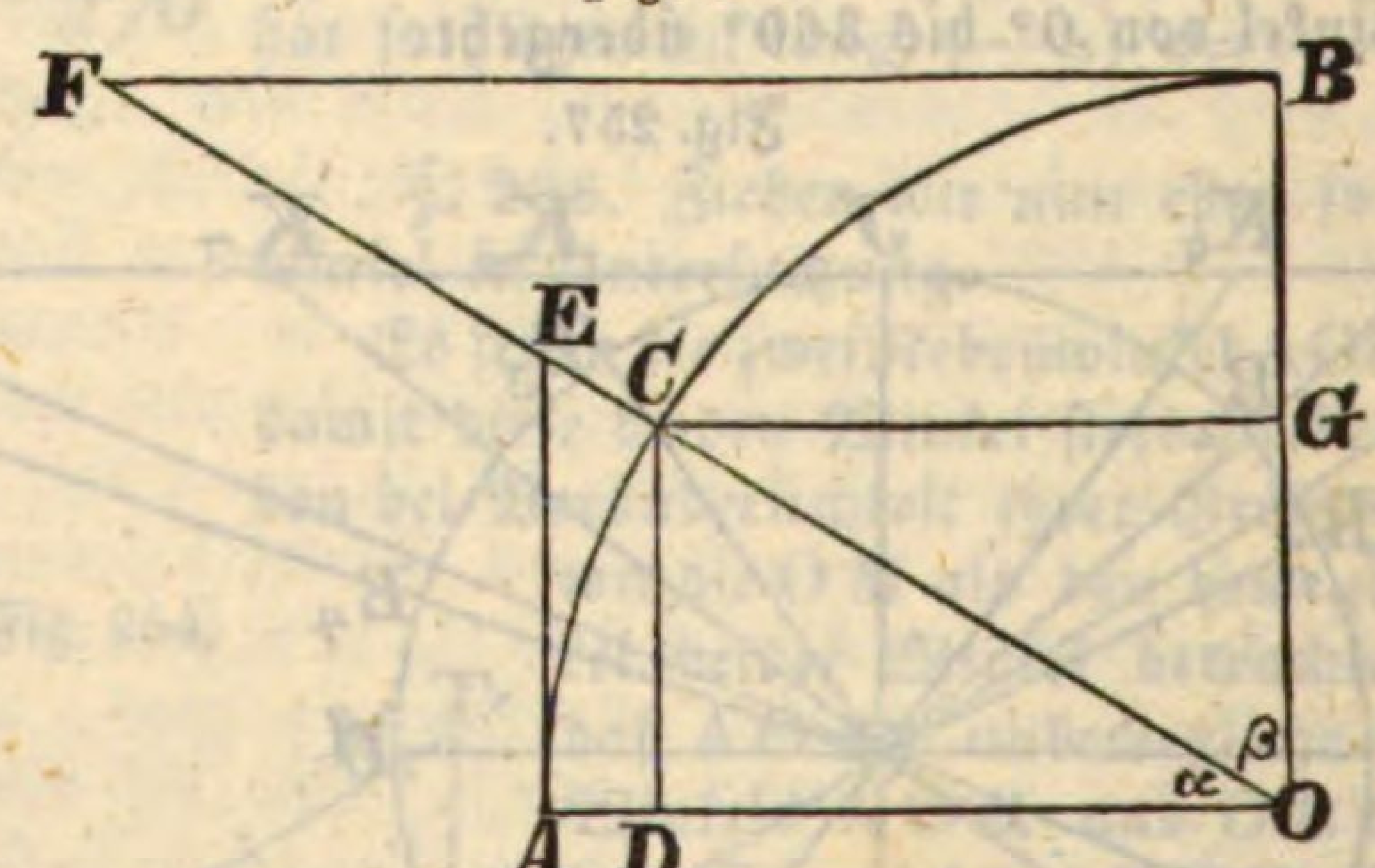
im vierten Quadranten iſt die Cotangente wieder negativ und zunehmend, und für 360° iſt die Cotangente wieder unendlich groß.

Sehr leicht iſt auch der Wechſel in der Coſecante zu überſehen, deren nummeriſche Größe nie unter 1 ſinkt.

§. 228. Nachdem wir ſechs trigonometriſche Funktionen, Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens, Secans, Cosecans, einzeln kennen gelernt, wollen wir den Wechſelbezug der trigonometriſchen Functionen eines und deſſelben Winkels näher ins Auge faſſen.

Zwei Winkel, die ſich zu einem rechten Winkel ergänzen, d. h. deren Summe ein rechter Winkel iſt, heißen Ergänzungswinkel (complementäre Winkel). Wir wollen uns zwei complementäre Winkel zeichnen, den gemeinſchaftlichen Schenkel beider Winkel als den beweglichen anſehen, ſo daß die unbeweglichen Schenkel beider Winkel auf einander ſenkrecht ſtehen und für beide Winkel alle ſechs trigonometriſchen Functionen verzeichnen.

Fig. 258.



Es ſeyen alſo die Winkel $AOC = \alpha$ und $COB = \beta$, deren Summe $AOC + COB = AOB = 90^\circ$ ſey. C O ſey der bewegliche Schenkel für beide, $AO = BO = 1$; verzeichnet man nun die trigonometriſchen Funktionen von α, ſo hat man:

$\sin\alpha = CD$; $\cos\alpha = DO$; $\operatorname{tang}\alpha = EA$; $\sec\alpha = EO$; $\cot\alpha = BF$; $\operatorname{cosec}\alpha = FO$.

Verzeichnet man nun dieselben Funktionen für β, so hat man:

$\sin\beta = CG$; $\cos\beta = GO$; $\operatorname{tang}\beta = BF$; $\sec\beta = FO$; $\cot\beta = EA$; $\operatorname{cosec}\beta = EO$;

da nun $CG = DO$; $CD = GO$ ist, so hat man:

$$\sin\alpha = \cos\beta; \quad \cos\alpha = \sin\beta;$$
$$\operatorname{tang}\alpha = \cot\beta; \quad \cot\alpha = \operatorname{tang}\beta;$$
$$\sec\alpha = \operatorname{cosec}\beta; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \sec\beta;$$

und da dieß für was immer für eine Größe von α und β gilt, wofern nur $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist, so hat man:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha; \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$$
$$\operatorname{tang}(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha; \quad \cot(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tang}\alpha.$$
$$\sec(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cosec}\alpha; \quad \operatorname{cosec}(90^\circ - \alpha) = \sec\alpha.$$

Man kann sagen, jede Function des einen complementären Winkels ist die Cofunction des andern, und umgekehrt.

Es ist hier zugleich der Ort, auf zwei trigonometrische Functionen aufmerksam zu machen, die freilich nur selten vorkommen.

Das Stück des unbeweglichen Schenkels zwischen Sinus und Tangente eines Winkels heißt sein Quersinus oder Sinus versus. $AD = \sin\operatorname{vers}\alpha$.

Das Stück BG hingegen, d. h. der Quersinus des complementären Winkels heißt sein Quercosinus, Cosinus versus; es ist so $BG = \cos\operatorname{vers}\alpha$.

§. 229. Und nun fassen wir den Wechselbezug dieser sechs Functionen eines und desselben Winkels ins Auge; der Allgemeinheit wegen denken wir uns vier Winkel, jeden in einem andern Quadranten.

Fig. 259.

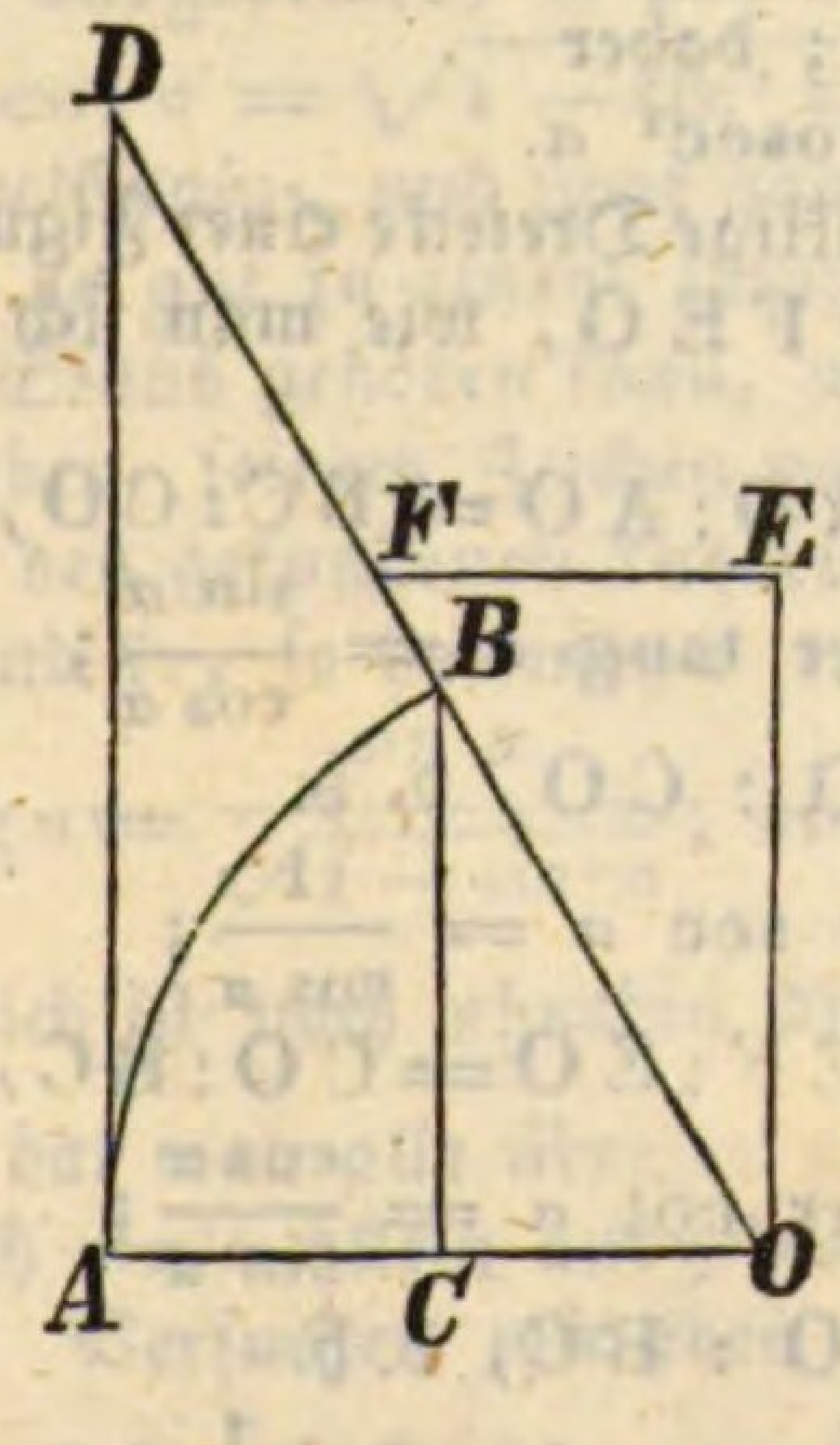


Fig. 260.

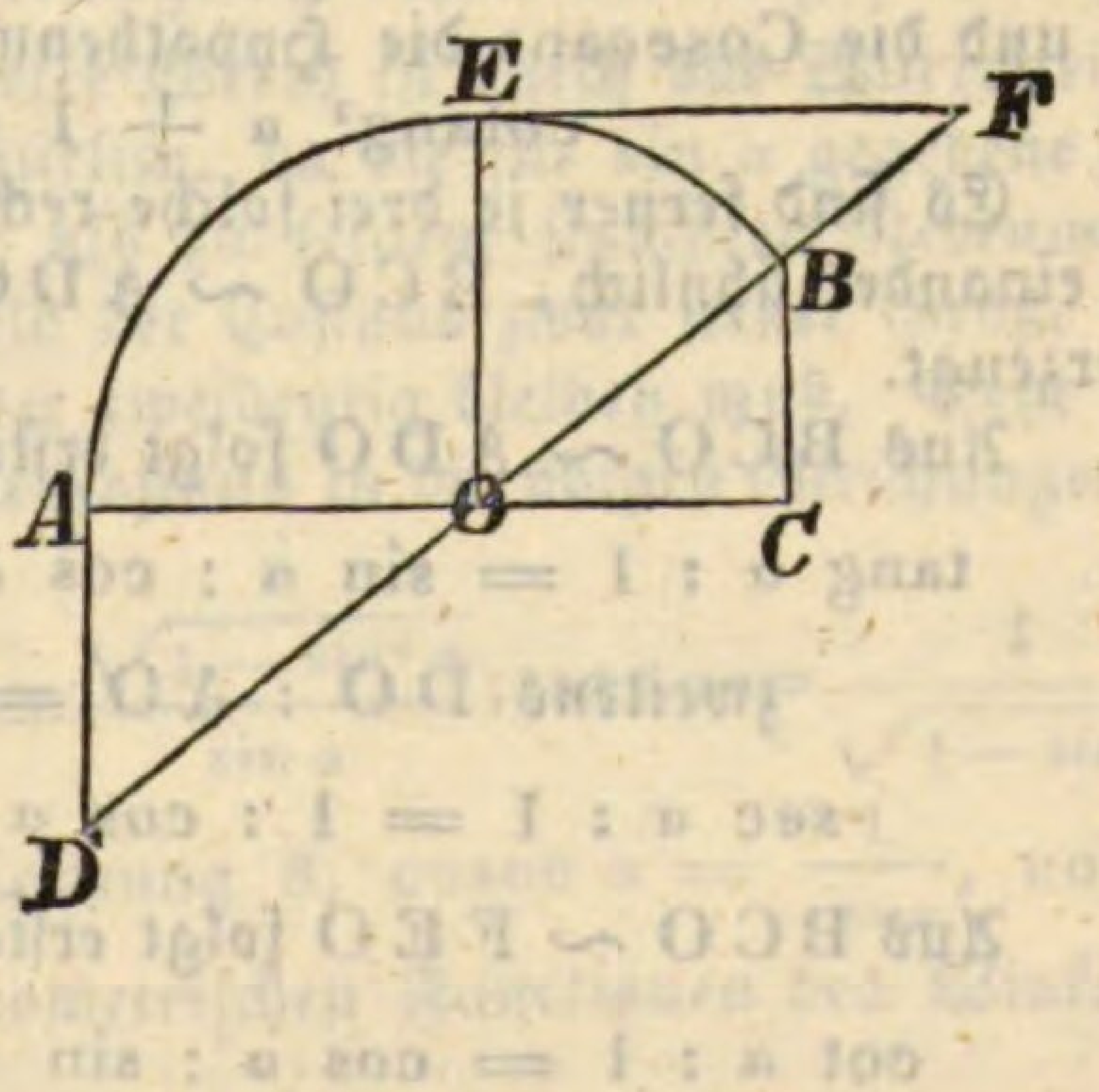


Fig. 261.

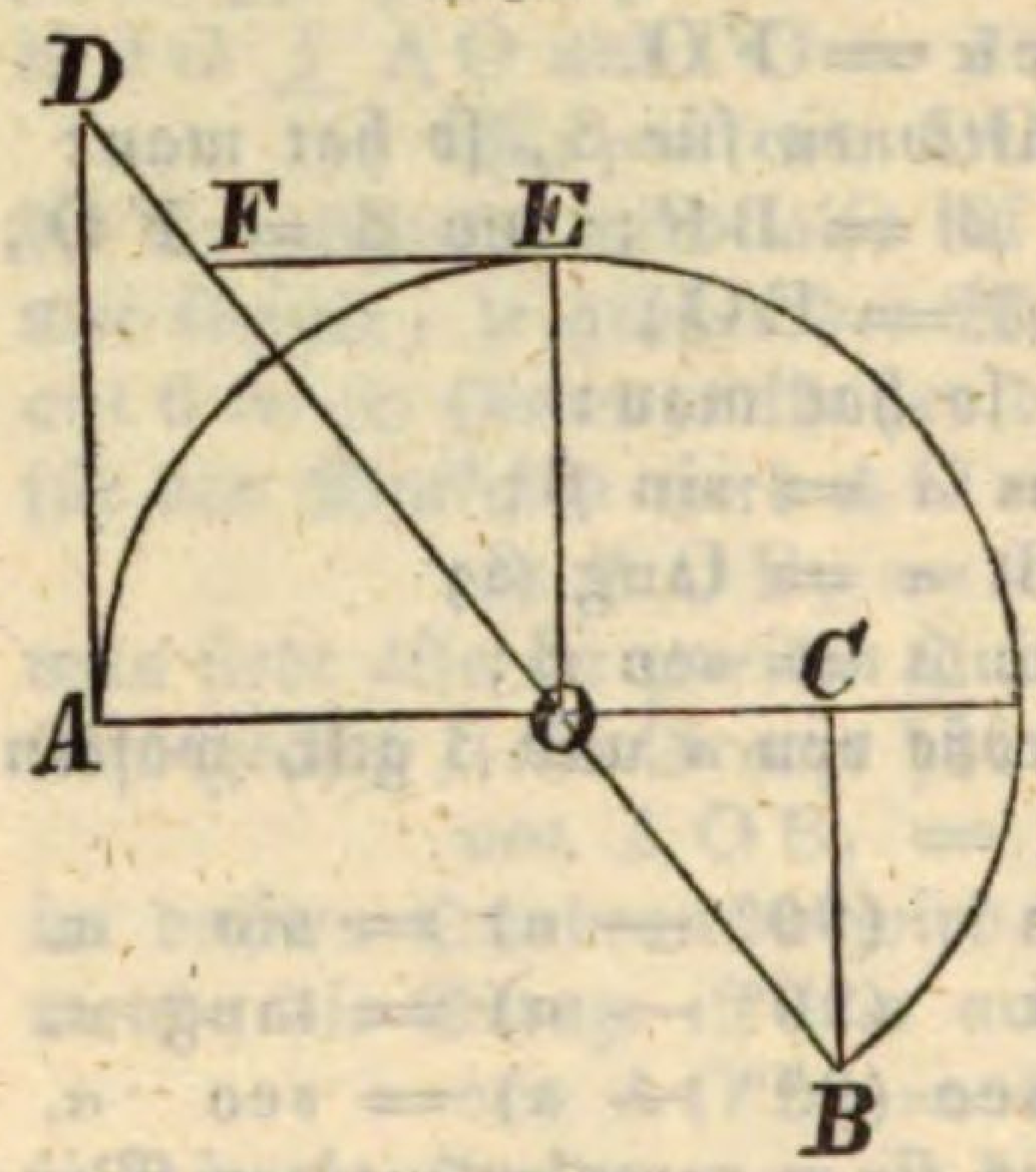
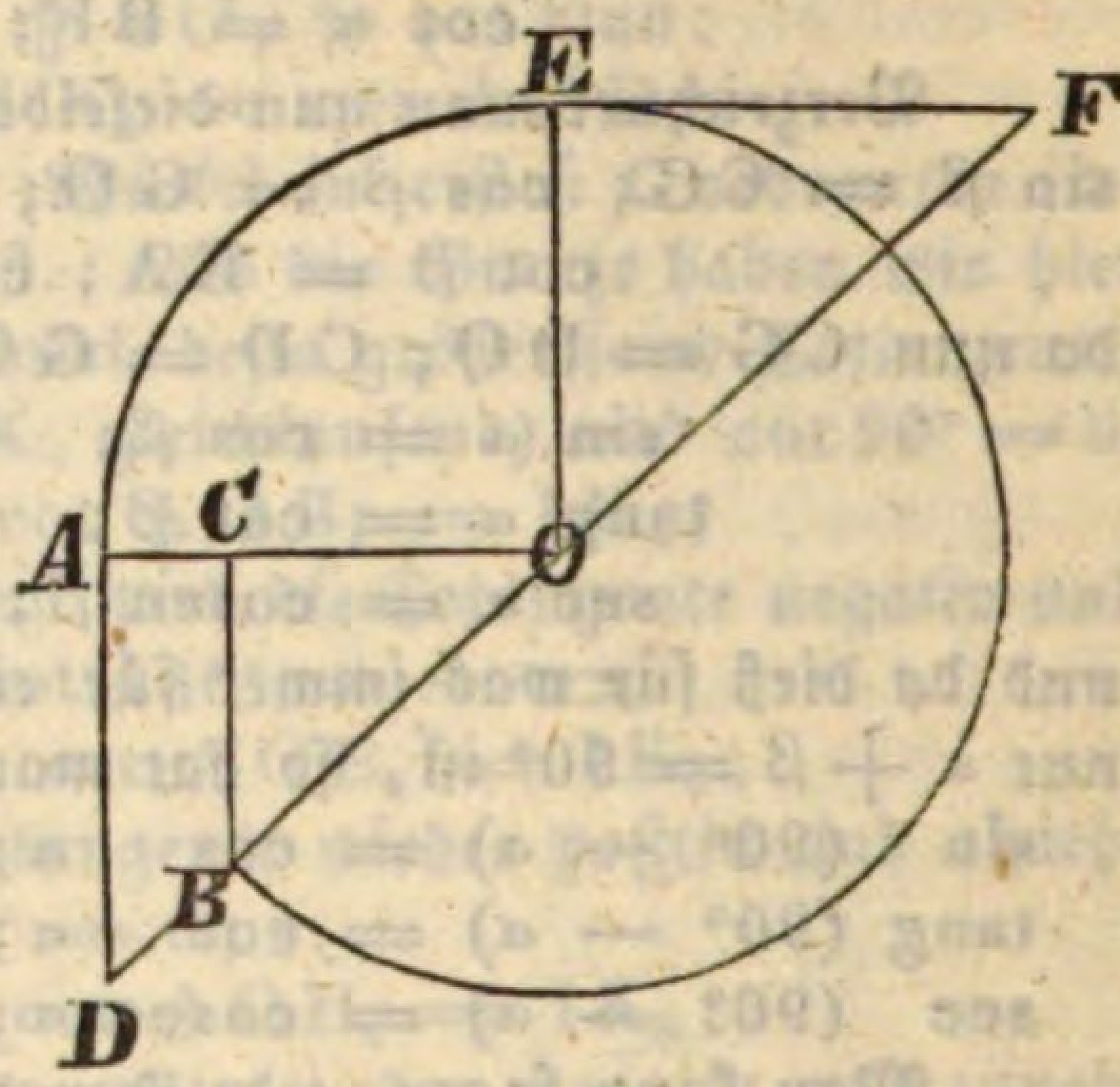


Fig. 262.



Es sey der Winkel AOB, der hier in allen vier Quadraten erscheint, gleich α; es sey $AO = 1$, $BO = 1$; fällt man von B ein Loth auf AO (alles, was wir hier besprochen, bezieht sich auf jede dieser vier Figuren), nämlich BC, so ist $BC = \sin\alpha$ und $CO = \cos\alpha$; errichtet man in A ein Loth, und verlängert OB, bis es dies Loth in D trifft, so ist $AD = \tang\alpha$, und $DO = \sec\alpha$; errichtet man $EO \perp AO$, macht $EO = 1$; zieht durch E eine mit AO Gleichlaufende, bis sie von BO in F getroffen wird, so ist $EF = \cot\alpha$ und $FO = \operatorname{cosec}\alpha$.

In jeder dieser vier Figuren haben wir drei rechtwinklige Dreiecke erstens: BCO, wo Sinus und Cosinus die Katheten und die Einheit ($OB = 1$) die Hypothenuse ist; daher hat man $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; zweitens: ADO, wo Tangens und die Einheit der Längen die Katheten und die Secans die Hypothenuse ist; daher $\tang^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$; drittens: EOF, wo Cotangens und die Einheit der Längen die Katheten und die Cosecans die Hypothenuse ist; daher

$$\operatorname{cotang}^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Es sind ferner je drei solche rechtwinklige Dreiecke einer Figur unter einander ähnlich, $BCO \sim ADO \sim FEO$, wie man sich leicht überzeugt.

Aus $BCO \sim ADO$ folgt erstens $AD : AO = BC : CO$, d. h.

$$\tang\alpha : 1 = \sin\alpha : \cos\alpha \text{ oder } \tang\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

zweitens $DO : AO = BO : CO$, d. h.

$$\sec\alpha : 1 = 1 : \cos\alpha \text{ oder } \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha};$$

Aus $BCO \sim FEO$ folgt erstens $EF : EO = CO : BC$, d. h.

$$\cot\alpha : 1 = \cos\alpha : \sin\alpha \text{ oder } \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

zweitens $FO : EO = BO : BC$, d. h.

$$\operatorname{cosec}\alpha : 1 = 1 : \sin\alpha \text{ oder } \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha};$$

Aus ADO $\sim$ FEO folgt FE : EO = AO : AD, d. h.

$$\cot g\,\alpha : 1 = 1 : \tang\,\alpha \text{ oder } \cot g\,\alpha = \frac{1}{\tang\,\alpha}.$$

Aus diesen Ergebnissen wollen wir uns zunächst die drei folgenden

$$\cot g\,\alpha = \frac{1}{\tang\,\alpha};\ \sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\,\alpha};\ \operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\,\alpha}$$

herausheben; sie lehren uns, daß die Cotangente gleich ist dem verkehrten Werthe der Tangente, die Secante dem verkehrten Werthe des Cosinus, die Cosecante dem verkehrten Werthe des Sinus, wodurch also alle trigonometrischen Functionen auf Sinus, Cosinus und Tangente zurückgeführt sind.

Wir müssen unsere Leser inständig bitten, diese acht Gleichungen

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;	5. $\cot g\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$;
2. $\tang^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$;	6. $\cot g\,\alpha = \frac{1}{\tang\,\alpha}$;
3. $\cot g^2\alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2\alpha$;	7. $\sec\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$;
4. $\tang\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;	8. $\operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$.

recht gut dem Gedächtnisse sich einzuprägen, da wir sehr oft davon Gebrauch machen werden. Das beste Mittel aber des Behaltens ist eine häufige Wiederholung ihrer Entwickelung, und lebendige Vorstellung der Figur.

§. 230. Diese acht Gleichungen verschaffen uns zuerst den Nutzen, daß wir aus einer trigonometrischen Function eines Winkels die übrigen im Stande sind zu berechnen.

Es sey z. B. sin α gegeben, und man verlangt alle andern durch diese ausgedrückt, so hat man vermöge der ersten der obigen Gleichungen $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$. Dieser Werth ist durch das Wurzelzeichen doppelsinnig, und zwar ganz natürlich, da die für sin α gegebene Zahl eben so gut zu einem spitzigen, als zu seinem stumpfen Nebenwinkel als Sinus gehören kann, weßhalb der Cosinus zwar seiner Größe nach gegeben, seinem Zeichen nach aber zweideutig bleiben muß. Setzt man nun den gefundenen Ausdruck für Cosinus in die obigen Gleichungen 4., 5. und 7., so hat man:

$$\tang\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};\ \cot g\,\alpha = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sin\alpha};\ \sec\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}};$$

endlich ist noch ohnehin die Gleichung 8. $\operatorname{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, und somit hat man alle übrigen trigonometrischen Functionen des Winkels α durch sin α allein ausgedrückt.

Versuchen wir eben so alle übrigen durch tang α auszudrücken. Die siebente Gleichung gibt $\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}$, die zweite Gleichung

$\sec\alpha = \sqrt{1+\text{tang}\,\alpha}$, daher $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}$; da uns nun die vierte Gleichung $\sin\alpha = \text{tang}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$ gibt, so hat man $\sin\alpha = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}$; die Gleichung 6. gibt unmittelbar $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$; die Gleichung 2. $\sec\alpha = \sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}$, und 8. gibt $\text{cosec}\,\alpha = \frac{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}{\text{tang}\,\alpha}$. Vollführt man diese Rechnungen rücksichtlich aller dieser verschiedenen trigonometrischen Functionen, so erhält man folgende Zusammenstellung von ziemlich häufig gebrauchten Formeln:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$$

$$= \frac{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha} = \frac{1}{\text{cosec}\,\alpha};$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}} = \frac{\text{cotg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\sqrt{\text{cosec}^2\alpha-1}}{\text{cosec}\,\alpha};$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{cotg}\,\alpha};$$

$$= \sqrt{\sec^2\alpha-1} = \frac{1}{\sqrt{\text{cosec}^2\alpha-1}};$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}} = \sqrt{\text{cosec}^2\alpha-1};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}$$

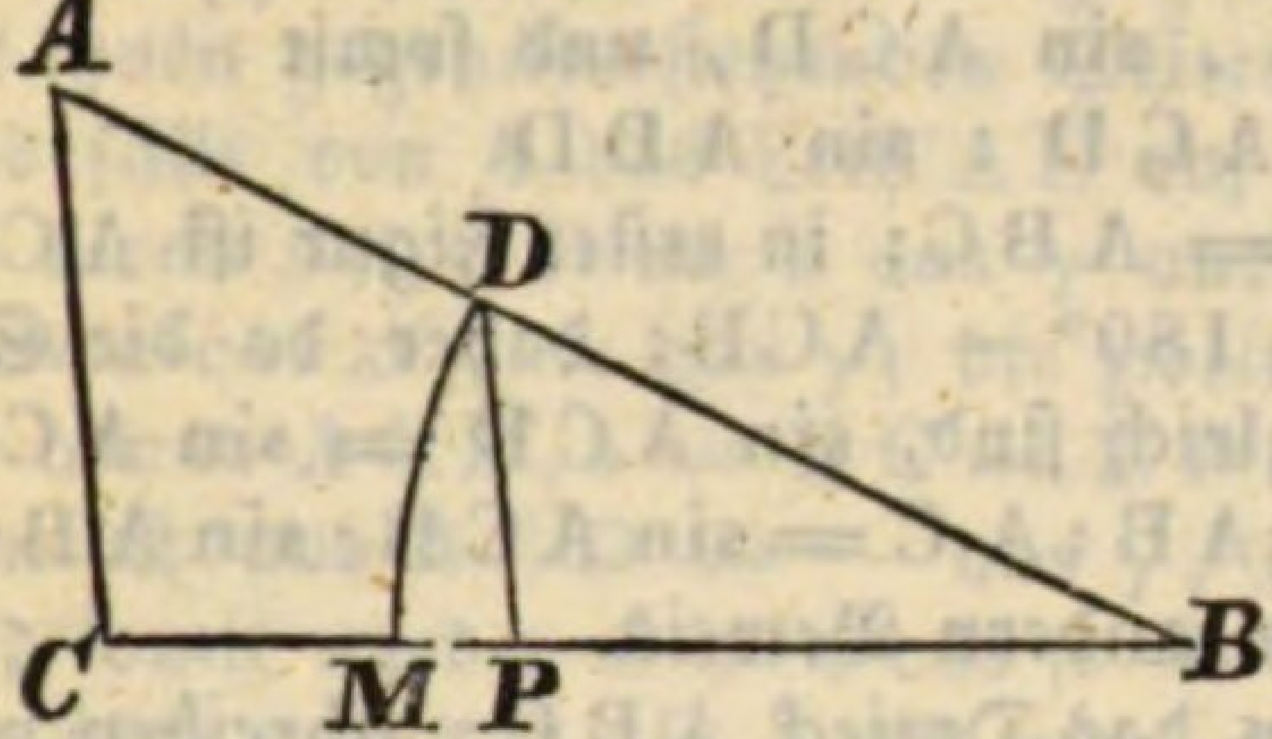
$$= \frac{\sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha}}{\text{cotg}\,\alpha} = \frac{\text{cosec}\,\alpha}{\sqrt{\text{cosec}^2\alpha-1}};$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \frac{\sqrt{1+\text{tang}^2\alpha}}{\text{tang}\,\alpha}$$

$$= \sqrt{1+\text{cotg}^2\alpha} = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha-1}}.$$

§. 231. Nach dieser Vorbereitung wollen wir zuerst die Anwendungen davon auf ein rechtwinkliges Dreieck machen.

Fig. 263.



Es sey das Dreieck ABC; ich beschreibe aus dem Scheitel B mit der Einheit der Länge = DB einen Kreisbogen DM, und fälle DP lothrecht auf BC, so habe ich DB = 1; DP = sin B, BP = cos B. Da nun DP gleichlaufend mit AC, so ist das Dreieck BDP ∼ ABC, und man hat:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DP}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BP}; \quad \frac{AC}{CB} = \frac{DP}{BP}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sin B}; \quad \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\cos B}; \quad \frac{AC}{CB} = \frac{\sin B}{\cos B}, \text{ woraus}$$

$AC = AB \sin B$; $BC = AB \cos B$; $AC = BC \operatorname{tang} B$ (da $\frac{\sin B}{\cos B} = \operatorname{tang} B$ ist), und da $\operatorname{tang} B = \cot. A$; $AC = BC . \cot. A$.

Da nun B derjenige spitzige Winkel des Dreiecks ist, der der Kathete AC gegenüber, der Kathete BC anliegt, so haben wir somit folgende inhaltsvolle Sätze:

1. **Jede Kathete ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Kathete gegenüber liegenden Winkels.**
2. **Jede Kathete ist gleich der Hypothenuse, multiplicirt mit dem Cosinus des dieser Kathete anliegenden spitzigen Winkels.**
3. **Jede Kathete ist gleich der andern Kathete, multiplicirt mit der Tangente des der ersten Kathete gegenüber liegenden spitzigen Winkels.**
4. **Jede Kathete ist gleich der andern Kathete, multiplicirt mit der Cotangente des der ersten Kathete anliegenden Winkels.**

§. 232. **In jedem Dreiecke verhalten sich die Seiten desselben wie die Sinusse der diesen Seiten gegenüber liegenden Winkeln.**

Fig. 264.

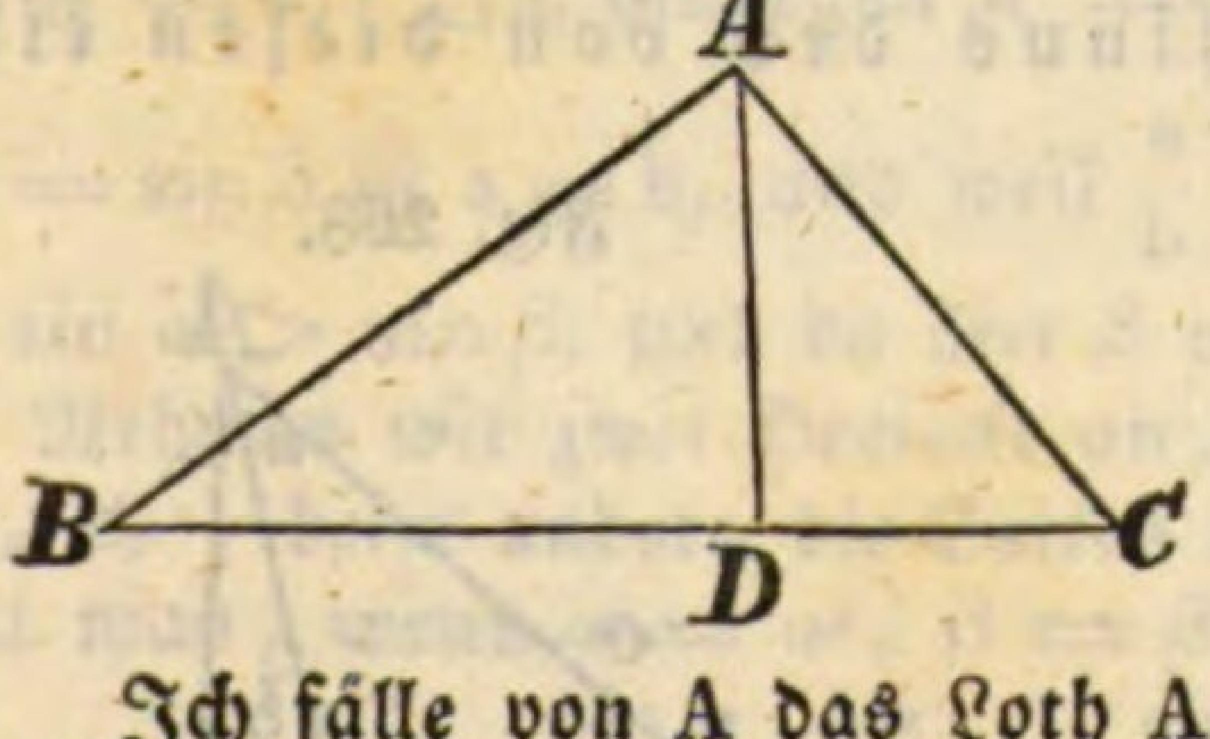
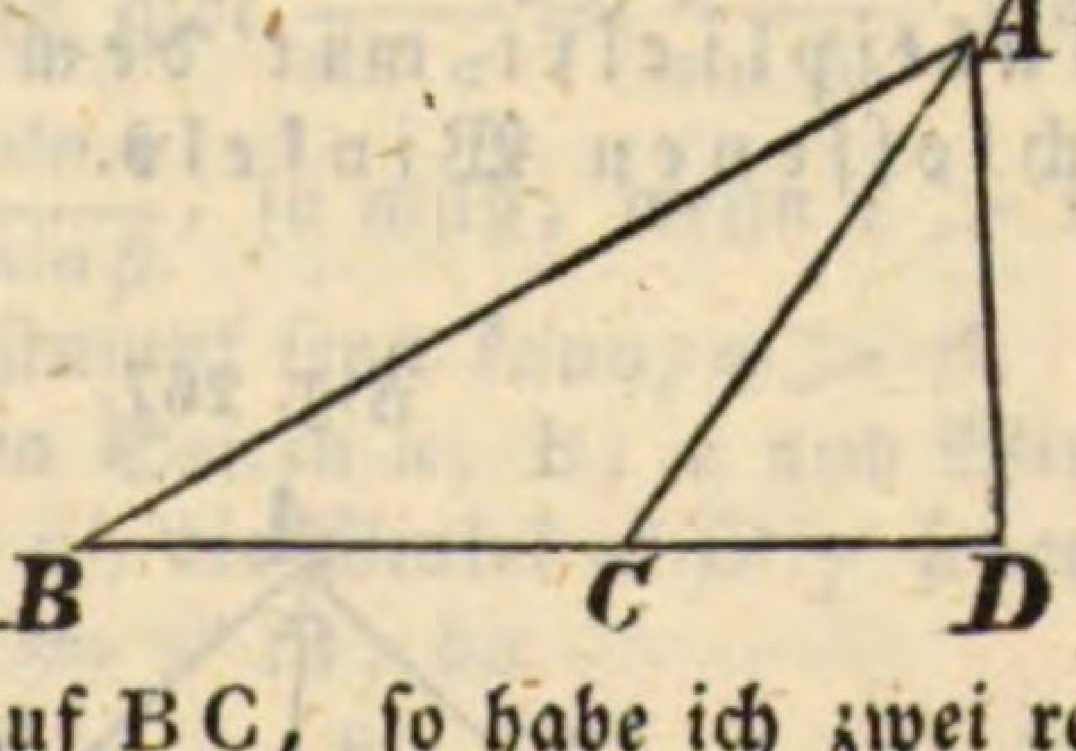


Fig. 265.



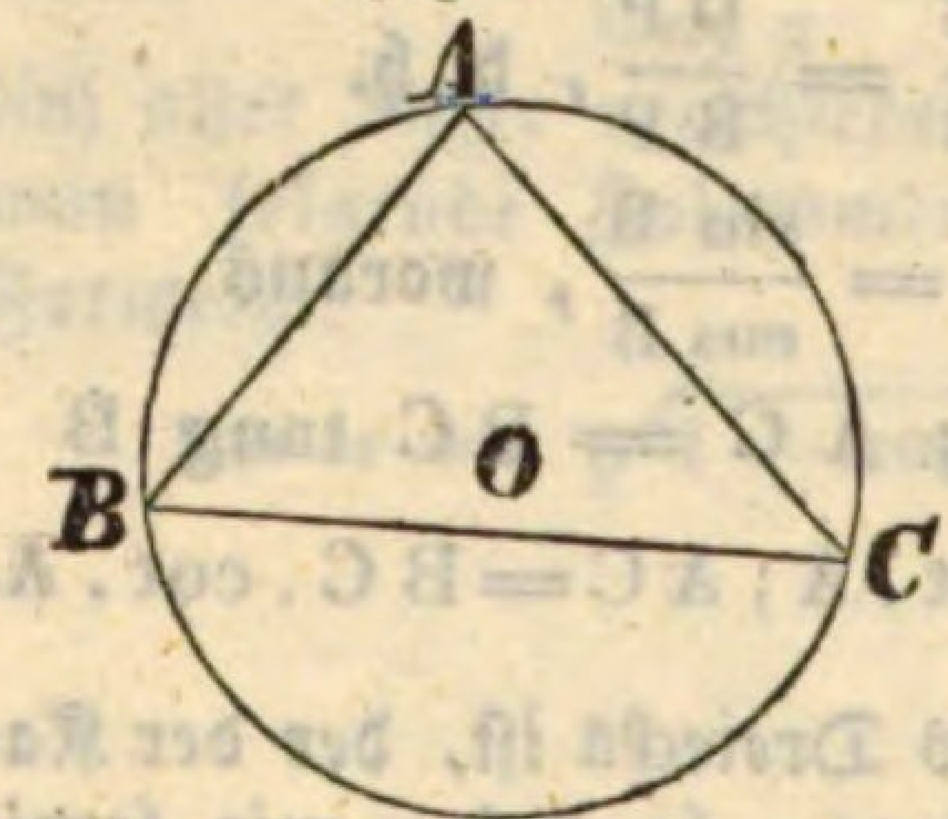
Ich fälle von A das Loth AD auf BC, so habe ich zwei rechtwinklige Dreiecke BAD und CAD, vermöge des Lehrsatzes im vorigen Paragraphe erhalte ich

$AD = AB \sin ABD$, $AD = AC \sin ACD$; daher
$AB \cdot \sin ABD = AC \cdot \sin ACD$, und somit
$AB : AC = \sin ACD : \sin ABD$.

In beiden Figuren ist $ABD = ABC$; in erster Figur ist $ACD = ACB$, in der zweiten $ACD = 180^\circ - ACB$; daher da die Sinusse zweier Nebenwinkel einander gleich sind, $\sin ACD = \sin ACB$ für jede der zwei Figuren, und somit $AB : AC = \sin ACB : \sin ABC$.

Dieser Satz erlaubt noch einen andern Beweis.

Fig. 266.



Es sey das Dreieck ABC; schreiben wir demselben einen Kreis um: BC ist die Sehne eines Mittelpunktwinkels, doppelt so groß als A, eben so sind AB, AC Sehnen von Mittelpunktwinkeln, die doppelt so groß sind, als die Winkel C und B. Nimmt man nun OC als die Einheit der Längen an, so ist $\frac{BC}{2}$ der Sinus A, $\frac{AB}{2}$ der Sinus C, $\frac{AC}{2}$ der Sinus B. Da sich nun die ganzen Seiten wie ihre Hälften verhalten, so hat man:

$$BC : AB : AC = \sin A : \sin C : \sin B.$$

Ist nun R die Größe des Halbmessers des dem Dreiecke umschriebenen Kreises, so wird, da nach dem so eben Gesagten, $\sin A$ die Zahl ist, welche ausdrückt, wie oft die als Einheit angenommene R in $\frac{BC}{2}$ enthalten ist, wir also $\frac{\frac{1}{2} BC}{R} = \sin A$ haben, und eben so $\frac{\frac{1}{2} AB}{R} = \sin C$, $\frac{\frac{1}{2} AC}{R} = \sin B$, daher $BC = 2 R \sin A$, $AB = 2 R \sin C$,

$$AC = 2 R \cdot \sin B, \text{ und somit } \frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} = 2 R;$$

d. h. jede Seite eines Dreiecks, dividirt durch den Sinus des ihr gegenüberstehenden Winkels, gibt stets den Durchmesser des umschriebenen Kreises zum Quotus.

§. 233. (Carnot'scher Lehrsatz.) In jedem Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Produkte dieser beiden andern Seiten, multiplicirt mit dem Cosinus des von diesen eingeschlossenen Winkels.

Fig. 267.

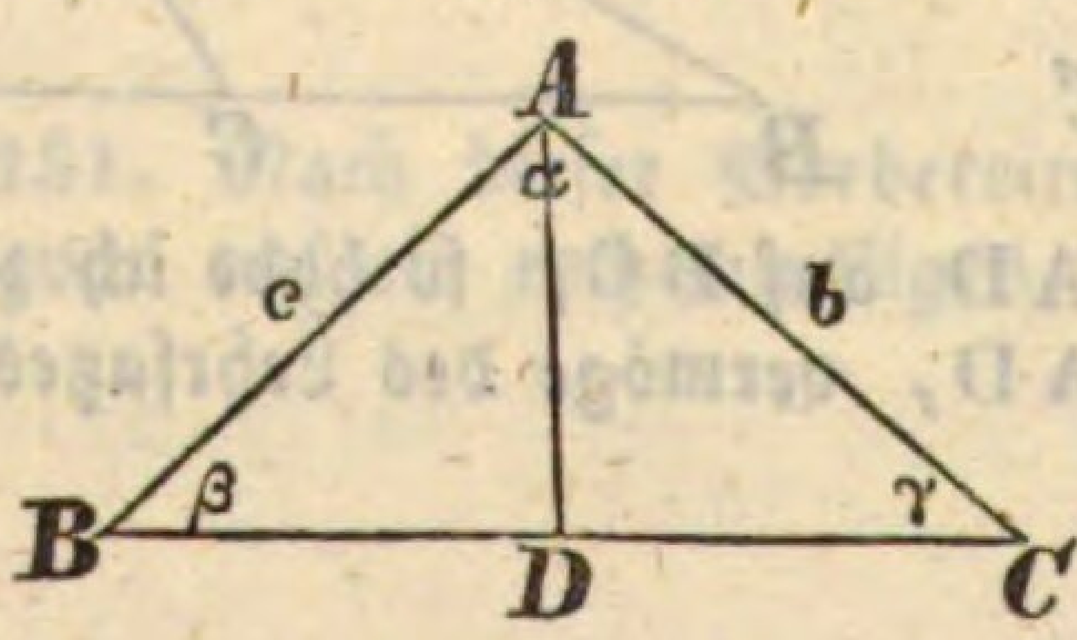
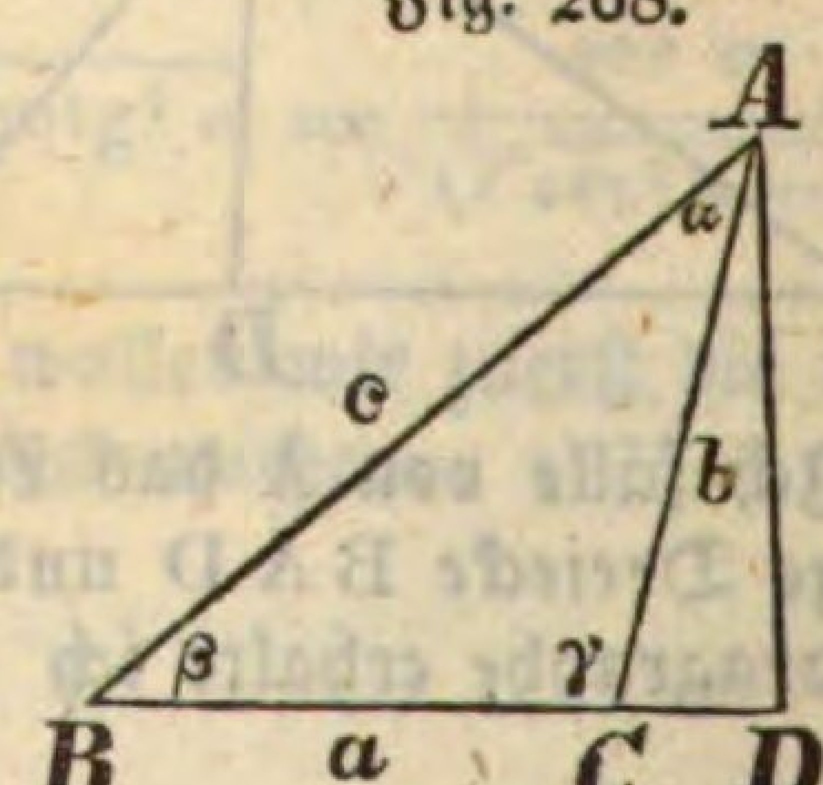


Fig. 268.



Bezeichnet man der Kürze halber die Winkel A, B, C mit α, β, γ, die ihnen gegenüberstehenden Seiten $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, und fällt von A das Loth AD auf BC, so gibt die erste Figur $BD = c \cos\beta$, $CD = b \cos\gamma$ und $a = BC = BD + CD$; gibt $a = c \cos\beta + b \cos\gamma$; die zweite Figur gibt $BD = c \cos\beta$; $CD = b \cos ACD$, $a = BC = BD - CD = c \cos\beta - b \cos ACD$; nun ist $\cos ACD = - \cos\gamma$, daher $- b \cos ACD = b \cos\gamma$, und somit wieder $a = c \cos\beta + b \cos\gamma$; fällt man eben so von C ein Loth auf AB, so erhält man $c = b \cos\alpha + a \cos\beta$, und wenn man von B ein Loth auf AC fällt, $b = a \cos\gamma + c \cos\alpha$.

Man hat somit folgende drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos\gamma + c \,.\, \cos\beta \\ b &= a \cos\gamma + c \,.\, \cos\alpha \\ c &= b \cos\alpha + a \,.\, \cos\beta \end{aligned}\right\} \text{I}$$

Multiplicirt man nun die erste Gleichung mit a, die zweite mit b, die dritte mit c, so hat man:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab \,.\, \cos\gamma + ac \,.\, \cos\beta \\ b^2 &= ab \,.\, \cos\gamma + bc \,.\, \cos\alpha \\ c^2 &= bc \,.\, \cos\alpha + ac \,.\, \cos\beta \end{aligned}$$

Ziehe ich nun die Summe der zwei untern von der obern Gleichung ab, so hat man:

$$a^2 - b^2 - c^2 = - 2bc \,.\, \cos\alpha, \text{ daher}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\alpha,$$

welches der zu beweisende Satz ist. Ganz eben so erhält man $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos\beta$ und $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$.

Aus den Sätzen I, dem Carnot'schen Lehrsatze und aus $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ läßt sich wieder die ganze Theorie des Dreiecks, die Lehre der Einerleiheit und Aehnlichkeit der Dreiecke ableiten, was zwar nicht zur Gründlichkeit beiträgt, aber ein Uebersicht gewährendes Spiel ist.

Sind zwei Seiten eines Dreiecks gleich, so sind es auch die gegenüberstehenden Winkel. Ist $a = b$, so geben die ersten zwei Gleichungen in I: $a = a \cos\gamma + c \cos\beta$; $a = a \cos\gamma + c \,.\, \cos\alpha$; daher $\cos\beta = \cos\alpha$ und weil von erhabenen Winkeln keine Rede seyn kann, $\beta = \alpha$. Ist hingegen $\alpha = \beta$, so gibt $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$, weil $\sin\alpha = \sin\beta$ ist $a = b$, und weil $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$, so muß, wenn $a > b$, auch $\sin\alpha > \sin\beta$, und da hier β nicht stumpf seyn kann, $\alpha > \beta$.

Nehmen wir zwei Dreiecke an, deren Seiten a, b, c und Winkel α, β, γ beim andern die Seiten a' b' c', die Winkel α' β' γ' seyen, so hat man, wenn $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ ist, da

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}; \quad \frac{a'}{b'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} \text{ u. s. w. } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},$$

d. h. die gleichliegenden Seiten sind dann proportionirt, wie also eine gleichliegende Seite gleich ist, sind die Dreiecke einerlei u. s. w.

§. 234. Wir wollen nun die Aufgabe unternehmen, **aus dem Sinus und Cosinus zweier Winkel, den Sinus und Cosinus der Summe dieser zwei Winkel zu bestimmen.**

Fig. 269.

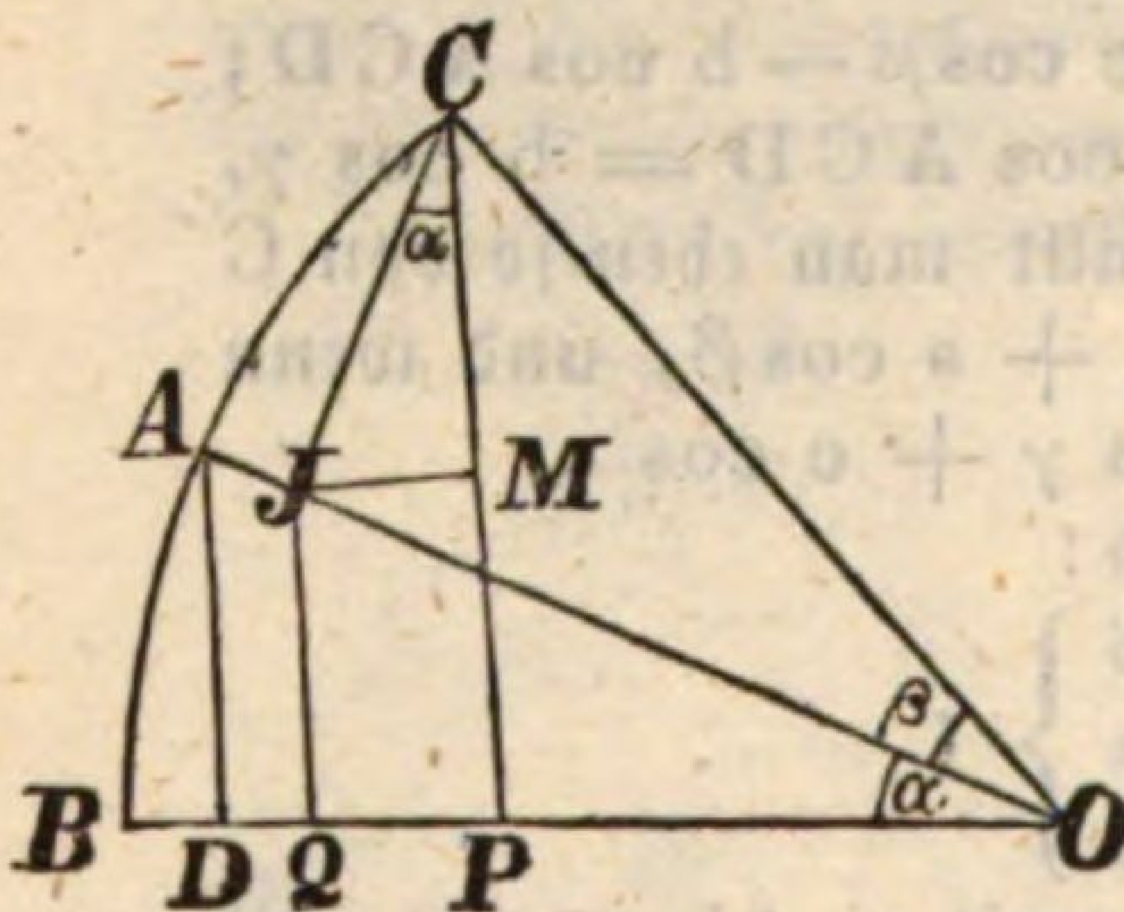


Fig. 270.

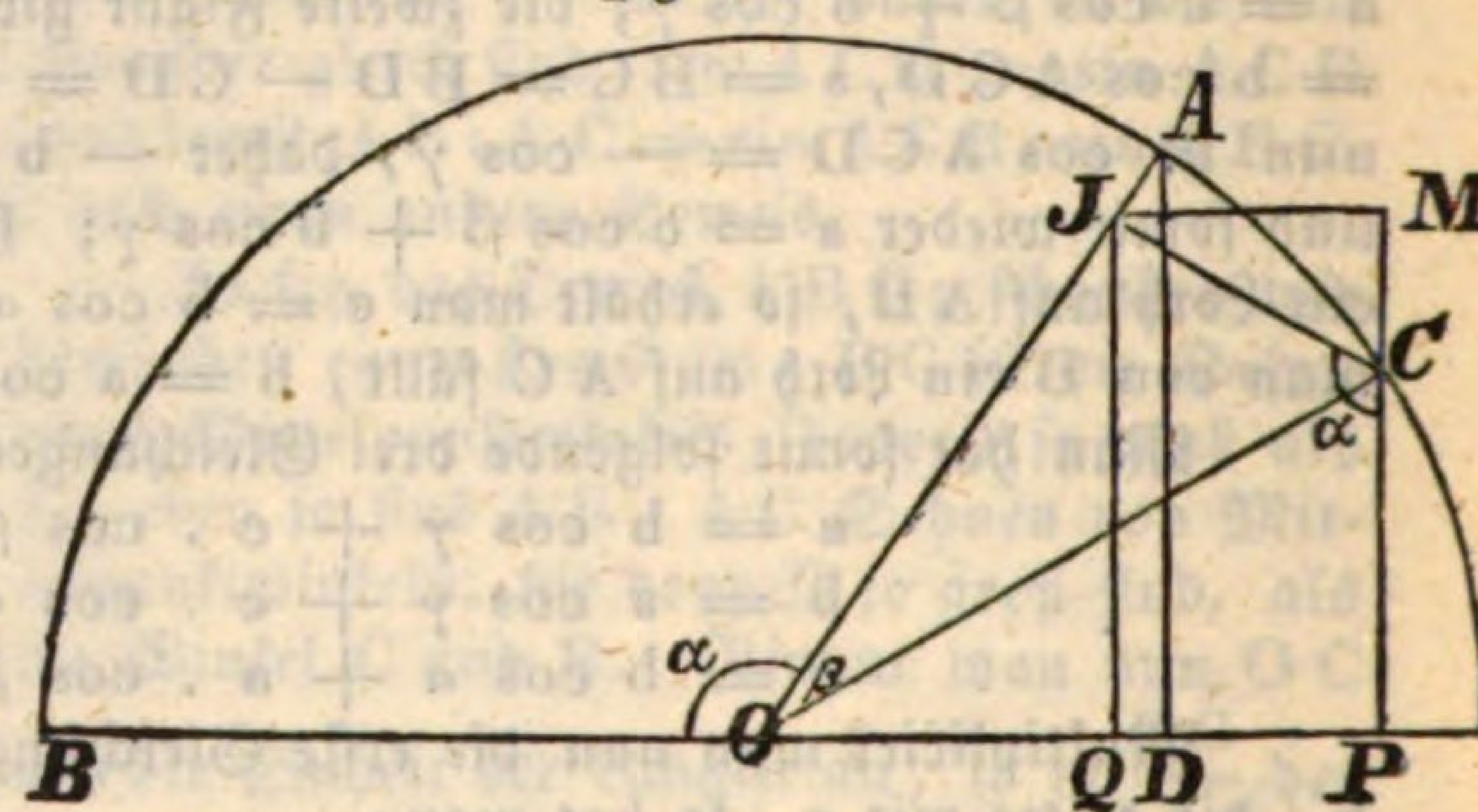
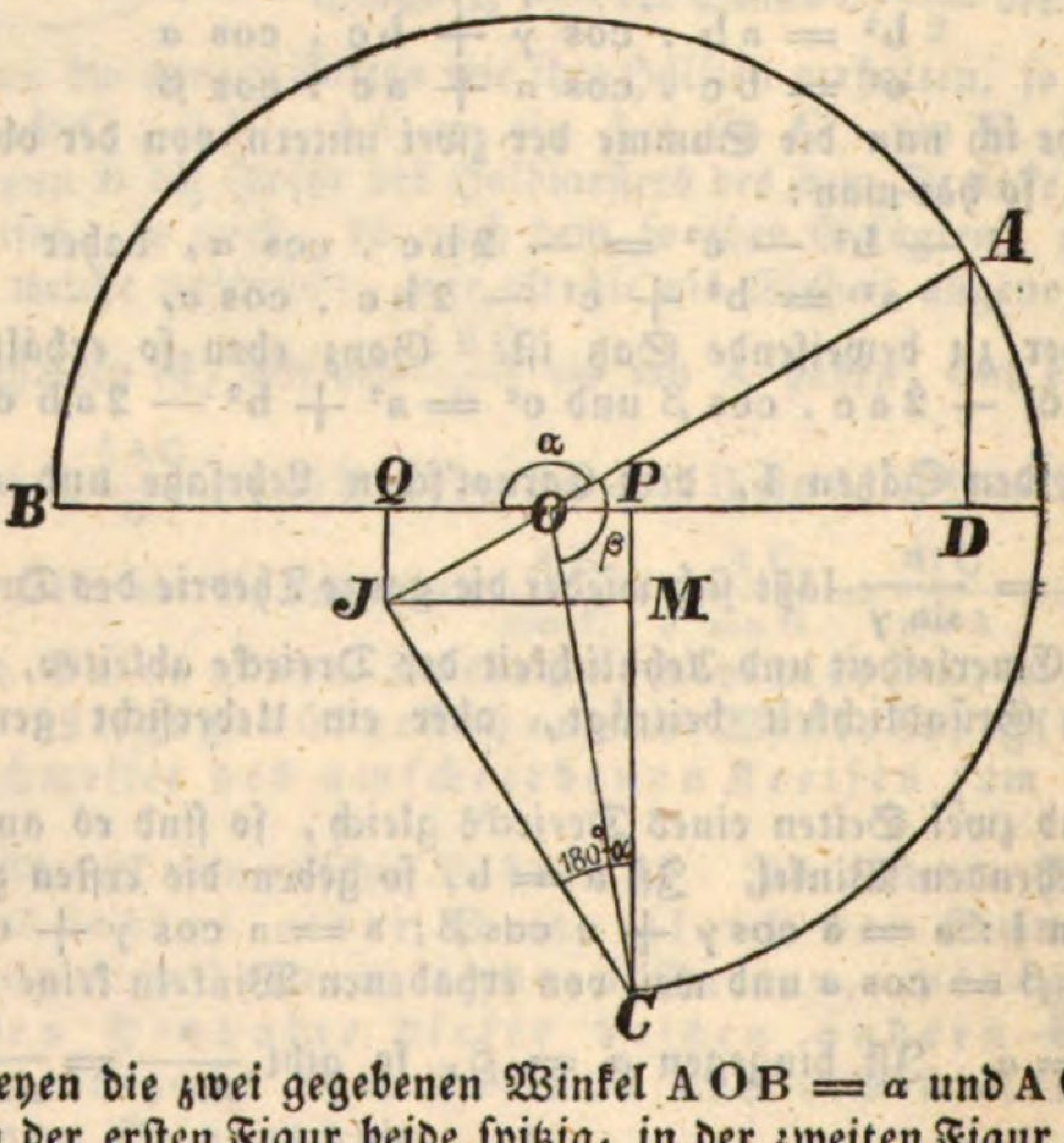


Fig. 271.



Es seyen die zwei gegebenen Winkel AOB $= \alpha$ und AOC $= \beta$, wo hier in der ersten Figur beide spitzig, in der zweiten Figur α stumpf, β spitzig, in der dritten Figur α und β stumpf sind.

Es sey $\sin \alpha = AD$;

$\cos \alpha = DO$ in (1); $\cos \alpha = -OD$ in (2) und (3) $\sin \beta = CI$; $\cos \beta = IO$ in (1) und (2), dagegen $\cos \beta = -OI$ in (3).

Zieht man nun $CP \perp BO$, und fällt von I die Lothe $IQ \perp BO$ und $IM \perp CP$.

1. Wir haben nun in der ersten Figur $\sin(\alpha + \beta) = CP$; $\cos(\alpha + \beta) = OP$;

$$\text{aber } CP = CM + MP = CM + IQ$$
$$OP = OQ - QP = OQ - IM \quad (1).$$

Der Winkel ICM ist gleich dem Winkel $AOB = \alpha$, weil, wenn man von einem Punkte außerhalb eines spitzigen Winkels Lothe auf die Schenkel des Winkels fällt, der Winkel der Lothe gleich dem Winkel selbst ist.

Daher hat man in dem rechtwinkeligen Dreiecke ICM Folgendes: $CM = IC . \cos\alpha = \sin\beta \cos\alpha$; $IM = IC . \sin\alpha = \sin\beta . \sin\alpha$; eben so ist in dem rechtwinkeligen Dreiecke QIO, $IQ = IO \sin\alpha = \cos\beta \sin\alpha$; $QO = IO \cos\alpha = \cos\beta \cos\alpha$.

Setzet man die gefundenen Werthe in die Gleichungen (1) hinein, so hat man: $CP = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta . \sin\alpha$
$$OP = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta . \sin\alpha;$$
$$\text{daher } \sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha.$$

2. In der zweiten Figur haben wir $\sin(\alpha + \beta) = CP$; $\cos(\alpha + \beta) = - OP$.

$$\text{Nun ist } CP = MP - MC; \; OP = OQ + QP$$
$$\text{oder } CP = IQ - MC; \; OP = OQ + IM.$$

Nun ist der Winkel ICP die Ergänzung zu 180° vom Winkel IOP; daher ist $ICP = \alpha$, daher $ICM = 180 - \alpha$; nun ist $CM = IC \cos . ICM = - IC \cos\alpha = - \sin\beta \cos\alpha$ und $IM = IC . \sin ICM = IC \sin\alpha = \sin\beta \sin\alpha$. Ferners
$IQ = IO \sin IOP = IO \sin AOB = IO \sin\alpha = \cos\beta \sin\alpha$
$OQ = IO \cos . IOP = - IO \cos AOB = - IO . \cos\alpha$
$= - \cos\beta . \cos\alpha$; daher
$CP = \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha$; $OP = - \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha$; daher $\sin(\alpha + \beta) = \cos\beta \sin\alpha + \sin\beta \cos\alpha$; $\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha$.

3. In der dritten Figur hat man:
$\sin(\alpha + \beta) = - PC$; $\cos(\alpha + \beta) = - OP$. Nun ist
$$CP = CM + MP = CM + QI$$
$$OP = QP - OQ = IM - OQ.$$

Hier ist der Winkel ICP, wie man leicht sieht, $= 180^\circ - \alpha$, weil da der Winkel IOQ den Scheitelwinkel von α zu 180° ergänzt. Es ist nun
$CM = IC . \cos(180 - \alpha) = - IC \cos\alpha = - \sin\beta \cos\alpha$
$IM = IC . \sin(180 - \alpha) = IC \sin\alpha = \sin\beta \sin\alpha$
$OQ = IO . \cos IOQ = - IO \cos\alpha = \cos\beta \cos\alpha$; da
$\cos\beta = - IO$, also $IO = - \cos\beta$ ist;
$IQ = IO . \sin IOQ = IO . \sin\alpha = - \cos\beta \sin\alpha$, daher
$$CP = - \sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha$$
$$OP = \sin\beta \sin\alpha - \cos\beta \cos\alpha, \text{ somit}$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta \cos\alpha + \cos\beta \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha.$$

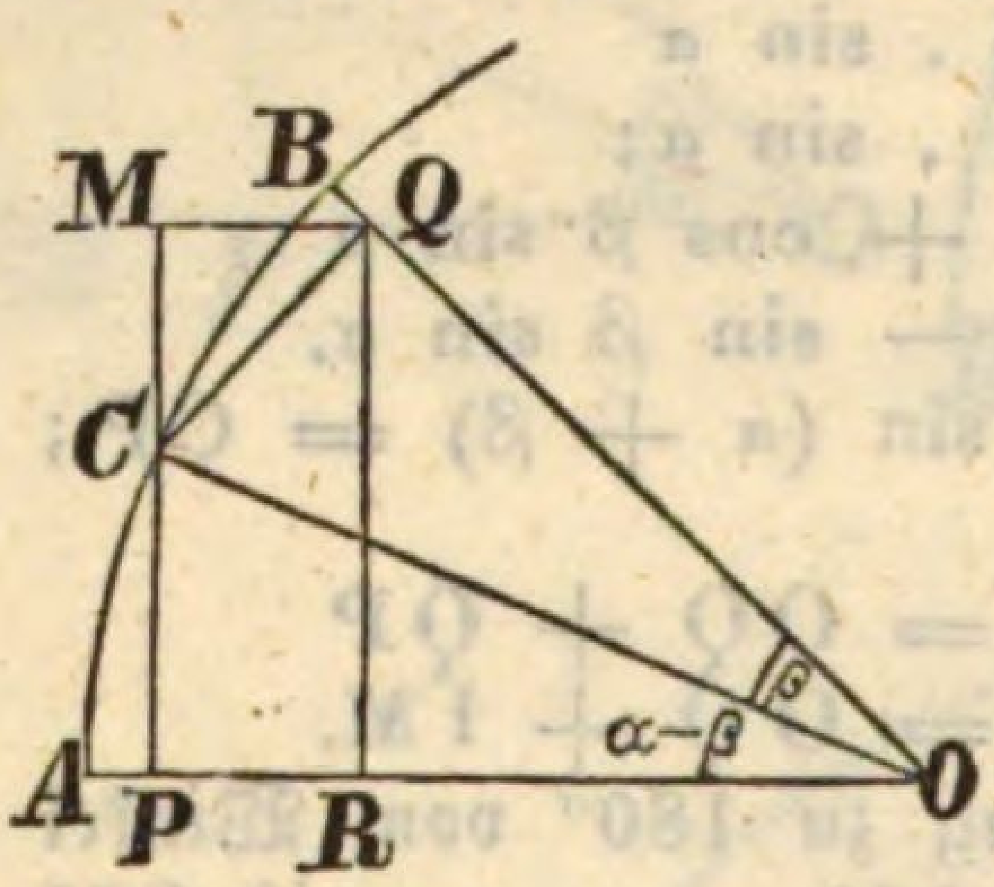
Zu ganz denselben Resultaten gelangen wir, wenn wir noch an-

dere als die bisherigen drei Zusammenstellungen von Winkeln annehmen. Wir haben daher für was immer für große α und β.

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,.\,\cos\beta + \cos\alpha\,.\,\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,.\,\cos\beta - \sin\alpha\,.\,\sin\beta\end{aligned}\right\}\ (I).$$

§. 235. Wir gehen nun über, wie man Sinus und Cosinus des Unterschiedes zweier Winkel findet, wenn der Sinus und Cosinus der einzelnen Winkel gegeben ist.

Fig. 272.



Es seyen die Winkel AOB $= \alpha$ und BOC $= \beta$, daher AOC $= \alpha - \beta$. Es sey CQ $\perp$ BO; CP $\perp$ AO, es ist daher CQ $= \sin\beta$; OQ $= \cos\beta$; CP $= \sin(\alpha-\beta)$; PO $= \cos(\alpha-\beta)$.

Fällt man nun von Q die Lothe QM $\perp$ CP und QR $\perp$ AO, so hat man:

$$\mathrm{CP} = \mathrm{MP} - \mathrm{MC} = \mathrm{QR} - \mathrm{MC}$$
$$\mathrm{PO} = \mathrm{PR} + \mathrm{RO} = \mathrm{MQ} + \mathrm{RO}.$$

Nun ist, da MQ $\parallel$ AO ist, MQO $= 180^\circ - \alpha$, daher MQC $= 90^\circ - \alpha$; da nun CM $=$ CQ . sin MQC $=$ sin β . sin MQC ist, so hat man CM $= \sin\beta\cos\alpha$; MQ $=$ CQ . cos MQC $= \sin\beta\sin\alpha$, QR $=$ QO $\sin\alpha = \cos\beta\sin\alpha$; RO $=$ QO . $\cos\alpha = \cos\beta\cos\alpha$, daher ist

$$\mathrm{CP} = \cos\beta\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha$$
$$\mathrm{PO} = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

und somit

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}\right\}\ (II).$$

Man kommt stets auf dieselben Formeln, was man auch immer für große und kleine α und β annimmt. Wir laden aber unsere Leser zu dieser so lehrreichen Uebung ein.

Die Formel II kann man aus der Formel I des vorhergehenden Paragraphes mit einem Schlage erhalten, sobald man oben statt $+\beta$ überall $-\beta$ setzet, und sich dabei erinnert, daß $\cos(-\beta) = +\cos\beta$ und $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ ist.

Wir erlauben uns noch einen sehr einfachen Beweis dieser so wichtigen Formeln für $\sin(a \pm \beta)$ und $\cos(\alpha \pm \beta)$ hier beizubringen.

Aus dem Vorhergehenden wissen wir, daß der Sinus eines Winkels oder Bogens die halbe Sehne desselben Winkels oder Bogens ist; es ist daher die Sehne eines jeden Bogens gleich dem doppelten Sinus des halben Bogens.

Fig. 273.

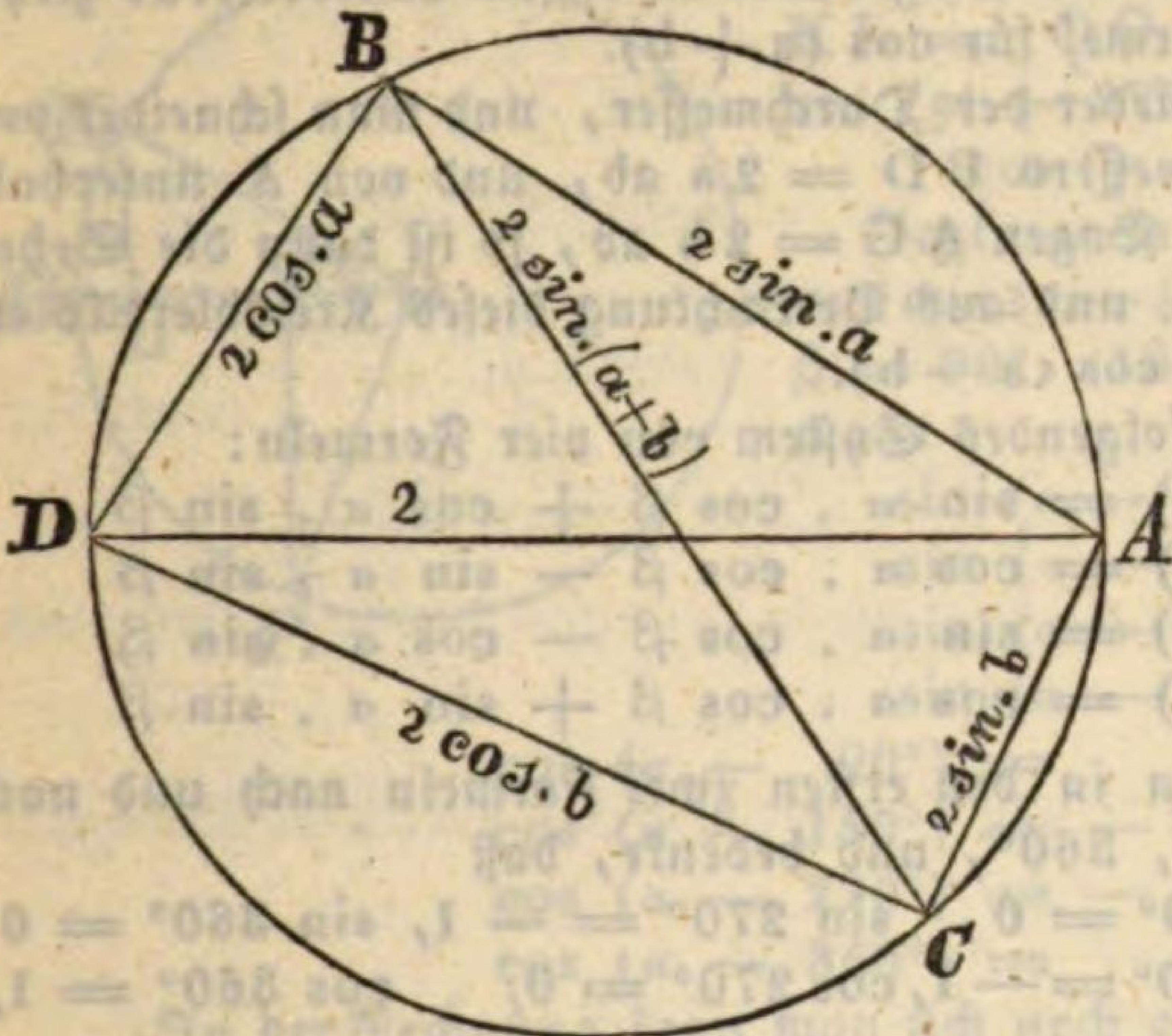
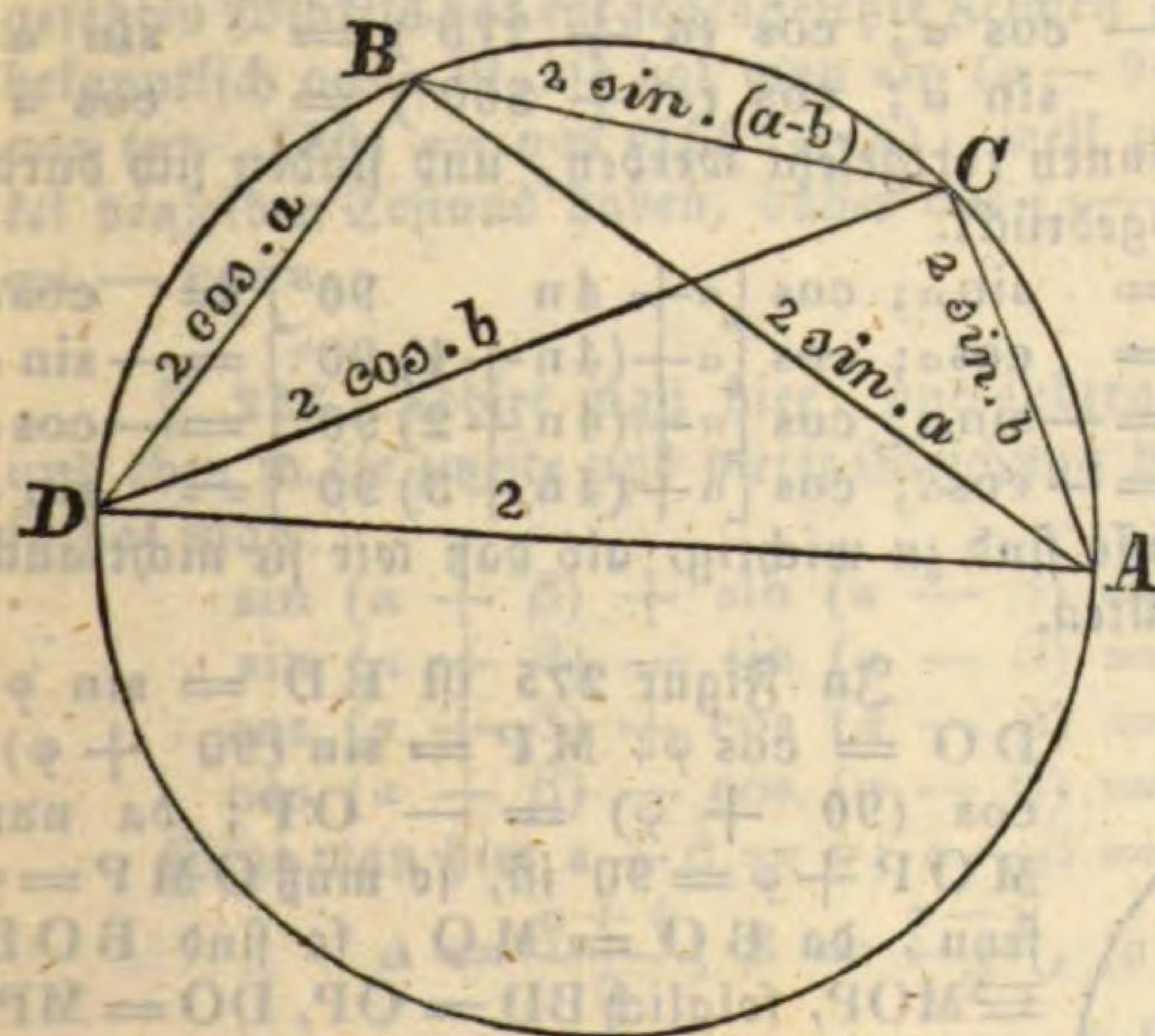


Fig. 274.



Der Halbmesser beider Kreise sey $= 1$; ist hier der Bogen $AB = 2a$, so ist die Sehne AB gleich $2 \sin a$; ist nun AD der Durchmesser, also ABD der halbe Umfang, so ist der Bogen $BD = \pi - 2a$, daher BD der doppelte Sinus des halben Bogens BD, daher

$$BD = 2 \sin \left(\frac{\pi - 2a}{2}\right)$$
$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

$= 2 \cos a$. Ist eben so der Bogen $AC = 2b$, so ist die Sehne $AC = 2 \sin b$, und die Sehne $CD = 2 \cos b$.

In der ersten Figur ist der Bogen BC oder

$$BAC = 2a + 2b$$
$$= 2(a + b),$$

daher ist die Sehne

$$BC = 2 \sin (a + b);$$

in der zweiten Figur ist der Bogen $BC = AB - AC = 2a - 2b = 2(a - b)$; daher die Sehne

$$BC = 2 \sin (a - b).$$

Da nun in jedem Kreisvierecke das Produkt der Diagonalen gleich ist der Summe der Produkte der gegenüberstehenden Seiten, nämlich in der ersten Figur

$$AD \,.\, BC = AB \,.\, CD + AC \,.\, BD;$$

in der zweiten Figur $AB \,.\, CD = BC \,.\, AD + AC \,.\, BD$

oder $4 \sin (a + b) = 4 \sin a \cos b + 4 \sin b \cos a$,

und $4 \sin a \cos b = 4 \sin (a + b) + 4 \sin b \cos a$,

woraus $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$,

$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

Würde man, unter der Voraussetzung, daß AD der Durchmesser ist, von D aus oberhalb eiuen Bogen $BD = 2a$ abschneiden, und von A aus ebenfalls oberhalb des Durchmessers einen Bogen $AC = 2b$,

so ist die Sehne des übrig bleibenden Bogens BC dann gleich $2 \cos (a + b)$, und wenn man die Diagonalen in diesem Kreisvierecke zieht, erhält man dann die Formel für $\cos (a + b)$.

Ist eben so AD wieder der Durchmesser, und man schneidet von D oberhalb des Durchmessers $BD = 2a$ ab, und von A unterhalb des Durchmessers einen Bogen $AC = 2b$ ab, so ist dann die Sehne $BC = 2 \cos (a - b)$, und aus Betrachtung dieses Kreisvierecks ergibt sich die Formel für $\cos (a - b)$.

Wir haben somit folgendes System von vier Formeln:

1. $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \cos \alpha . \sin \beta$
2. $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha . \cos \beta - \sin \alpha . \sin \beta$
3. $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos \beta - \cos \alpha . \sin \beta$
4. $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta$

§. 236. Setzt man in den ersten zwei Formeln nach und nach $\beta = 90°, 180°, 270°, 360°$, und bedenkt, daß

$$\sin 90° = 1, \ \sin 180° = 0, \ \sin 270° = -1, \ \sin 360° = 0$$
$$\cos 90° = 0, \ \cos 180° = -1, \cos 270° = 0, \ \cos 360° = 1,$$

so erhält man:

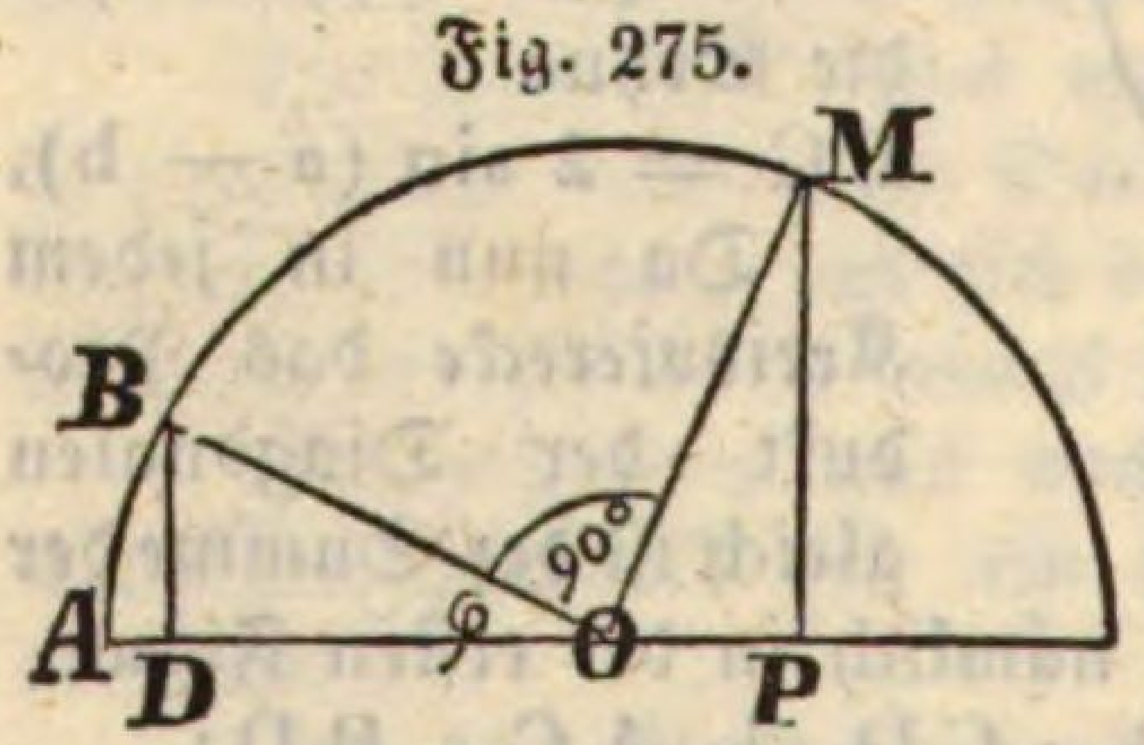
$$\sin (\alpha + 90°) = \cos \alpha; \ \cos (\alpha + 90°) = - \sin \alpha$$
$$\sin (\alpha + 180°) = - \sin \alpha; \ \cos (\alpha + 180°) = - \cos \alpha$$
$$\sin (\alpha + 270°) = - \cos \alpha; \ \cos (\alpha + 270°) = \sin \alpha$$
$$\sin (\alpha + 360°) = \sin \alpha; \ \cos (\alpha + 360°) = \cos \alpha$$

Diese Ergebnisse können fortgesetzt werden, und finden sich durch Folgendes allgemein ausgedrückt.

$$\sin [\alpha + 4n \ 90°] = \sin \alpha; \ \cos [\alpha + 4n \ 90°] = \cos \alpha$$
$$\sin [\alpha + (4n+1) \ 90°] = \cos \alpha; \ \cos [\alpha + (4n+1) \ 90°] = - \sin \alpha$$
$$\sin [\alpha + (4n+2) \ 90°] = - \sin \alpha; \ \cos [\alpha + (4n+2) \ 90°] = - \cos \alpha$$
$$\sin [\alpha + (4n+3) \ 90°] = - \cos \alpha; \ \cos [\alpha + (4n+3) \ 90°] = \sin \alpha$$

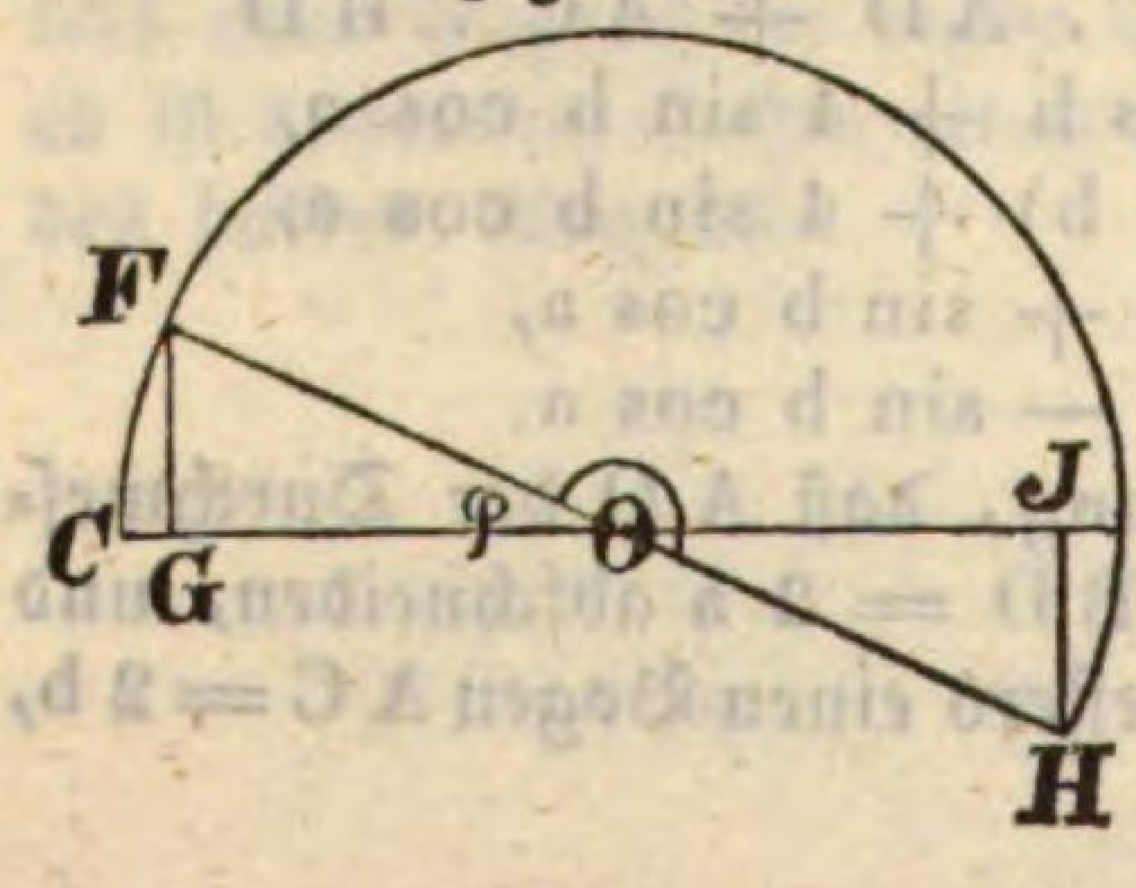
Die obigen Ergebnisse sind zu wichtig, als daß wir sie nicht auch geometrisch beleuchten sollten.

Fig. 275.



In Figur 275 ist $BD = \sin \varphi$; $DO = \cos \varphi$; $MP = \sin (90° + \varphi)$; $\cos (90° + \varphi) = - OP$; da nun $MOP + \varphi = 90°$ ist, so muß $OMP = \varphi$ seyn, da $BO = MO$, so sind $BOD \equiv MOP$, folglich $BD = OP$, $DO = MP$, also $\sin (90° + \varphi) = \cos \varphi$; $\cos (90 + \varphi) = - \sin \varphi$.

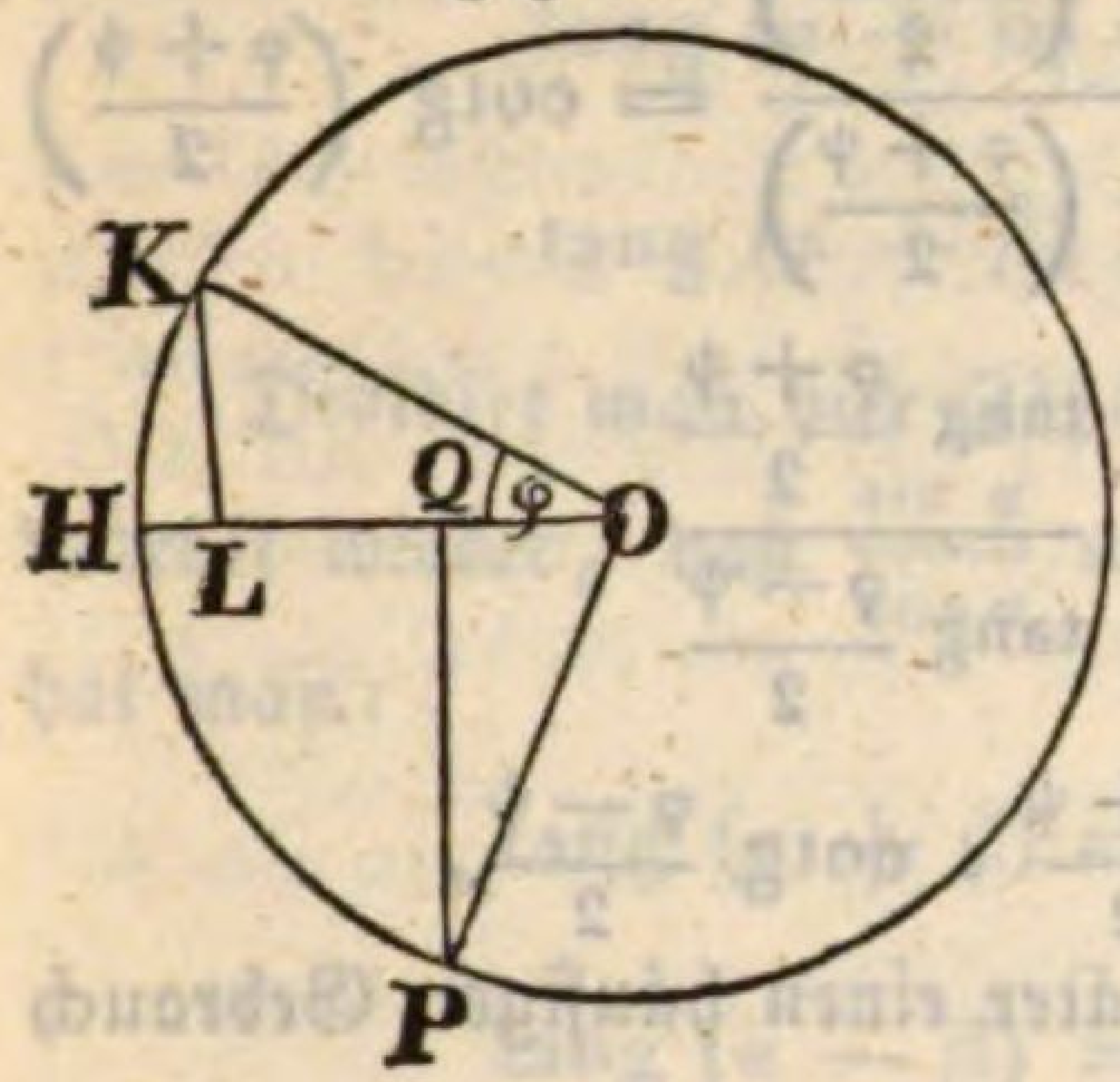
Fig. 276.



In Figur 276 ist $\sin \varphi = FG$; $\cos \varphi = GO$; $\sin (180° + \varphi) = - IH$; $\cos (180° + \varphi) = - OI$; da nun $FOG \equiv OIH$, so ist $\sin (180° + \varphi) = - \sin \varphi$; $\cos (180° + \varphi) = - \cos \varphi$.

In Figur 277 ist $\sin \varphi = KL$, $\cos \varphi = LO$; $\sin (\varphi + 270°) = \sin$ des erhabenen Winkels $HOP = - QP$, und $\cos (\varphi + 270°) = OQ$; da nun

Fig. 277.



$QOP = 90° - \varphi$, also $QPO = \varphi$ ist, also $KOL \equiv QOP$, so hat man $KL = QO$; $LO = QP$, daher $\sin(\varphi + 270°) = -\cos\varphi$;

$$\cos(\varphi + 270°) = \sin\varphi.$$

Setzt man in der Formel für $\sin(\alpha - \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$, ebenfalls nach und nach $\beta = 90°, 180°, 270°, 360°$, so hat man:

$$\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha;$$
$$\sin(\alpha - 180°) = -\sin\alpha;$$
$$\sin(\alpha - 270°) = -\cos\alpha;$$
$$\sin(\alpha - 360°) = +\sin\alpha;$$
$$\cos(\alpha - 90°) = \sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - 180°) = -\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha - 270°) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha - 360°) = \cos\alpha.$$

In der Rechnung kann man sich noch auf eine andere Art helfen, wenn man über die Bedeutung eines solchen Ausdrucks im Zweifel ist. $\text{Sin}(\alpha - 90°) = -\sin(90° - \alpha)$, weil der Sinus des entgegengesetzten Winkels das entgegengesetzte Zeichen hat; da nun $\sin(90° - \alpha)$ bekanntlich $\cos\alpha$ ist, so hat man $\sin(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$. Eben so $\cos(\alpha - 180) = \cos(180° - \alpha)$, weil zwei entgegengesetzte Winkel denselben Cosinus haben, daher $\cos(\alpha - 180°) = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

§. 237. Addirt man hier, und subtrahirt die erste und dritte, und eben so die zweite und vierte Gleichung des vorletzten Paragraphes, so hat man:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2\sin\alpha\sin\beta.$$

Setzt man hier $\alpha + \beta = \varphi$; $\alpha - \beta = \psi$, folglich

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2};\ \beta = \frac{\varphi - \psi}{2},$$ so hat man:

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}$$

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\sin\frac{\varphi - \psi}{2}\cos\frac{\varphi + \psi}{2}$$

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\frac{\varphi + \psi}{2}\cos\frac{\varphi - \psi}{2}.$$

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\varphi - \psi}{2}.$$

Dividirt man hier die erste Gleichung durch die zweite, und die dritte durch die vierte, bedenkt dabei, daß

$$\frac{\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} = \text{tang}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right) \text{ und } \frac{\cos\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)} = \text{cotg}\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)$$

ist, so hat man:

$$\frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin\varphi - \sin\psi} = \frac{\text{tang}\,\frac{\varphi+\psi}{2}}{\text{tang}\,\frac{\varphi-\psi}{2}}$$

$$\frac{\cos\varphi + \cos\psi}{\cos\varphi - \cos\psi} = -\,\text{cotg}\,\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\,\text{cotg}\,\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

Lauter Formeln, von welchen wir später einen häufigen Gebrauch machen werden.

§. 238. Setzet man in den vier Formeln des vorletzten Paragraphes $\beta = \alpha$, so hat man;

$$\begin{aligned} 1.\quad & \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2.\quad & \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ & \sin 0 = 0 \\ & \cos 0 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist in anderer Form das uns bekannte

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, da $\cos 0 = 1$ ist.

Die Formeln 1. und 2. geben uns an, wie man aus dem Sinus und Cosinus des einfachen die des doppelten Winkels finden kann.

Nimmt man die Gleichungen:

$$1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

so erhält man durch Addition und Subtraction:

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$$
$$1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha,$$

woraus $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

Setzt man $2\alpha = x$, also $\alpha = \frac{x}{2}$, so hat man:

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}.$$

Zwei Formeln, mittelst welchen man aus den Functionen des ganzen Winkels die des halben bestimmt.

§. 239. Dividirt man je zwei von den letzten vier Gleichungen im vorletzten Paragraphe durch einander, so hat man, wenn man sich erinnert, daß $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \text{tang}\,\alpha$ ist, folgende Gleichungen:

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\text{tang}\,(\alpha-\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch $\cos\alpha\,.\,\cos\beta$, und bedenkt wieder, daß $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\text{tang}\,\alpha$, und $\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\text{tang}\,\beta$ ist, so hat man:

$$\text{tang}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$$

$$\text{tang}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$$

Kehrt man beide Brüche um, so hat man, da $\frac{1}{\text{tang}\,x}=\text{cotg}\,x$ ist:

$$\text{cotg}\,(\alpha+\beta)=\frac{1-\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha+\text{tang}\,\beta}$$

$$\text{cotg}\,(\alpha-\beta)=\frac{1+\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}{\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta}.$$

Setzt man nun hier statt $\text{tang}\,\alpha$ $\frac{1}{\text{cotg}\,\alpha}$, $\text{tang}\,\beta$ $\frac{1}{\text{cotg}\,\beta}$, so hat man, wenn man Zähler und Nenner mit $\text{cotg}\,\alpha$, $\text{cotg}\,\beta$ multiplicirt,

$$\text{cotg}\,(\alpha+\beta)=\frac{\text{cotg}\,\alpha\,.\,\text{cotg}\,\beta-1}{\text{cotg}\,\alpha+\text{cotg}\,\beta}$$

$$\text{cotg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta+1}{\text{cotg}\,\beta-\text{cotg}\,\alpha}.$$

Durch Division der letzten Gleichungen des letzten Paragraphes erhält man:

$$\text{tang}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

$$\text{cotg}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

Multiplicirt man hier Zähler und Nenner ein Mal mit $1+\cos x$, das andere Mal mit $1-\cos x$, so hat man:

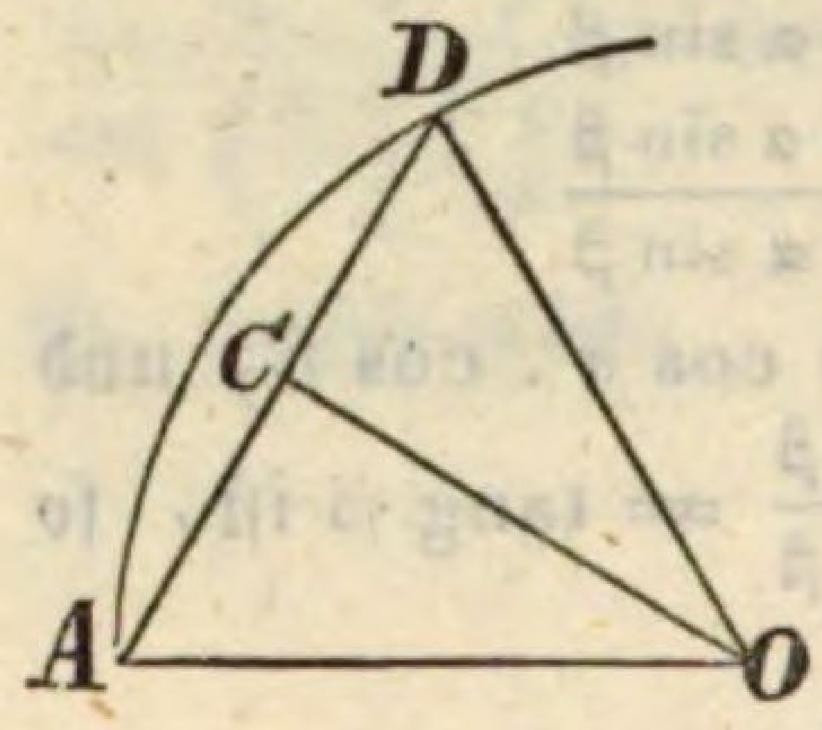
$$\text{tang}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)^2}};\ \text{tang}\,\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-\cos^2 x}};\ \text{daher}$$

$$\text{tang}\,\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x};\ \text{tang}\,\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\ \text{und eben so}$$

$$\text{cotg}\,\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x};\ \text{cotg}\,\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}.$$

§. 240. Nach unsern gemachten Vorarbeiten wollen wir es nun unternehmen, zu zeigen, wie man die Größe des Sinus von 1° berechnen könne, woraus sich alle übrigen Sinusse berechnen lassen, wie wir dieß zeigen werden.

Fig. 278.



Wir wollen zuerst zeigen, daß der Sinus eines Winkels von 30° gleich 0·5 ist.

Ich denke mir über dem Halbmesser $AO = 1$ eines Kreises ein gleichseitiges Dreieck ADO, so daß also AD auch $= 1$ ist, so ist $AOD = 60°$; fällt man nun von O das Loth OC auf AD, so ist sicher $DC = \frac{1}{2}$; da nun $DOC = 30°$; $DO = 1$ ist, so hat man $\sin AOC = AC$; $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Da nun ferners $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ist, so hat man $\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$ oder $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1·7320508}{2} = 0\ 8660254.$

Zur Bestimmung des Sinus und Cosinus von 15° wende ich die Formeln $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$; $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ an, und habe so:

$1 + \cos 30°$	$= 1·8660254$;	$1 - \cos 30°$	$= 0·1339746.$
	$0·9330127$;		$0·0669873.$
$\cos 15$	$= 0\ 9659258$;	$\sin 15°$	$= 0·2588190.$
$1 + \cos 15$	$= 1·9659258$;	$1 - \cos 15°$	$= 0·0340742.$
	$0·9829629$;		$0·0170371.$
$\cos 7° 30'$	$= 0·9914449$;	$\sin 7° 30'$	$= 0·1305262.$
$1 + \cos 7° 30'$	$= 1·9914449$;	$1 - \cos 7° 30'$	$= 0·0085551.$
	$0·9957224$;		$0·0042775.$
$\cos 3° 45'$	$= 0·9978589$;	$\sin 3° 45'$	$= 0\ 0654031.$
$1 + \cos 3° 45'$	$= 1·9978589$;	$1 - \cos 3° 45'$	$= 0·0021411.$
	$0·9989294$;		$0·0010705.$
$\cos 1° 52' 30''$	$= 0·9994645$;	$\sin 1° 52' 30''$	$= 0·0327192.$

Wir haben hier durch fortwährende Anwendung der Formeln $\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$, und $\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ nach und nach den Sinus und Cosinus der Winkel von 15°, $\frac{1}{2} . 15° = 7° 30'$; $\frac{1}{4} . 15° = 3° 45'$; $\frac{1}{8} . 15° = 1° 52' 30''$ bestimmt.

Eben so erhält man $\cos \frac{15°}{16}$ oder $\cos 56' 15'' = 0·9998662$ und $\sin \frac{15°}{16} = \sin 56' 15'' = 0·0163617.$

Zur besseren Uebersicht schreiben wir uns:

$$\sin 15° = 0·2588190$$
$$\tfrac{1}{2} \sin 15° = 0·1294095$$
$$\sin \frac{15°}{2} = 0·1305262$$
$$\tfrac{1}{2} \sin \frac{15°}{2} = 0·0652631$$
$$\sin \frac{15°}{4} = 0\ 0654031$$

$$\tfrac{1}{2}\sin\frac{15^\circ}{4} = 0{\cdot}0327015$$

$$\sin\frac{15^\circ}{8} = 0{\cdot}0327192$$

$$\tfrac{1}{2}\sin\frac{15^\circ}{8} = 0{\cdot}0163596$$

$$\sin\frac{15^\circ}{16} = 0{\cdot}0163617$$

Wie man nun sieht, sind $\tfrac{1}{2}\sin 15^\circ$ und $\sin\frac{15^\circ}{2}$ einander sehr nahe

und $\left\{\begin{matrix} \tfrac{1}{2}\sin\frac{15^\circ}{2} \text{ und } \sin\frac{15^\circ}{4} \\ \tfrac{1}{2}\sin\frac{15^\circ}{4} \text{ und } \sin\frac{15^\circ}{8} \\ \tfrac{1}{2}\sin\frac{15^\circ}{8} \text{ und } \sin\frac{15^\circ}{16} \end{matrix}\right\}$ kommen einander immer näher,

obwohl das zweite stets größer ist als das erste, d. h. je kleiner die Winkel werden, um desto mehr sind die Sinus ihrer Winkel proportionirt, obwohl diese Proportionalität nie ganz genau zutrifft; denn, da $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\,.\,\cos\frac{x}{2}$ ist, und da stets, wenn auch für sehr kleine Winkel $\cos\frac{x}{2}$ immer näher der Einheit wird, doch stets $\cos\frac{x}{2} < 1$, daher $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2}$ ist, und somit $\sin x < 2\sin\frac{x}{2}$ ist, so wird $\frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}} < 2$ oder $\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x} > \tfrac{1}{2}$ seyn, d. h. wenn auch für sehr kleine Winkel die Sinusse desselben sehr nahe dasselbe Verhältniß beobachten, wie die Winkel, so wird das Verhältniß der Sinusse doch größer seyn als das Verhältniß ihrer zugehörigen Winkel.

Nach dem Vorhergehenden wird also $\sin\frac{1^\circ}{16}$ nahe gleich seyn $\tfrac{1}{15}\sin\frac{15^\circ}{16}$, nach der so eben gemachten Bemerkung aber doch größer; da nun $\sin\frac{15^\circ}{16^\circ} = 0{\cdot}0163617$ und $\tfrac{1}{15}\sin\frac{15^\circ}{16}$, also $= 0{\cdot}00109078$, so ist $\sin\frac{1^\circ}{16}$ nahe gleich oder größer als $0{\cdot}00109078$.

Da nun aber der Sinus eines Bogens gewiß kleiner seyn muß als sein Bogen, so ist gewiß $\sin\frac{1^\circ}{16} < \frac{\text{arc } 1^\circ}{16}$, aber der Bogen von 1° für den Halbmesser 1 ist, wie wir das aus dem Frühern wissen $= 0{\cdot}01745329$, daher $\frac{\text{arc } 1^\circ}{16} = 0{\cdot}00109083$.

$$\text{Es muß daher } \sin\frac{1^\circ}{16} > 0{\cdot}00109078$$
$$\sin\frac{1^\circ}{16} < 0{\cdot}00109083.$$
$$\text{Wir haben somit } \sin\frac{1^\circ}{16} = 0{\cdot}0010908,$$
$$\text{woraus } \cos\frac{1^\circ}{16} = 0{\cdot}9999994.$$

Da nun $\cos 1^\circ = \cos\left(\frac{15^\circ}{16} + \frac{1^\circ}{16}\right) = \cos\frac{15^\circ}{16}\cos\frac{1^\circ}{16} - \sin\frac{15^\circ}{16}\sin\frac{1^\circ}{16}$

$$\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{15^\circ}{16} + \frac{1^\circ}{16}\right) = \sin\frac{15^\circ}{16}\cos\frac{1^\circ}{16} + \cos\frac{15^\circ}{16}\sin\frac{1^\circ}{16}$$

ist, so erhält man, wenn man hier die gefundenen Werthe substituirt, und die angezeigten Rechnungen vollführt, $\sin 1^\circ = 0{\cdot}0174524$; $\cos 1^\circ = 0{\cdot}9998477$.

Wenden wir die schon so oft angewandte Formel an, um aus dem Cosinus des ganzen Winkels Cosinus und Sinus des halben Winkels zu finden, so erhält man:

$$\sin 30' = 0{\cdot}0087265, \ \cos 30' = 0{\cdot}9999619.$$

Da aber, wie wir so eben sahen, der Bogen von 1° für den Halbmesser 1, d. h. $\text{arc } 1^\circ = 0{\cdot}01745329$ ist, so hat man $\text{arc } 30' = 0{\cdot}00872664$, so daß wir sehen, da $\sin 30'$ und $\text{arc } 30'$ erst in der siebenten Decimalstelle von einander abweichen, so gilt dieß noch mehr für die kleineren Winkel; es ist also in sieben Stellen ganz gut zu sagen, daß $\text{arc } 1' = \sin 1'$; $\text{arc } 1'' = \sin 1''$, obwohl nach voller Strenge die erstern größer sind als die zweiten. Für das gewöhnliche Rechenverfahren wird man für Winkel $< 30'$ den Sinus und Bogen einander gleich setzen, man hat so $\sin 1' = 0{\cdot}0002909$; $\sin 1'' = 0{\cdot}0000048$. Sobald in sieben Stellen gerechnet wird, ist $\cos 1' = 1$; $\cos 1'' = 1$.

Das Vorhergehende ist die Grundlage zur Berechnung der trigonometrischen Functionen von was immer für Winkeln.

§. 241. Im Früheren hatten wir die Formeln:

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\text{woraus } \sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha - \beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta).$$

Setzt man hier $\alpha = (n + 1)\beta$, so hat man:

$$\sin(n + 2)\beta = 2\sin(n + 1)\beta \,.\, \cos\beta - \sin n\beta$$
$$\cos(n + 2)\beta = 2\cos(n + 1)\beta \,.\, \cos\beta - \cos n\beta.$$

Setzt man hier $\beta = 1^\circ$, und nach und nach statt n die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 u. s. w., so hat man:

$$\sin 2^\circ = 2\sin 1^\circ \,.\, \cos 1^\circ$$
$$\sin 3^\circ = 2\sin 2^\circ \,.\, \cos 1^\circ - \sin 1^\circ$$
$$\sin 4^\circ = 2\sin 3^\circ \,.\, \cos 1^\circ - \sin 2^\circ$$
$$\sin 5^\circ = 2\sin 4^\circ \,.\, \cos 1^\circ - \sin 3^\circ$$

u. s. w., und eben so

$$\cos 2^{\circ} = 2 \cos 1^{\circ} \, . \, \cos 1^{\circ} - 1$$
$$\cos 3^{\circ} = 2 \cos 2^{\circ} \, . \, \cos 1^{\circ} - \cos 1^{\circ}$$
$$\cos 4^{\circ} = 2 \cos 3^{\circ} \, . \, \cos 1^{\circ} - \cos 2^{\circ}$$
$$\cos 5^{\circ} = 2 \cos 4^{\circ} \, . \, \cos 1^{\circ} - \cos 3^{\circ} \text{ u. s. w.}$$

Diese Formeln dienen, wie man sieht, dazu, aus $\sin 1^{\circ}$ und $\cos 1^{\circ}$ die Sinusse und Cosinusse von 2°, 3°, 4°, 5° u. s. w. zu berechnen, mittelst welchen dann durch Anwendung der Formeln von $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ man den Sinus und Cosinus von was immer für einem Winkel angeben kann. Hat man Sinus und Cosinus eines Winkels, so lassen sich durch die entwickelten Formeln dann leicht Tangente, Cotangente u. s. w. berechnen. Wir wollen hier die trigonometrischen Functionen der Winkel von allen Minuten und Graden geben.

M.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.
1	0·0003	Sobald man bei vier Decimalstellen stehen bleibt, so ist für alle Winkel unter 35′ der Cosinus gleich 1.	Sobald man nur in vier Decimalstellen rechnet, so ist die Tangente aller Winkel von 1′ bis 59′ gerade so groß, wie der Sinus des zugehörigen Winkels.	3437·746
2	0·0006			1718·873
3	0·0009			1145·915
4	0·0012			859·436
5	0·0015			687·549
6	0·0017			572·957
7	0·0020			491·106
8	0·0023			429·718
9	0·0026			381·971
10	0·0029			343·773
11	0·0032			312·521
12	0·0035			286·478
13	0·0038			264·441
14	0·0041			245·552
15	0·0044			229·182
16	0·0047			214·858
17	0·0049			202·219
18	0·0052			190·984
19	0·0055			180·932
20	0·0058			171·885
21	0·0061			163·700
22	0·0064			156·259
23	0·0067			149·465
24	0·0070			143·237
25	0·0073			137·507
26	0·0076			132·218
27	0·0079			127·321
28	0·0081			122·773
29	0·0084			118·540

M	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.
30	0·0087	Für alle Winkel von 35′ bis 59′ ist, sobald man in vier Decimalstellen rechnet, der Cosinus = 0·9999.	Sobald man nur in vier Decimalstellen rechnet, so ist die Tangente aller Winkel von 1′ bis 59′ gerade so groß, wie der Sinus des zugehörigen Winkels.	114·588
31	0 0090			110·892
32	0·0093			107·426
33	0 0096			104·170
34	0·0099			101·107
35	0·0102	0·9999		98·218
36	0·0105			95·489
37	0·0108			92 908
38	0·0111			90·463
39	0·0113			88·144
40	0·0116			85·940
41	0·0119			83·844
42	0·0122			81·847
43	0 0125			79·943
44	0·0128			78·126
45	0·0131			76·390
46	0·0134			74·729
47	0·0137			73·139
48	0·0140			71·615
49	0·0143			70·153
50	0·0145			68·750
51	0·0148			67 402
52	0·0151			66·105
53	0 0154			64·858
54	0·0157			63·657
55	0·0160			62·499
56	0 0163			61 383
57	0·0166			60·306
58	0·0169			59·266
59	0·0172			58·261

Grade.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	Grade.
1	0·0175	0·9998	0·0175	57·29	89
2	0·0349	0·9994	0·0349	28·64	88
3	0·0523	0·9986	0 0524	19·08	87
4	0·0698	0·9976	0·0699	14·30	86
5	0·0872	0 9962	0·0875	11·43	85
	Cosinus.	Sinus.	Cotangente.	Tangente.	

Grade.	Sinus.	Cosinus.	Tangente.	Cotangente.	Grade.
6	0·1045	0·9945	0·1051	9·514	84
7	0 1219	0 9925	0·1228	8·144	83
8	0·1392	0·9903	0·1405	7·115	82
9	0·1564	0·9877	0·1584	6·314	81
10	0·1736	0·9848	0·1763	5 671	80
11	0·1908	0·9816	0·1944	5·145	79
12	0·2079	0 9781	0·2126	4·705	78
13	0·2250	0·9744	0 2309	4·331	77
14	0 2419	0 9703	0·2493	4·011	76
15	0·2588	0·9659	0·2679	3 732	75
16	0·2756	0 9613	0·2867	3·487	74
17	0 2924	0 9563	0·3057	3·271	73
18	0·3090	0·9511	0·3249	3 078	72
19	0·3256	0·9455	0 3443	2·904	71
20	0·3420	0 9397	0 3640	2·747	70
21	0·3584	0·9336	0 3839	2 605	69
22	0·3746	0·9272	0·4040	2·475	68
23	0 3907	0·9205	0·4245	2·356	67
24	0 4067	0·9135	0 4452	2·246	66
25	0·4226	0 9063	0·4663	2·145	65
26	0·4384	0·8988	0·4877	2·050	64
27	0 4540	0·8910	0·5095	1·963	63
28	0 4695	0·8829	0·5317	1·881	62
29	0·4848	0·8746	0·5543	1 804	61
30	0·5000	0 8660	0·5774	1 732	60
31	0 5150	0 8572	0 6009	1·664	59
32	0·5299	0 8480	0 6249	1·600	58
33	0·5446	0·8387	0 6494	1·540	57
34	0·5591	0·8290	0 6745	1·483	56
35	0·5736	0 8192	0 7002	1·428	55
36	0·5878	0·8090	0·7265	1·376	54
37	0·6018	0·7986	0·7536	1·327	53
38	0·6157	0·7880	0·7813	1·280	52
39	0·6293	0·7771	0·8098	1·235	51
40	0·6428	0·7660	0 8391	1·192	50
41	0 6561	0 7547	0·8693	1·150	49
42	0·6691	0·7431	0·9004	1·111	48
43	0 6820	0 7314	0 9325	1·072	47
44	0·6947	0 7193	0·9657	1·036	46
45	0·7071	0·7071	1 0000	1·000	45
	Cosinus.	Sinus.	Cotangente.	Tangente.	

Da jede Function eine doppelte Rolle spielt, so haben wir die Tafel unmittelbar nur bis 45° gegeben, indem wir aber unten die Aufschriften gewechselt, und rechts von unten nach oben 45° 46° und bis 89° angeschrieben haben, gibt die Tafel alle Functionen der Winkel von 1° bis 90°; denn, da jede Function die Cofunktion des complementären Winkels ist, so hat man sin $(45 + \varphi) = \cos(45° - \varphi)$, tang $(45° + \varphi) = \text{cotg}(45 - \varphi)$.

Es ist daher sin 46 = cos 44, sin 47° = cos 43°; sin 48° = cos 42° u. s. w. und eben so für die Tangente. Ist also ein Winkel über 45°, so nimmt man die Aufschrift von unten, und richtet sich rücksichtlich der betreffenden Zeile nach der von unten nach oben steigenden Anzahl der Grade.

Man will z. B. tang 58° haben, so nehme ich die Säule, wo unten Tangente stehet, und fahre hinauf so lange, bis ich rechts 58° finde, und habe so tang 58° = 1·600; eben so finde ich sin 58° = 0·8480 cos 72° = 0·3090, cotg 80° = 0·1763 u. s. w.

Betrachten wir unsere voranstehende Tabelle aufmerksam, so bemerken wir zuerst, daß, so lange der Winkel kleiner als 45° ist, der Sinus kleiner als der Cosinus ist, ganz natürlich, denn der Sinus und Cosinus sind die Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypothenuse gleich 1 ist, der Sinus ist die dem betreffenden Winkel gegenüberstehende Kathete; ist also dieser Winkel kleiner als 45°, so muß natürlich der andere spitzige Winkel > 45° seyn, daher die ihm gegenüberstehende Kathete größer als die andere seyn, d. h. der Cosinus muß größer seyn als der Sinus. Für 45° werden beide einander gleich, ist der Winkel > 45°, so muß natürlich der Sinus stets größer seyn als der Cosinus.

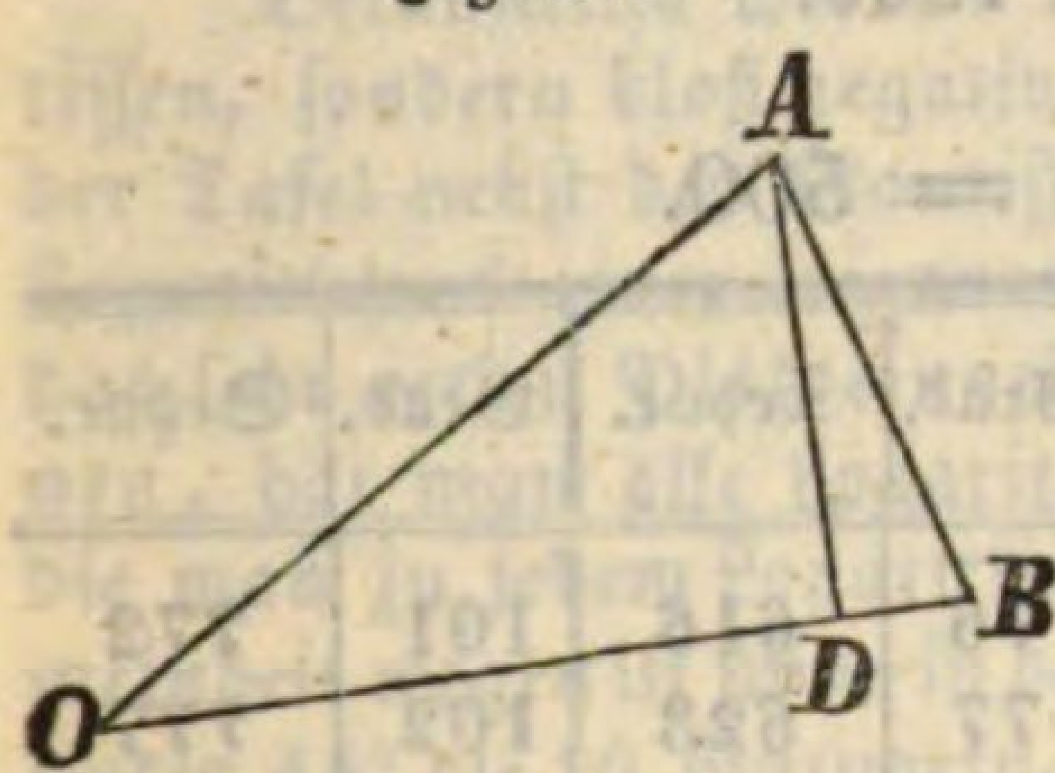
Betrachten wir den Zuwachs der Sinus von Grad zu Grad, so ist dieser bei 1°, 0·0174 bei 10°, 0·0172 bei 20°, 0·0164, bei 30°, 0·0150, bei 40°, 0·0133, bei 50°, 0·0111, bei 60°, 0·0086, bei 70°, 0·0058, bei 80°, 0·0029, dasselbe in umgekehrter Ordnung findet beim Cosinus Statt. Wir sehen also, daß der Sinus anfangs sehr rasch wächst, daß aber sein Wachsthum stets kleiner wird, daß der Sinus in der Nähe des rechten Winkels sehr wenig zunimmt, beinahe unempfindlich wird; das gerade Gegentheil findet beim Cosinus Statt, der bei sehr kleinen Winkeln so nahe an 1 bleibt, daß er praktisch als 1 anzusehen ist; erst wenn der Winkel mehrere Grade hat, entfernt sich der Cosinus merklich von 1, von da an wird seine Abnahme immer mehr merklich; wie der Winkel sich dem rechten Winkel nähert, so ist die Abnahme des Cosinus sehr rasch. Dieses Verhalten des Sinus und Cosinus hat seine praktische Bedeutung.

Ist ein Winkel durch die Größe seines Sinus gegeben, so wird, falls dieser Winkel nicht groß ist, die Größe dieses Winkels sich scharf bestimmen lassen, und zwar desto schärfer, je kleiner der Winkel ist; ist aber der Winkel nahe an einem rechten Winkel, so wird ein kleiner Fehler in der Sinusbestimmung, einen viel größeren in der Winkelbestimmung nach sich ziehen. Das Umgekehrte findet beim Cosinus Statt.

Was die Tangente betrifft, so sehen wir, daß sie bei sehr kleinen Winkeln mit dem Sinus fast ganz übereinstimmt, daß auch sie sehr rasch wächst, aber stärker als der Sinus, weil ihr Wachsthum stets größer und größer wird; in der Nähe des rechten Winkels wächst sie so über alle Grenzen, daß die Anwendung der Tangente da wenig sicher wird. Das Umgekehrte findet bei der Cotangente Statt.

§. 242. Wir wollen nun zeigen, wie man mittelst der vorhergehenden Tabelle Winkel messen, und Winkel von gegebener Größe verzeichnen kann.

Fig. 279.

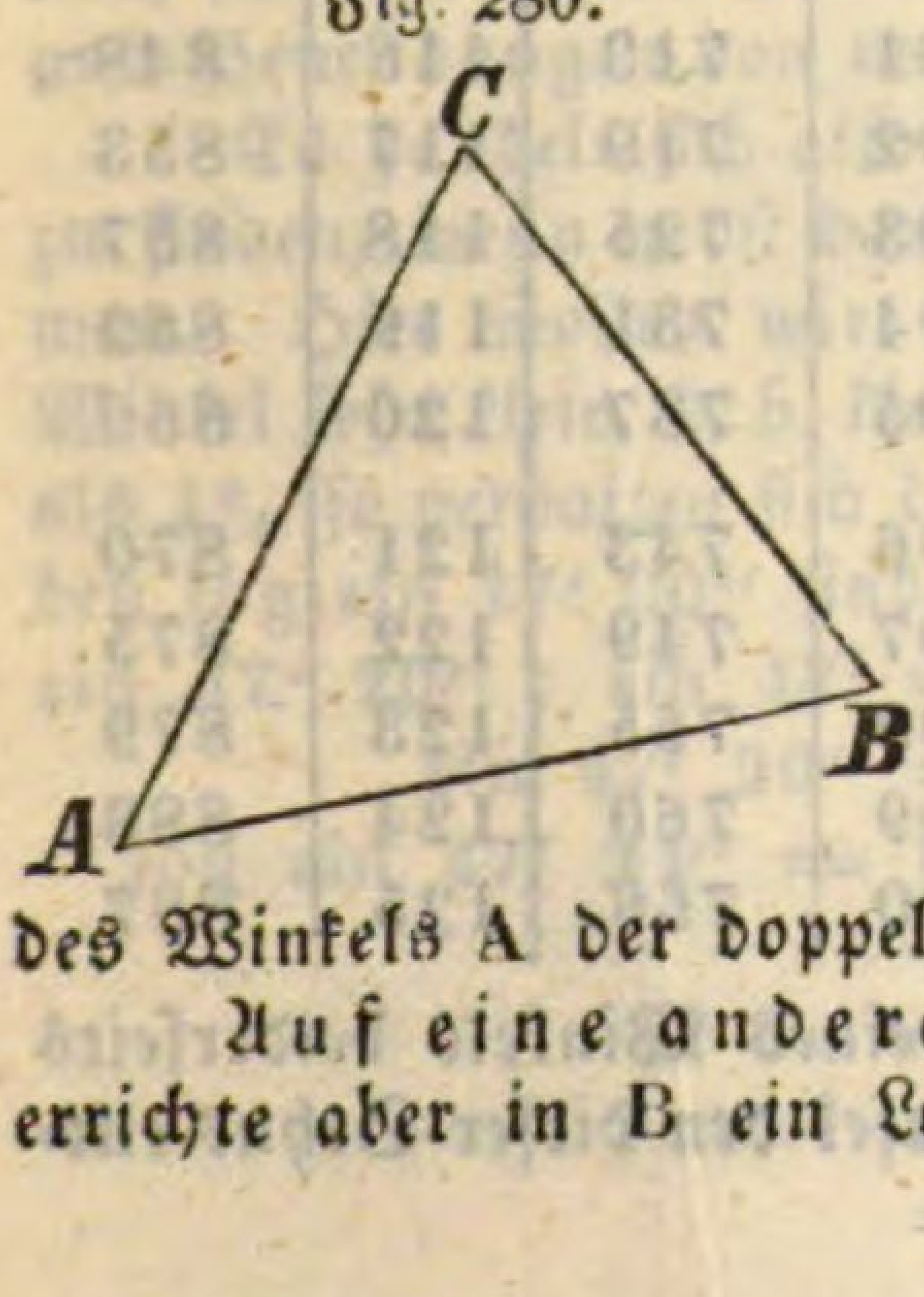


Es sey der Winkel A O B; ich schneide von beiden Schenkeln $AO = BO = 100$ mittelst eines 1000theiligen Maßstabes ab; verbinde A und B, und messe AB mittelst desselben Maßstabes, und ich finde AB z. B. $= 55{\cdot}1$, daher ist $\frac{AB}{2} = 27{\cdot}55$. Nimmt man AO als die Einheit an, so ist $\frac{AB}{2} = \sin\frac{AOB}{2}$, daher $\sin\frac{AOB}{2} = \frac{27{\cdot}55}{100} = 0{\cdot}2755 = \sin 16^\circ$ nach unserer Tafel, daher $\frac{AOB}{2} = 16^\circ$; also $AOB = 32^\circ$.

Um also einen Winkel zu messen, muß man von beiden Schenkeln desselben gleiche Stücke abschneiden und die Entfernung der Endpunkte messen; die halbe Entfernung durch die Länge eines Schenkels dividirt ist der Sinus des halben Winkels.

Oder auf eine andere Art. Man fälle von A ein Loth AD auf OB, und messe OD und findet 53, für $AO = 1$ ist $AD = \sin AOB$, daher $\sin AOB = \frac{53}{100} = 0{\cdot}53$; in unserer Tafel finden wir $\sin 32^\circ = 0{\cdot}5299$, daher ist $0{\cdot}53 = \sin 32^\circ$, daher wieder $AOB = 32^\circ$.

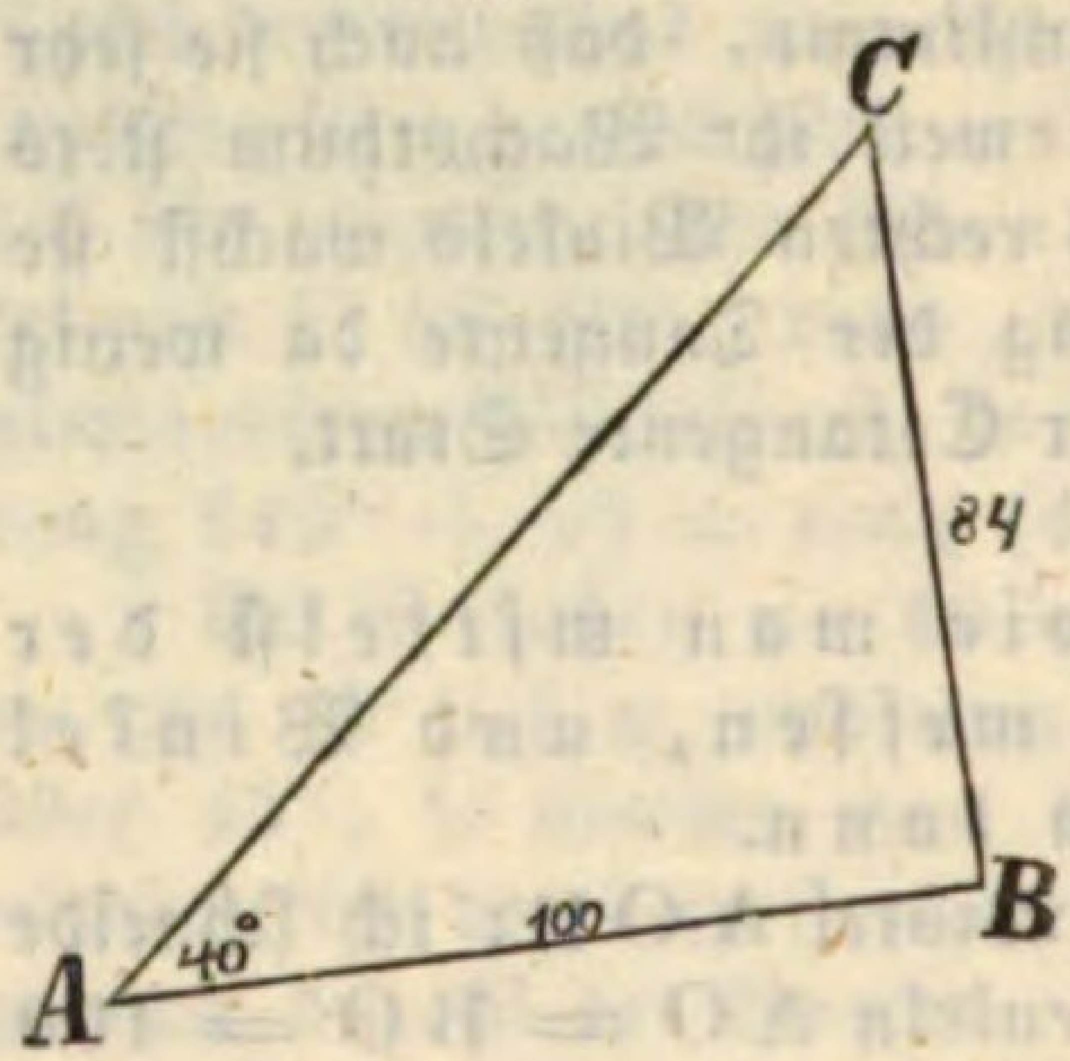
Fig. 280.



Um aber einen Winkel bestimmter Größe, z. B. von 40° zu verzeichnen, verfahre ich folgender Maßen. Von der Geraden, an welcher dieser Winkel verzeichnet werden soll, schneide ich ein bestimmtes Stück ab, z. B. 100, also $AB = 100°$; von B aus beschreibe ich einen Bogen mit dem Halbmesser $= 2 . 100 . \sin 20^\circ = 200 . 0{\cdot}3420 = 86{\cdot}4$, und aus A mit dem Halbmesser $= 100$; schneide ich obigen Bogen in C, so ist dann $CAB = 40^\circ$, denn es ist CB als die Sehne des Winkels A der doppelte Sinus des halben Winkels.

Auf eine andere Art. Ich schneide wieder $AB = 100$ ab; errichte aber in B ein Loth $BC = 100 \tan 40^\circ = 100 . 0{\cdot}8391$

Fig. 281.



$= 83 \cdot 91$; verbinde C mit A, so ist $CAB = 40°$; denn ist $AB = 1$, so ist $BC = \tang CAB$.

Wie man sieht, so ist sowohl zum Messen der Winkel, als zum Verzeichnen derselben, eine Tafel der Sehnen aller Winkel aller Grade noch bequemer; man braucht dann nicht die Sehne zu halbiren, und den dadurch gefundenen Winkel zu verdoppeln. Deßhalb lassen wir hier eine Sehnentafel folgen für den Halbmesser = 500, oder Durchmesser = 1000.

Sehnentafel für r = 500.

Grad	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.	Grad.	Sehne.
1	9	26	225	51	431	76	616	101	772
2	17	27	233	52	438	77	623	102	777
3	26	28	242	53	446	78	629	103	783
4	35	29	250	54	454	79	636	104	788
5	44	30	259	55	462	80	643	105	793
6	52	31	267	56	469	81	649	106	799
7	61	32	276	57	477	82	656	107	804
8	70	33	284	58	485	83	663	108	809
9	78	34	292	59	492	84	669	109	814
10	87	35	301	60	500	85	676	110	819
11	96	36	309	61	508	86	682	111	824
12	105	37	317	62	515	87	688	112	829
13	113	38	326	63	522	88	695	113	834
14	122	39	334	64	529	89	701	114	839
15	131	40	342	65	537	90	707	115	843
16	139	41	350	66	545	91	713	116	848
17	148	42	358	67	552	92	719	117	853
18	156	43	367	68	559	93	725	118	857
19	165	44	375	69	566	94	731	119	862
20	174	45	383	70	574	95	737	120	866
21	182	46	391	71	581	96	743	121	870
22	191	47	399	72	588	97	749	122	875
23	199	48	407	73	595	98	755	123	879
24	208	49	415	74	602	99	760	124	883
25	216	50	423	75	609	100	766	125	887

Schneide ich nun von den Schenkeln eines Winkels beiderseits 500 ab, messe die Sehne, so gibt mir diese Tafel den dieser Sehne ent-

sprechenden Winkel. Statt 500 kann ich auch 50, 5 abschneiden, wo ich dann in der Tafel die Werthe mir durch 10 oder 100 getheilt denken muß.

§. 243. Bald nach Einführung der trigonometrischen Functionen fand man es vortheilhafter, statt der Functionen selbst lieber die Logarithmen derselben anzuwenden, und wir lassen auch diesem Buche eine Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Functionen folgen, und werden hier zunächst ihren Gebrauch und ihre Anwendung lehren.

Da sowohl die Sinusse und Cosinusse, als auch die Tangente, so lange der Winkel kleiner als 45° ist, kleiner sind als 1, so werden ihre Logarithmen negativ seyn.

Bekanntlich werden aber in der Rechnung keine negativen Mantissen, sondern bloß negative Charakteristiken angewendet; sollte nun in der Tafel nebst der Mantisse auch die negative Charakteristik bei jedem Logarithmus einer trigonometrischen Function angesetzt seyn, so würde das sehr vielen Platz einnehmen. Um nun diesem Uebelstand zu begegnen, hat man alle Logarithmen auf die Charakteristik — 10 gebracht, die man zu jedem Logarithmus der Tafel hinzufügen muß; dieser Allgemeinheit wegen ist schon in der Tafel auch dem Logarithmus der Cotangente unter 45° die 10 hinzugefügt, damit diese dann keine Ausnahme machen.

So findet man z. B. in der Tafel für den log. sin 8° 8′ die Zahl 9·150686; es ist daher

$$\log \sin 8^\circ 8' = 9{\cdot}150686 - 10.$$

Eben so findet man für die cotg 8° 8′ die Zahl 10·844923, daher ist

$$\log \operatorname{cotg} 8^\circ 8' = 10{\cdot}844923 - 10$$
$$= 0{\cdot}844923.$$

§. 244. **Wie man zu jedem Winkel den Logarithmus der entsprechenden trigonometrischen Funktion findet.**

Ist der Winkel in Grade und Minuten gegeben, so gibt ihn die Tafel unmittelbar an; ist der Winkel kleiner als 45°, so suche ich die Grade und Benennungen oben, und nehme die Minuten links von oben nach unten; ist aber der Winkel größer als 45°, so nehme ich die Grade und Benennungen von unten, die Minuten rechts von unten nach oben.

Es handelt sich also zunächst darum den log sin, log cos u. s. w. zu finden, wenn nebst den Graden und Minuten noch Sekunden vorkommen. Hier wollen wir zwei Fälle unterscheiden, entweder sind die Winkel sehr klein d. h. kleiner als 1° oder nicht Ist der Winkel kleiner als 1°, so verhalten sich die Sinusse wie ihre Winkel; soll man so z. B. den log sin 47′ 20″ finden, so kann man sagen:

$$\sin 47' 20'' : \sin 47' = 47' 20'' : 47 = 2840 : 2820; \text{ daher}$$

$$\sin 47' 20'' = \sin 47 \,.\, \tfrac{2840}{2820}, \text{ und folglich}$$

$$\log \sin 47' 20'' = \log \sin 47' + \log 2840 - \log 2820$$
$$= \log \sin 47' + 3{\cdot}453318 - 3{\cdot}450249$$
$$= \log \sin 47' + 0{\cdot}003069$$
$$= 8{\cdot}135810 - 10 + 0{\cdot}003069$$
$$= 8{\cdot}138879.$$

B. 2. log tang 23′ 23″ 23′ 23″ = 1403
log tang 23′ = 7·825460 23′ = 1380
7179 log 1403 = 3·147058
log tang 23′ 23″ 7·832639 log 1380 = 3·139879
0 007179.

In allen andern Fällen wird man zwischen die Zahlen der Tafeln interpoliren, nur darf man nie vergessen, daß Cosinus und Cotangente bei Vergrößerung des Winkels abnehmen, Sinus und Tangente hingegen mit dem Winkel wachsen.

Man wird zwei unmittelbar nur um eine Minute sich unterscheidende Functionen derselben von einander abziehen, dadurch bekommt man den Unterschied für eine Minute; dividirt man diesen durch 60, so hat man den Unterschied für eine Sekunde, diesen einer Sekunde zukommenden Theil multiplicirt man mit der Anzahl der Sekunden, das Produkt wird man nun zu dem gehörigen Logarithmus, bei Sinus und Tangente addiren, bei Cosinus und Cotangente abziehen. Das Resultat ist dann der log der trigonometrischen Function des gegebenen Winkels.

Beispiel 1. log sin 7° 7′ 7″?
log sin 7° 7′ = 9·093037 — 10;
118
log sin 7° 7′ 7″ = 9·093155 — 10
log sin 7° 8′ = 9·094047 — 10
log sin 7° 7′ = 9·093037 — 10
0·001010 Unterschied für 1′
0·0000168 Unterschied für 1″
0 000118 Unterschied für 7″.

Beispiel 2. log cos 17° 17′ 17″?
log cos 17° 17′ = 9·979934—10;
— 11
log cos 17° 17′ 17″ = 9·979923—10
log cos 17° 18′ = 9·979895—10
log cos 17° 17′ = 9·979934—10
— 0·000039 Unterschied für 1′
— 0·00000065 Unterschied für 1″
— 0·000011 Unterschied für 17″.

Beispiel 3. log tang 45° 45′ 45″?
log tang 45° 45′ = 0·011371
189
log tang 45° 45′ 45″ = 0·011560
log tang 45° 46′ = 0·011624
log tang 45° 45′ = 0·011371
0 000253 Unterschied für 1′
0·00000421 Unterschied für 1″
0 000189 Unterschied für 45″.

Um sich das viele Nullenschreiben zu ersparen, und doch sich nicht zu irren, sieht man die letzte Stelle des Logarithmus wie Ganze an, und bezeichnet die folgenden als Decimalstellen. Diesemnach sieht das letzte Beispiel folgender Maßen aus:

$$\log \text{tang } 45^\circ\ 45' = 0{\cdot}011371$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad 189}$$
$$\log \text{tang } 45^\circ\ 45'\ 45'' = 0{\cdot}011560$$

0·011624	4·21
0·011371	45
253 Unterschied für 1′	21·05
4·21 Unterschied für 1″	168·4
189 Unterschied für 45″	189·45.

Beispiel 4. log cotg 35° 35′ 35″?

$$\log \text{cotg } 35^\circ\ 35' = 0{\cdot}145397$$
$$\underline{\qquad\qquad\qquad -\ 156}$$
$$\log \text{cotg } 35^\circ\ 35'\ 35'' = 0{\cdot}145241$$

0·145130	4·45
0·145397	35
— 267 Unterschied für 1′	22·25
— 4·45 Unterschied für 1″	133·5
— 156 Unterschied für 35″	155·75

§ 245. Wie man zu dem Logarithmus einer trigonometrischen Function den entsprechenden Winkel findet.

Ist der log sin irgend eines unbekannten Winkels gegeben, so suche ich unter der Rubrik sowohl der log sin, als der log cos, bis ich einen nächst kleineren Logarithmus finde; finde ich diesen nächst kleineren Logarithmus unter der Rubrik, wo oben log cos steht, so habe ich nicht die oberen Grade und die Minuten links, sondern die untern Grade und die Minuten rechts zu nehmen.

Es wäre z. B. log sin $x^\circ = 9{\cdot}914860$; suche ich diese Zahl in der Tafel, so finde ich sie in einer Spalte, wo oben log cos steht, und zwar steht oben 34°, und links daneben heißt es 43′, es ist also 9·914860 = log cos 34° 43′; da mir aber 9·914860 nicht als log cos, sondern als log sin gegeben ist, so schaue ich abwärts und finde 55°, und rechts von unten nach oben in derselben wagrechten Zeile 17′; daher hat man:

$$9{\cdot}914860 = \log \sin 55^\circ\ 17'.$$

Ist nun $9{\cdot}914860 = \log \sin x$, so hat man demnach

$$x = 55^\circ\ 17'.$$

Ganz eben so verfährt man mit der Tangente. Man nimmt nämlich die Grade und Minuten, die zu der Benennung gehören, in welcher man sucht; steht die zugehörige Benennung nicht oben, sondern unten, so nimmt man die Grade von unten, die Minuten statt links, dann rechts.

Beispiel 1. Es sey log sin $\alpha = 8{\cdot}888888 - 10$ gegeben; man sucht den nächst kleineren log sin, und findet als diesen $8{\cdot}888174 - 10 = \log \sin 4^\circ\ 26'$; man zieht diesen in der Tafel gefundenen log sin von dem gegebenen ab

$$\begin{array}{r} 8{\cdot}888888 \\ 8{\cdot}888174 \\ \hline 714 \end{array}$$

Man hat nun zu untersuchen, zu wie viel Sekunden dieser Unterschied gehört; zu diesem Behufe muß man wissen, wie groß hier der Unterschied für 1″ ist; um diesen zu finden, ziehe ich log sin 4° 26′ von log sin 4° 27′ ab:

$$\begin{array}{r} 8{\cdot}889801 - 10 = \log \sin 4^\circ\ 27' \\ 8{\cdot}888174 - 10 = \log \sin 4^\circ\ 26' \\ \hline 1627 \text{ Unterschied für } 1' \\ 27{\cdot}1 \text{ Unterschied für } 1''. \end{array}$$

Um also zu sehen, wie viele Sekunden erforderlich sind, damit der Unterschied 714 herauskomme, habe ich:

$$714 : 27{\cdot}1 = 26''.$$

Da dem größeren log sin auch ein größerer Winkel zukommen muß, so habe ich die 26″ zu den gefundenen 4° 26′ hinzuzufügen, und habe demnach

$$8{\cdot}888888 - 10 = \log \sin 4^\circ\ 26'\ 26''.$$

Ist daher $\log \sin \alpha = 8{\cdot}888888 - 10$, so muß

$$\alpha = 4^\circ\ 26'\ 26'' \text{ seyn.}$$

Beispiel 2. $\log \cos \beta = 6{\cdot}876543 - 10$; ich suche zunächst den nächst kleineren log cos in der Tafel, und finde diesen bei 41° 12′.

Es ist $\log \cos 41^\circ\ 12' = 9{\cdot}876457$

$$\begin{array}{r} 9\ 876543 \\ 9{\cdot}876457 \\ \hline 86 \text{ Unterschied} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9{\cdot}876347 - 10 = \log \cos 41^\circ\ 13' \\ 9{\cdot}876457 - 10 = \log \cos 41^\circ\ 12' \\ \hline 110 \text{ Unterschied für } 1' \\ - \quad 1{\cdot}83 \text{ Unterschied für } 1'' \\ 86 : 1{\cdot}83 = 47'' \end{array}$$

Allein, wenn der Winkel größer wird, wird sein Cosinus kleiner (d. h. so lange der Winkel $< 90^\circ$).

Es wird also dem $\log \cos \beta = 9{\cdot}876543 - 10$ ein kleinerer Winkel, als dem $\log \cos 41^\circ\ 12' = 9{\cdot}876457$, und zwar dem Unterschiede 86 entsprechen, wie wir gefunden 47″: daher

$$9{\cdot}876543 - 10 = \log \cos (41^\circ\ 12' - 47'')$$
$$= \log \cos 41^\circ\ 11'\ 13''.$$

Es muß daher $\beta = 41^\circ\ 11'\ 13''$ seyn.

Beispiel 3. $\log \tan \gamma = 9{\cdot}\ 123456 - 10$. Als nächst kleineren log tang finde ich in der Tafel

$$9{\cdot}123317 - 10 = \log \tan 7^\circ\ 34''$$

9·123456
9·123317
139 Unterschied.
9·124284—10 = log tang 7° 35′
9·123317—10 = log tang 7° 34′
967 Unterschied für 1′
16 1 Unterschied für 1″
139 : 16·1 = 8·6″; daher
9 123456—10 = log tang 7° 34′ 9″.

Beispiel 4. log cotg δ = 9·876543—10?

Hier muß ich entschieden von rückwärts nach vorwärts, von unten nach oben gehen. Ich finde als das nächst kleinere
9·876326—10 = log cotg 53° 3′
9·876543
9·876326
217 Unterschied.
9 876063—10 = log cotg 53° 4′
9·876326—10 = log cotg 53° 3′
— 263 Unterschied für 1′
— 4 4 Unterschied für 1″
217 : 4·4 = 49″.
Also 9·876543—10 = log cotg (53° 3′ — 49″)
= log cotg 53° 2′ 11″; daher
δ = 53° 2′ 11″.

§. 246. Hier wollen wir die Darstellung der Methode anschließen, wie man mittelst logarithmisch trigonometrischer Tafeln quadratische Gleichungen auflösen kann.

Es sey im Allgemeinen die Gleichung $x^2 + Ax + B = 0$, so hat

$$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4} - B\right)}, \text{ oder}$$

$$x = -\frac{A}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4B}{A^2}}\right).$$

Ist nun das B in der Gleichung wirklich positiv, also — B negativ, so wird diese Gleichung nur in dem Falle reelle Wurzeln haben, wenn $\frac{4B}{A^2} < 1$ ist; ist nun diese Größe kleiner als 1, so wird es gewiß einen Winkel geben, dessen Sinus gleich $\sqrt{\frac{4B}{A^2}}$ ist, nennen wir diesen Winkel θ, so also, daß $\sin\theta = \frac{2\sqrt{B}}{A}$, daher $\sin^2\theta = \frac{4B}{A^2}$ ist.

Ist θ so bestimmt, daß es dieser letzten Gleichung Genüge leistet, so hat man dann

$$x = -\frac{A}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \sin^2\theta}\right), \text{ oder } x = -\frac{A}{2}\left(1 \mp \cos\theta\right),$$

d. h. x gleich entweder $- A \cdot \frac{1 + \cos\theta}{2}$, oder $- A \cdot \frac{1 - \cos\theta}{2}$,

d. h. $x = - A \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}$ oder $x = - A \cdot \sin^2\frac{\theta}{2}$.

Die obige Gleichung aber für $\sin\theta$ gibt uns $A = \frac{2\sqrt{B}}{\sin\theta}$ oder statt dem ganzen die halben Winkel eingeführt,

$$A = \frac{2\sqrt{B}}{2\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{B}}{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}}.$$

Dieß in den Werthen für x substituirt, hat man:

$$x = -\frac{\sqrt{B} \cdot \cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}} \text{ oder } x = -\frac{\sqrt{B} \cdot \sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}},$$

d. h. $x = -\sqrt{B} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ oder $x = -\sqrt{B} \cdot \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$,

durch welche zwei Ausdrücke die Werthe für x bestimmt sind, da der Winkel θ durch obigen Werth festgestellt ist

Ist aber in der Gleichung das B negativ, so daß man

$x^2 + Ax - B = 0$, so hat man:

$$x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} + B}, \text{ oder}$$

$$x = -\frac{A}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4B}{A^2}}\right).$$

Nun ist der Ausdruck $\frac{2\sqrt{B}}{A}$ an keine Grenze gebunden, und er kann nach den Werthen von A und B jeden möglichen Werth haben, nun darf ich ihn keinem Sinus gleich setzen, der nie größer als 1 ist; dagegen können wir $\frac{2\sqrt{B}}{A}$ einer Tangente gleich setzen, die von Null bis zum Unendlichen jedes Werthes fähig ist, thun wir dieß

$\frac{2\sqrt{B}}{A} = \operatorname{tang}\theta$, so hat man:

$$x = -\frac{A}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta}\right) = -\frac{A}{2}\left(1 \pm \sec\theta\right)$$

$$= -\frac{A}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\cos\theta}\right)$$

$$x = -\frac{A}{2} \cdot \frac{\cos\theta \pm 1}{\cos\theta};$$

daher $x = \frac{A}{2} \cdot \frac{1 - \cos\theta}{\cos\theta}$, oder $x = -\frac{A}{2} \cdot \frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta}$

$$x = A \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos\theta}, \text{ oder } x = -A \cdot \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos\theta}.$$

Aus der Annahme für θ folgt $A = \frac{2\sqrt{B}}{\tang\theta}$, daher

$$x = \frac{2\sqrt{B} \cdot \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\tang\theta \cdot \cos\theta}, \text{ oder } x = -\frac{2\sqrt{B} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\cos\theta \cdot \tang\theta};$$

Da nun $\tang\theta \cos\theta = \sin\theta = 2 \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$ ist, so hat man

$$x = \sqrt{B} \cdot \tang\frac{\theta}{2}, \text{ oder } x = -\sqrt{B} \cdot \cotg\frac{\theta}{2}.$$

Man hat also zur Auflösung quadratischer Gleichungen folgendes System von Formeln:

$$x^2 + Ax + B = 0;\ \frac{2\sqrt{B}}{A} = \sin\theta;$$

$$x = -\sqrt{B} \cdot \cotg\frac{\theta}{2};\ x = -\sqrt{B} \cdot \tang\frac{\theta}{2};$$

$$x^2 + Ax - B = 0;\ \frac{2\sqrt{B}}{A} = \tang\theta;$$

$$x = -\sqrt{B} \cdot \cotg\frac{\theta}{2};\ x = \sqrt{B} \cdot \tang\frac{\theta}{2}.$$

Die Werthe von x bekommen das entgegengesetzte Zeichen, sobald A sein Zeichen ändert.

Beispiel 1. Wir wollen zuerst zu Fleiß ein ganz einfaches Beispiel rechnen, damit die Leser sehen, welchen Einfluß die Tafeln auf die Richtigkeit des Resultates haben.

Es sey daher $x^2 - 7x + 12 = 0$, wo Jeder auf den ersten Blick sieht, daß die Wurzeln 3 und 4 sind.

Man hat hier $A = 7$, $B = 12$; ich nehme hier weiters keine Rücksicht auf das Zeichen von A; nun habe ich mit Rücksicht auf Obiges beide Wurzeln positiv zu nehmen. Wir haben

$$\begin{aligned}
\log 12 &= 1{\cdot}079181 \\
\log \sqrt{12} &= 0\ 539590 \\
\log 2 &= 0{\cdot}301030 \\
\hline
& \ 0{\cdot}840620 \\
\log 7 &= 0{\cdot}845098 \\
\hline
\log \sin\theta &= 9{\cdot}995522 - 10 \\
& \qquad\quad 19 \quad 18 \\
& \qquad\quad 3 : 0{\cdot}3 = 10''
\end{aligned}$$

$$\theta = 81^\circ\ 47'\ 10''$$

$$\frac{\theta}{2} = 40^\circ\ 53'\ 35''$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = 0{\cdot}062474; \quad \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = 9{\cdot}937526$$
$$\log \sqrt{12} = 0{\cdot}539590; \quad \log \sqrt{12} = 0{\cdot}539590$$
$$\log x = 0{\cdot}602064 \qquad \log x = 0{\cdot}477116$$
$$x = 4{\cdot}00003 \qquad x = 2{\cdot}99996.$$

Die hier vorkommenden Abweichungen sind Resultat der Unvollkommenheit der Tafeln; mit siebenstelligen Logarithmen würde man das Resultat genauer haben; es wäre dann die Abweichung erst in der siebenten Ziffer.

Beispiel 2. Die von uns so eben vorgetragene Methode quadratische Gleichungen aufzulösen, hat dann vor allem ihre Anwendung, wann die Coeffizienten in der Gleichung groß sind, und dadurch die ganze Rechnung beschwerlich machen, wo also die Hülfe der Logarithmen sehr willkommen ist.

Es sey die Gleichung $7{\cdot}285\, x^2 + 19{\cdot}749\, x - 115{\cdot}638 = 0.$

$$x^2 + \frac{19{\cdot}749}{7{\cdot}285}\, x - \frac{115{\cdot}638}{7{\cdot}285} = 0.$$

Hier ist $A = \frac{19{\cdot}749}{7{\cdot}285}$, $B = \frac{115{\cdot}638}{7{\cdot}285}$, und wir müssen hier die zweite Art anwenden.

$$\log 115{\cdot}638 = 2{\cdot}063101 \qquad \log 19{\cdot}749 = 1{\cdot}295545$$
$$\log 7{\cdot}285 = 0{\cdot}862430 \qquad \log 7{\cdot}285 = 0{\cdot}862430$$
$$\log B = 1{\cdot}200671 \qquad \log A = 0{\cdot}433115$$
$$\log \sqrt{B} = 0{\cdot}600335$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301030$$
$$0{\cdot}901365$$
$$\log A = 0{\cdot}433115$$
$$\log \operatorname{tang} \theta = 0{\cdot}468250$$
$$\theta = 71^\circ\ 12'\ 40''$$
$$\frac{\theta}{2} = 35^\circ\ 36'\ 20''$$

$$\log \operatorname{cotg} \frac{\theta}{2} = 0{\cdot}145041; \quad \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = 9{\cdot}854959 - 10$$
$$\log \sqrt{B} = 0{\cdot}600335 \qquad \log \sqrt{B} = 0{\cdot}600335$$
$$\log x = 0{\cdot}745376 \qquad \log x = 0{\cdot}455294$$
$$x = -\,5{\cdot}56386 \qquad x = 2{\cdot}85295.$$

Fünftes Buch.

Anwendung der Trigonometrie auf Dreiecke, Vielecke und den Kreis.

§. 247. **Ein Dreieck auflösen heißt: aus denjenigen Stücken, wodurch ein Dreieck vollkommen bestimmt wird, die fehlenden durch Rechnung zu finden.**

Im Allgemeinen gehören zur vollkommenen Bestimmung eines Dreiecks drei Stücke, worunter nothwendig wenigstens eine Seite seyn muß. Beim rechtwinklichten Dreiecke ist schon durch die Benennung ein Stück nämlich der rechte Winkel gegeben. Bei Auflösung rechtwinklichter Dreiecke sind daher folgende Fälle möglich: 1. die Hypothenuse und eine Kathete; 2. zwei Katheten; 3. die Hypothenuse und ein (spitziger) Winkel; 4. eine Kathete und ein Winkel können gegeben seyn. Bezeichnen wir allgemein die Hypothenuse mit h, die zwei Katheten mit a und b, die ihnen gegenüberstehenden Winkel mit α und β, so haben wir zur Auflösung der vier angedeuteten Fälle:

1. Ist die Hypothenuse h und die Kathete a gegeben, so haben wir zur Bestimmung der zu suchenden Kathete b folgende Gleichung $b^2 = a^2 + b^2$, folglich $b^2 = h^2 - a^2$, daher $b = \sqrt{h^2 - a^2}$, folglich $h = \sqrt{(h + a)(h - a)}$, und somit

$$\log b = \tfrac{1}{2}\,[\log (h + a) + \log (h - a)].$$

Um den der gegebenen Kathete gegenüber stehenden Winkel α zu suchen, hat man $a = h \sin \alpha$, und somit $\sin \alpha = \frac{a}{h}$, und daher

$$\log \sin \alpha = \log a - \log h.$$

Bestimmt man nun mittelst der Tafeln den $\log \sin \alpha$, so hat man dadurch α, und durch α dann β, denn $\beta = 90^\circ - \alpha$.

Beispiel. Es sey die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreiecks gleich 3437′, und eine Kathete gleich 2548′, wie groß ist die andere Kathete, und wie groß der Winkel, der der Kathete 2548′ gegenüber steht? Man hat:

$$\begin{array}{ll} h = 3437 & \log (h + a) = 3{\cdot}777064 \\ a = 2548 & \log (h - a) = 2{\cdot}948902 \\ \hline h + a = 5985 & \log (h^2 - a^2) = 6{\cdot}725966 \\ h - a = \;\;889; & \log b = \log \sqrt{h^2 - a^2} = 3{\cdot}362983 \\ & b = 2306{\cdot}65, \end{array}$$

und zur Bestimmung des Winkels α hat man:

$\log a = 13{\cdot}406199 - 10$ (um die negative Mantisse zu vermeiden, gebe ich
$\log h = 3{\cdot}536180$ dem log a 10 dazu, und nehme sie wieder weg).

$$\begin{array}{l}
\lg s.\alpha = 9{\cdot}870019 - 10 \\
 9{\cdot}869933 - 10 = \log \sin 47^\circ\ 50' \\
\hline
\phantom{\lg s.\alpha = 9{\cdot}8}86
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
870047 \\
869933 \\
\hline
114 \text{ Unterschied für } 1' \\
1{\cdot}9 \text{ Unterschied für } 1''
\end{array}$$

$86 : 1{\cdot}9 = 45''$, daher $\alpha = 47^\circ 50' 45''$, und somit $\beta = 42^\circ 9' 15''$.

2. Sind die zwei Katheten a und b gegeben, und man hat die Hypothenuse und die zwei Winkel zu bestimmen, so hat man

$$h = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ und } \operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b};$$

für die Rechnung ist jedenfalls bequemer, früher den Winkel α zu suchen und dann zu setzen $h = \frac{a}{\sin \alpha}$, weil man dann fort und fort in Logarithmen rechnen kann.

Beispiel. Es seyen die zwei Katheten eines rechtwinklichten Dreiecks gleich 238′ und 240′. Wie groß ist die Hypothenuse und die spitzigen Winkel?

Man kann nun entweder $h = \sqrt{238^2 + 240^2}$ setzen, wodurch $h = \sqrt{56644 + 57600} = \sqrt{114244} = 338$ ist, oder man kann, was für das Rechnen bequemer ist, zuerst den Winkel suchen:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{238}{240}, \text{ so hat man:}$$

$$\begin{array}{l}
\log a = 2{\cdot}376577 \\
\log b = 2{\cdot}380211 \\
\hline
\log \operatorname{tang} \alpha = 9{\cdot}996366 - 10 \\
\phantom{\log \operatorname{tang} \alpha = } 9{\cdot}996210 - 10 = \log \operatorname{tang} 44^\circ\ 45' \\
\hline
\phantom{\log \operatorname{tang} \alpha = 9{\cdot}99}156
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
6463 \\
6210 \\
\hline
253 = \text{Unterschied für } 1'
\end{array}$$

$156 : 4{\cdot}21 = 37''$ $\quad 4{\cdot}21 = $ Unterschied für $1''$;

daher $\alpha = 44^\circ\ 45'\ 37''$.

Da nun $h = \frac{a}{\sin \alpha}$, so hat man:

$$\begin{array}{l}
\log a = 2{\cdot}376577 \\
\log \sin \alpha = 9{\cdot}847660 - 10 \\
\hline
\log h = 2{\cdot}528917;
\end{array}$$

daher $h = 338$.

3. Sind die Hypothenuse h und ein spitziger Winkel α gegeben, wodurch jederzeit auch der andere Winkel β bestimmt ist, so findet man

die diesen Winkeln gegenüberstehenden Katheten a und b folgender Maßen:

$$a = h \sin \alpha;\; b = h \cos \alpha.$$

Beispiel. Ist die Hypothenuse $h = 338$ und $\alpha = 44^\circ 45' 37''$, so hat man:

$$\log h = 2{\cdot}528917$$
$$\log \sin \alpha = 9\ 847660 - 10$$
$$\log a = 2{\cdot}376577;$$
$$\text{daher } a = 238$$

$\log h = 2{\cdot}528917$	$\log \cos 44^\circ 45' = 9\ 851372$	1372
$\log \cos \alpha = 9\ 851894$	$-\ 78$	1246
$\log b = 2{\cdot}380211$	$9{\cdot}851294$	126 U 1′
$b = 240$		— 2·1 U 1″
		— 78 U. 37″

5. Ist endlich die Kathete a und der ihr gegenüberstehende spitzige Winkel α gegeben, so hat man zur Bestimmung der Hypothenuse und der anderen Kathete b Folgendes:

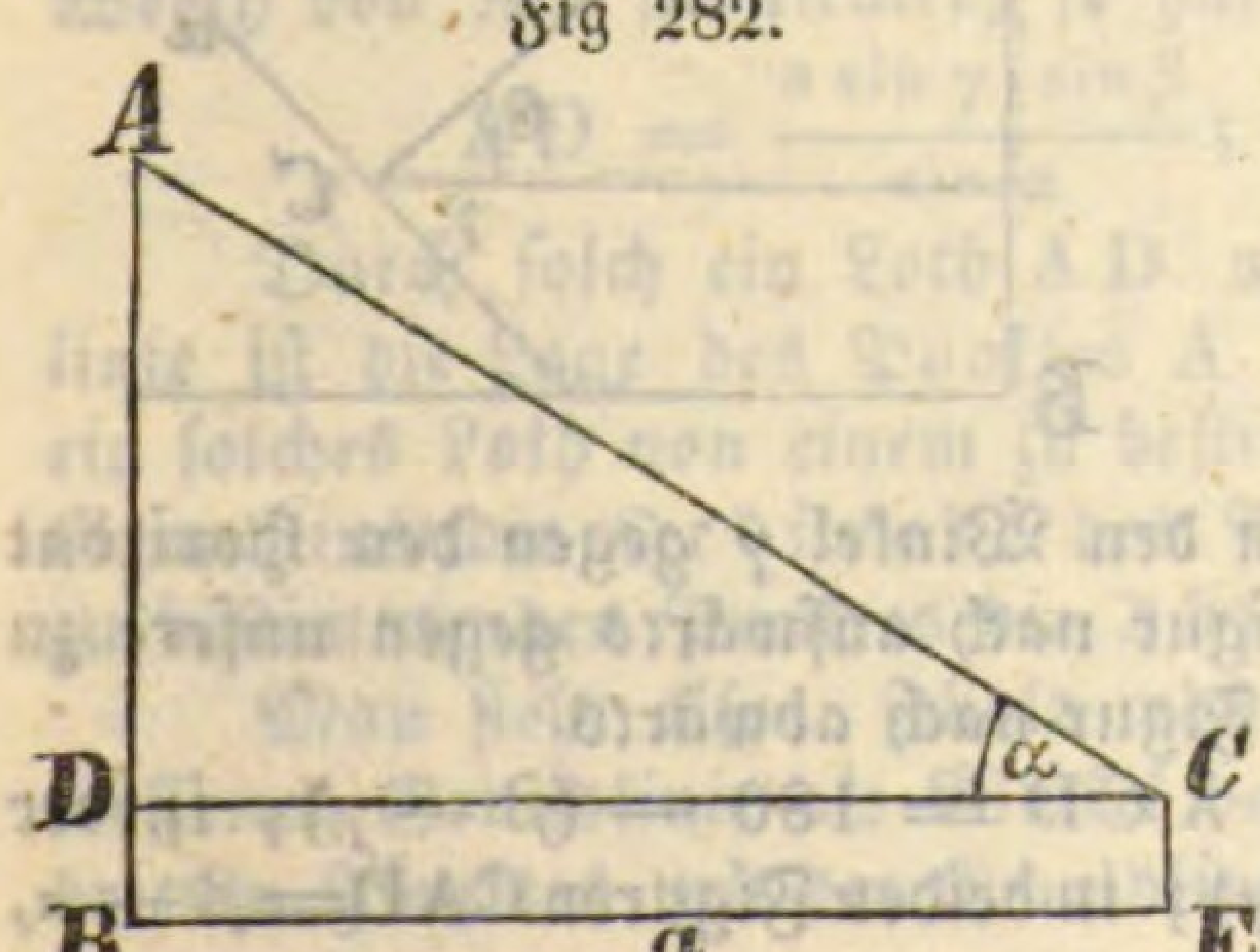
$$h = \frac{a}{\sin \alpha};\; b = \frac{a}{\tan \alpha}.$$

Beispiel. Es sey die Kathete $a = 50'$; und der ihr gegenüberstehende Winkel gleich 60°, so hat man:

$$h = \frac{50}{\sin 60^\circ};\; b = \frac{50}{\tan 60^\circ};\ \text{daher}$$
$$\log a = 1{\cdot}698970$$
$$\log \sin \alpha = 9{\cdot}937531 - 10$$
$$\log h = 1{\cdot}761439$$
$$h = 57\ 7350$$
$$\log a = 1{\cdot}698970$$
$$\log \tan \alpha = 0\ 238561$$
$$\log b = 1{\cdot}460409$$
$$b = 28{\cdot}8674.$$

§. 248. Die vorhergehenden Aufgaben haben vielfältige Anwendung im praktischen Leben, besonders zur Bestimmung der Höhe verschiedener Gegenstände.

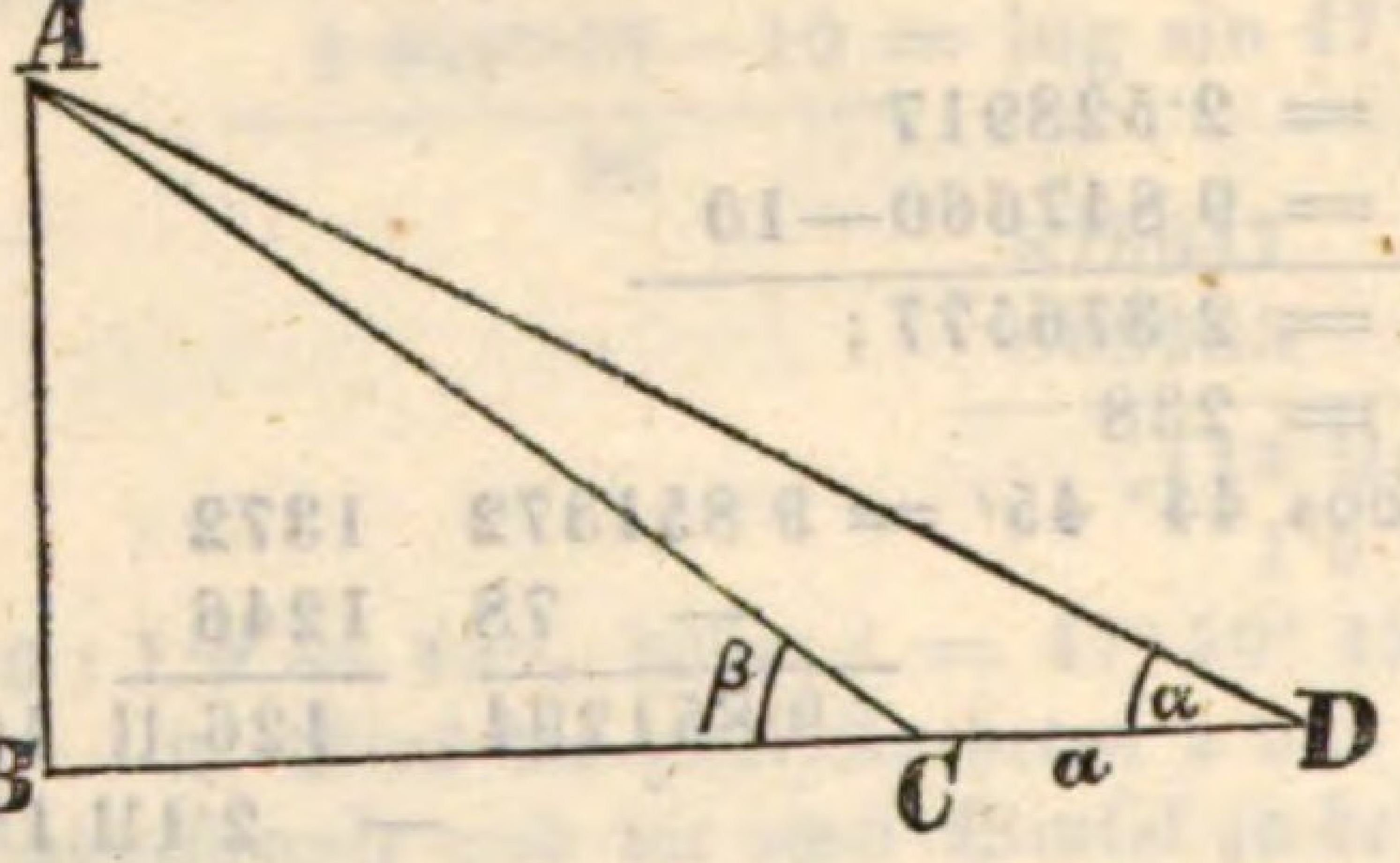
Fig 282.



Es sey die Höhe AB zu bestimmen; ich stelle mich in C mit einem Instrumente auf, durch welches Höhenwinkel bestimmt werden können, und bestimme den Winkel $ACD = \alpha$; ich messe nun die horizontale Entfernung $BE = CD = a$, so habe ich $AD = a \tan \alpha$; hiezu habe ich nur noch die Höhe des Instrumentes $CE = DB$ hinzuzugeben, um die verlangte Höhe AB bestimmt zu haben.

Nicht immer aber ist es möglich, die Horizontale bis zur Verticalen hin zu messen, in dem Falle nimmt man zwei Höhenwinkel.

Fig. 283.



Ohne hier die Höhe des Instrumentes zu berücksichtigen, die man dann jedenfalls zur gefundenen Höhe hinzuzugeben hat, beobachte ich in C den Höhenwinkel $ACB = \beta$, und in D den Höhenwinkel $ADB = \alpha$, messe $CD = a$, so habe ich, da $CAD = \beta - \alpha$ ist, $AD : a = \sin\beta : \sin(\beta - \alpha)$, und somit $AD = \frac{a \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$; allein aus dem rechtwinklichten Dreiecke ABD habe ich die Kathete $AB = AD \sin\alpha$, folglich, wenn man statt AD den gefundenen Werth setzet, $AB = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)}$. Sind also α und β gegeben, so hat man dann AB.

Es sey z. B. $a = 100°$; $\alpha = 50°$ und $\beta = 60°$, so hat man:

$$
\begin{aligned}
\log a &= 2{\cdot}000000 \\
\log \sin\alpha &= 9{\cdot}884254 - 10 \\
\log \sin\beta &= 9{\cdot}937531 - 10 \\
\hline
& \ 1{\cdot}821785 \\
\log \sin(\beta - \alpha) &= 9{\cdot}239670 - 10 \\
\hline
\log AB &= 2{\cdot}582115 \\
AB &= 3{\cdot}82046.
\end{aligned}
$$

Es ist oft nicht immer möglich, eine horizontale Gerade auszustecken und zu vermessen.

Fig. 284.

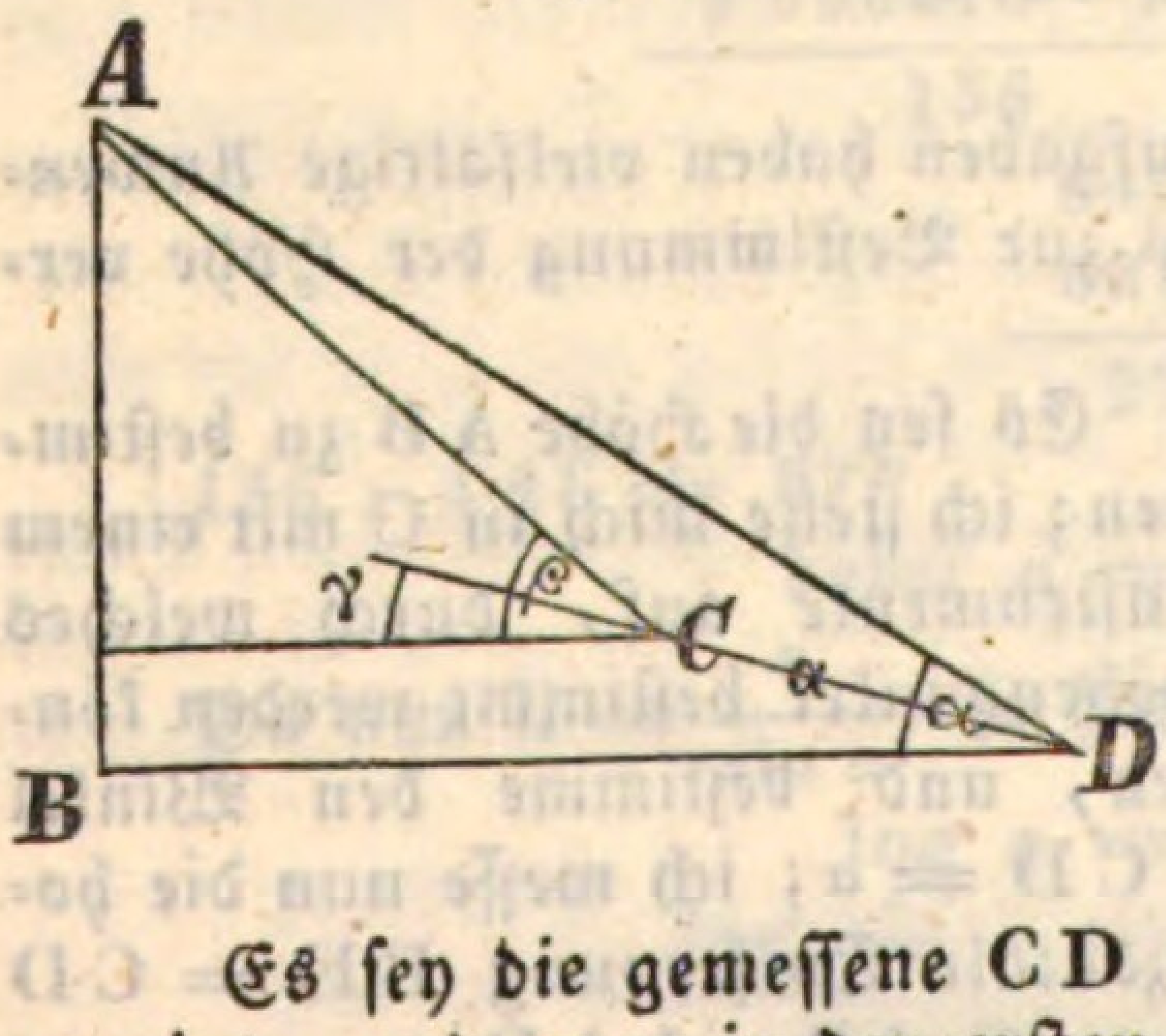
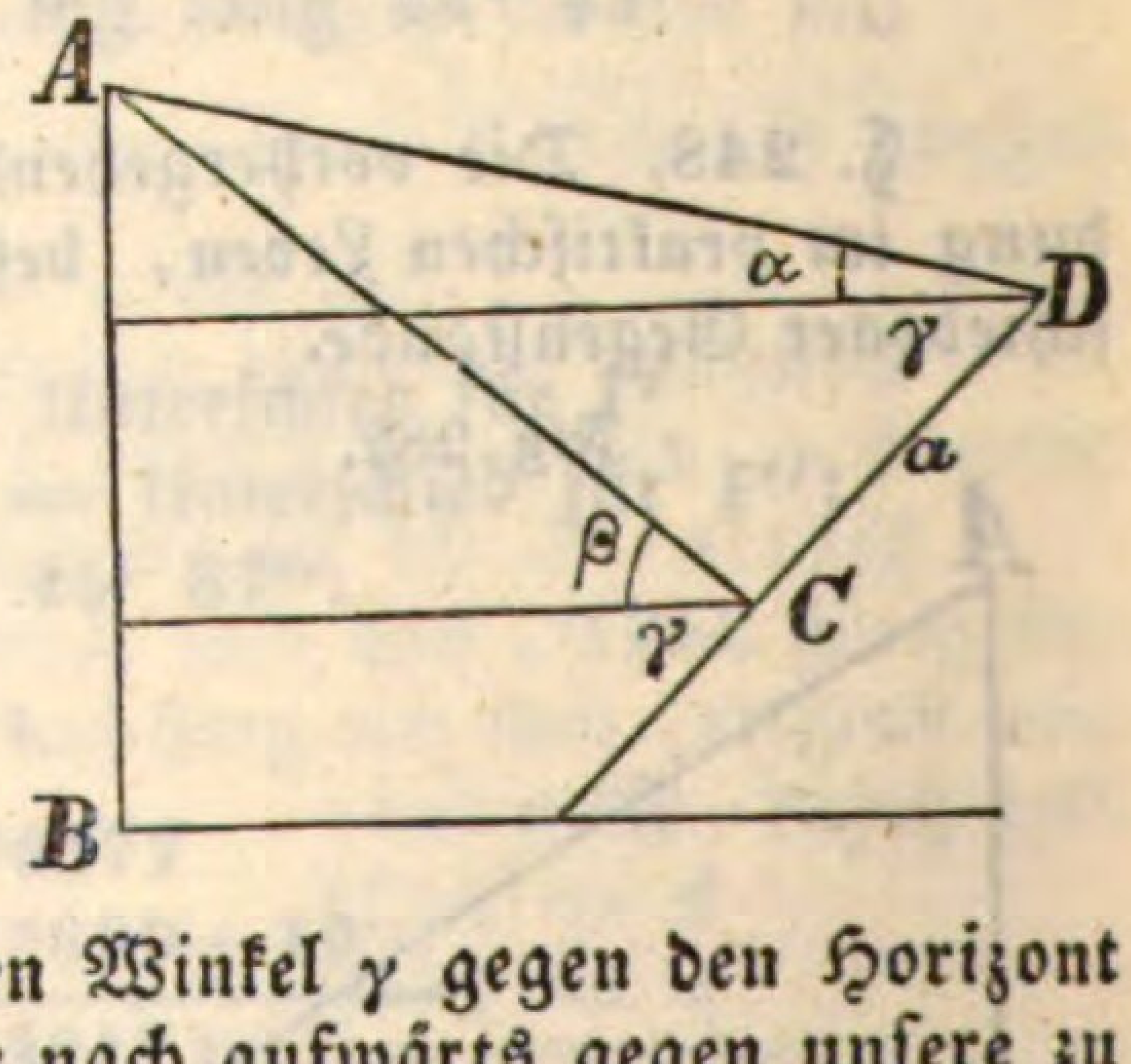


Fig. 285.



Es sey die gemessene CD um den Winkel γ gegen den Horizont geneigt, und zwar in der ersten Figur nach aufwärts gegen unsere zu bestimmende Höhe, in der zweiten Figur nach abwärts.

In der ersten Figur hat man $ACD = 180 - (\beta - \gamma)$, in der zweiten Figur $ACD = 180 - (\beta + \gamma)$; in beiden Figuren $CAD = \beta - \alpha$,

daher da beiderseits $AD : a = \sin ACD : \sin CAD$, so hat man in der ersten Figur $AD : a = \sin(\beta - \gamma) : \sin(\beta - \alpha)$, in der zweiten Figur $AD : a = \sin(\beta + \gamma) : \sin(\beta - \alpha)$;

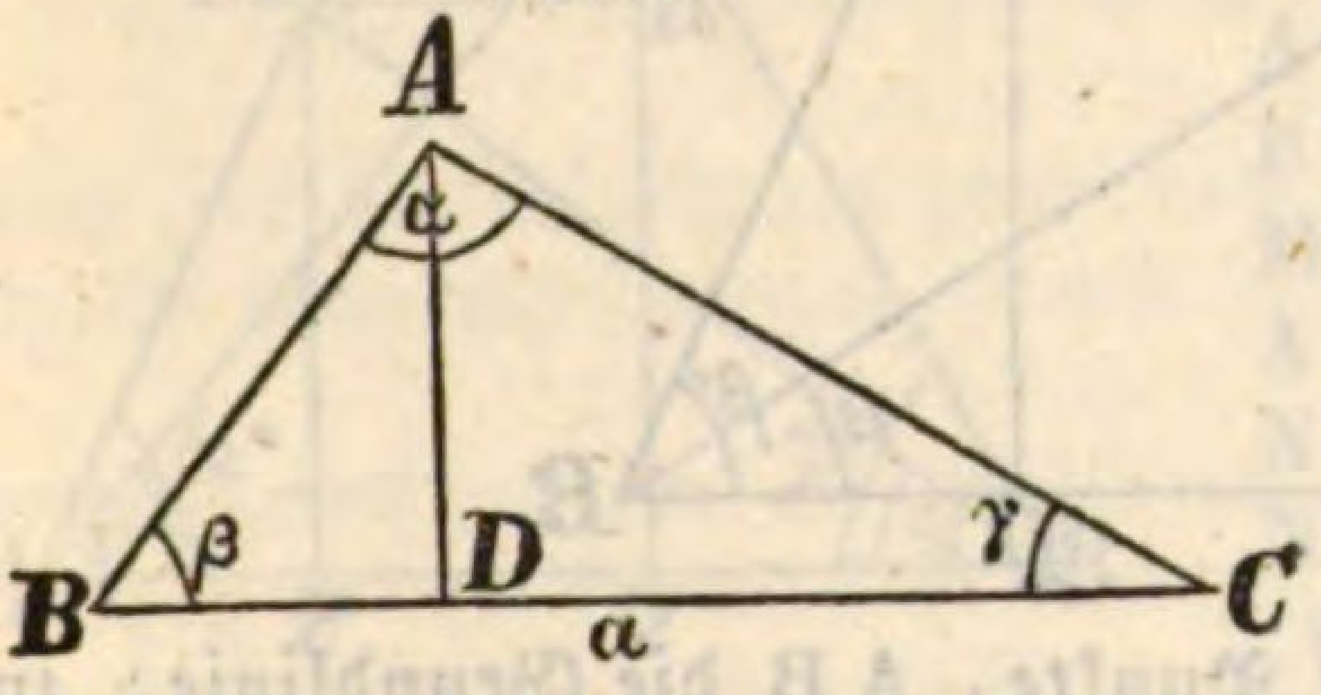
daher in der ersten Figur $AD = \frac{a \sin(\beta - \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$,

in der zweiten Figur $AD = \frac{a \sin(\beta + \gamma)}{\sin(\beta - \alpha)}$.

Ist $\gamma = 0$, so gehen beide Ausdrücke in den früheren über.

§. 249. Da ein Dreieck gegeben ist, wenn ein Stück und ein Paar Winkel gegeben sind, so können wir jedenfalls in diesem Falle ein Dreieck auflösen.

Fig. 286.



Ist in diesem Dreiecke die Seite $BC = a$, und die zwei anliegenden Winkel β und γ, folglich auch der gegenüberliegende Winkel α gegeben, so hat man zur Auffindung der übrigen Seiten folgende Proportionen:

$$\frac{AB}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}; \quad \frac{AC}{a} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

und somit

$$AB = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}; \; AC = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}.$$

Unter allen Fällen der Auflösung der Dreiecke ist dieser derjenige, welcher am häufigsten vorkommt.

Beim wirklichen Vermessen auf dem Felde ist das Messen gerader Linien zeitraubender und kostspieliger als das von Winkeln, wofür man sehr bequeme und genaue Vorrichtungen besitzt. Von einer solchen Grundlinie, wie hier BC, ist man im Stande, von ihren Endpunkten einige Hundert Punkte zu sehen, und kann die Winkel messen, die ihre Gesichtslinien mit der Grundlinie $BC = a$ machen, und ist dadurch im Stande, die Lage eines solchen Punktes A gegen die gegebene Grundlinie $BC = a$ zu bestimmen.

Ich denke mir zu diesem Behufe von A das Loth AD auf die Grundlinie BC, und da nun das Dreieck ABD rechtwinklicht ist, so hat man $AD = AB \sin \beta$; $BD = AB \cdot \cos \beta$, und wenn man den Werth von AB substituirt, so hat man:

$$AD = \frac{a \sin \gamma \cdot \sin \beta}{\sin \alpha}; \; BD = \frac{a \sin \gamma \cdot \cos \beta}{\sin \alpha}.$$

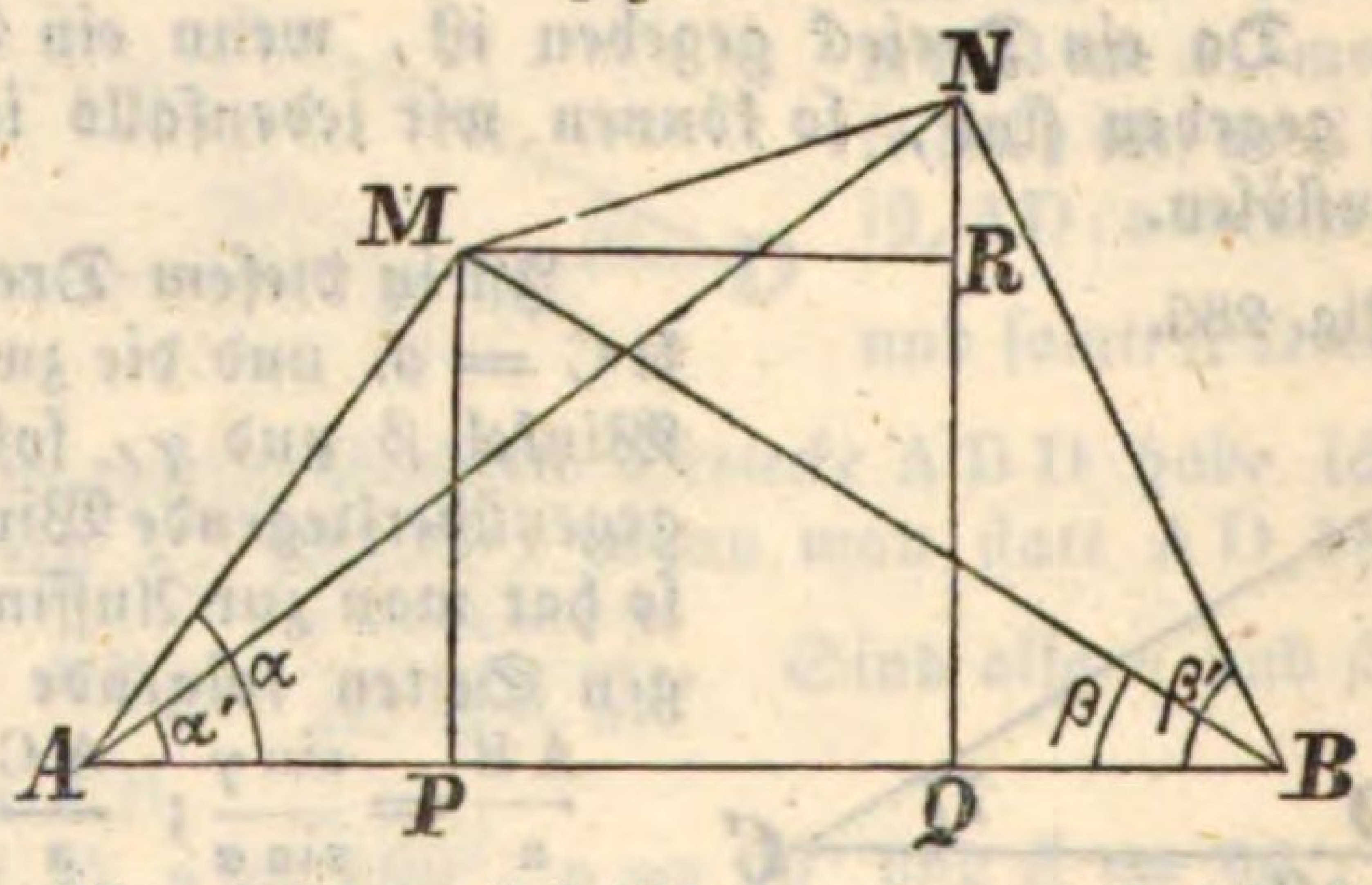
Durch solch ein Loth AD und einen Abschnitt BD der Grundlinie ist die Lage des Punktes A gegen BC festgestellt. Man nennt ein solches Loth von einem zu bestimmenden Punkt A auf eine gegebene Grundlinie die Ordinate des Punktes, und den Abschnitt BD des zu bestimmenden Punktes die Abscisse des Punktes A.

Man sieht also, sobald man von den zwei Endpunkten einer gemessenen Grundlinie die Winkel bestimmt, den die Gesichtslinien eines dritten Punktes mit der Grundlinie bilden, so kann man durch die so

eben gefundenen Formeln die Abscisse und die Ordinate des fraglichen Punktes finden.

Dadurch nun, daß man die Abscisse und die Ordinate eines jeden Punktes, den man von den Endpunkten der Grundlinien sehen kann, im Stande ist zu bestimmen, kann man auch die Entfernung zweier solcher Punkte, die man nur sieht, und zu denen man oft zu keinem derselben hingelangen kann, angeben.

Fig. 287.



Es seyen M und N zwei solche Punkte, AB die Grundlinie; in A bemesse ich die Winkel $MAB = \alpha$; $NAB = \alpha'$, in B die Winkel $MBA = \beta$; $NBA = \beta'$; ferners sey $AB = a$ gefunden worden.

Da $AMB = 180 - (\alpha + \beta)$, $ANB = 180 - (\alpha' + \beta')$ ist, so hat man $\sin AMB = \sin(\alpha + \beta)$, $\sin ANB = \sin(\alpha' + \beta')$; daher

$$AM = \frac{a \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}; \; BM = \frac{a \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \; AN = \frac{a \sin\beta'}{\sin(\alpha' + \beta')};$$

$$BN = \frac{a \sin\alpha'}{\sin(\alpha' + \beta')}.$$

Die vier rechtwinklichten Dreiecke AMP, MPB, ANQ, NQB geben:

$$AP = AM . \cos\alpha; \; MP = AM . \sin\alpha_1 = MB \sin\beta; \; PB = MB \cos\beta$$
$$AQ = AN . \cos\alpha'; \; NQ = AN . \sin\alpha = NB \sin\beta'; \; BQ = NB \cos\beta'$$

Substituirt man hier die so eben gefundenen Werthe, so hat man:

$$AP = \frac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \; MP = \frac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}; \; BP = \frac{a \sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$AQ = \frac{a \sin\beta' \cos\alpha'}{\sin(\alpha' + \beta')}; \; NQ = \frac{a \sin\beta' \sin\alpha'}{\sin(\alpha' + \beta')}; \; BQ = \frac{a \sin\alpha' \cos\beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}.$$

Fällt man nun von M das Loth MR auf NQ, so hat man:

$$MR = AQ - AP \text{ oder } = BP - BQ$$
$$NR = NQ - MP, \text{ und somit:}$$

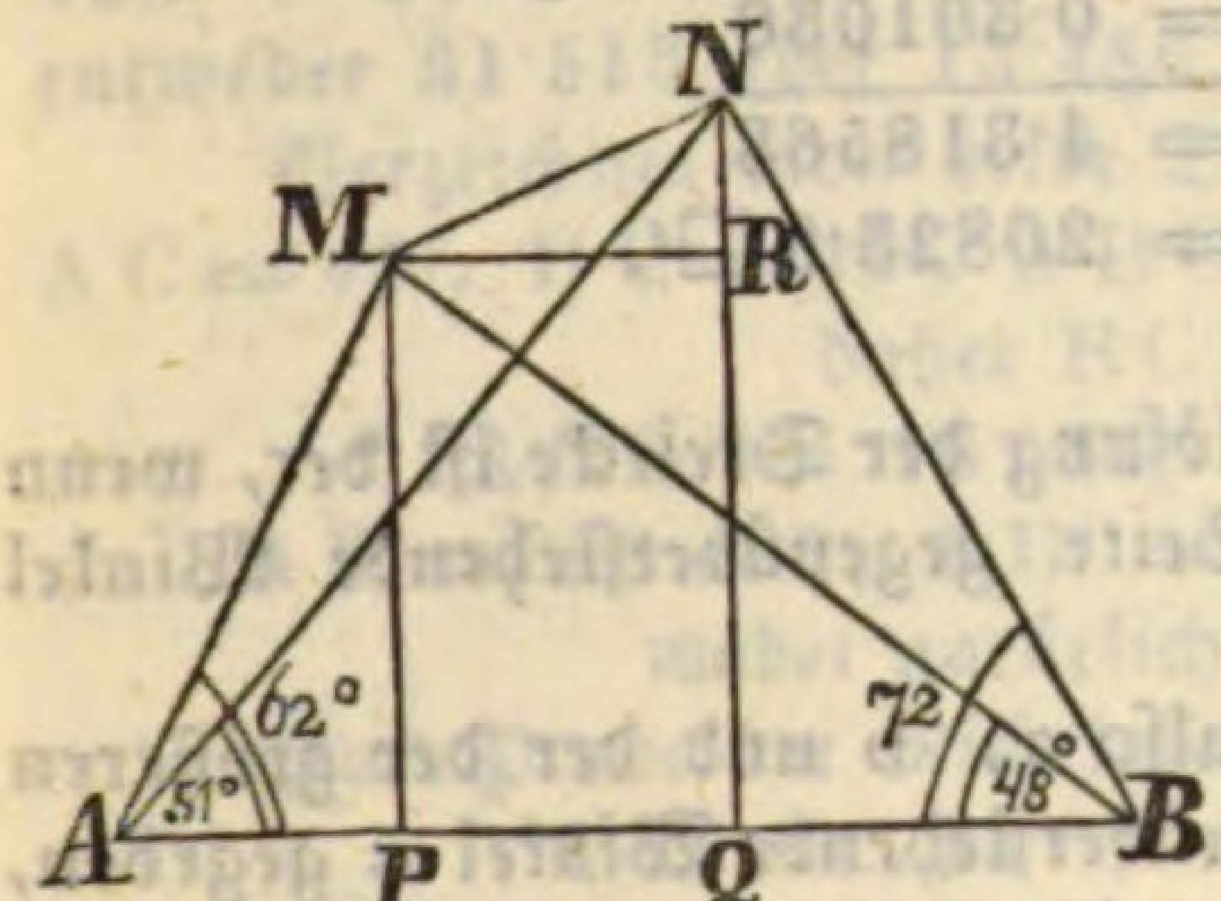
$$MR = \frac{a \sin\beta' \cos\alpha'}{\sin(\alpha' + \beta')} - \frac{a \sin\beta \cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a \sin\alpha \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{a \sin\alpha' \cos\beta'}{\sin(\alpha' + \beta')}$$

$$NR = \frac{a \sin\beta' \sin\alpha}{\sin(\alpha' + \beta')} - \frac{a \sin\beta \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Hat man M R und N R, so ist $MN = \sqrt{MR^2 + NR^2}$, und somit ist die Entfernung M N bestimmt.

Die Punkte M und N können zwei Punkte seyn auf der anderen Seite eines Ufers oder auf einer unzugänglichen Insel; ja es können M und N zwei Weltkörper seyn, die man von verschiedenen Punkten der Erde betrachtet. Man sieht jedenfalls durch Lösung dieser Aufgabe, wie man die Entfernung zweier unzugänglichen Punkte im Stande ist zu bestimmen; eine Aufgabe, die die Laien in der Mathematik am wenigsten begreifen können.

Fig. 288.



Es sey $AB = 1532°$; $MAB = 62°$; $NAB = 51°$; $MBA = 48°$; $NBA = 72°$, so findet man nach Anwendung der so eben gegebenen Formeln:

$AM = 1211·56$, $AN = 1737·3$

$BM = 1439\ 48$, $BN = 1419·6$

$MP = 1069·74$, $AP = 568·79$

$AQ = 1093·31$, $BQ = 438·69$

$NQ = 1350\ 13$; daher

$NR = 280·39$; $MR = 524·52$.

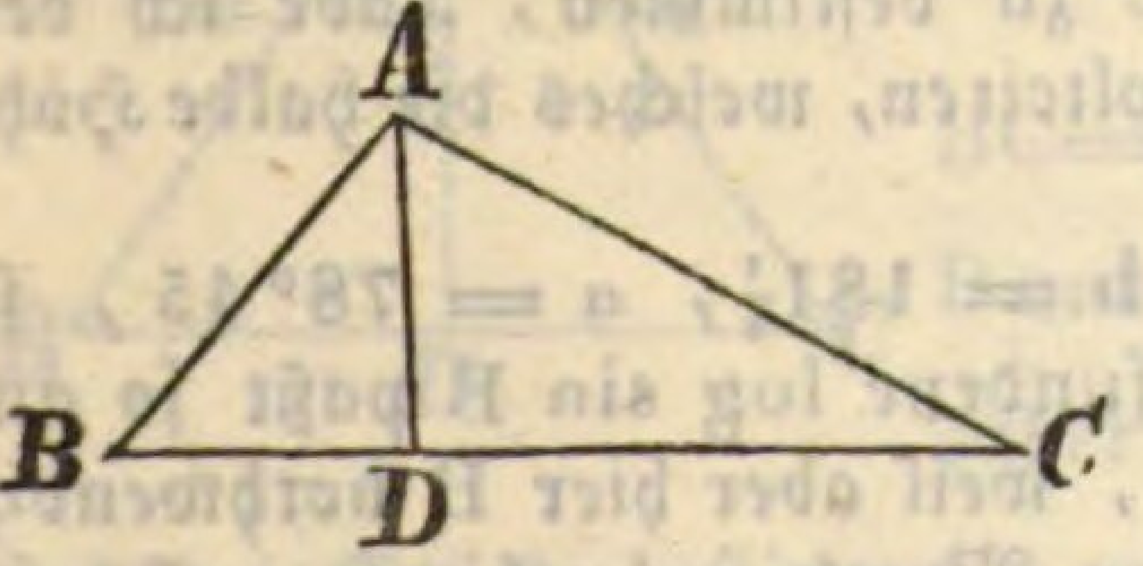
Statt nun

$MN = \sqrt{(280\ 39)^2 + (524\ 52)^2}$ zu rechnen, mache ich

$$\begin{aligned} \log MR &= 2·447763 \\ \log MR &= 2\ 719762 \\ \hline \log \operatorname{tang} NMR &= 9·728001 \\ \log NR &= 2·447763 \\ \log \sin NMR &= 9·673422 \\ \hline \log MN &= 2·774341 \\ MN &= 594·76. \end{aligned}$$

§. 250. Wir haben noch zu zeigen, wie man den Flächeninhalt eines Dreiecks findet, wenn eine Seite und die Winkel gegeben sind.

Fig. 289.



Es sey die Seite $BC = a$, und die Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$ gegeben; ich fälle von A ein Loth auf BC, und habe nur dieses Loth zu berechnen, da die Grundlinie mir so bekannt ist. Nun ist $AB : a = \sin\gamma : \sin\alpha$; daher $AB = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Es ist ferners aus dem rechtwinklichten Dreiecke ABD die AD $= AB \,.\, \sin\beta$; daher $AD = \frac{a \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Es ist somit der Flächeninhalt des Dreiecks gleich

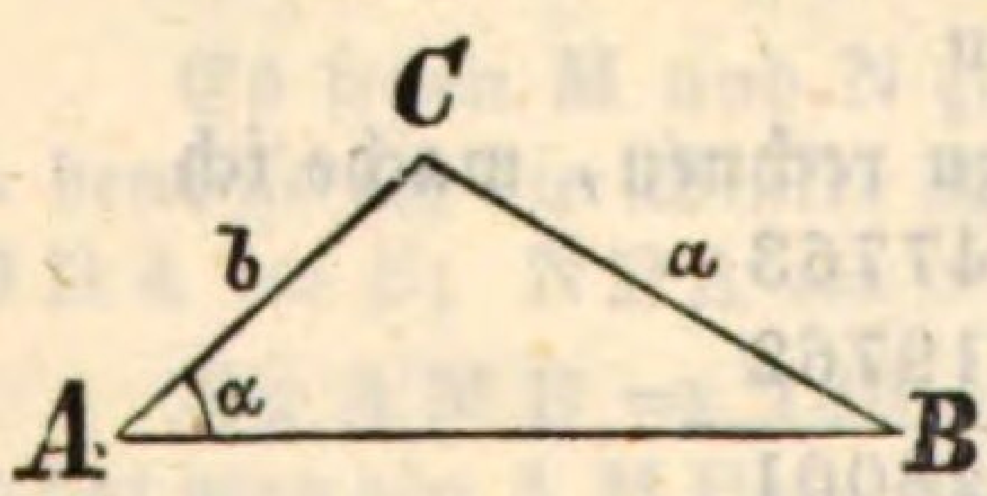
$$\frac{a \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}.$$

Beispiel. Es sey eine Seite eines Dreiecks gleich 198′, die an ihr liegenden Winkel = 60° und 70°, also der gegenüberliegende Winkel = 50°. Man hat nun:

$$\begin{aligned}
\log a &= 2{\cdot}296665 \\
\log a^2 &= 4{\cdot}593330 \\
\log \sin \beta &= 9{\cdot}937531 \\
\log \sin \gamma &= 9{\cdot}972986 \\
\hline
& \ 4{\cdot}503847 \\
\log \sin_{\tfrac{3}{4}}\alpha &= 9{\cdot}884254 \\
\hline
& \ 4{\cdot}619593 \\
\log 2 &= 0{\cdot}301030 \\
\hline
\log \text{Flächeninhalt} &= 4{\cdot}318563 \\
\text{Flächeninhalt} &= 20823{\cdot}9\,\square'.
\end{aligned}$$

§. 251. Der zweite Fall der Auflösung der Dreiecke ist der, wenn zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberstehende Winkel gegeben sind.

Fig. 290.



Es sey also a, b und der der größeren Seite a gegenüberstehende Winkel α gegeben, so hat man a : b = sin α : sin B, wodurch man $\sin B = \frac{b \sin \alpha}{a}$ erhält, wenn man bloß den Sinus eines Winkels kennt, so weiß man den ihm entsprechenden Winkel nicht ganz bestimmt, weil ja immer ein spitziger und ein stumpfer Winkel, die sich zu 180° ergänzen, einen gleich großen Sinus mit demselben Zeichen haben. In unserem Falle fällt die Zweideutigkeit weg, denn da nach der Voraussetzung $a > b$, so muß nothwendig $\alpha > B$, und somit nothwendig B ein spitziger Winkel seyn; daher durch die letzte Formel der Winkel B, und somit natürlich auch C bestimmt ist; zur Bestimmung der dritten Seite hat man dann

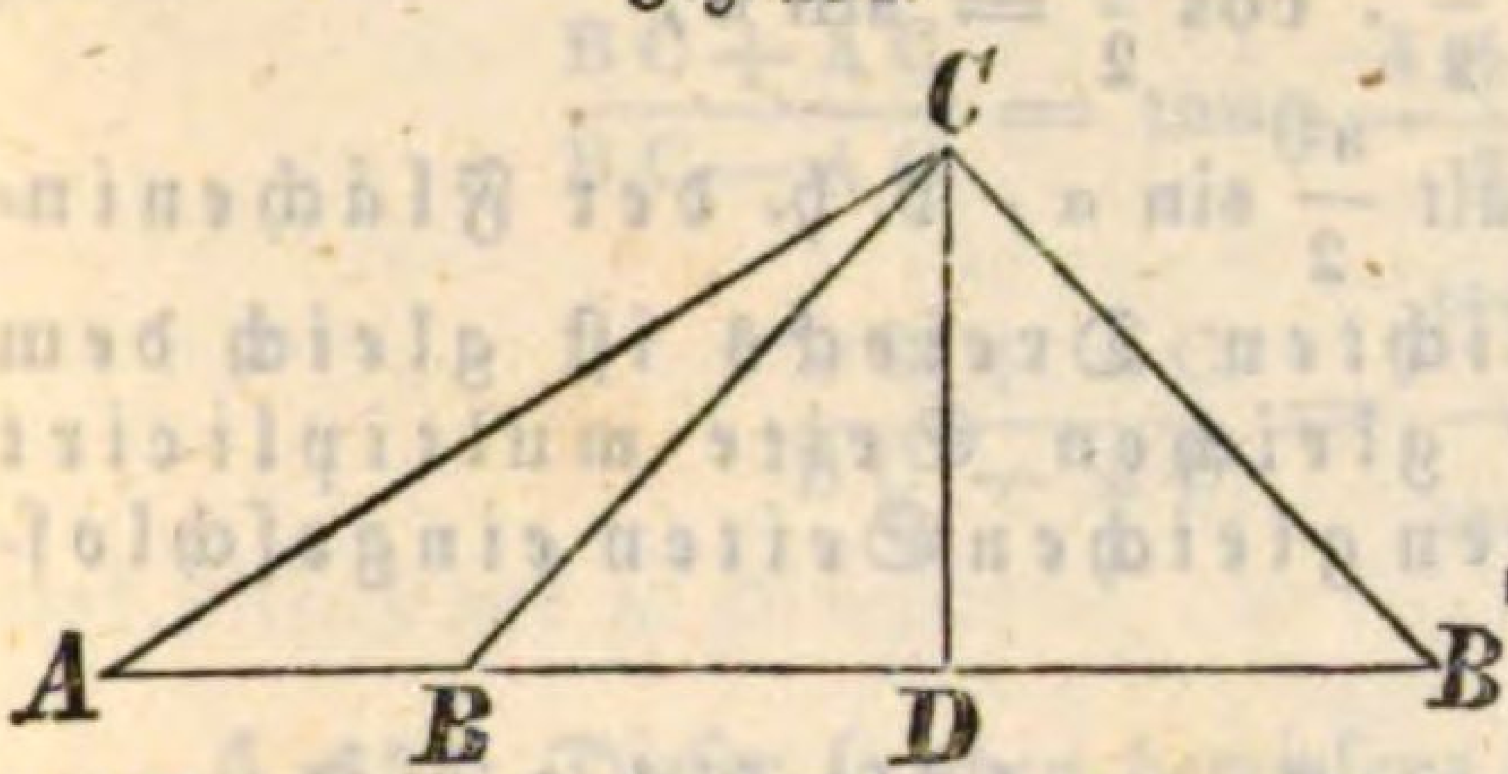
$$AB : a = \sin C : \sin \alpha, \text{ und folglich } AB = \frac{a \sin C}{\sin \alpha}.$$

Um den Flächeninhalt von ABC zu bestimmen, habe ich den Werth von AB mit $\frac{1}{2}$ b sin α zu multipliciren, welches die halbe Höhe des Dreiecks ist.

Beispiel. Es sey $a = 187\frac{2}{3}$, $b = 181\frac{1}{2}$, $\alpha = 78°\,45'$, so findet man B = 71° 32′ 32″; der gefundene log sin B paßt so gut für 71° 32′ 32″ wie für 108° 27′ 28″, weil aber hier B nothwendig spitzig seyn muß, so hat man den ersten Werth zu nehmen. Es ist demnach C = 29° 42′ 28″ und AB = 94·825.

Ist der gegebene Winkel nicht der größeren Seite gegenüberstehend, so hat der Winkel B, folglich auch der Winkel C, folglich auch die Seite AB einen doppelten Werth, d. h. es entsprechen zwei Dreiecke den gegebenen Stücken. Es muß nun durch andere Umstände entschieden werden, welches von beiden Dreiecken zu nehmen ist.

Fig. 291.



Es sey z. B. AC = 45′ BC = 40′, CAB = 60° gegeben, so hat man

$45 : 40 = \sin B : \sin 60°$,

daher $\sin B = \frac{45 \sin 60°}{40}$; man findet

$\log \sin B = 9{\cdot}988684 - 10$

und diesem entspricht 76° 58′ 37″ eben so gut als 103° 1′ 23″; daher ist B entweder 76° 58′ 37′ oder 103° 1′ 23″, daher C entweder 43° 1′ 23″ oder 16° 58′ 37″ und AB entweder 31·513 oder 13·486.

Verzeichnet man beide Dreiecke, so ist hier:

AC = 45′, BC = 40′, ABC = 103° 1′ 23, AB′C = 76° 58′ 37″;

daher BCB′ = 26° 2′ 46″;

ACB = 16° 58′ 37″, ACB′ = 43° 1′ 23″;

AB = 13·486; AB′ = 31·513, daher BB′ = 18·027;

wobei natürlich CB = CB′ = 40 ist.

Zur Probe der Richtigkeit der Rechnung kann man

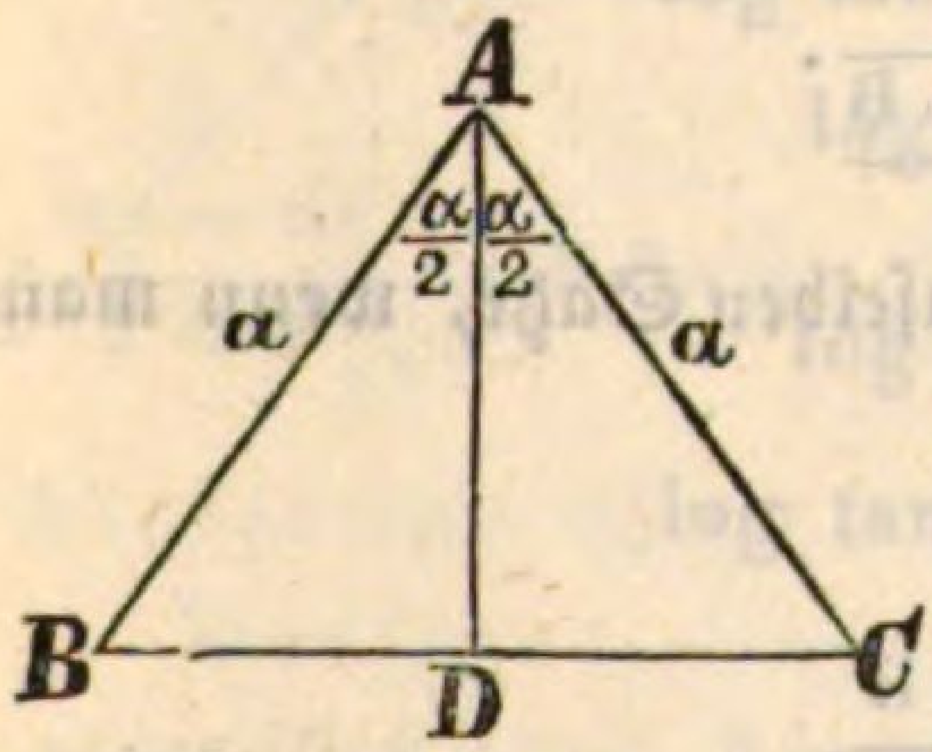
BC sin . 13° 1′ 23″, d. h BC . sin BCD

berechnen, so erhält man BD = 9·0135, was uns wieder BB′ = 18·027 gibt, wie früher.

§. 252. Der dritte Fall der Auflösung der schiefwinklichten Dreiecke ist der, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Unterscheiden wir hier den Fall, wo die zwei einschließenden Seiten einander gleich sind, wir es also mit einem gleichschenklichten Dreiecke zu thun haben.

Fig. 292.



Ist also AB = AC = a, der Winkel BAC = α; fällt man nun von A ein Loth AD auf BC, so ist $BAD = DAC = \frac{\alpha}{2}$.

Man hat daher $BD = a \sin \frac{\alpha}{2}$, daher $BC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$. Zur Bestimmung der Winkel B und C hat man, da B = C ist; $2B = 180 - \alpha$, daher $B = C = 90 - \frac{\alpha}{2}$, somit sind alle anderen Stücke bestimmt.

Zur Bestimmung des Flächeninhalts hat man, da

$$AD = \cos a \frac{\alpha}{2}, \text{ und somit}$$

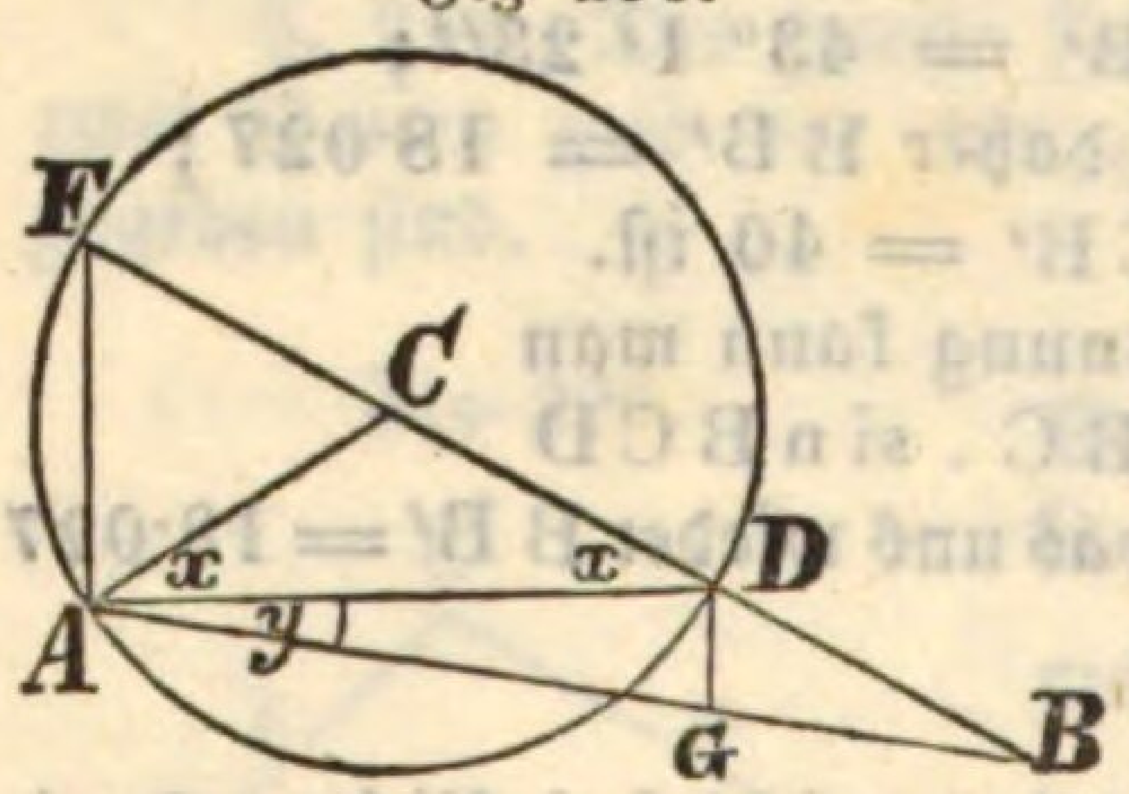
$$F = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2},$$

da aber $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$,

so hat man für den Flächeninhalt $\frac{a^2}{2} \sin \alpha$, d. h. **der Flächeninhalt eines gleichschenklichten Dreiecks ist gleich dem halben Quadrate einer gleichen Seite multiplicirt mit dem Sinus des von den gleichen Seiten eingeschlossenen Winkels.**

§. 253. **In jedem Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zum Unterschiede derselben zwei Seiten, wie die Tangente der halben Summe der diesen Seiten gegenüberstehenden Winkeln, zur Tangente des halben Unterschiedes derselben Winkel.**

Fig. 293.



Es sey das Dreieck ACB; aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser AC beschreibe ich einen Kreis, der die CB in D trifft; verlängere BC bis an den Kreisumfang in F; ziehe die AD, und DG ∥ AF, so ist entschieden $BF = BC + AC$ und $BD = BC - AC$, und man hat: $\frac{BF}{BD} = \frac{AF}{DG}$, nun ist $AF = AD \operatorname{tang} x$, $DG = AD \operatorname{tang} y$, daher $AF : DG = \operatorname{tang} x : \operatorname{tang} y$, folglich $BF : BD = \operatorname{tg} x : \operatorname{tg} y$, wie man nun leicht sieht, ist $x = y + B$ und $x + y = CAB = A$; daher $x = \frac{A+B}{2}$ und $y = \frac{A-B}{2}$, und somit

$$BF : BD = \operatorname{tang} . \frac{A+B}{2} : \operatorname{tang} \frac{A-B}{2} \text{ oder}$$

$$\frac{BC + AC}{BC - AC} = \frac{\operatorname{tang} . \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang} . \frac{A-B}{2}}.$$

Auf eine andere Art gelangt man zu demselben Satze, wenn man bedenkt:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ daher}$$

$$\frac{BC + AC}{BC - AC} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}.$$

Substituirt man aber hier die in einem früheren Ort dafür gefundenen Formeln, so hat man:

$$\frac{BC + AC}{BC - AC} = \frac{2 \sin \frac{A+B}{2} . \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} . \sin \frac{A-B}{2}},$$

somit

$$\frac{BC + AC}{BC - AC} = \tang \frac{A + B}{2} \cdot \cotg \frac{A - B}{2}$$

$$\frac{BC + AC}{BC - AC} = \frac{\tang \frac{A + B}{2}}{\tang \frac{A - B}{2}}.$$

§. 254. Dieser so eben bewiesene Lehrsatz gibt uns die Hülfsmittel an die Hand, wenn zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, die zwei andern Winkel zu finden. Sind nämlich BC, AC und der Winkel C gegeben, so ist in der zuletzt gebrauchten Proportion nur $\tang \frac{A-B}{2}$ unbekannt, denn, da $A + B = 180 - C$, also $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ ist, so ist $\tang \frac{A+B}{2}$ bekannt; durch die so eben bewiesene Proportion also findet man $\tang \frac{A-B}{2}$, und dadurch $\frac{A-B}{2}$, da nun $\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = A$,

und $\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = B$,

so findet man dadurch die Winkel A und B.

Beispiel. Es sey $b = 1965$, $c = 1248$, der eingeschlossene Winkel $\alpha = 32^\circ\ 6'\ 4''$, so hat man nach dem so eben gefundenen

$$\tang \frac{\beta - \gamma}{2} = \tang \frac{\beta + \gamma}{2} \cdot \frac{b - c}{b + c}$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 73^\circ\ 56'\ 58''$$

$$\log \tang \frac{\beta + \gamma}{2} = 0{\cdot}541059$$

$$\log (b - c) = 2{\cdot}855519$$

$$3{\cdot}396578$$

$$\log (b + c) = 3{\cdot}506911$$

$$\log \tang \frac{\beta - \gamma}{2} = 9{\cdot}889667 - 10$$

$$\frac{\beta - \gamma}{2} = 37^\circ\ 47'\ 57''$$

$$\frac{\beta + \gamma}{2} = 73^\circ\ 56'\ 58''$$

daher $\beta = 111^\circ\ 44'\ 55''$

$\gamma = 36^\circ\ 9'\ 1''$

Um jetzt die dritte Seite a zu finden, hat man:

$$a = b \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\log b = 3{\cdot}293363$$
$$\log \sin \alpha = 9{\cdot}725433 +$$
$$3{\cdot}018796$$
$$\log \sin \beta = 9{\cdot}967931$$
$$\log a = 3{\cdot}050865$$
$$a = 1124{\cdot}3.$$

Da hier β ein stumpfer Winkel ist, so suche ich in den Tafeln den $\log \sin (180 - \beta)$, d. h. $\log \sin 68^\circ\, 15'\, 5''$.

§. 255. Wenn uns zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, z. B. b, c, α, so gibt uns der Carnot'sche Lehrsatz die dritte Seite, man hat nämlich:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos \alpha;$$

allein in dieser Form ist es nicht gut geeignet zur logarithmischen Berechnung; wir wollen diesem Ausdrucke nun eine zur logarithmischen Berechnung geeignete Gestalt geben. Geben und nehmen wir $2bc$ hinzu, so ist

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2bc - 2bc \cos \alpha, \text{ daher}$$
$$a^2 = (b - c)^2 + 2bc\,(1 - \cos \alpha).$$

Da nun $\frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, daher $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ist, so hat man:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ oder wenn man } b - c \text{ heraushebt,}$$

$$a^2 = (b - c)^2 \left(1 + \frac{4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(b - c)^2}\right).$$

Bestimmt man nun den Winkel θ so, daß

$$\frac{4bc \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{(b - c)^2} = \tang^2 \theta \text{ oder } \frac{2 \sin \left(\frac{\alpha}{2}\right) \sqrt{bc}}{b - c} = \tang \theta,$$

so ist:

$$a^2 = (b - c)^2\, [1 + \tang^2 \theta] = (b - c)^2 \,.\, \sec^2 \theta = \frac{(b - c)^2}{\cos^2 \theta};$$

$$\text{daher } a = \frac{b - c}{\cos \theta}.$$

Man wird daher aus $\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \,.\, \sqrt{bc}}{b - c} = \tang \theta$, das θ bestimmen, und mittelst dieses θ durch $a = \frac{b - c}{\cos \theta}$ das a bestimmen.

Beispiel. $b = 1965$; $c = 1248$; $\alpha = 32^\circ\, 6'\, 4''$.

$$\log b = 3{\cdot}293363$$
$$\log c = 3{\cdot}096215$$
$$\log bc = 6{\cdot}389578$$

$$\log\sqrt{bc} = 3{\cdot}194789$$
$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}441673-10$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301030$$
$$2{\cdot}937492$$
$$\log(b-c) = 2{\cdot}855519$$
$$\log\operatorname{tang}\theta = 0{\cdot}081973$$
$$\theta = 50^0\ 22'\ 33'$$
$$\log(b-c) = 2{\cdot}855519$$
$$\log\cos\theta = 9{\cdot}804651-10$$
$$\log a = 3{\cdot}050868$$
$$a = 1124{\cdot}3.$$

Um nun die Winkel β und γ zu berechnen, hat man:

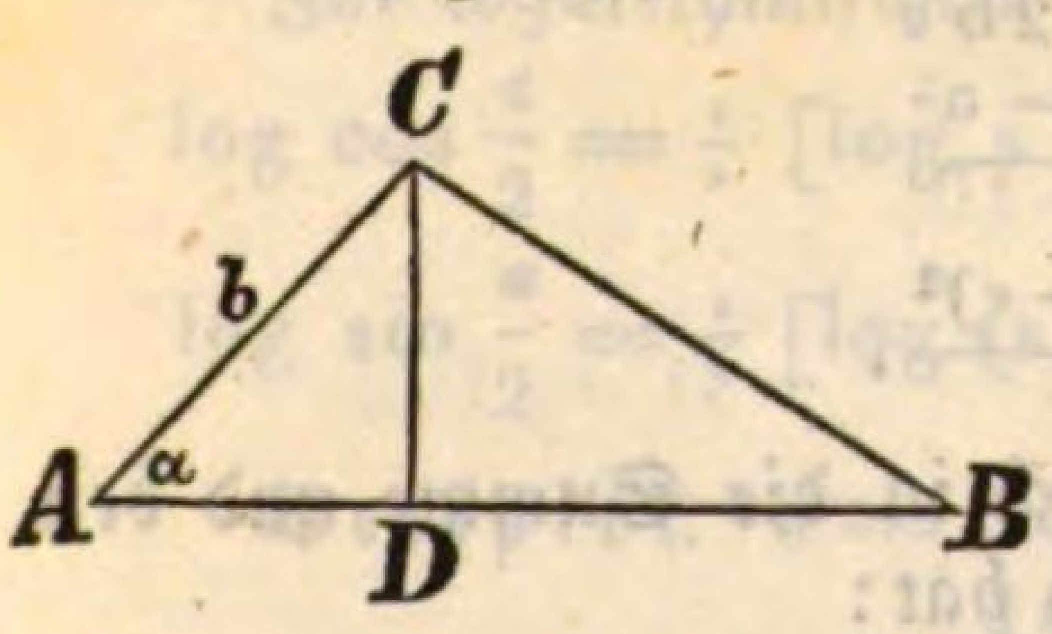
$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a},\quad \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a};$$

$$\log b = 3{\cdot}293363 \qquad \log c = 3{\cdot}096215$$
$$\log\sin\alpha = 9{\cdot}725433 \qquad \log\sin\alpha = 9{\cdot}725433$$
$$3{\cdot}018796 \qquad 2{\cdot}821648$$
$$\log a = 3{\cdot}050868 \qquad \log a = 3{\cdot}050868$$
$$\log\sin\beta = 9{\cdot}967928 \qquad \log\sin\gamma = 9{\cdot}770780$$
$$\beta = \begin{cases} 68^0\ 15'\ 1'' \\ 111^0\ 44'\ 59'' \end{cases} \qquad \gamma = 36^0\ 9'\ 1''.$$

Aus der Natur der Aufgabe sieht man hier, daß für β der stumpfe, für γ der spitzige Winkel genommen werden muß.

§. 256. Um den Flächeninhalt eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu bestimmen, hat man, wenn b, c und α gegeben sind, und man von C das Loth CD auf AB fällt, $CD = b \sin\alpha$; daher der Flächeninhalt des Dreiecks gleich

Fig. 294.



$$\tfrac{1}{2}\, b \,.\, \sin\alpha \,.\, c = \tfrac{1}{2}\, bc \,.\, \sin\alpha,$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte zweier Seiten, multiplicirt mit dem Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Beispiel. $b = 1965'$; $c = 1248'$; $\alpha = 32^0\ 6'\ 4''$.

$$\log b = 3{\cdot}293363$$
$$\log c = 3{\cdot}096215$$
$$\log\sin\alpha = 9{\cdot}725433$$
$$6{\cdot}115011$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301030$$
$$5{\cdot}813981$$

Flächeninhalt = 651600 □ Schuh.

§. 257. Der letzte Fall für die Auflösung der schiefwinklichten Dreiecke ist der, wenn die drei Seiten gegeben, und daraus die drei Winkel zu bestimmen sind.

Wir wissen vermöge des Carnot'schen Lehrsatzes, wenn a, b, c die drei Seiten eines Dreiecks, und α, β, γ die ihnen gegenüber liegenden Winkel sind, daß man hat:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos\alpha,$$

woraus $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$,

und in so fern wäre wohl die Aufgabe gelöset; denn diese Formel gibt die Größe des Winkels mittelst der Seiten an, und zwar so, daß über die Größe des Winkels kein Zweifel seyn kann, weil $\cos\alpha$, wenn es negativ wird, sich dann auf einen stumpfen Winkel bezieht, sonst aber, so lange es positiv ist, einen spitzigen Winkel anzeigt. Wir sehen zugleich aus dieser Formel. Ist

$b^2 + c^2 > a^2$, so muß α spitzig seyn;
$b^2 + c^2 = a^2$, so muß $\alpha = 90^\circ$ seyn;
$b^2 + c^2 < a^2$, so muß α stumpf seyn.

So gut diese Formel zu diesen und ähnlichen Betrachtungen paßt, so wenig ist sie zum wirklichen Berechnen brauchbar, weil sie nicht logarithmisch eingerichtet ist.

Nehmen wir die Gleichungen

$$1 = 1$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

und addiren und subtrahiren wir sie, so hat man:

$$1 + \cos\alpha = \frac{b^2 + 2\,b\,c + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{-\,b^2 + 2\,b\,c - c^2 + a^2}{2\,b\,c}$$

d. h. $$1 + \cos\alpha = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c}.$$

Der Zähler jeder dieser Brüche läßt sich in die Summe und den Unterschied der Wurzeln zerlegen, und man hat:

$$1 + \cos\alpha = \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,b\,c}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2\,b\,c}.$$

Dividirt man hier beiderseits durch 2, und erinnert sich, daß $\dfrac{1 + \cos\alpha}{2} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, $\dfrac{1 - \cos\alpha}{2} = \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ ist, so hat man:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{1\,b\,c}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{1\,b\,c}.$$

Setzt man nun der Kürze halber die halbe Summe der drei Seiten a, b, c gleich s, d. h.

$$\frac{a+b+c}{2} = s, \quad \text{oder} \quad a+b+c = 2s,$$

so hat man, wenn man nach und nach von der letzten Gleichung 2a, 2b, 2c abzieht:

$$-a+b+c = 2(s-a)$$
$$a-b+c = 2(s-b)$$
$$a+b-c = 2(s-c)$$

Substituirt man diese Werthe in obige Formeln, so hat man:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}; \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}, \text{ oder}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

Ganz eben so erhält man:

$$\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}; \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}; \quad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

woraus dann auch

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

$$\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

Zur logarithmischen Auflösung bemerke ich

$$\log\cos\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\,[\log s + \log(s-a) - (\log b + \log c)],$$

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2}\,[\log(s-b) + \log(s-c) - (\log b + \log c)].$$

Beispiel. $a = 1649$; $b = 1857$; $c = 1264$.

$$\begin{array}{r} 1649 \\ 1857 \\ 1264 \\ \hline 4770 \end{array}$$

$$\begin{aligned} s &= 2385 \\ s-a &= 736 \\ s-b &= 528 \\ s-c &= 1121 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \log b = 3{\cdot}268812 \\ \log c = 3{\cdot}101747 \\ \hline 6{\cdot}370559 \end{array}$$

$\log s = 3{\cdot}377488$
$\log (s - a) = 2{\cdot}866878$
$6{\cdot}244366$
$6{\cdot}370559$
$19{\cdot}873807 - 20$

$\log \cos \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}936903 - 10$
$\frac{\alpha}{2} = 30^{\circ}\ 8'\ 35''$ $\quad D = 74$
$\alpha = 60^{\circ}\ 17'\ 10''$

$\log (s - b) = 2{\cdot}722634$
$\log (s - c) = 3{\cdot}049606$
$5{\cdot}772240$
$6{\cdot}370559$
$19{\cdot}401681 - 20$

$\log \sin \frac{\alpha}{2} = 9{\cdot}700840 - 10$
$D = 217 \quad \frac{\alpha}{2} = 30^{\circ}\ 8'\ 34''$
$\alpha = 60^{\circ}\ 17'\ 8''$

$\log a = 3{\cdot}217221$
$\log c = 3{\cdot}101747$
$6{\cdot}318968$

$\log s = 3{\cdot}377488$
$\log (s - b) = 2{\cdot}722634$
$6{\cdot}100122$
$6{\cdot}318968$
$19{\cdot}781154 - 20$

$\log \cos \frac{\beta}{2} = 9{\cdot}890577 - 10$
$\frac{\beta}{2} = 38^{\circ}\ 59'\ 17''$ $\quad D = 102$
$\beta = 77^{\circ}\ 58'\ 34''$

$\log (s - a) = 2{\cdot}866878$
$\log (s - c) = 3{\cdot}049606$
$5{\cdot}916484$
$6{\cdot}318968$
$19{\cdot}597516 - 20$

$\log \sin \frac{\beta}{2} = 9{\cdot}798758 - 10$
$D = 156 \quad \frac{\beta}{2} = 38^{\circ}\ 59'\ 16''$
$\beta = 77^{\circ}\ 58'\ 32''$

$$\log a = 3{\cdot}217221$$
$$\log b = 3{\cdot}268812$$
$$\overline{\quad 6{\cdot}486033 \quad}$$
$$\log s = 3{\cdot}377488$$
$$\log (s-c) = 3{\cdot}049606$$
$$\overline{\quad 6{\cdot}427094 \quad}$$
$$6{\cdot}486033$$
$$\overline{\quad 19{\cdot}941061-20 \quad}$$
$$\log \cos \frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}970530-10$$
$$\frac{\gamma}{2} = 20^\circ\ 52'\ 10'' \qquad D = 48$$
$$\gamma = 41^\circ\ 44'\ 20''$$
$$\log (s-a) = 2{\cdot}866878$$
$$\log (s-b) = 2{\cdot}722634$$
$$\overline{\quad 5{\cdot}589512 \quad}$$
$$6{\cdot}486033$$
$$\overline{\quad 19{\cdot}103479-20 \quad}$$
$$\log \sin \frac{\gamma}{2} = 9{\cdot}551739-10$$
$$D = 331 \qquad \frac{\gamma}{2} = 20^\circ\ 52'\ 9''$$
$$\gamma = 41^\circ\ 44'\ 18''.$$

Wir haben hier überall die Differenz D der Logarithmen angesetzt, um einen Maßstab der Empfindlichkeit der Logarithmen zu haben. Wie wir sehen, ist überall der Sinus hier viel empfindlicher als der Cosinus; da nun die Angaben bei den halben Winkeln nur um 1″ variren, so nehmen wir hier durchaus die aus den Sinus entsprungenen, und haben somit:

$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ\ 8'\ 34''; \qquad \alpha = 60^\circ\ 17'\ 8''$$
$$\frac{\beta}{2} = 38^\circ\ 59'\ 16''; \qquad \beta = 77^\circ\ 58'\ 32''$$
$$\frac{\gamma}{2} = 20^\circ\ 52'\ 9''; \qquad \gamma = 41^\circ\ 44'\ 18''$$
$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 89^\circ\ 59'\ 59''; \quad \alpha + \beta + \gamma = 179^\circ\ 59'\ 58''$$

Diese eine Sekunde, die uns in der Summe der halben Winkel verloren ging, rührt von den Bruchtheilen der Sekunden her, die wir nicht berücksichtigt haben. Führt man dieselbe Aufgabe mit größeren Logarithmentafeln durch, so erhält man:

$$\frac{\alpha}{2} = 30^\circ\ 8'\ 34{\cdot}34'',$$
$$\frac{\beta}{2} = 38^\circ\ 59'\ 16{\cdot}15'',$$
$$\frac{\gamma}{2} = 20^\circ\ 52'\ 9{\cdot}51'',$$

Wie man also sieht, haben wir mit unsern sechsstelligen Logarithmen die Winkel bis auf die Einheit einer Sekunde genau bestimmt, und dieß ist mehr Genauigkeit, als das praktische Leben erfordert.

§. 258. Eine andere Art der Auflösung des letzteren Falles ist folgende:

Fig. 295.

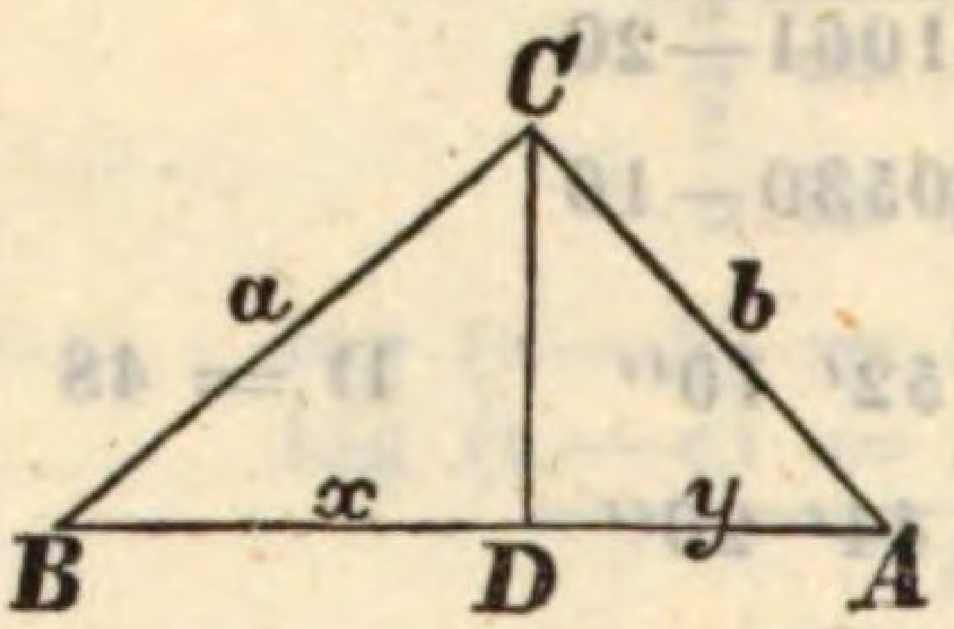
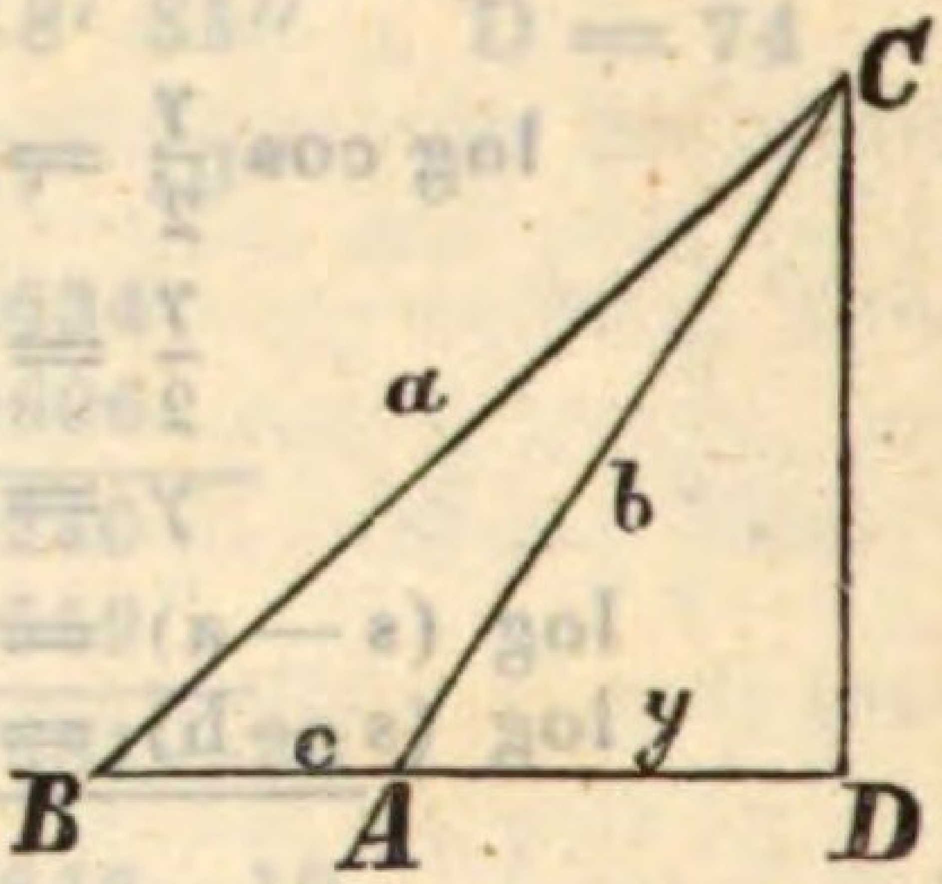


Fig. 296.



Es sey das Dreieck ABC, dessen Seiten BC = a, AC = b und AB = c gegeben seyen. Ich fälle von C das Loth CD auf AB, wodurch die zwei Stücke BD = x und AD = y entstehen, und zwar so, daß wir im ersten Falle $x + y = c$, im zweiten $x - y = c$ haben. Nun ist $CD^2 = a^2 - x^2 = b^2 - y^2$, folglich $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$, daher $(x + y)(x - y) = (a + b)(a - b)$, welche Gleichung für beide Fälle gilt; man hat somit für den ersten Fall

$$x + y = c; \; x - y = \frac{(a + b)(a - b)}{c},$$

für den zweiten Fall

$$x - y = c; \; x + y = \frac{(a + b)(a - b)}{c},$$

durch welche Gleichungen man x und y bestimmen kann. Hat man nun x und y gefunden, so hat man leicht $\cos B = \frac{x}{a}$; $\cos A = \frac{y}{b}$, wodurch die Winkel A und B, und folglich C bestimmt sind.

Beim Auflösen der Dreiecke wird in den wenigsten Fällen das fragliche Dreieck gezeichnet erscheinen; man wird also nicht wissen, welcher von den beiden Fällen Statt findet. Beim Rechnen macht aber dieß gar keinen Anstand; man berechnet durch Logarithmen den Ausdruck $\frac{(a + b)(a - b)}{c}$, und vergleicht die herausgekommene Zahl mit c; ist nun ersteres größer als c, so muß dieser Ausdruck $x + y$ bedeuten; ist er hingegen kleiner als c, so muß er $x - y$ bedeuten, weil die Summe der zwei Stücke stets größer seyn muß, als ihr Unterschied.

Ist $a < b$, also $a - b$ negativ, so gehet begreiflich $x - y$ in $y - x$ über, und zugleich $a - b$ in $b - a$.

Wenden wir diese Methode auf dasselbe Beispiel an.

$$a = 1649;\ b = 1857;\ c = 1264$$

$$\begin{aligned} a &= 1649 \\ \hline b + a &= 3506 \\ b - a &= 208 \\ \log(b+a) &= 3{\cdot}544812 \\ \log(b-a) &= 2{\cdot}318063 \\ \hline & \ 5{\cdot}862875 \\ \log c &= 3{\cdot}101747 \\ \hline & \ 2{\cdot}761128 \end{aligned}$$

Wie man schon aus den Logarithmen sieht, ist die Zahl, welche dem letztern Logarithmus entspricht, kleiner als c, daher ist dieser Logarithmus der von $y - x$, und man hat, wenn man die entsprechende Zahl sucht:

$y - x = 576{\cdot}937$, da nun jetzt $y + x = c$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned} y + x &= 1264 \\ y - x &= 576{\cdot}937 \\ \hline 2y &= 1840{\cdot}937 \\ 2x &= 687{\cdot}063 \\ y &= 920{\cdot}468 \\ x &= 343{\cdot}531 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log y &= 2{\cdot}964009 \qquad & \log x &= 2{\cdot}535966 \\ \log b &= 3{\cdot}268812 & \log a &= 3{\cdot}217221 \\ \hline \log\cos A &= 9{\cdot}695197 & \log\cos B &= 9{\cdot}318745 \\ A &= 60^\circ\ 17'\ 9'' & B &= 77^\circ\ 58'\ 33''; \end{aligned}$$

daher dann für C $41^\circ\ 44'\ 18''$ übrig bleibt.

Die kleinen Abweichungen dieser Auflösung von den frühern würden bei größern Logarithmentafeln wegfallen. Für den praktischen Bedarf ist aber die hier erlangte Genauigkeit vollkommen befriedigend.

§. 259. Sucht man den Werth des Stückes x, so findet man

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2c} + \frac{c}{2} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

Nun ist aber $CD^2 = a^2 - x^2$, daher

$$CD^2 = a^2 - \frac{(a^2 - b^2 + c^2)^2}{4c^2}, \text{ daher}$$

$$4\overline{CD}^2 \,.\, c^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2, \text{ somit:}$$

$$\begin{aligned} 4\overline{CD}^2 \,.\, c^2 &= (2ac + a^2 - b^2 + c^2)\,(2ac - a^2 + b^2 - c^2) \\ &= [(a+c)^2 - b^2] \,.\, [b^2 - (a-c)^2] \\ &= (a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c). \end{aligned}$$

Setzt man nun wieder $\frac{a+b+c}{2} = s$, d. h. $a + b + c = 2s$, wodurch $b + c - a = 2(s-a)$; $a - b + c = 2(s-b)$ und $a + b - c = 2(s-c)$ wird, so hat man:

$$4 \,.\, \overline{CD}^2 \,.\, c^2 = 16\, s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c), \text{ daher}$$

$$\frac{\overline{CD}^2\, c^2}{4} = s\,.\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\text{, oder}$$

$$\frac{CD\,.\,c}{2} = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

Da nun $\frac{CD\,.\,c}{2}$ der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist, dessen Seiten a, b, c sind, so hat man, wenn man diesen Flächeninhalt durch $\triangle$ bezeichnet,

$$\triangle = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)},$$

d. h. der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich der Quadratwurzel aus einem Ausdrucke, der das Produkt von vier Faktoren ist, deren erster die halbe Summe der Seiten ist, die drei andern erhalten werden, wenn man von dieser halben Summe jede einzelne Seite abzieht.

Beispiel.

$a = 1649'$	$\log s = 3{\cdot}377488$
$b = 1857'$	$\log (s-a) = 2{\cdot}866878$
$c = 1264'$	$\log (s-b) = 2{\cdot}722634$
4770	$\log (s-c) = 3{\cdot}049606$
$s = 2385$	$12{\cdot}016606$
$s-a = 736$	$\log \triangle = 6{\cdot}008303$
$s-b = 528$	$\triangle = 1019302$ □ Schuh.
$s-c = 1121$	

Substituirt man den Werth von s, so erhält man den symmetrischen (gleichartig gebildeten) Ausdruck:

$$\triangle = \tfrac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4},$$

welcher wissenschaftlich bemerkbar ist.

Um unsern Lesern die so nothwendige Uebung im Auflösen der Dreiecke zu verschaffen, lassen wir hier eine Reihe aufgelöster Dreiecke folgen; unsere Leser mögen nun beliebig drei Stücke herausnehmen, und die übrigen durch Rechnung finden.

I.	$a = 1289$	$A = 90^\circ$
	$b = 687{\cdot}5435$	$B = 32^\circ\ 14'\ 6''$
	$c = 1090{\cdot}323$	$C = 57^\circ\ 45'\ 54''$
II.	$a = 187$	$A = 90^\circ$
	$b = 88$	$B = 28^\circ\ 4'\ 21''$
	$c = 165$	$C = 61^\circ\ 55'\ 39''$
		$\triangle = 726^\circ$
III.	$a = 25$	$A = 112^\circ\ 11'\ 57''$
	$b = 13$	$B = 28^\circ\ 46'\ 50''$
	$c = 17$	$C = 39^\circ\ 3'\ 13''$
		$\triangle = 102\ 39093$
IV.	$a = 2467$	$A = 90^\circ$
	$b = 1359$	$B = 33^\circ\ 25'\ 36''{\cdot}6$
	$c = 2058{\cdot}93$	$C = 56^\circ\ 34'\ 23''{\cdot}4$

V.	$a = 3174{\cdot}07$	$A = 50^\circ\ 46'\ 45''{\cdot}02$
	$b = 2459$	$B = 39^\circ\ 13'\ 14''.98$
	$c = 2007$	$C = 90^\circ$
VI.	$a = 2789$	$A = 24^\circ\ 18'\ 12''$
	$b = 4006{\cdot}13$	$B = 36^\circ\ 14'\ 26''$
	$c = 5900{\cdot}55$	$C = 119^\circ\ 27'\ 22''$
VII.	$a = 5254{\cdot}866$	$A = 64^\circ\ 9'\ 16''$
	$b = 5648$	$B = 75^\circ\ 18'\ 28''{\cdot}07$
	$c = 3795$	$C = 40^\circ\ 32'\ 15''{\cdot}93$
VIII.	$a = 333$	$A = 67^\circ\ 57'\ 9''$
	$b = 333$	$B = 67^\circ\ 57'\ 9''$
	$c = 250$	$C = 44^\circ\ 5'\ 42''$
IX.	$a = 61\frac{4}{9}$	$A = 82^\circ\ 59'\ 48{\cdot}''8$
	$b = 33\frac{3}{4}$	$B = 33^\circ\ 2'\ 12{\cdot}''8$
	$c = 55\frac{5}{8}$	$C = 63^\circ\ 57'\ 58{\cdot}''4$
		$\triangle = 931{\cdot}669.$

§. 260. Zum Schlusse der Auflösungen der Dreiecke können wir noch die Fälle berühren, wo zwei Stücke des Dreiecks und der Flächeninhalt gegeben sind. Hiezu werden die von uns im Frühern bewiesenen Formeln Hülfe gewähren, nämlich, wenn $\triangle$ wie früher den Flächeninhalt bedeutet:

$$\triangle = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$$

$$\triangle = \frac{b\,c \sin\alpha}{2} = \frac{a\,c \sin\beta}{2} = \frac{a\,b \sin\gamma}{2}.$$

1. Sind zwei Seiten und der Flächeninhalt gegeben, z. B. $b, c, \triangle$, so hat man $\sin\alpha = \frac{2\,\triangle}{b\,c}$, daher b, c, α, wodurch man dann alle andern Stücke findet.

2. Ist eine Seite, ein dieser Seite gegenüberstehender Winkel und der Flächeninhalt gegeben, z. B. a, α, $\triangle$, so hat man

$$\frac{2\,.\,\triangle \sin\alpha}{a^2} = \sin\beta \sin\gamma = \tfrac{1}{2}\left[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)\right].$$

Da nun $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$ ist, so hat man:

$$\frac{4\,\triangle \sin\alpha}{a^2} - \cos\alpha = \cos(\beta-\gamma)$$

$$-\cos\alpha = \cos(\beta+\gamma),$$

wodurch β und γ bekannt, also auch die übrigen sich bestimmen lassen.

3. Ist eine Seite, ein anliegender Winkel und der Flächeninhalt gegeben, z. B. a, β, $\triangle$, so ist:

$$c = \frac{2\,\triangle}{a \sin\beta},$$

wodurch wieder das Uebrige gefunden werden kann.

4. Sind die drei Winkel und der Flächeninhalt gegeben, so hat man:

$$\frac{2\,\triangle \sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma} = a^2,\quad \frac{2\,\triangle \sin\beta}{\sin\alpha \sin\gamma} = b^2,\quad \frac{2\,\triangle \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta} = c^2.$$

§. 261. Zum Beschlusse der Auflösung der Dreiecke wollen wir zeigen, wie man den Einfluß beurtheilt, welchen Fehler in den gegebenen Stücken auf die zu berechnenden haben; eine für die praktische Meßkunst höchst wichtige Untersuchung. Bekanntlich ist keine Messung sowohl von geraden Linien als Winkeln gänzlich ohne Fehler möglich. Solche kleine unvermeidliche Fehler — nicht Fehler aus Nachläßigkeit — wollen wir hier im Auge haben; daher wir auch diese Fehler so klein annehmen wollen, daß die Quadrate derselben als verschwindend kleine Größen angesehen werden können, die man also auch in der Rechnung als hinausfallend betrachtet.

Wir wissen ferner, für einen sehr kleinen Winkel wird sein Cosinus sehr nahe 1, und der Sinus gleich seinem Bogen für den Halbmesser = 1.

I. Es sey eine Seite c und die ihr anliegenden Winkel α und β gegeben; wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluß haben kleine Fehler in der Bestimmung von c, α und β auf die Seite b.

Es ist $b \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$ (1).

Hat man nun nicht c, sondern c mehr seinem Fehler, den wir durch $\triangle c$ darstellen wollen, so hat man also statt c, $c + \triangle c$, eben so statt b, $b + \triangle b$, statt β, $\beta + \triangle\beta$, statt γ, $\gamma + \triangle\gamma$, wo wir hier alle Fehler als positiv ansehen; sind einige von ihnen negativ, so braucht man nur diese $\triangle\beta$ oder $\triangle\alpha$ u. s w. negativ zu setzen. Die Seiten nun $b + \triangle b$, $c + \triangle c$ bilden ein Dreieck, wo die gegenüberstehenden Winkel $\beta + \triangle\beta$, $\gamma + \triangle\gamma$ sind; daher hat man:

$(b + \triangle b) \sin(\gamma + \triangle\gamma) = (c + \triangle c) \sin(\beta + \triangle\beta)$ oder

$(b + \triangle b)(\sin\gamma + \cos\gamma \cdot \triangle\gamma) = (c + \triangle c)(\sin\beta + \cos\beta\, \triangle\beta)$,

weil $\cos\triangle\gamma = 1$, und $\sin\triangle\gamma = \triangle\gamma$, unter unserer Voraussetzung, daß $\triangle\gamma$ sehr klein ist, daher

$b \sin\gamma + \sin\gamma \triangle b + b\cos\gamma \triangle\gamma = c \sin\beta + \sin\beta \triangle c + c\cos\beta \triangle\beta$ (2),

weil wir $\triangle b \cdot \triangle\gamma \cdot \cos\gamma$ und $\triangle c\, \triangle\beta \cos\beta$ vernachläßigen; da wir annehmen, daß $\triangle\beta$ und $\triangle\gamma$ u. s. w so klein seyen, daß ihre Quadrate und Produkte in den Decimalen, die wir noch rechnen, keine bedeutende Ziffer mehr haben. Die Gleichung (2) gibt uns mit Rücksicht auf die Gleichung (1)

$\sin\gamma \cdot \triangle b + b \cdot \cos\gamma \cdot \triangle\gamma = \sin\beta \cdot \triangle c + c \cdot \cos\beta \cdot \triangle\beta$ oder

$\sin\gamma \cdot \triangle b = c \cdot \cos\beta \cdot \triangle\beta - b\cos\gamma \cdot \triangle\gamma + \sin\beta \cdot \triangle c$.

Da nun das, um was α und β zu groß gemessen sind, γ zu klein ausfällt, d. h. da $\triangle\gamma = -\triangle\alpha - \triangle\beta$ ist, so hat man:

$\sin\gamma \cdot \triangle b = c \cdot \cos\beta \cdot \triangle\beta + b\cos\gamma(\triangle\alpha + \triangle\beta) + \sin\beta \cdot \triangle c$, daher

$\sin\gamma \cdot \triangle b = (c\cos\beta + b\cos\gamma)\triangle\beta + b\cos\gamma \cdot \triangle\alpha + \sin\beta \cdot \triangle c$ oder

$\sin\gamma \cdot \triangle b = a \cdot \triangle\beta + b \cdot \cos\gamma \cdot \triangle\alpha + \sin\beta \cdot \triangle c$; daher

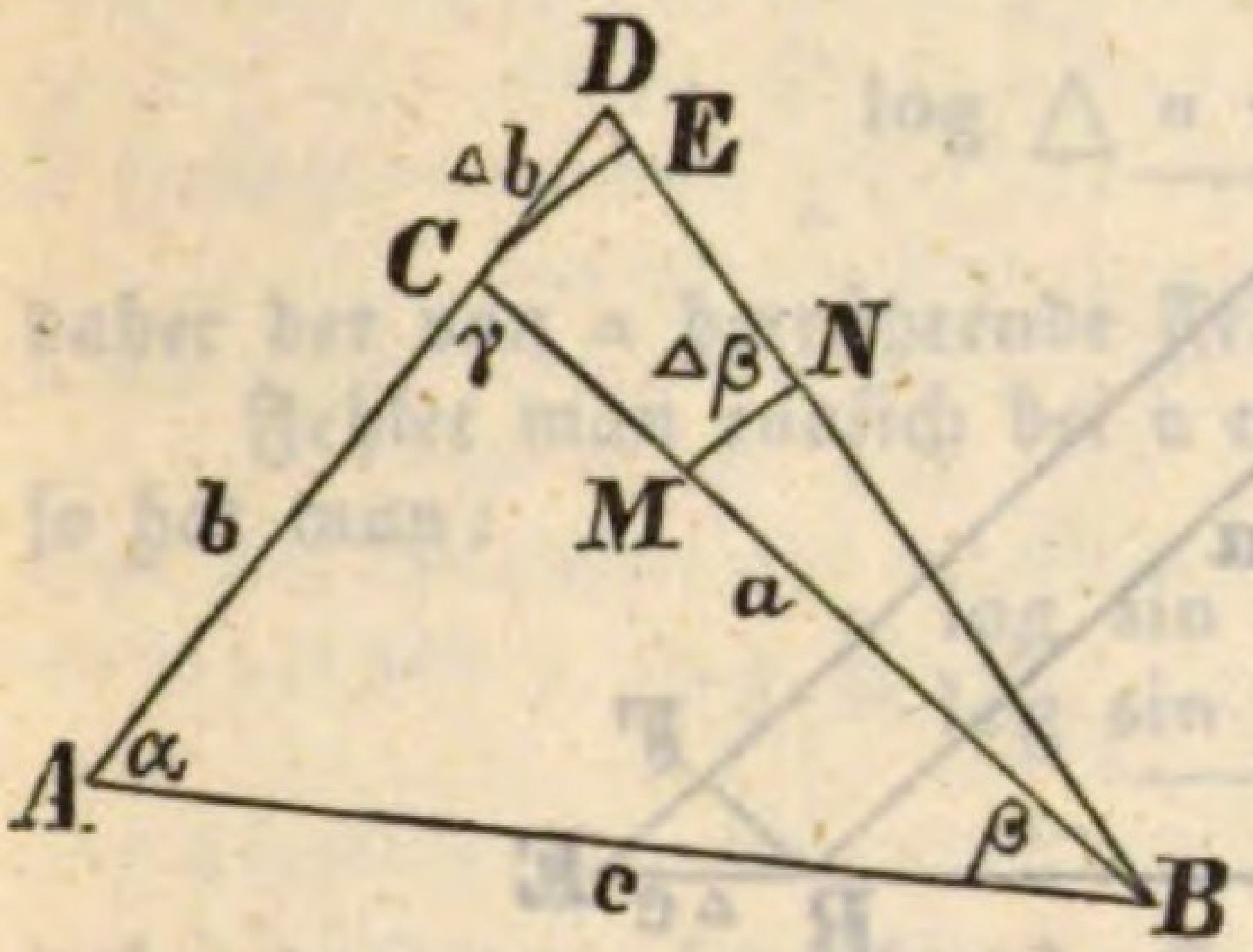
$$\triangle b = \frac{a}{\sin\gamma}\triangle\beta + \frac{b\cos\gamma}{\sin\gamma} \cdot \triangle\alpha + \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \cdot \triangle c \quad (3).$$

Wir haben hier die Größe des Fehlers $\triangle b$, mit dem b behaftet seyn wird, wenn β den Fehler $\triangle\beta$, α den Fehler $\triangle\alpha$, c den Fehler $\triangle c$ hat. Wäre c ohne Fehler, d. h. $\triangle c = 0$, und wäre eben so α ohne Fehler, d. h. $\triangle\alpha = 0$, so hätte man nur

$$\triangle b = \frac{a}{\sin\gamma} \cdot \triangle\beta.$$

Wir wollen dieß auch rein geometrisch erläutern.

Fig. 297.



Es sey das Dreieck A B C, dessen Seiten a, b, c, und die diesem gegenüberstehenden Winkel α, β, γ seyen.

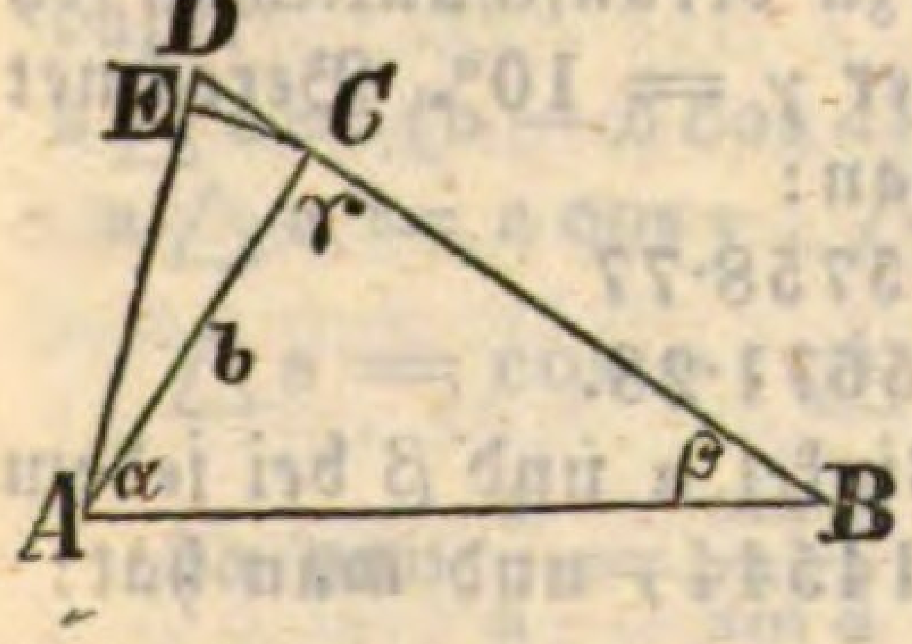
Hat man nun den Winkel B falsch gemessen, so daß er nicht A B C sondern A B D ist, so daß man für die Seite b nicht A C, sondern A D erhalt, so also, daß der Fehler C D $= \triangle b$ ist, so denken wir uns aus B mit dem Halbmesser M B = 1 einen Kreisbogen M N beschrieben. Da wir uns den Fehler, der in B gemacht wird, d. i. C B D, nicht in Minuten und Sekunden, sondern durch die Bogenlänge für den Halbmesser = 1 ausgedrückt denken, so ist also M N $= \triangle \beta$; denken wir uns nun aus B mit dem Halbmesser C B = a ebenfalls einen Kreisbogen C E beschrieben so ist C E $= a \triangle \beta$. Je kleiner nun $\triangle \beta$ ist, desto kleiner ist auch C E, um desto mehr wird C E sich seiner Sehne nähern, d. h. desto eher C E als gerades Stück angesehen werden können, und da bei sehr kleinen Bögen Bogen, Sehne und Berührungslinie immer mehr und mehr in einander fallen, so wird sich sowohl der Winkel B C E, als auch der Winkel C E B jeder immer mehr und mehr einem rechten Winkel nähern. Unter dieser Voraussetzung dann ist D C E $= 180^\circ - 90^\circ - \gamma = 90^\circ - \gamma$, daher C D E $= \gamma$, und somit, da wir C E D $= 90^\circ$ ansehen, haben wir sehr nahe C E = C D sin γ, d. h. $a \triangle \beta = \triangle b \sin \gamma$, und somit:

$$\triangle b = \frac{a \triangle \beta}{\sin \gamma}.$$

Würden aber β und c fehlerlos seyn, und nur α den Fehler $\triangle \alpha$ haben, so hätten wir:

$$\triangle b = b \cot \gamma \, . \, \triangle \alpha.$$

Fig. 298.

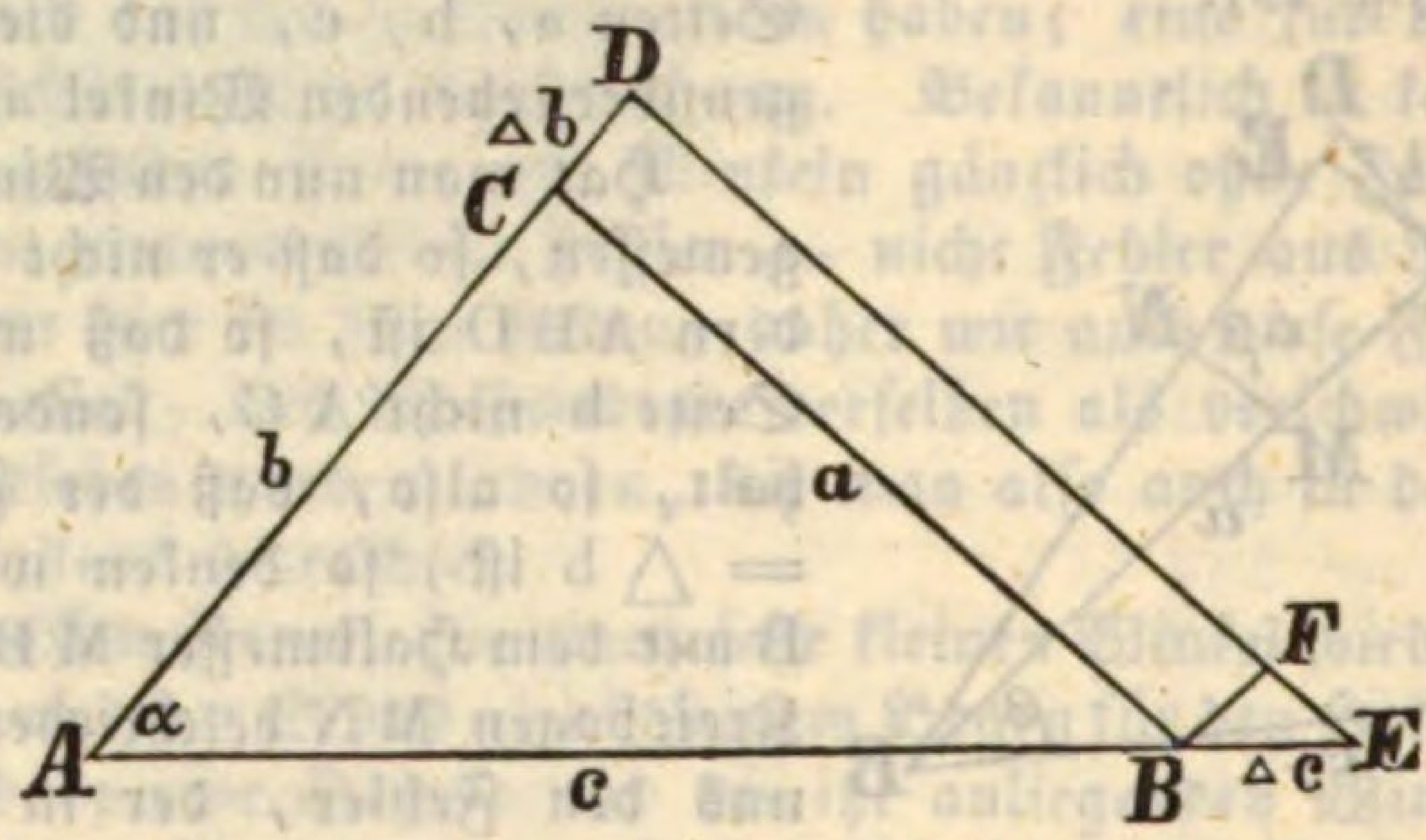


Beleuchten wir auch dieses geometrisch, so haben wir, wenn α um den Winkel C A D gefehlt ist, so daß der Bogen des Winkels C A D für den Halbmesser 1 gleich $\triangle \alpha$ ist, E C $= b \triangle \alpha$; unter denselben Bemerkungen wie früher ist E C D als ein rechtwinklichtes Dreieck zu betrachten, wo E D C $= \gamma$ ist, weil wir uns aus A mit dem Halbmesser A C = b einen Kreisbogen E C beschrieben denken, dann ist D E $= \triangle b$, und da nun E C = D E tang γ, folglich D E = E C cotg γ ist, so hat man $\triangle b = \text{cotg}\, \gamma \, . \, b \triangle \alpha$.

Ist endlich bloß c allein gefehlt, so hat man nach (3)

$$\triangle b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \, . \, \triangle c.$$

Fig. 299.



Da der Winkel β richtig ist, so erhält man, da nur c gefehlt ist um BE $= \triangle c$, den Winkel DEA $= \beta$, d. h. man erhält denselben Winkel β nur statt in B in E, daher ist DE $\parallel$ CB und statt b $=$ AC erhalte ich es gleich AD, so also, daß b um CD $= \triangle b$ gefehlt ist; ziehe ich nun durch B die BF $\parallel$ AD, so ist FBE $= \alpha$, daher BF : BE $=$ sin FEB : sin BFE, oder

$$\triangle b : \triangle c = \sin \beta : \sin \gamma, \text{ daher } \triangle b = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \cdot \triangle c.$$

Die Gleichung (3) oben, wo alle Fehler zu gleicher Zeit erscheinen, lehrt uns, daß, wenn auch die Fehler $\triangle \alpha$, $\triangle \beta$, $\triangle c$ nur sehr klein sind, doch $\triangle b$, und auf ähnliche Art auch $\triangle c$ bedeutender seyn können, sobald sin γ sehr klein ist, d. h. sobald γ entweder sehr klein ist, oder γ ein sehr stumpfer Winkel ist, daher man bei der Ausübung solche Fälle nach Möglichkeit zu vermeiden hat. Wir haben hier den ungünstigsten Fall im Auge gehabt, wo alle Fehler positiv sind; ist einer von ihnen negativ, so vermindert dieses natürlich den Fehler $\triangle b$, und es läßt sich sogar der Fall als möglich denken, daß die Fehler sich gegenseitig aufheben, und $\triangle b = 0$, d. h. b fehlerlos erscheint.

Um das Vorhergehende durch ein Beispiel zu veranschaulichen, sey AB $= c = 1000^{\circ}$ $\alpha = 80^{\circ}$, $\beta = 90^{\circ}$, daher $\gamma = 10^{\circ}$. Berechnet man nach diesen Stücken b und a, so erhält man:

$$\log b = 3{\cdot}760330 \text{ und } b = 5758{\cdot}77$$
$$\log a = 3{\cdot}753681 \text{ und } a = 5671{\cdot}28.$$

Fehlet man aber bei Bestimmung der Winkel α und β bei jedem um 5′, so ist $\triangle \alpha = \triangle \beta = \text{arc } 5' = 0{\cdot}0014544$, und man hat:

$$\begin{array}{rl} \log a = & 3{\cdot}753681 \\ \log \triangle \beta = & 0{\cdot}162684-3 \\ \hline & 0{\cdot}916365 \\ \log \sin \gamma = & 9{\cdot}239670 \\ \hline & 1{\cdot}676695; \end{array}$$

daher der von β herrührende Fehler $\frac{a \triangle \beta}{\sin \gamma} = 47{\cdot}5$

$$\log b = 3{\cdot}760330$$
$$\log \cot g\, \gamma = 0{\cdot}753681$$
$$4{\cdot}514011$$
$$\log \triangle \alpha = 0{\cdot}162684 - 3$$
$$1{\cdot}676695;$$

daher der von α herrührende Fehler $b \cot g\, \gamma \triangle \alpha = 47{\cdot}^{o}5$.

Fehlet man endlich bei c nur um 1^{o}, so also, daß $\triangle c = 1$ ist, so hat man:

$$\log \sin \beta = 0{\cdot}000000$$
$$\log \sin \gamma = 9{\cdot}239670$$
$$0{\cdot}760330;$$

daher der von c herrührende Fehler $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \triangle c = 5{\cdot}758$.

Sind also alle drei Fehler positiv, so beträgt der Gesammtfehler um was man b zu groß erhält, $95 + 5{\cdot}758 = 100{\cdot}758$.

Löset man das Dreieck, wo $c = 1001$; $\alpha = 80^{o}\,5'$; $\beta = 90^{o}\,5'$ ist, wirklich auf, so erhält man für b, $5861{\cdot}2$, daher $\triangle b = 102{\cdot}4$, was vom Obigen nur um etwas mehr als eine Einheit abweicht.

II. Sind zwei Seiten b und c, und der eingeschlossene Winkel α gegeben, so hat man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad (4).$$

Ist aber a um $\triangle a$, b um $\triangle b$ u. s. w. gefehlt, so hat man für das Dreieck, welches aus den fehlerhaften Stücken zusammengesetzt ist:

$$(a+\triangle a)^2 = (b+\triangle b)^2 + (c+\triangle c)^2 - 2(b+\triangle b)(c+\triangle c)\cos(\alpha+\triangle \alpha)$$

oder, da wir wieder $\triangle b$, $\triangle c$ u. s. w. so klein ansehen wollen, daß man die Quadrate und Produkte vernachläßigen kann:

$$a^2 + 2a\triangle a = b^2 + 2b\triangle b + c^2 + 2c\triangle c$$
$$- 2(bc + c\triangle b + b\triangle c)(\cos \alpha - \sin \alpha \,.\, \triangle \alpha) \text{ oder}$$
$$a^2 + 2a\triangle a = b^2 + 2b\triangle b + c^2 + 2c\triangle c$$
$$- 2bc \cos \alpha - 2(c\triangle b + b\triangle c)\cos \alpha + 2bc \sin \alpha \triangle \alpha;$$

daher mit Rücksicht auf (4) hat man somit:

$$a\triangle a = b\triangle b + c\triangle c - (c\triangle b + b\triangle c)\cos \alpha + bc \sin \alpha \,.\, \triangle \alpha;$$

daher

$$a\triangle a = (b - c\cos \alpha)\triangle b + (c - b\cos \alpha)\triangle c + bc \,.\, \sin \alpha \,.\, \triangle \alpha \text{ oder}$$
$$a\triangle a = a\cos \gamma \,.\, \triangle b + a\cos \beta \,.\, \triangle c + bc \sin \alpha \,.\, \triangle \alpha; \text{ daher}$$
$$\triangle a = \cos \gamma \,.\, \triangle b + \cos \beta \,.\, \triangle c + \frac{bc}{a} \sin \alpha \,.\, \triangle \alpha;$$

da nun $\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$, daher $\frac{bc \sin \alpha}{a} = b \sin \gamma$ ist, so hat man:

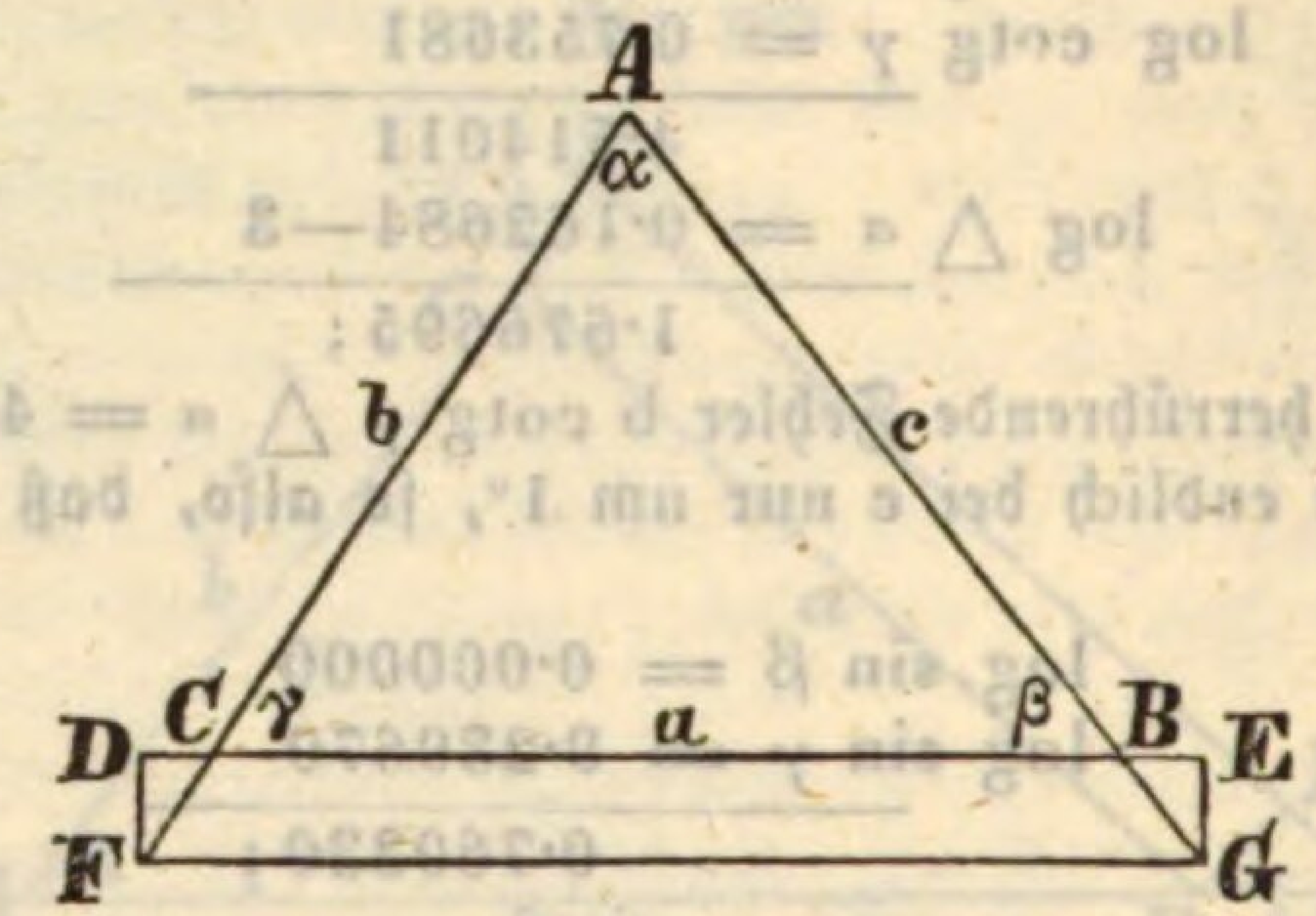
$$\triangle a = \cos \gamma \,.\, \triangle b + \cos \beta \,.\, \triangle c + b \sin \gamma \,.\, \triangle \alpha \quad (5)$$

Wie man hier sieht, ist der Fehler $\triangle \alpha$ von großem Einfluß auf $\triangle a$.

Auch die Gleichung (5) läßt sich leicht geometrisch deuten; nehmen wir zuerst α als fehlerlos, d. h. $\triangle \alpha = 0$ an, so hat man:

$$\triangle a = \cos \gamma \,.\, \triangle b + \cos \beta \,.\, \triangle c.$$

Fig. 300.

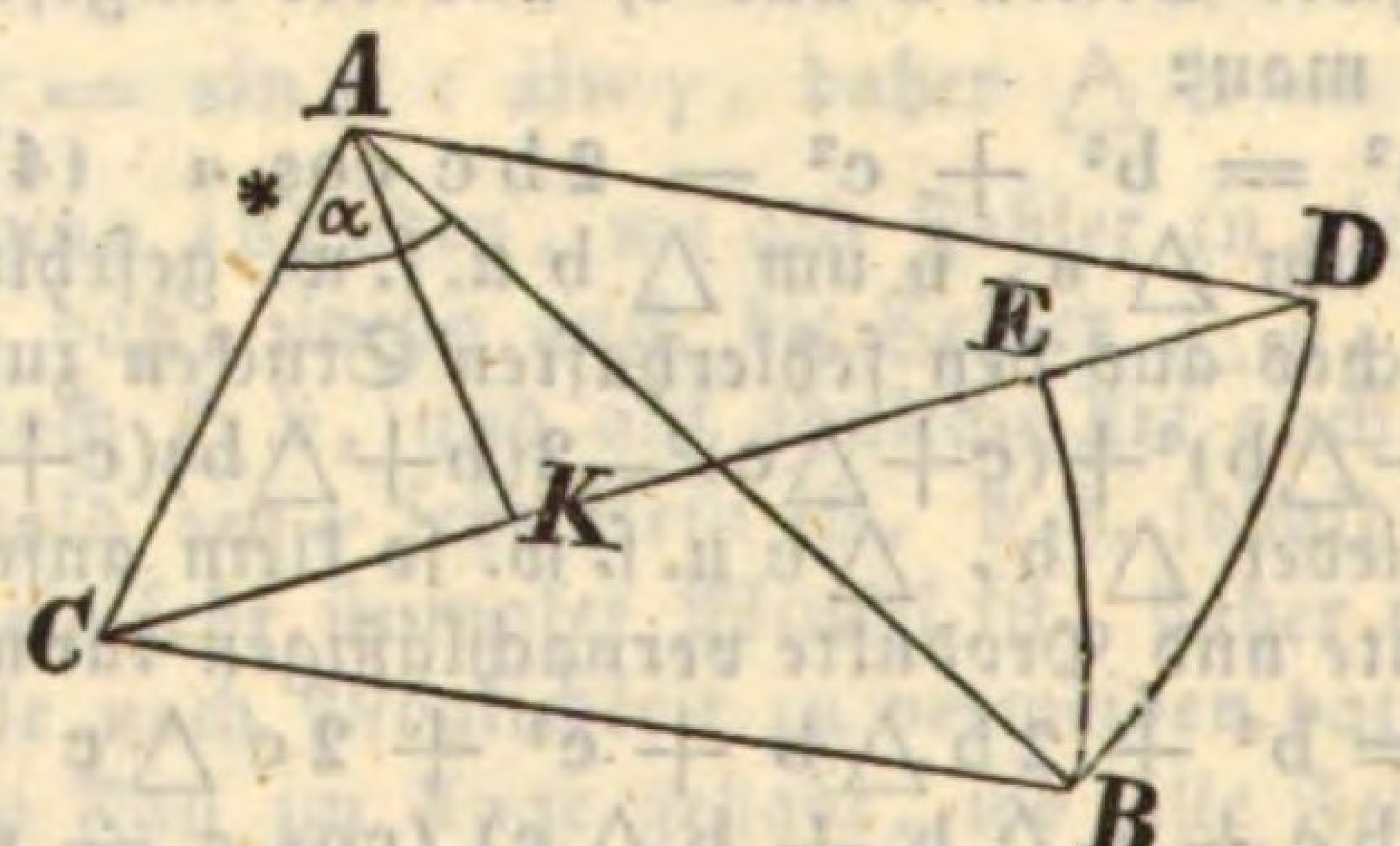


Ist nämlich $\triangle b = CF$, und $BG = \triangle c$, so erhält man statt der richtigen CB die falsche FG, und es ist $\triangle a = FG - CB$; daher

$$\triangle a = CD + BE = CF \cos\gamma + BG \cos\beta = \triangle b \cos\gamma + \triangle c \,.\, \cos\beta.$$

Sind aber b und c richtig, dagegen α gefehlt, so hat man:

Fig. 301.



Ist CBA das richtige Dreieck, $BAD = \triangle\alpha$, so erhält man für a statt der CB die unrichtige CD; beschreibt man nun aus A mit $AB = AD = c$ den Bogen BD, und aus C mit $CB = a$ den Bogen BE, so ist $DE = \triangle a$; fällt man nun aus A das Loth AK auf CD, so wird unter der Voraussetzung, daß $\triangle\alpha$ sehr klein sey, das Dreieck BED sich immer mehr einem geradlinigen Dreiecke nähern, und wir finden leicht, daß das Dreieck BED mit dem Dreiecke AKD ähnlich ist; denn $AK \perp ED$, $KD \perp EB$, $AD \perp BD$, und daher $AK : AD = ED : BD$, daher $AK \,.\, BD = AD \,.\, ED$, nun ist $AK = b \sin ACK = b \sin(\gamma - \triangle\gamma) = b \sin\gamma - b \cos\gamma \triangle\gamma$, $BD = c\triangle\alpha$, $AD = c$, $ED = \triangle a$, daher $(b \sin\gamma - b \cos\gamma \triangle\gamma) \,.\, c \triangle\alpha = c \triangle a$, folglich $b \sin\gamma \,.\, \triangle\alpha = \triangle a$ wie oben.

III. Sind die drei Seiten a, b, c gegeben, und man hat die Winkel zu suchen, so hat man für das richtige Dreieck:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{ oder } 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2 \quad (6);$$

für das Dreieck aber mit den fehlerhaften Seiten: $a + \triangle a$, $b + \triangle b$, $c + \triangle c$ erhält man auch den fehlerhaften Winkel $\gamma + \triangle\gamma$, und hat daher:

$$\cos(\gamma + \triangle\gamma) = \frac{(a+\triangle a)^2 + (b+\triangle b)^2 - (c+\triangle c)^2}{2(a+\triangle a)(b+\triangle b)} \text{ oder}$$

$$2\cos(\gamma+\triangle\gamma)(a+\triangle a)(b+\triangle b)$$
$$= (a+\triangle a)^2 + (b+\triangle b)^2 - (c+\triangle c)^2, \text{ d. h.}$$
$$2[\cos\gamma - \sin\gamma \,.\, \triangle\gamma](a+\triangle a)(b+\triangle b)$$
$$= a^2 + 2a\triangle a + b^2 + 2b\triangle b - c^2 - 2c\triangle c$$
$$2ab\cos\gamma - 2ab\sin\gamma \,.\, \triangle\gamma + 2(a\triangle b + b\triangle a)\cos\gamma$$
$$= a^2 + 2a\triangle a + b^2 + 2b\triangle b - c^2 - 2c\triangle c,$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichung (6)

$$-2ab\sin\gamma\triangle\gamma + 2(a\triangle b + b\triangle a)\cos\gamma$$
$$= 2a\triangle a + 2b\triangle b - 2c\triangle c; \text{ daher}$$
$$-ab\sin\gamma\triangle\gamma = (a - b\cos\gamma)\triangle a + (b - a\cos\gamma)\triangle b - c\triangle c$$
$$-ab\sin\gamma\triangle\gamma = c\cos\beta\triangle a + c\cos\alpha \,.\, \triangle b - c\triangle c.$$

Setzt man statt $\cos\beta$ und $\cos\alpha$ ihre Werthe durch a, b und c, so ist:

$$-ab\sin\gamma \,.\, \triangle\gamma = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\triangle a + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\triangle b - c\triangle c,$$

daher

$$\triangle\gamma = \frac{b(b^2-a^2-c^2)\triangle a + a(a^2-b^2-c^2)\triangle b + 2abc\triangle c}{2a^2b^2\sin\gamma}.$$

Bedeutet nun F den Flächeninhalt des richtigen Dreiecks, so also, daß $2F = ab\sin\gamma$ ist, so hat man:

$$\triangle\gamma = \frac{b(b^2-a^2-c^2)\triangle a + a(a^2-b^2-c^2)\triangle b + 2abc\triangle c}{4abF} \quad (7).$$

Würden wir hier annehmen, daß die Fehler der Länge der Seiten proportional wären, d. h. wenn man z. B. mit einem fehlerhaften Maßstabe alle drei Seiten messen würde, so wäre, wenn der Fehler für die Einheit der Längen $= f$ wäre, dann $\triangle a = af$, $\triangle b = bf$, $\triangle c = cf$, und man hätte:

$$\triangle\gamma = \frac{b(b^2-a^2-c^2)af + a(a^2-b^2-c^2)bf + 2abc^2f}{4abF} \text{ oder}$$

$$\triangle\gamma = \frac{b^2-a^2-c^2+a^2-b^2-c^2+2c^2}{4F} \,.\, f,$$

d. h. $\triangle\gamma = 0$.

Ganz natürlich, denn wenn nur alle Seiten des Dreiecks mit demselben, wenn auch nicht richtigen Maßstabe gemessen werden, so bleibt doch ihr Verhältniß dasselbe, und man bekommt die Winkel richtig.

Die Gleichung (7) gibt:

$$4F\triangle\gamma = \frac{b^2-a^2-c^2}{a}\triangle a + \frac{a^2-b^2-c^2}{b}\triangle b + 2c\triangle c,$$

eben so erhält man:

$$4F\triangle\beta = \frac{c^2-a^2-b^2}{a}\triangle a + 2b \,.\, \triangle b + \frac{a^2-b^2-c^2}{c}\triangle c,$$

$$4F\triangle\alpha = 2a \,.\, \triangle a + \frac{c^2-a^2-b^2}{b}\triangle b + \frac{b^2-a^2-c^2}{c}\triangle c.$$

Addirt man diese drei Gleichungen, so sieht man, daß man ganz leicht erhält:

$$4F(\triangle\alpha + \triangle\beta + \triangle\gamma) = 0, \text{ daher}$$
$$\triangle\alpha + \triangle\beta + \triangle\gamma = 0.$$

Ein leicht begreifliches Resultat; denn mit den drei gefehlten Seiten bildet man zwar ein anderes Dreieck als man sollte, ein Dreieck, welches andere Winkel als α, β, γ hat; da aber doch die Winkel in diesem aus den unrichtigen Seiten zusammengesetzten Dreieck zusammen 180° betragen müssen, so wird, was der eine Winkel zu viel erhält, dem andern weggenommen, so daß die Summe der drei Fehler der Winkel zusammen sich auf Null reduciren muß.

Beispiel. Es sey ein Dreieck, dessen Seiten: $a = 130$; $b = 71{\cdot}5$; $c = 84{\cdot}5$ sind; löset man dieses Dreieck auf, so erhält man: $\alpha = 112^\circ\ 37'\ 11''$; $\beta = 30^\circ\ 30'\ 37''$; $\gamma = 36^\circ\ 52'\ 12''$ und Flächeninhalt $F = 2788{\cdot}5$.

Gesetzt nun, man würde die Seiten a nur 71 und c nur 84 annehmen, d. h. $\triangle b = \triangle c = 0{\cdot}5$ setzen, wie groß würden die Fehler bei den Winkeln seyn. Ich will hier nur bemerken, daß diese Fehler ziemlich bedeutend sind, wir aber die Rechnung zur Erläuterung des Vorhergehenden durchführen wollen

Da hier $\triangle a = 0$ ist, weil wir a als richtig annehmen, so hat man:

$$4F \,.\, \triangle\gamma = -\ 32{\cdot}5 - 84{\cdot}5 = -\ 117$$
$$4F \,.\, \triangle\beta = -\ 71{\cdot}5 - 27{\cdot}5 = -\ 99$$
$$4F \,.\, \triangle\alpha = 104 + 112 = +\ 216; \text{ daher}$$
$$\triangle\gamma = -\ 0{\cdot}010489$$
$$\triangle\beta = -\ 0{\cdot}008876$$
$$\triangle\alpha = +\ 0{\cdot}019365.$$

Da dieses Bogen für den Halbmesser = 1 sind, so bekömmt mittelst unserer Tafel für solche Bögen für diese folgende Gradmaße, nämlich:

$$\triangle\gamma = -\ 36'\ 3''$$
$$\triangle\beta = -\ 30'\ 31''$$
$$\triangle\alpha = +\ 1^\circ\ 6'\ 34''.$$

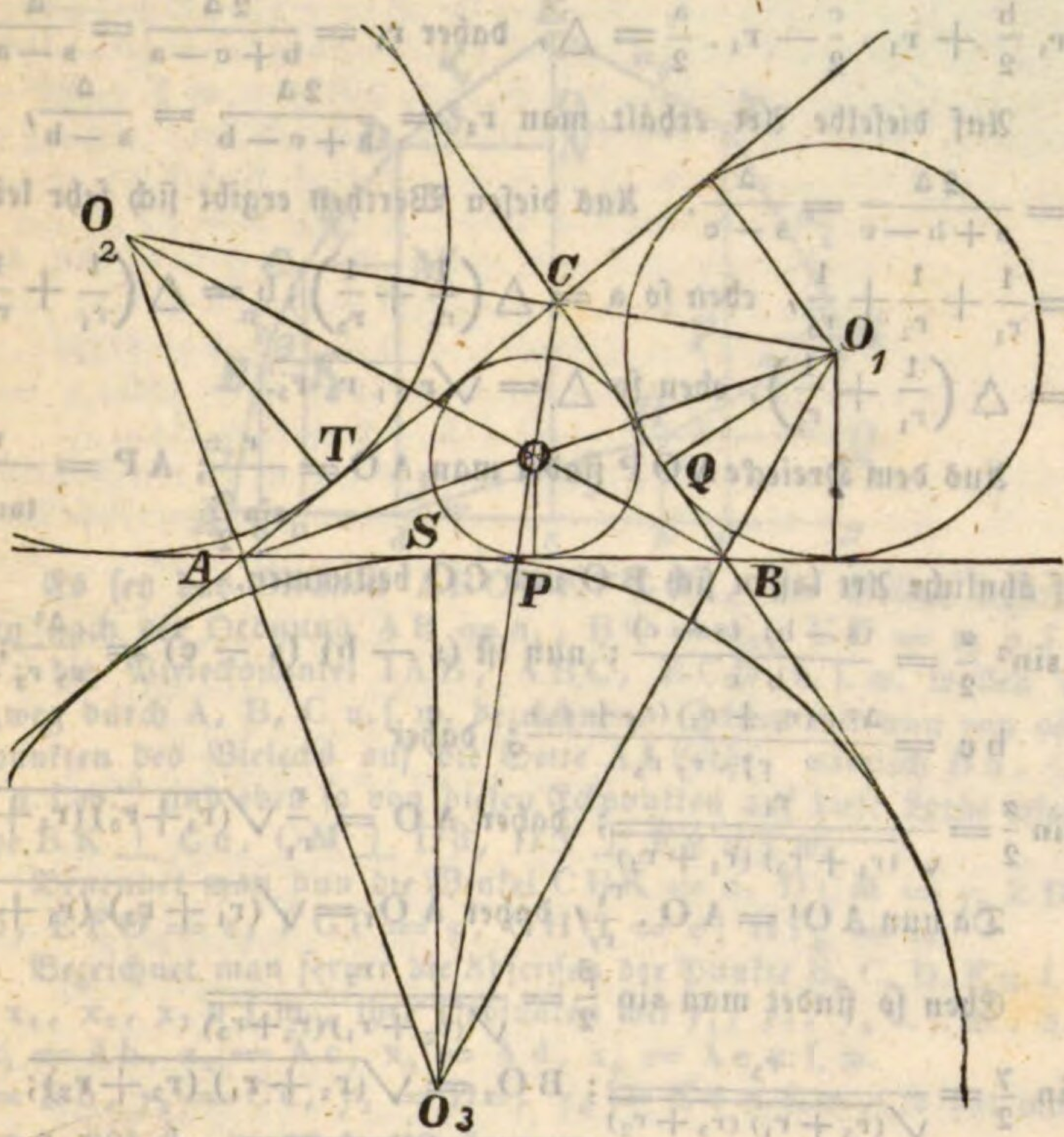
Wir sehen also, der Fehler $\triangle\alpha$ ist so bedeutend, daß sich unsere Weglassungen bei Entwickelung unserer Formel für die Fehler nicht mehr ganz rechtfertigen lassen. Nehmen wir nun das Dreieck $a = 130$, $b = 71$, $c = 84$ vor, und lösen wir dasselbe auf, so erhalten wir:

$\alpha = 113^\circ\ 44'\ 42''$; daher ist $\triangle\alpha\ 1^\circ\ 7'\ 36''$
$\beta = 29^\circ\ 59'\ 41''$; » » $\triangle\beta - 30'\ 56''$
$\gamma = 36^\circ\ 15'\ 38''$; » » $\triangle\gamma - 36'\ 34''$

Würden die Fehler $\triangle b$ und $\triangle c$ kleiner seyn, so würden auch die für $\triangle\alpha$, $\triangle\beta$, $\triangle\gamma$ erhaltenen Resultate weit besser stimmen.

§. 262. Als ein Beispiel der Anwendung der Trigonometrie auch auf theoretische Untersuchungen mag Folgendes dienen.

Fig. 302.



Es sey das Dreieck ABC, halbiren wir jeden der drei inneren Winkel, so schneiden sich diese Linien in O, welcher der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises ist.

Halbirt man eben so den inneren Winkel A, und die äußeren in B und C, so schneiden auch diese Halbirungslinien sich in einem Punkte O_1, der auch von allen drei Seiten gleich weit absteht, und der Mittelpunkt eines Kreises ist, der die BC von außen, und AC und AB von innen berührt. Auf ähnliche Art erhält man O_2 und O_3, welche die Mittelpunkte von Kreisen sind, welche ebenfalls die drei Seiten des Dreiecks berühren.

Nennen wir nun die vier Halbmesser der Ordnung nach $OP = r$, $O_1Q = r_1$, $O_2T = r_2$, $O_3S = r_4$, so sieht man sehr leicht, daß $AOB + BOC + AOC = ABC$, dessen Flächeninhalt wir durch $\triangle$ ausdrücken wollen, daher wenn $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ ist.

$$r \cdot \frac{c}{2} + r \cdot \frac{a}{2} + r \cdot \frac{b}{2} = \triangle, \text{ daher } r = \frac{2\Delta}{a+b+c} = \frac{\Delta}{s},$$

wo s wie früher die halbe Summe der Seiten bedeutet. Eben so aber

ist auch $ACO_1 + ABO_1 - CBO_1 = \triangle$, oder

$$r_1 \frac{b}{2} + r_1 . \frac{c}{2} - r_1 . \frac{a}{2} = \triangle, \text{ daher } r_1 = \frac{2\Delta}{b+c-a} = \frac{\Delta}{s-a}.$$

Auf dieselbe Art erhält man $r_2 = \frac{2\Delta}{a+c-b} = \frac{\Delta}{s-b}$, und

$r_3 = \frac{2\Delta}{a+b-c} = \frac{\Delta}{s-c}$. Aus diesen Werthen ergibt sich sehr leicht:

$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$, eben so $a = \triangle\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$; $b = \triangle\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3}\right)$;

$c = \triangle\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, eben so $\triangle = \sqrt{r\, r_1\, r_2\, r_3}$.

Aus dem Dreiecke AOP findet man $AO = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$; $AP = \frac{r}{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}$, auf ähnliche Art lassen sich BO und CO bestimmen.

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(s-b)\ (s-c)}{b\,.\,c}; \text{ nun ist } (s-b)\ (s-c) = \frac{\Delta^2}{r_2\, r_3};$$

$$bc = \frac{\Delta^2 . (r_1 + r_3)(r_1 + r_2)}{r_1^2 . r_2\, r_3}; \text{ daher}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r_1}{\sqrt{(r_1 + r_3)(r_1 + r_2)}}; \text{ daher } AO = \frac{r}{r_1}\sqrt{(r_1 + r_3)(r_1 + r_2)}.$$

Da nun $AO^1 = AO . \frac{r_1}{r}$, daher $AO_1 = \sqrt{(r_1 + r_3)\ (r_1 + r_2)}$.

Eben so findet man $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{r_2}{\sqrt{(r_2 + r_1)(r_2 + r_3)}}$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r_3}{\sqrt{(r_3 + r_1)(r_3 + r_2)}}; \; BO_2 = \sqrt{(r_2 + r_1)\ (r_2 + r_3)};$$

$$CO_3 = \sqrt{(r_3 + r_1)\ (r_3 + r_2)}.$$

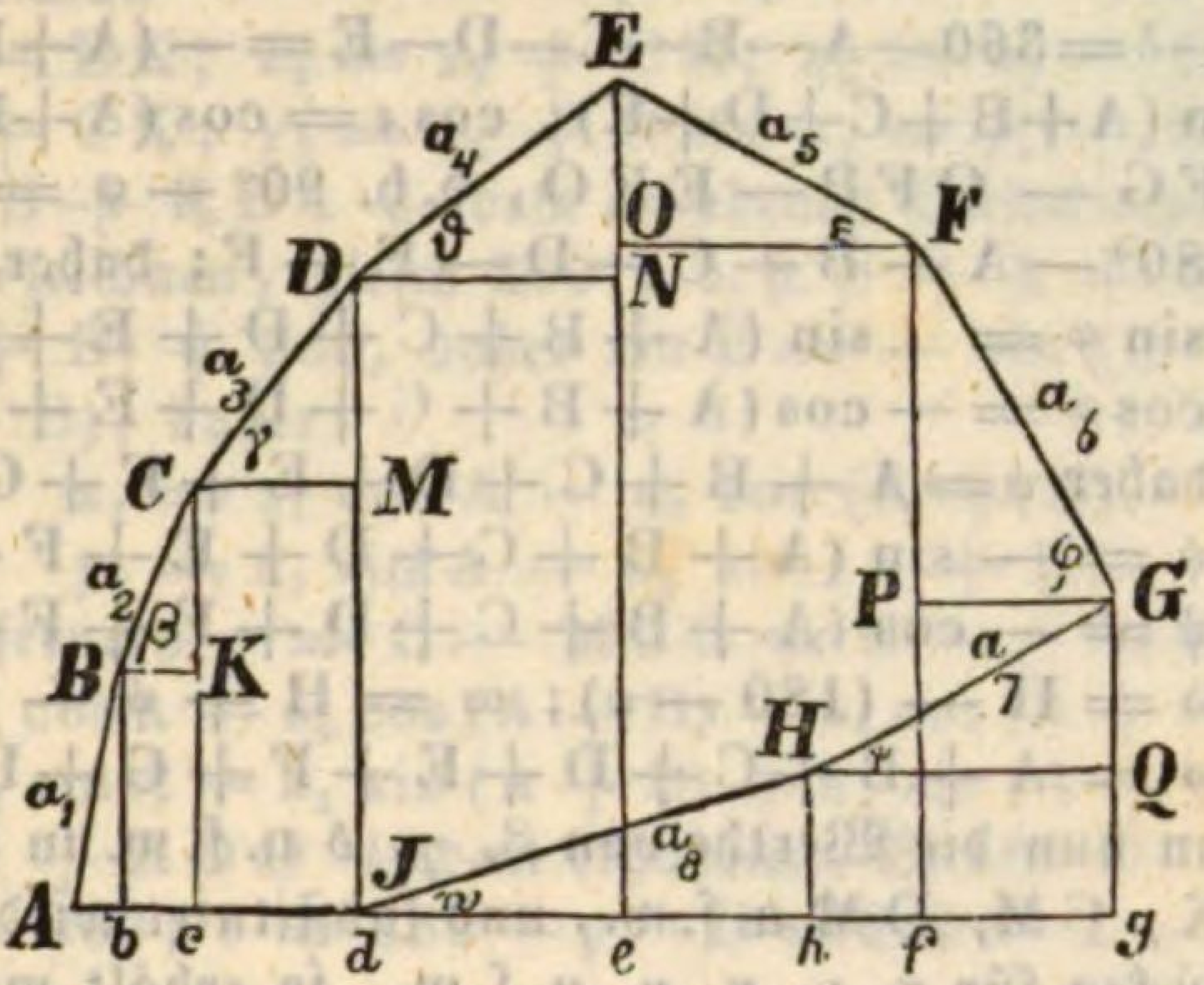
Eben so findet man $AO_1 = \frac{\Delta}{\sin\frac{\alpha}{2}(s-a)}$; $BO_2 = \frac{\Delta}{\sin\frac{\beta}{2}(s-b)}$;

$$CO_3 = \frac{\Delta}{\sin\frac{\gamma}{2}(s-c)}.$$

Zwischen diesen verschiedenen Größen lassen sich mehrere merkwürdige Bezüge auffinden, die wir unsern Lesern überlassen.

§. 263. Wir wollen nun den Zusammenhang der Seiten und Winkel in einem Vielecke untersuchen, oder die Grundbegriffe der sogenannten Polygonometrie entwickeln.

Fig. 303.



Es sey das Neuneck ABCDEFGHI, die Seiten desselben sollen nach der Ordnung $AB = a_1$, $BC = a_2$, $CD = a_3$ u. s. w. seyn; die Vieleckswinkel IAB, ABC, BCD u. s. w. wollen wir kurzweg durch A, B, C u. s. w. bezeichnen. Fällen wir nun von allen Eckpunkten des Vielecks auf die Seite AI Lothe, nämlich Bb, Cc, Dd u. s. w., und eben so von diesen Eckpunkten auf diese Lothe wieder Lothe $BK \perp Cc$, $CM \perp Dd$, $DN \perp Ee$ u. s. w.

Benennet man nun die Winkel $CBK = \beta$, $DCM = \gamma$, $EDN = \delta$, $EFO = \varepsilon$, $FGP = \varphi$, $GHQ = \psi$, $HIg = \omega$.

Bezeichnet man ferner die Abscissen der Punkte B, C, D, E u. s. w. mit x_1, x_2, x_3 u. s. w., ihre Ordinaten mit y_1, y_2, y_3 u. s. w., d. h. ist $x_1 = Ab$, $x_2 = Ac$, $x_3 = Ad$, $x_4 = Ae$ u. s. w.
$y_1 = Bb$, $y_2 = Cc$, $y_3 = Dd$, $y_4 = Ee$ u. s. w., so hat man:
$x_1 = a_1 \cos A$, $y_1 = a_1 \sin A$,
$x_2 = x_1 + BK$; $x_3 = x_2 + CM$; $x_4 = x_3 + DN$; $x_5 = x_4 + OF$;
$x_6 = x_5 + PG$; $x_7 = x_6 - HQ$; $x_8 = x_7 - Ih = AI$.
$y_2 = y_1 + CK$; $y_3 = y_2 + DM$; $y_4 = y_3 + EN$; $y_5 = y_4 - EO$;
$y_6 = y_5 - FP$; $y_7 = y_6 - GQ$; $y_8 = y_7 - Hh = 0$.

Nun ist $CK = a_2 \sin \beta$; $BK = a_2 \cos \beta$; $DM = a_3 \sin \gamma$; $CM = a_3 \cos \gamma$ u. s. w.

Wir wollen nun die Winkel β, γ, δ, ε u. s. w. durch die Vieleckswinkel A, B, C, D u. s. w. ausdrücken.
$\beta = ABC - bBK - ABb = B - 90 - (90 - A) = A + B - 180$; daher
$\cos \beta = \cos (A + B - 180) = \cos (180 - A - B) = -\cos (A + B)$
$\sin \beta = \sin (A + B - 180) = -\sin (180 - A - B) = -\sin (A + B)$
$\gamma = BCD - MCK - BCK = C - 90 - (90 - \beta) = C + \beta - 180$,
also $\gamma = A + B + C - 360 = A + B + C$; daher
$\sin \gamma = \sin (A + B + C)$; $\cos \gamma = \cos (A + B + C)$.
$\delta = CDE - MDN - CDM = D - 90^\circ - (90 - \gamma) = D + \gamma - 180$,
also $\delta = A + B + C + D - 180^\circ$; daher
$\sin \delta = -\sin (A + B + C + D)$; $\cos \delta = -\cos (A + B + C + D)$

$OEF = DEF - DEN$, d. h. $90 - \varepsilon = E - (90 - \delta)$; daher
$\varepsilon = 180 - E - \delta = 360 - A - B - C - D - E = -(A+B+C+D+E)$
$\sin\varepsilon = -\sin(A+B+C+D+E)$; $\cos\varepsilon = \cos(A+B+C+D+E)$
$PFG = EFG - OFP - EFO$, d. h. $90^\circ - \varphi = F - 90^\circ - \varepsilon$,
somit $\varphi = 180^\circ - A - B - C - D - E - F$; daher

$$\sin\varphi = \sin(A+B+C+D+E+F);$$
$$\cos\varphi = -\cos(A+B+C+D+E+F)$$

$\psi = G - \varphi$, daher $\psi = A+B+C+D+E+F+G-180$, daher

$$\sin\psi = -\sin(A+B+C+D+E+F+G);$$
$$\cos\psi = -\cos(A+B+C+D+E+F+G);$$
$$\omega = H - (180 - \psi);\ \omega = H + \psi - 180;$$
$$\omega = A+B+C+D+E+F+G+H;$$

substituirt man nun die Werthe von β, γ, δ u. s. w. in den Ausdrücken für CK, BK, CM, DM u. s. w., und substituirt wieder diese Werthe in den Ausdrücken für x_1 y_1 x_2 y_2 u. s. w., so erhält man:

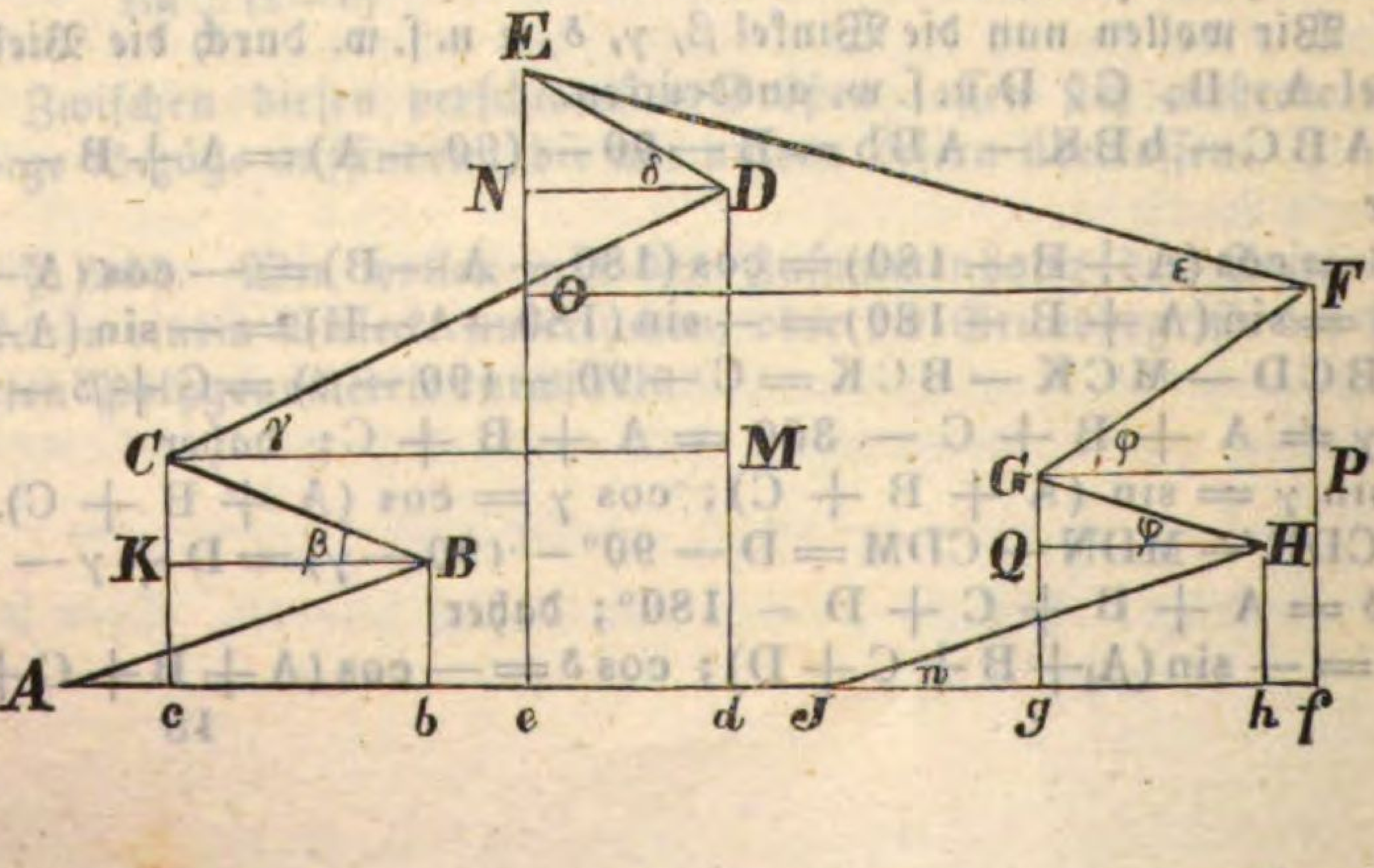
$x_1 = a_1 \cos A$, $y_1 = a_1 \sin A$,
$x_2 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A+B)$; $y_2 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A+B)$,
$x_3 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A+B) + a_3 \cos(A+B+C)$,
$y_3 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A+B) + a_3 \sin(A+B+C)$,
$x_4 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A+B) + a_3 \cos(A+B+C)$
$\quad - a_4 \cos(A+B+C+D)$
$y_4 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A+B) + a_3 \sin(A+B+C)$
$\quad - a_4 \sin(A+B+C+D)$ u. s. w.

Das Gesetz ist hier unverkennbar, zuletzt bekömmt man

$$x_8 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A+B) + a_3 \cos(A+B+C)$$
$$- a_4 \cos(A+B+C+D) + \ldots$$
$$- a_8 \cos(A+B+C+D+E+F+G+H)$$
$$y_8 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A+B) + a_3 \sin(A+B+C)$$
$$- a_4 \sin(A+B+C+D) + \ldots$$
$$- a_8 \sin(A+B+C+D+E+F+G+H).$$

Man kommt ganz zu denselben Resultaten, ob man mehr oder weniger Seiten annimmt. Daß dieses auch der Fall ist, wenn man einwärtsspringende Winkel hat, zeigt folgende Figur.

Fig. 304.



Hier hat man

$$x_2 = x_1 - BK;\ x_3 = x_2 + CM;\ x_4 = x_3 - DN \text{ u. s. w.}$$

$$y_2 = y_1 + CK;\ y_3 = y_2 + DM;\ y_4 = y_3 + EN \text{ u. s. w.}$$

Hier ist $\beta + KBA +$ dem erhabenen Vieleckwinkel CBA, den wir durch B bezeichnen, gleich 360°, d. h. $\beta + A + B = 360$, also $\beta = -(A + B) + 360$, daher $\sin\beta = -\sin(A + B)$; $\cos\beta = \cos(A + B)$; daher

$$x_2 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A + B)$$

$$y_2 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A + B)$$

Es ist ferners $\gamma = C - MCB = C - \beta = C + A + B$; daher $x_3 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A + B) + a_3 \cos(A + B + C)$

$$y_3 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A + B) + a_3 \sin(A + B + C).$$

Ferner $\delta + NDO +$ dem erhabenen Winkel $D = 360$, d. h. $\delta + \gamma + D = 360$; $\delta = 360 - \gamma - D = 360 - A - B - C - D$; daher

$$\sin\delta = -\sin(A + B + C + D);\ \cos\delta = \cos(A + B + C + D):$$

daher:

$$x_5 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A + B) + a_3 \cos(A + B + C) - a_4 \cos(A + B + C + D),$$

$$y_5 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A + B) + a_3 \sin(A + B + C) - a_4 \sin(A + B + C + D) \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen für $x_1\, y_1$, $x_2\, y_2$, $x_3\, y_3$ u. s. w. sind deßhalb so wichtig, weil man mittelst ihnen ein Polygon, dessen Seiten und Winkel gegeben sind, durch Abscissen und Ordinaten verzeichnen kann.

Für die Theorie der Vielecke sind die letzten Gleichungen am wichtigsten. Die letzte Abscisse ist natürlich gleich der Seite, auf welche alle Lothe gefällt werden; die letzte Ordinate ist gleich Null, weil der letzte Punkt selbst in der Linie liegt, auf der die Lothe gefällt werden.

Man hat daher in unserer Figur:

$$a_9 = a_1 \cos A - a_2 \cos(A + B) + a_3 \cos(A + B + C) - \ldots - a_8 \cos(A + B + C + D + \ldots H),$$

$$0 = a_1 \sin A - a_2 \sin(A + B) + a_3 \sin(A + B + C) - \ldots - a_8 \sin(A + B + C + \ldots H).$$

Da nun in jedem nEcke die Summe aller Winkel $2nR - 4R$ ist, so hat man hier im Neunecke

$$A + B + C + D + E + F + G + H + I = 18R - 4R = 14R = 2R + 12R = 2R;$$

daher $\cos(A + B + C + D + E + F + G + H + I) = -1$,

$$\sin(A + B + C + D + E + F + G + H + I) = 0.$$

Ziehe ich daher von der ersten Gleichung oben beiderseits a_9 ab, so kann ich statt $-a_9$ auch $a_9 . \cos(A + B + C + \ldots + I)$ schreiben, und in der zweiten Gleichung kann ich $a_9 \sin(A + B + C + \ldots I) = 0$ ohne Aenderung des Werthes hinzufügen, und habe somit:

$$a_1 \cos A - a_2 \cos(A + B) + a_3 (A + B + C) - \ldots - a_8 \cos(A + B + C + \ldots H) + a_9 \cos(A + B + C + \ldots H + I) = 0,$$

$$a_1 \sin A - a_2 \sin(A + B) + a_3 (A + B + C) - \ldots - a_8 \sin(A + B + C + \ldots H) + a_9 \sin(A + B + C + \ldots H + I) = 0,$$

oder wenn man der besseren Uebersicht halber die Winkel A, B, C, ... mit A_1, A_2, A_3 u. s. w. bezeichnet, so hat man für was immer für ein Polygon folgende merkwürdige Gleichungen:

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \cos(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots a_n \cos(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A^n) = 0,$$

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots a_n \sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n) = 0,$$

welche die Grundlage der sogenannten Polygonometrie (Vieleckmessung) bilden.

§. 264. Hat das Vieleck nur drei Seiten, a_1, a_2, a_3, so also, daß $a_4 = a_5 \ldots = 0$ ist, so hat man:

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) = 0,$$
$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) = 0.$$

Da nun hier $A_1 + A_2 + A_3 = 180$, also $A_1 + A_2 = 180 - A_3$, also $\cos(A_1 + A_2) = -\cos A_3$; $\sin(A_1 + A_2) = \sin A_3$ ist, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos A_1 + a_2 \cos A_3 &= a_3 \\ a_1 \sin A_1 - a_2 \sin A_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{I},$$

welches bekanntlich die Grundgleichungen sind, auf welchen alle Auflösungen der Dreiecke beruhen.

Für alle Vierecke haben wir folgende Gleichungen:

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \cos(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 0,$$

$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) - a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = 0,$$

wo hier $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 360^0$ ist, daher $A_1 + A_2 + A_3 = 360 - A_4$, wodurch diese zwei Gleichungen folgende Gestalt annehmen:

$$a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos A_4 = a_4,$$
$$a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) - a_3 \sin A_4 = 0.$$

Sind die zwei Seiten a_2 und a_4 gleichlaufend, d. h. ist das Viereck ein Trapez, so ist dann $A_1 + A_2 = 180$, daher auch $A_3 + A_4 = 180$, und man hat für jedes Trapez, wo a_2 und a_4 die Grundlinien sind:

$$a_1 \cos A_1 + a_2 + a_3 \cos A_4 = a_4,$$
$$a_1 \sin A_1 \quad - \quad a_3 \sin A_4 = 0,$$

welche Gleichungen sich sehr leicht geometrisch deuten lassen.

Werden auch a_1 und a_3 gleichlaufend, d. h. wird das Viereck ein Parallelogramm (Gleicheck), so ist auch $A_2 + A_3 = 180$, daher auch $A_1 + A_4 = 180$, und somit $\sin A_1 = \sin A_4$, $\cos A_1 = -\cos A_4$, daher unsere zwei Gleichungen in folgende übergehen:

$$(a_1 - a_3) \cos A_4 = a_4 - a_2,$$
$$a_1 - a_3 = 0;$$

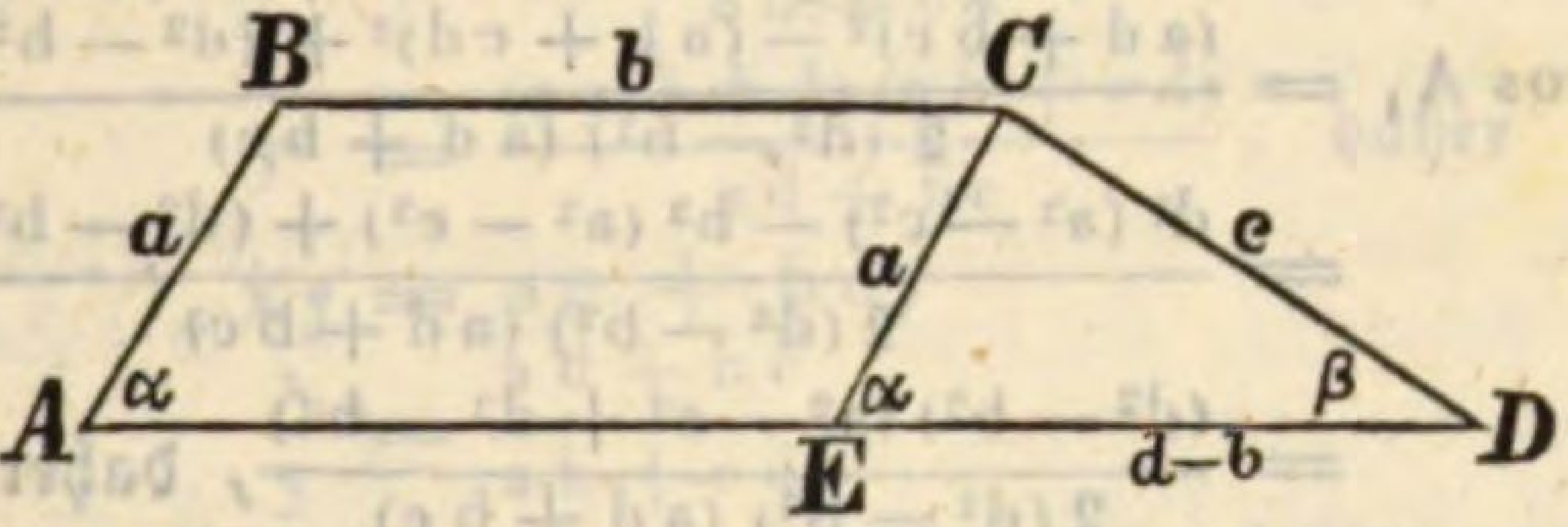
daher $a_1 = a_3$ und $a_2 = a_4$, d. h. die gegenüberstehenden Seiten werden einander gleich.

Gehen wir wieder auf das Trapez zurück; nehmen wir $a_1 = a$, $a_2 = b$; $a_3 = c$; $a_4 = d$; $A_1 = \alpha$; $A_4 = \beta$, so hat man:

$$a \cos \alpha + c \cos \beta = d - b,$$
$$a \sin \alpha - c \sin \beta = 0.$$

Wie man sieht, stimmen diese Gleichungen mit den Gleichungen I für das Dreieck zusammen, wenn nämlich a, c, d — b die drei Seiten, und α und β die an der Seite d — b liegenden Winkel sind, was uns auch ein Blick auf die folgende Figur lehret.

Fig. 305.



Um also aus den vier Seiten eines Trapezes die Winkel α und β zu finden, hat man:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s\,(s - c)}{a\,(d - b)};\ \cos^2 \frac{\beta}{2} = \frac{s\,(s - a)}{c\,(d - b)},$$
$$\text{wo } s = \frac{a + c + d - b}{2} \text{ ist,}$$

und so ist die Auflösung eines Trapezes ABCD auf die des Dreieckes ECD zurückgeführt.

Endlich für ein Kreisviereck, d. h. ein Viereck, dessen Eckpunkte im Umfange eines Kreises liegen, hat man:

$$A_1 + A_3 = A_2 + A_4 = 180^\circ;\ \text{daher}$$
$$\cos A_4 = -\cos A_2;\ \sin A_4 = +\sin A_2,$$

und somit sind die Gleichungen eines Kreisvierecks folgende:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos A_1 - a_2 \cos (A_1 + A_2) - a_3 \cos A_2 &= a_4 \\ a_1 \sin A_1 - a_2 \sin (A_1 + A_2) - a_3 \sin A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ II.}$$

Multiplicirt man zuerst die erste Gleichung mit $\sin (A_1 + A_2)$ und die zweite mit $\cos (A_1 + A_2)$, und subtrahirt beide, dann die erste mit $\cos (A_1 + A_2)$ und die zweite mit $\sin (A_1 + A_2)$, und addirt beide, so erhält man:

$$a_1 \sin A_2 - a_3 \sin A_1 = a_4 \sin (A_1 + A_2)$$
$$a_1 \cos A_2 - a_2 - a_3 \cos A_1 = a_4 \cos (A_1 + A_2).$$

Substituirt man die hier für $\sin (A_1 + A_2)$ und $\cos (A_1 + A_2)$ erhaltenen Werthe in den Gleichungen II, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} (a_1 a_4 + a_2 a_3) \cos A_1 - (a_1 a_2 + a_3 a_4) \cos A_2 &= a_4^2 - a_2^2 \\ (a_1 a_4 + a_2 a_3) \sin A_1 - (a_1 a_2 + a_3 a_4) \sin A_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ III.}$$

Nennt man der Kürze halber

$$\frac{a_1 a_2 + a_3 a_4}{a_1 a_4 + a_2 a_3} = p;\ \frac{a_4^2 - a_2^2}{a_1 a_4 + a_2 a_3} = q,$$

oder wenn man $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ mit a, b, c, d vertauscht,

$$p = \frac{ab + cd}{ad + bc};\ q = \frac{d^2 - b^2}{ad + bc},$$

so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\cos A_1 - p \cdot \cos A_2 = q \\ \sin A_1 - p \cdot \sin A_2 = 0\end{array}\right\} \text{IV.}$$

Die zweite Gleichung gibt $\sin^2 A_1 = p^2 \cdot \sin^2 A_2$, woraus

$$\cos^2 A_1 = 1 - p^2 + p^2 \cos^2 A_2.$$

Substituirt man diesen Werth in der ersten der Gleichungen IV, so erhält man:

$$\cos A_2 = \frac{1 - p^2 - q^2}{2pq} \text{ und } \cos A_1 = \frac{1 - p^2 + q^2}{2q}.$$

Setzt man hier statt p und q ihre Werthe, so hat man:

$$\cos A_1 = \frac{(ad + bc)^2 - (ab + cd)^2 + (d^2 - b^2)^2}{2(d^2 - b^2)(ad + bc)}$$

$$= \frac{d^2(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) + (d^2 - b^2)^2}{2(d^2 - b^2)(ad + bc)}$$

$$= \frac{(d^2 - b^2)(a^2 - c^2 + d^2 - b^2)}{2(d^2 - b^2)(ad + bc)}, \text{ daher}$$

$$\cos A_1 = \frac{a^2 - c^2 + d^2 - b^2}{2(ad + bc)}, \text{ woraus}$$

$$1 - \cos A_1 = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)},$$

$$1 + \cos A_1 = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}, \text{ und da}$$

$$\frac{1 - \cos A_1}{1 + \cos A_1} = \tang^2 . \frac{A_1}{2} \text{ ist, so hat man:}$$

$$\tang^2 \frac{A_1}{2} = \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{(a + d + b - c)(a + d - b + c)},$$

oder wenn man $a + b + c + d = 2s$ setzet:

$$\tang . \frac{A_1}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - d)}{(s - b)(s - c)}};$$

eben so findet man:

$$\tang . \frac{A_2}{2} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)}{(s - c)(s - d)}}.$$

Um schlüßlich den Flächeninhalt eines Kreisvierecks zu finden, hat man, wenn derselbe durch F bezeichnet wird,

$$F = \tfrac{1}{2} ad \sin A_1 + \tfrac{1}{2} bc \sin A_3,$$

weil nämlich der Flächeninhalt des Vierecks gleich ist der Summe zweier Dreiecke, die durch die Winkellinie der Punkte A_2 und A_4 entstehen. Da aber $A_1 + A_3 = 180$, so ist $\sin A_1 = \sin A_3$; daher

$$F = \tfrac{1}{2}(ad + bc) \sin A_1, \text{ oder}$$

$$F^2 = \tfrac{1}{4}(ad + bc)^2 (1 - \cos^2 A_1).$$

Aus Obigem aber ergibt sich:

$$1 - \cos A_1 = \frac{2(s - a) \cdot 2(s - d)}{2(ad + bc)},$$

$$1 + \cos A_1 = \frac{2(s - b)\, 2(s - c)}{2(ad + bc)}; \text{ daher}$$

$$F^2 = \frac{1}{4}(a d + b c)^2 \cdot \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(a d + b c)^2} \text{, und somit}$$

$$F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Nennt man die Winkellinien x und y, so erhält man leicht

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2 a b \cos A_2,$$
$$y^2 = a^2 + d^2 - 2 a d \cos A_1.$$

Substituirt man hier die gefundenen Werthe von $\cos A_1$ und $\cos A_2$, so erhält man:

$$x^2 = \frac{(a c + b d)(a d + b c)}{a b + c d},$$

$$y^2 = \frac{(a c + b d)(a b + c d)}{a d + b c} \text{, daher}$$

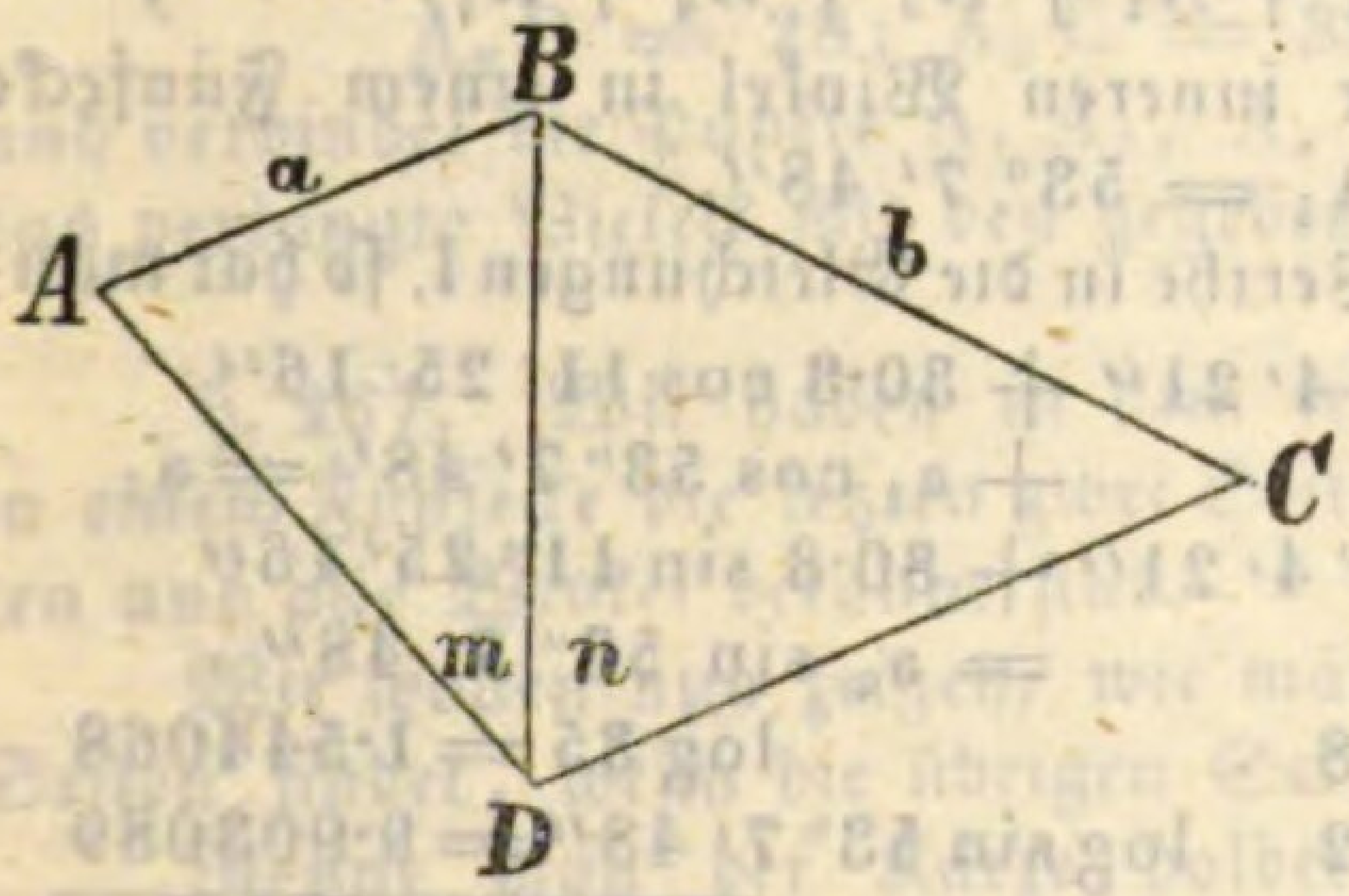
$$x y = a c + b d,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{a d + b c}{a b + c d};$$

Eigenschaften des Kreisvierecks, die wir schon früher auf andere Art bewiesen haben.

§. 265. Hieher gehört auch die sogenannte Pothenot'sche Aufgabe, nämlich die Lage eines vierten Punktes gegen drei gegebene dadurch zu bestimmen, daß man die Winkel an diesem vierten Punkte mißt, den die Gesichtslinien der drei gegebenen Punkte dort bilden.

Fig. 306.



Es sind die drei Punkte A, B, C ihrer Lage nach bekannt.

Es sey AB = a, BC = b, und der Winkel ABC = B gegeben; stellt man sich nun in D auf, und bestimmt die Winkel m und n, so handelt es sich darum, wie groß die Winkel A und C sind. Weiß man, wie groß A und C, so ist begreiflicher Weise dadurch AD, BD, CD bestimmt. Um nun A und C zu bestimmen, verfahren wir folgender Maßen:

$$A + C + B + D = 360\text{; B und D sind aber bekannt.}$$

$$\frac{A + C}{2} + \frac{B + D}{2} = 180.$$

Es ist nun $BD = \frac{a \sin A}{\sin m} = \frac{b \sin C}{\sin n}$; daher $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{b \sin m}{a \sin n}$.

Bestimmt man nun φ, so daß $\frac{b \sin m}{a \sin n} = \operatorname{tang} \varphi$ ist, also $\frac{\sin A}{\sin C} = \operatorname{tang} \varphi$,

$$\text{so ist } \frac{1 + \operatorname{tang} \varphi}{1 - \operatorname{tang} \varphi} = \frac{\sin C + \sin A}{\sin C - \sin A} = \frac{\operatorname{tang} \frac{C + A}{2}}{\operatorname{tang} \frac{C - A}{2}}.$$

Nun ist $\tang(45^\circ + \varphi) = \frac{1 + \tang\varphi}{1 - \tang\varphi}$; daher

$$\tang(45^\circ + \varphi) = \frac{\tang\frac{C+A}{2}}{\tang\frac{C-A}{2}};$$ da nun $\tang\frac{C+A}{2} = -\tang\frac{B+D}{2}$ ist,

so hat man $\tang\frac{C-A}{2} = -\tang\frac{B+D}{2}\,.\,\cotg(45^\circ + \varphi)$.

Da somit $\frac{C+A}{2}$ und $\frac{C-A}{2}$ bekannt sind, hat man C und A, wodurch man dann das Uebrige erhält.

§. 266. Als ein Beispiel der Polygonometrie geben wir die Auflösung eines Fünfecks. Es seyen vier Winkel und drei Seiten gegeben, und man habe die andern zwei zu suchen.

Es sey $A_1 = 53^\circ 7' 48''$; $A_2 = 154^\circ 56' 33''$; $A_3 = 163^\circ 20' 55''$; $A_4 = 115^\circ 26' 56''$; $a_1 = 35$; $a_2 = 18{\cdot}7$; $a_3 = 30{\cdot}3$.

Die Gleichungen für ein Fünfeck sind:

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) \\ - a_4 \cos(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ + a_5 (\cos A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = 0 \\ a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) \\ - a_4 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ + a_5 \sin(A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5) = 0 \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

Da nun die Summe aller inneren Winkel in einem Fünfecke $6R = 540^\circ$ ist, so findet man $A_5 = 53^\circ 7' 48''$.

Substituirt man die obigen Werthe in die Gleichungen I, so hat man:

$$35 \cos 53^\circ 7' 48'' + 18{\cdot}7 \cos 28^\circ 4' 21'' + 30{\cdot}3 \cos 11^\circ 25' 16'' + a_4 \cos 53^\circ 7' 48'' = a_5$$

$$35 \sin 53^\circ 7' 48'' + 18{\cdot}7 \sin 28^\circ 4' 21'' + 30{\cdot}3 \sin 11^\circ 25' 16'' = a_4 \sin 53^\circ 7' 48''$$

$\log 35 = 1{\cdot}544068$	$\log 35 = 1{\cdot}544068$
$\log\cos 53^\circ 7' 48'' = 9{\cdot}778152$	$\log\sin 53^\circ 7' 48'' = 9{\cdot}903089$
$1{\cdot}322220$	$1{\cdot}447157$
$35 \cos 53^\circ 7' 48'' = 21.$	$35 \sin 53^\circ 7' 48'' = 28.$
$\log 18{\cdot}7 = 1{\cdot}271842$	$\log 18{\cdot}7 = 1{\cdot}271842$
$\log\cos 28^\circ 4' 21'' = 9{\cdot}945642$	$\log\sin 28^\circ 4' 21'' = 9{\cdot}672641$
$1{\cdot}217484$	$0{\cdot}944483$
$18{\cdot}7 \cos 28^\circ 4' 21'' = 16{\cdot}5.$	$18{\cdot}7 \sin 28^\circ 4' 21'' = 8{\cdot}8.$
$\log 30{\cdot}3 = 1{\cdot}481443$	$\log 30{\cdot}3 = 1{\cdot}481443$
$\log\cos 11^\circ 25' 16'' = 9{\cdot}991314$	$\log\sin 11^\circ 25' 16'' = 9{\cdot}296706$
$1{\cdot}472757$	$0{\cdot}778149$
$30{\cdot}3 \cos 11^\circ 25' 16'' = 29{\cdot}7$	$30{\cdot}3 \sin 11^\circ 25' 16'' = 6;$

daher hat man: $67{\cdot}2 + a_4 \cos 53^\circ 7' 48'' = a_5$,

$42{\cdot}8 = a_4 \sin 53^\circ 7' 48''$.

$$\log 42{\cdot}8 = 1{\cdot}631444 \qquad \log a_4 = 1{\cdot}728355$$

$$\log \sin 53^\circ\, 7'\, 48'' = 9{\cdot}903089 \qquad \log \cos 53^\circ\, 7'\, 48'' = 9{\cdot}778152$$

$$\log a_4 = 1{\cdot}728355 \qquad 1{\cdot}506507$$

$$a_4 = 53{\cdot}5\,,\ a_4 \cos 53^\circ\, 7'\, 48'' = 32{\cdot}1\,;$$

daher $67{\cdot}2 + 32{\cdot}1 = 99{\cdot}3 = a_5$.

Um nun das Polygon zu verzeichnen, hat man:

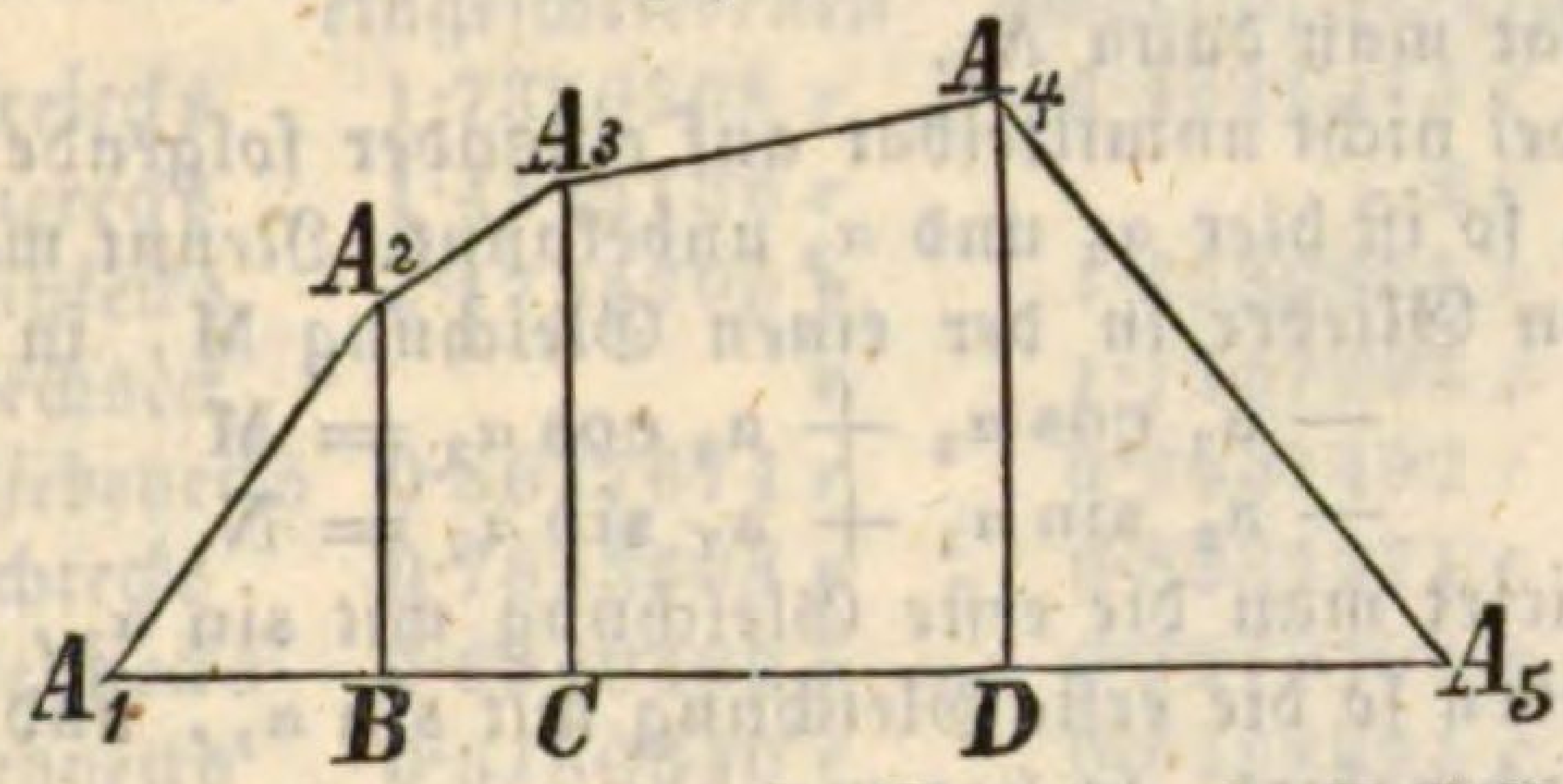
$$x_1 = 21\,; \quad y_1 = 28,$$

$$x_2 = 21 + 16{\cdot}5 = 37{\cdot}5\,; \quad y_2 = 28 + 8{\cdot}8 = 36{\cdot}8$$

$$x_3 = 37{\cdot}5 + 29{\cdot}7 = 67{\cdot}2\,; \quad y_3 = 36{\cdot}8 + 6 = 42{\cdot}8$$

$$x_4 = 67{\cdot}2 + 32{\cdot}1 = 99{\cdot}3\,; \quad y_4 = 0.$$

Fig. 307.



Nimmt man sich nämlich die Gerade $A_1 B C D$ u. s. w., und schneidet davon

$A_1 B = x_1 = 21\,;\ A_1 C = x_2 = 37{\cdot}5\,;\ A_1 D = 67{\cdot}2\,;\ A_1 A_5 = 99{\cdot}3$ ab; errichtet in $B\,C\,D$ die Lothe:

$$A_2 B = 28\,;\ A_3 C = 36.8\,;\ A_4 D = 42{\cdot}8,$$

und verbindet die Punkte $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$, so hat man das verlangte Vieleck mit den gegebenen Winkeln und Seiten.

§. 267. Wir haben in dem letztern Beispiel gezeigt, wie man in einem Fünfecke die letzten zwei Seiten findet, wenn die übrigen Seiten und alle Winkel bekannt sind.

Wir wollen nun zeigen, wie man überhaupt was immer für zwei Seiten findet, wenn die übrigen Seiten und alle Winkel bekannt sind.

Nennt man der Kürze halber $A_1 = \alpha_1$, $A_1 + A_2 = \alpha_2$, $A_1 + A_2 + A_3 = \alpha_3$, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \alpha_4$, so sind die Gleichungen des Fünfecks

$$a_1 \cos\alpha_1 - a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 - a_4 \cos\alpha_4 = a_5,$$

$$a_1 \sin\alpha_1 - a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 - a_4 \sin\alpha_4 = 0.$$

Es sey z. B. Alles bekannt bis auf a_2 und a_3, nennt man nun der Kürze halber:

$$a_1 \cos\alpha_1 - a_4 \cos\alpha_4 - a_5 = M,$$

$$a_1 \sin\alpha_1 - a_4 \sin\alpha_4 = N,$$

so hat man:

$$a_2 \cos\alpha_2 - a_3 \cos\alpha_3 = M,$$

$$a_2 \sin\alpha_2 - a_3 \sin\alpha_3 = N.$$

Multiplicirt man zuerst die erste Gleichung mit $\sin\alpha_3$, und die zweite

mit $\cos \alpha_3$; dann die erste Gleichung mit $\sin \alpha_2$ und die zweite mit $\cos \alpha_2$, und subtrahirt in beiden Fällen, so erhält man:

$$a_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = M \sin \alpha_3 - N \cos \alpha_3$$
$$a_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = M \sin \alpha_2 - N \cos \alpha_2,$$

wodurch man a_2 und a_3 bekömmt, da alles Uebrige hier bekannt ist.

Sind zwei unmittelbar auf einander folgende Winkel A_2 und A_3 zu suchen, so ist nebst allen Seiten, $A_1 = \alpha_1$, und da

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 540 \text{ ist; daher}$$

$A_1 + A_2 + A_3 = 180 - A_4 - A_5$, somit also $A_1 + A_2 + A_3 = \alpha_3$, und folglich auch α_4 gegeben; es ist somit also nur α_2 zu suchen.

Es ist also in der ersten der beiden Gleichungen Alles bekannt bis auf $a_2 \cos \alpha_2$; man kann also dadurch α_2 bestimmen, und da A_1 bekannt ist, hat man dann A_2.

Sind zwei nicht unmittelbar auf einander folgende Winkel A_2 und A_4 unbekannt, so ist hier α_2 und α_3 unbekannt. Nennt man die Summe aller bekannten Glieder in der einen Gleichung M, in der andern N, so hat man:

$$-a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 = M$$
$$-a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 = N.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin \alpha_3$, die zweite mit $\cos \alpha_3$, und eben so die erste Gleichung mit $\sin \alpha_2$, und die zweite mit $\cos \alpha_2$, und subtrahirt, so hat man:

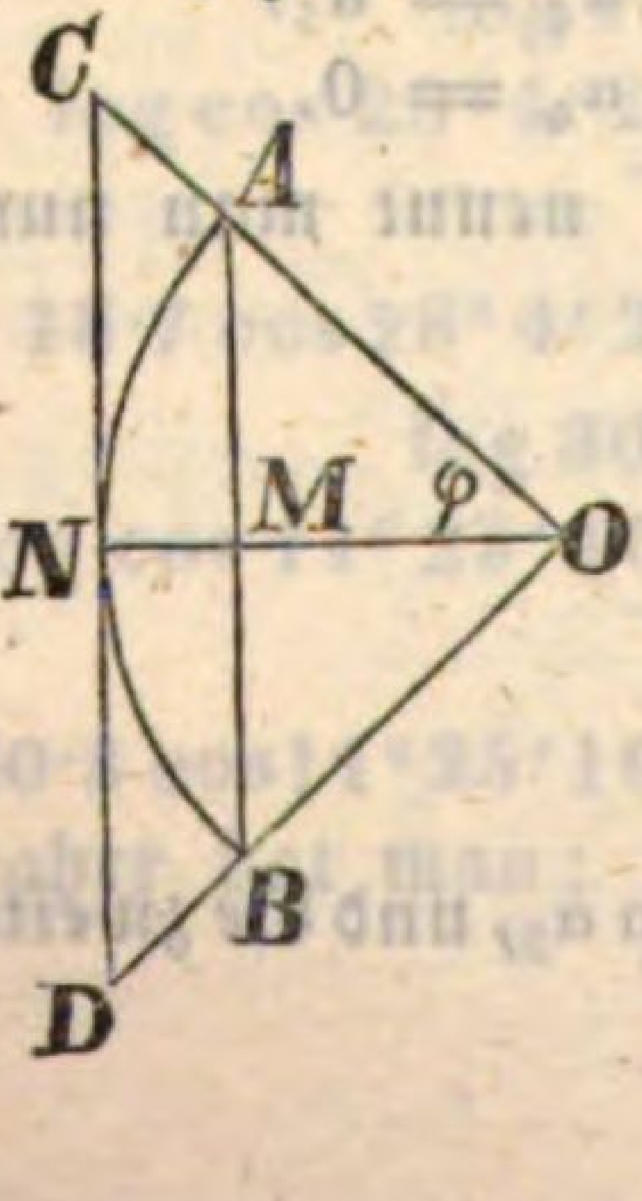
$$-a_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = M \sin \alpha_3 - N \cos \alpha_3$$
$$-a_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_2) = M \sin \alpha_2 - N \sin \alpha_2.$$

Aus welchen Gleichungen sich α_2 und α_3 bestimmen lassen, dann hat man $\alpha_2 - \alpha_1 = A_2$, $\alpha_4 - \alpha_3 = A_4$.

§. 268. Da der Sinus eines Winkels die halbe Sehne des doppelten Bogens ist, so verschafft uns die Trigonometrie ein leichtes Hülfsmittel, für jeden gegebenen Mittelpunktwinkel die Größe der ihm zugehörigen Sehne zu bestimmen, und so sind wir im Stande die Seite sowohl des einem Kreise ein- als umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks von einer beliebigen Zahl Seiten zu bestimmen.

Es sey O der Mittelpunkt eines Kreises, AB die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen nseitigen Vielecks, und CD die Seite des regelmäßigen umgeschriebenen nEcks. Bekanntlich sind dann AB und CD gleichlaufend, und die Punkte C A O und D B O liegen in geraden Linien.

Fig. 308.



Es sey ferner NO ⊥ CD. Ist AB die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen nEcks, so muß $AOB = \frac{360}{n}$, daher $\varphi = AOM = \frac{180°}{n}$ seyn.

Setzt man nun den Halbmesser $AO = r$ und den Durchmesser $2r = d$, so hat man:

$$AM = r \sin \varphi;\ CN = r \operatorname{tang} \varphi.$$

Nennt man nun AB die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks $= s_n$ und CD die Seite des umschriebenen regelmäßigen nEcks $= S_n$, so hat man:

$s_n = 2\,AM = 2\,r \sin \varphi$; $S_n = 2\,CN = 2\,r \,\text{tang}\, \varphi$, oder

$$s_n = d \sin \frac{180^\circ}{n}; \qquad S_n = d \,.\, \text{tang} \,.\, \frac{180^\circ}{n}.$$

Setzt man hier $n = 3, 4, 5, 6$ u. s. w., so bekommt man die Seiten des eingeschriebenen und umgeschriebenen regelmäßigen Vielecks von 3, 4, 5 u. s. w. Seiten. Man hat so z. B. für das regelmäßige Dreieck $s_3 = 2\,r \sin 60^\circ$; $S_3 = 2\,r \,\text{tang}\, 60^\circ$.

Bestimmt man nun mittelst der Logarithmen 2 sin 60° und 2 tang 60°, so erhält man:

$$s_3 = 1{\cdot}7320508\,r; \; S_3 = 3{\cdot}4641016\,r.$$

	Seite des regelmäßigen eingeschriebenen	Seite des regelmäßigen umgeschriebenen
Dreiecks	1·7320508 r	3·4641016 r
Vierecks	1·4142136 r	2 r
Fünfecks	1·1755706 r	1·4530852 r
Sechseck	r	1·1547005 r
Siebenecks	0·8677674 r	0·9631492 r
Achtecks	0·7653668 r	0·8284271 r
Neunecks	0·6840402 r	0·7279404 r
Zehnecks	0·6180340 r	0·6498394 r
Eilfecks	0·5634652 r	0·5872530 r
Zwölfecks	0·5176381 r	0·5358984 r

Hat man z. B. einem Kreise von $r = 25''$ ein regelmäßiges Neuneck einzuschreiben, so ist die Seite desselben gleich $2 \,.\, 25 \,.\, \sin \frac{180^\circ}{9}$ $= 50 \,.\, \sin 20^\circ = 50 \,.\, 0{\cdot}6840402 = 34{\cdot}20201''$.

Man braucht nun nur diese Seite im Kreise herumzutragen, um dann das ganze regelmäßige Neuneck zu haben.

Wollte man z. B. die Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen 180Ecks haben, so ist $s_{180} = 2\,r \,.\, \sin 1^\circ = 2\,r \,.\, 0{\cdot}0174524$ $= 0{\cdot}0349048\,r$.

In unserer Figur ist $NM = r - r \cos \varphi = r\,(1 - \cos \varphi)$, und diese Größe drückt den Abstand der Polygonseite von dem Kreisumfange aus; für ein 180Eck hat man:

$$NM = r\,(1 - \cos 1^\circ) = r\,(1 - 0{\cdot}9998477) = 0{\cdot}0001523\,r.$$

Soll das 180Eck vom Kreise unterscheidbar seyn, so muß NM wenigstens 0·1 Linie seyn; damit aber dieses der Fall sey, so muß r wenigstens $\frac{0{\cdot}1'''}{0{\cdot}0001523}$ seyn, oder r wenigstens $= 656{\cdot}'''6$ nahe 4·5 Schuh.

Bezeichnen wir den Umfang des eingeschriebenen regelmäßigen nEcks mit E_n und den Umfang des umgeschriebenen regelmäßigen nEcks mit U_n, so hat man:

$$E_n = 2\,n\,r \sin \frac{180^\circ}{n}; \; U_n = 2\,n\,r \,\text{tang}\, \frac{180^\circ}{n}, \text{ oder}$$

$$E_n = n\,d \,.\, \sin \frac{180^\circ}{n}; \; U_n = n\,d \,.\, \text{tang}\, \frac{180^\circ}{n}.$$

Je größer man nun n annimmt, desto kleiner wird der eine Faktor $\sin \frac{180^\circ}{n}$ oder $\mathrm{tang}\,.\,\frac{180^\circ}{n}$; da aber der andere Faktor n immer größer wird, so nähern sich daher beide Ausdrücke desto mehr einer bestimmten Grenze, je größer n wird. Begreiflicher Weise ist diese Grenze π d der Umfang des Kreises, dem diese Vielecke ein- und umgeschrieben werden. Falls man die trigonometrischen Tafeln als bekannt voraussetzt, ist dieß ein Mittel, um die Ludolph'sche Zahl π zu berechnen. Man findet so

$$E_{180} = 3{\cdot}141432\ d \qquad U_{180} = 3{\cdot}141918\ d;$$
$$E_{360} = 3{\cdot}141540\ d \qquad U_{360} = 3{\cdot}141684\ d;$$
$$E_{720} = 3{\cdot}141576\ d \qquad U_{720} = 3{\cdot}141648\ d.$$

Begreiflicher Weise nähert man sich so immer mehr der Zahl 3·1415926 d.

Will man also den Kreisumfang in mehrere gleiche Theile theilen, z. B. in 13, so wird man nach dem in diesem Paragraphe Mitgetheilten die Seite eines regelmäßigen eingeschriebenen Vielecks von so viel Seiten, z. B. von 13, berechnen, für die Größe des Halbmessers des gegebenen Kreises; dieses so gefundene Maß wird dann dem sovielten Theile des Kreises als Sehne zugehören, als die gegebene Anzahl beträgt; es wird z. B. die Sehne des 13ten Theils des Kreises seyn.

Es soll z. B. von einem Kreise, dessen Halbmesser 17·5'', der 13te Theil des Umfanges abgeschnitten werden, so hat man als Sehne des 13ten Theils des Umfanges

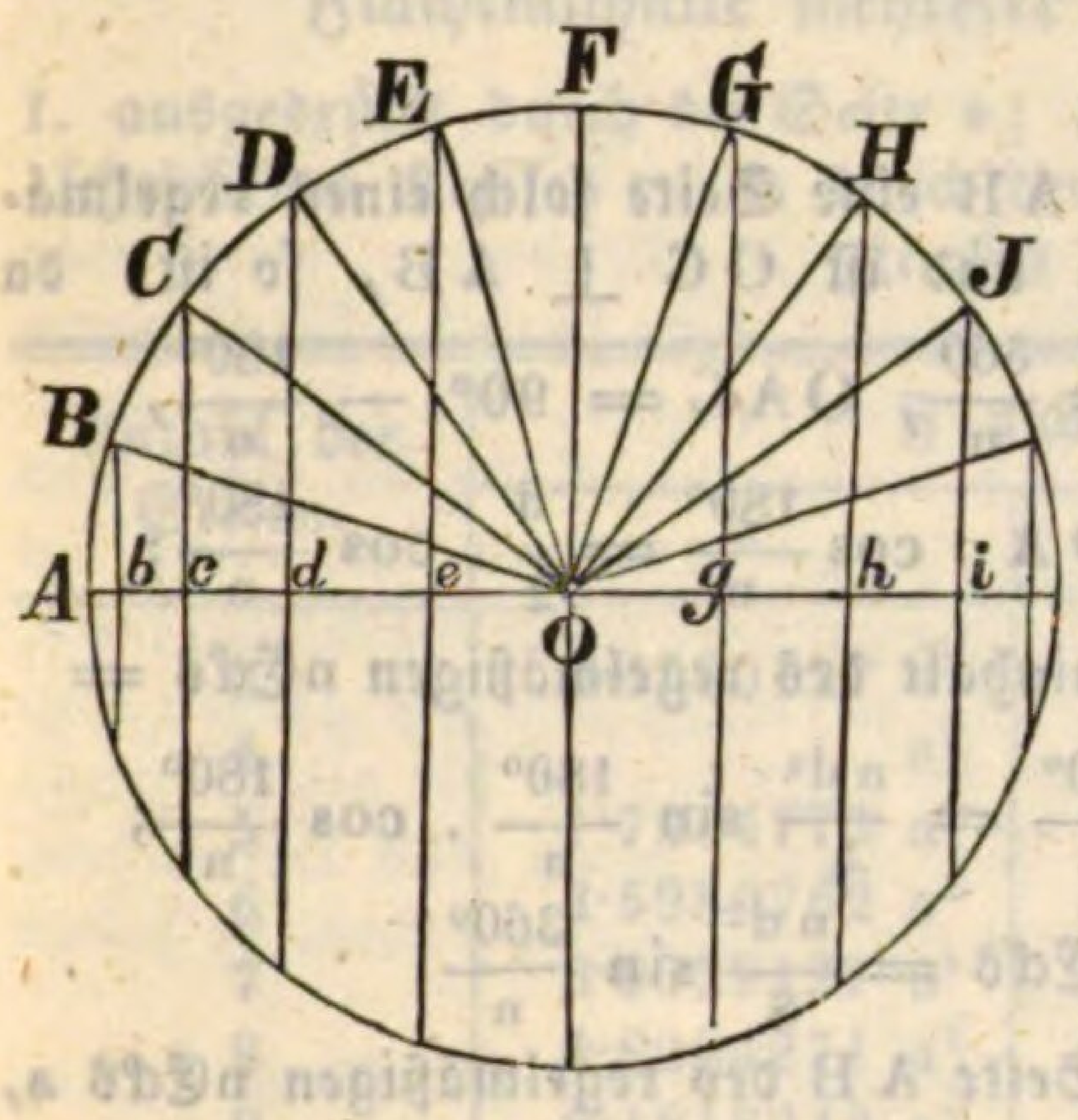
$$s = 2\,.\,17{\cdot}5\,.\,\sin \frac{180^\circ}{13} = 35''\,.\,\sin 13^\circ\, 50'\, 46'';$$

$$\log s = \log 35'' + \log \sin 13^\circ\, 50'\, 46'' = 0{\cdot}923038;$$

daher die Sehne = 8·376.

Nehme ich also in den Zirkel 8'''·376, und schneide damit einen Bogen des Kreises, dessen Halbmesser 17·''5 ist, ab, so habe ich den 13ten Theil des Kreisumfanges, und trage ich diese Größe 13 Mal im Kreise herum, so habe ich das ganze regelmäßige 13Eck. Bekanntlich ist dieses öftere Herumtragen im Kreise mit Mißlichkeiten verbunden, wegen der Dicke der Zirkelspitze wiederholen sich die unvermeidlichen Fehler, und die Austheilung schließt sich gewöhnlich nicht. Es wird daher nicht ohne Interesse seyn, ein anderes Verfahren kennen zu lernen, den Kreisumfang in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, mittelst Abschnitten von geraden Linien.

Fig. 309.



Es sey hier der Kreis in den Punkten A, B, C, D, E u. s. w. in n gleiche Theile getheilt; ich fälle von den Punkten B, C, D u. s. w. Lothe auf den Durchmesser durch A; diese Lothe, über diesen Durchmesser verlängert, müssen natürlich wieder entsprechende Theilungspunkte des Kreises treffen. Es wird nun unsere Absicht seyn, die Punkte A, B, C, D u. s. w. mittelst dieser Lothe Bb, Cc, Dd u. s. w. zu verzeichnen. Nennen wir den Halbmesser des gegebenen Kreises r, so sind, da wir hier den Kreis in n gleiche Theile getheilt haben, $AOB = BOC = COD = DOE$ u. s. w. $= \frac{360}{n}$; nennen wir der Kürze halber diesen Winkel $= \varphi$, so hat man:

$$AOB = \varphi,\ AOC = 2\varphi,\ AOD = 3\varphi,\ AOE = 4\varphi \text{ u. s. w.};$$

daher hat man:

$$bO = r\cos\varphi,\ cO = r\cos 2\varphi,\ dO = r\cos 3\varphi,\ eO = r\cos 4\varphi \text{ u. s. w.}$$

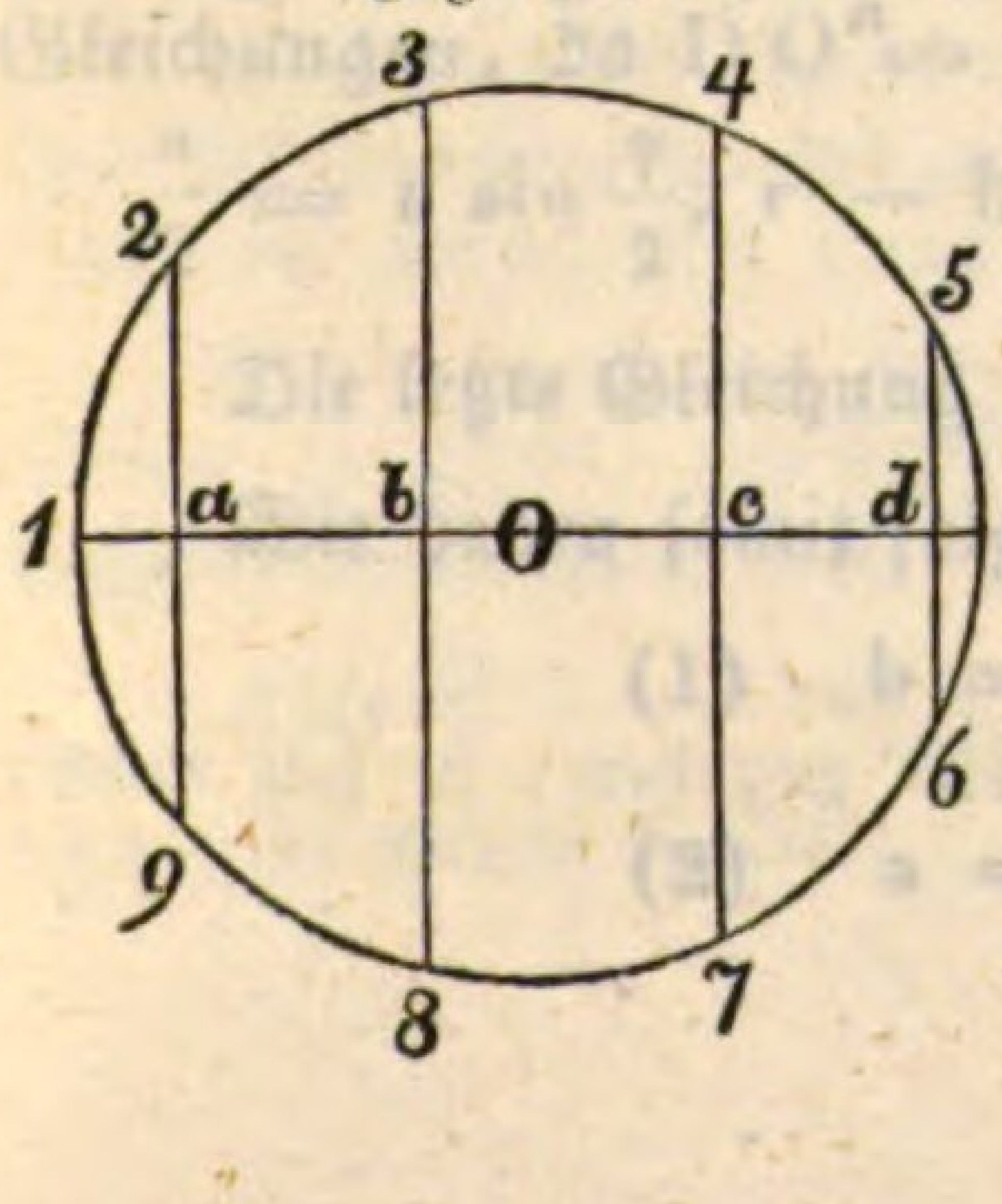
Ich habe nun diese Stücke von dem Halbmesser AO abzuschneiden, in den Endpunkten Lothe darauf zu errichten. Wird einer dieser Abschnitte negativ, z. B. hier in dieser Figur

$$gO = r\cos 6\varphi,\ hO = r\cos 7\varphi,$$

so hat man sie natürlich auf der entgegengesetzten Seite abzuschneiden. Dieses möchte die sicherste Methode seyn, ein regelmäßiges Vieleck zu verzeichnen. Als Beispiel wollen wir einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1''$ ist, ein regelmäßiges Neuneck einschreiben. Hier hat man, da $\varphi = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$, folgende Abschnitte zu berechnen:

$$\cos 40^\circ,\ \cos 80^\circ,\ \cos 120^\circ,\ \cos 160^\circ, \text{ d. i.}$$
$$\cos 40^\circ,\ \cos 80^\circ,\ -\cos 60^\circ,\ -\cos 20^\circ, \text{ d. i.}$$
$$0{\cdot}766'',\ 0{\cdot}174'',\ -0{\cdot}5'',\ -0{\cdot}940''$$
$$9{\cdot}'''19\ \ 2{\cdot}'''09,\ -6''',\ -11{\cdot}'''28.$$

Fig. 310.

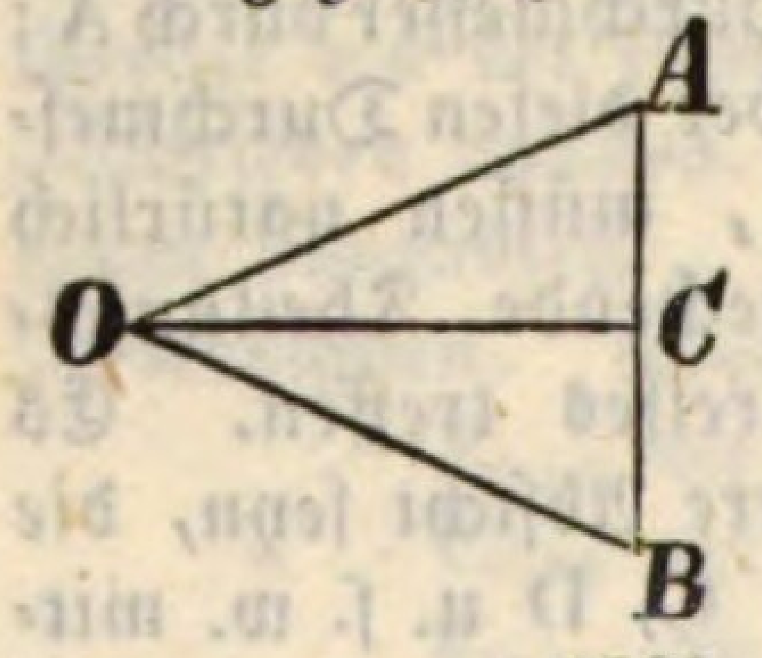


Ich schneide also $Oa = 9'''19$, $Ob = 2'''09$; $Oc = 6'''$; $OD = 11{\cdot}'''28$ ab; errichte in a, b, c, d Lothe, welche den Umfang in den Punkten 2,9; 3,8; 4,7; 5,6 schneiden, und wodurch wir den Umfang in 9 gleiche Theile getheilt haben.

§. 269. Der Flächeninhalt eines regelmäßigen Vielecks ist gleich dem Umfange, multiplicirt mit dem halben Lothe aus dem Mittelpunkte auf eine der Seiten, wie wir

früher bewiesen; nun ist der Umfang eines regelmäßigen nEcks $= n\,d\,.\,\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Fig. 311.



Ist nun AB eine Seite solch eines regelmäßigen nEcks, und ist $OC \perp AB$, so ist, da

$$AOB = \frac{360}{n},\; OAC = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

$$OC = OA\,.\,\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{d}{2}\,.\,\cos\frac{180^\circ}{n};$$

daher Flächeninhalt des regelmäßigen nEcks =

$$n\,d\,.\,\sin\frac{180^\circ}{n}\,.\,\frac{d}{4}\,.\,\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{n\,d^2}{4}\sin\frac{180^\circ}{n}\,.\,\cos\frac{180^\circ}{n};$$

Flächeninhalt des regelmäßigen nEcks $= \frac{n\,d^2}{8}\sin\frac{360^\circ}{n}$.

Nennt man hingegen die Seite AB des regelmäßigen nEcks a, so ist $\frac{a}{2} = OC\,.\,\text{tang}\,\frac{180^\circ}{n}$; daher $OC = \frac{a}{2}\,\text{cotg}\,\frac{180^\circ}{n}$, folglich

$$\triangle AOB = \frac{a}{2}\;\text{cotg}\,\frac{180^\circ}{n}\,.\,\frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}\,.\,\text{cotg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

Da nun der Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks $= n\,.\,AOB$ ist, so hat man

Flächeninhalt eines regelmäßigen nEcks $= \frac{n\,a^2}{4}\,\text{cotg}\,\frac{180^\circ}{n}$.

Ist der Flächeninhalt F des Vielecks gegeben, und man fragt um die Seite desselben, so hat man:

$$a = \sqrt{\frac{4\,.\,F\,.\,\text{tang}\,\frac{180^\circ}{n}}{n}}$$

Nennt man aber p den Halbmesser des dem Vielecke eingeschriebenen Kreises, so ist:

$$F = n\,p^2\;\text{tang}\,\frac{180^\circ}{n},$$

und ist r der Halbmesser des umschriebenen Kreises, so hat man:

$$F = n\,r^2\;\sin\frac{180^\circ}{n}\,.\,\cos\frac{180^\circ}{n},$$

$$F = \frac{n\,r^2}{2}\,\sin\frac{360^\circ}{n}.$$

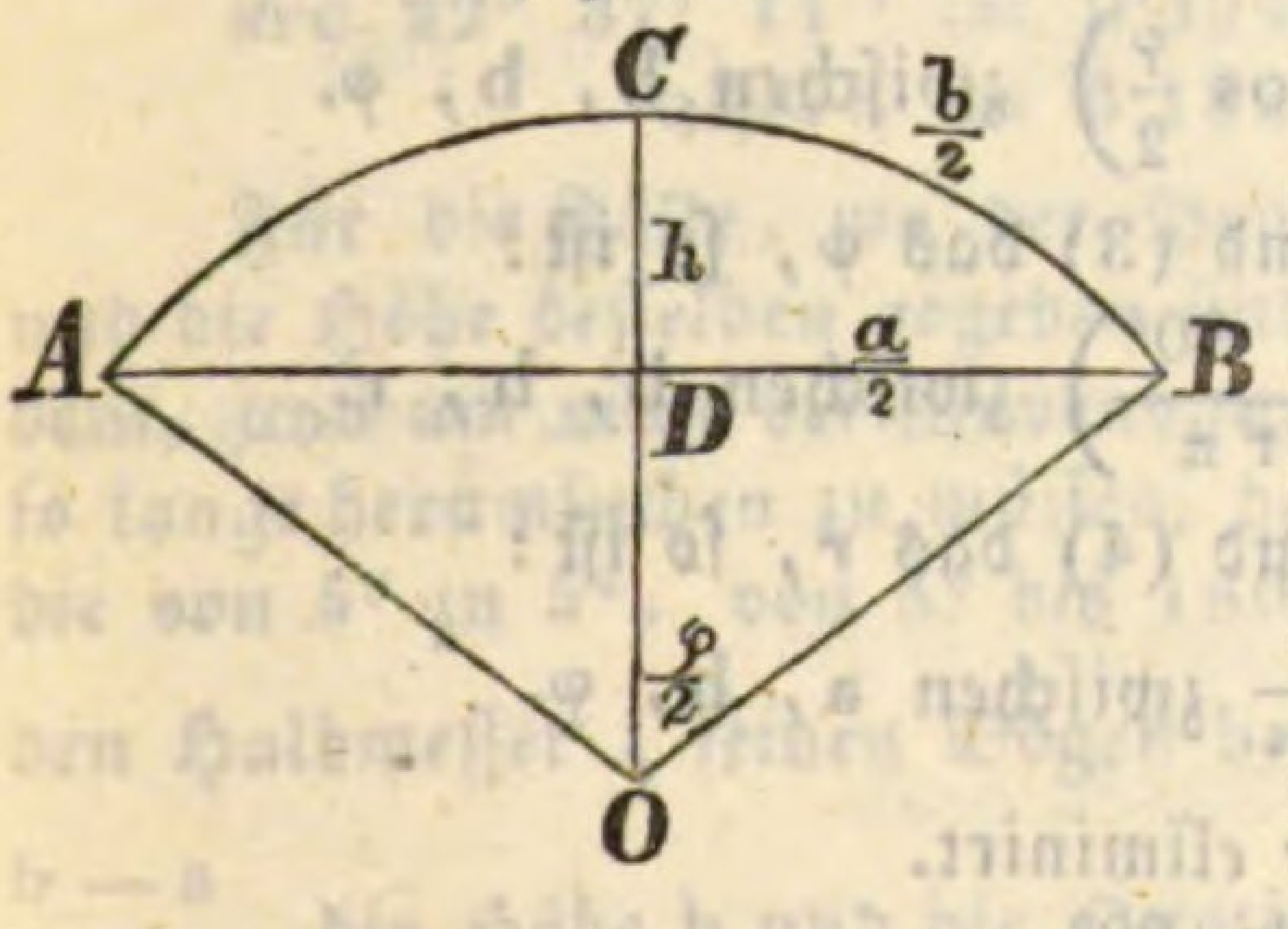
Flächeninhalte mehrerer regelmäßiger Vielecke,

1. ausgedrückt durch die Seite a; 2. durch den Halbmesser des umschriebenen Kreises r; 3. durch den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises = p.

Anzahl der Seiten.	Flächeninhalt durch		
	a	r	p
3	$0 \cdot 4330127\ a^2$	$1 \cdot 2990381\ r^2$	$5 \cdot 1961524\ p^2$
4	a^2	$2\ r^2$	$4\ p^2$
5	$1 \cdot 7204775\ a^2$	$2 \cdot 3776412\ r^2$	$3 \cdot 6327125\ p^2$
6	$2 \cdot 5980762\ a^2$	$2 \cdot 5980762\ r^2$	$3 \cdot 4641016\ p^2$
7	$3 \cdot 6339127\ a^2$	$2 \cdot 7364103\ r^2$	$3 \cdot 3710222\ p^2$
8	$4 \cdot 8284271\ a^2$	$2 \cdot 8284271\ r^2$	$3 \cdot 3137085\ p^2$
9	$6 \cdot 1818242\ a^2$	$2 \cdot 8925442\ r^2$	$3 \cdot 2757318\ p^2$
10	$7 \cdot 6942087\ a^2$	$2 \cdot 9389265\ r^2$	$3 \cdot 2491970\ p^2$
11	$9 \cdot 3656415\ a^2$	$2 \cdot 9735244\ r^2$	$3 \cdot 2298915\ p^2$
12	$11 \cdot 1961524\ a^2$	$3 \cdot 000000\ r^2$	$3 \cdot 2153904\ p^2$

§. 270. Untersuchen wir nun den Zusammenhang zwischen Winkel, Bogen, Sehne und der Höhe des Bogens.

Fig. 312.



Es sey der Winkel $AOB = \varphi$; seine Sehne $AB = a$, sein Bogen $ACB = b$, der Halbmesser $BO = r$; fällt man nun ein Loth von O auf AB, nämlich OD, und verlängert es, bis es den Umfang in C trifft, so nennt man $CD = h$ die Höhe des Bogens. Es wird nun unsere Aufgabe seyn, die verschiedenen Bezüge, die zwischen φ, a, b, r, h Statt finden, zu untersuchen.

Zuerst wissen wir $b : 2r\pi = \varphi : 360$; daher $b = \frac{r\pi\varphi^0}{180^0}$.

Ferners gibt uns das rechtwinklichte Dreieck BOD folgende drei Gleichungen, da $DO = r - h$ ist:

$$\frac{a}{2} = r \sin \frac{\varphi}{2};\ r - h = r \cdot \cos \frac{\varphi}{2};\ \frac{a^2}{4} + (r - h)^2 = r^2.$$

Die letzte Gleichung gibt uns $r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$.

Wir haben somit folgende vier Gleichungen:

$$(1)\quad b = \frac{r\pi\varphi^0}{180}\quad \text{zwischen } b, r, \varphi;$$

$$(2)\quad a = 2r \sin \frac{\varphi}{2}\quad \text{» } a, r, \varphi;$$

$$(3)\quad h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) \text{ zwischen } h,\ r,\ \varphi;$$

$$(4)\quad r = \frac{a^2 + 4h^2}{8h} \quad \text{»} \quad a,\ h,\ r.$$

Wie man leicht sieht, entsteht die vierte Gleichung, wenn man aus der zweiten und dritten das φ eliminirt; man hat also somit unter den fünf Größen a, b, h, r, φ drei Gleichungen, die also jederzeit hinreichen, drei derselben zu berechnen, sobald zwei gegeben sind, und für das praktische Rechnungsverfahren bedarf man auch nie mehr als diese vier Gleichungen, die man sich jederzeit sehr leicht entwickeln kann.

Zur Uebung aber im Rechnen und zur Uebersicht des ganzen Systems der Aufgaben wollen wir uns die Gleichungen für alle Dreiungen dieser fünf Größen entwickeln; fünf Dinge geben zehn Dreiungen, daher sind zehn Gleichungen; nachdem wir bereits vier haben, so haben wir noch sechs Gleichungen zu suchen.

Eliminiren wir zwischen der ersten und zweiten Gleichung das r, so ist:

$$(5)\quad b = \frac{\pi a \varphi}{360 \sin\frac{\varphi}{2}} \text{ zwischen } a,\ b,\ \varphi.$$

Eliminiren wir zwischen (1) und (2) das φ, so ist:

$$(6)\quad a = 2r\sin.\frac{b.90^\circ}{r\pi} \text{ zwischen } a,\ b,\ r.$$

Eliminiren wir zwischen (1) und (3) das r, so ist:

$$(7)\quad h = \frac{b.180^\circ}{\pi.\varphi^\circ}\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) \text{ zwischen } b,\ h,\ \varphi.$$

Eliminiren wir zwischen (1) und (3) das φ, so ist:

$$(8)\quad h = r\left(1 - \cos.\frac{b\ 90^\circ}{r\pi}\right) \text{ zwischen } b,\ h,\ r.$$

Eliminiren wir zwischen (2) und (4) das r, so ist:

$$(9)\quad \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{4ah}{a^2 + 4h^2} \text{ zwischen } a,\ h,\ \varphi.$$

Endlich aus (4) und (6) das r eliminirt.

$$(10)\quad \frac{4ah}{a^2 + 4h^2} = \sin\frac{8bh.90^\circ}{\pi(a^2 + 4h^2)} \text{ zwischen } a,\ b,\ h.$$

Aus diesen Gleichungen sieht man, daß, sobald a und b, d. h. die Sehne und der Bogen, oder h und b, d. h. die Höhe und der Bogen gegeben sind, man immer zur Berechnung der übrigen Größen auf transzendente Gleichungen stoßt, die man dann nur durch die sogenannte Regula falsi auflösen kann.

§. 271. Wir wollen einige Beispiele über diese Rechnungen machen.

Beispiel 1. Es sey $r = 30$; $\varphi = 60^\circ$ gegeben, so hat man:

nach der Gleichung (1); $b = \frac{30\pi . 60^\circ}{180^\circ} = 10\pi = 31·415926$;

nach (2); $a = 2 . 30 \sin 30^\circ = 30'$;

nach (3); $h = 30 (1 - \cos 30^\circ) = 30 (1 - 0·866) = 4·02$.

Beispiel 2. $a = 10^\circ$; $h = 1^\circ$; nach (4) $r = \frac{100 + 4}{8} = 13^\circ$;

nach (2); $10 = 2 r . \sin \frac{\varphi}{2}$; $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{10}{26}$, woraus $\varphi = 22^\circ 37' 11''$;

um b zu finden, hat man $b = \frac{\pi 13 . 22^\circ 37' 11''}{180}$. Man kann nun b durch die Logarithmen rechnen; da $22^\circ 37' 11'' = 22^\circ·61972$ ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \log 22·61972 &= 1·354487 \\ \log 13 &= 1·113943 \\ \log \pi &= 0·497150 \\ \hline & 2·965580 \\ \log 180 &= 2·255272 \\ \hline \log b &= 0·710308 \\ b &= 5·13225; \end{aligned}$$

oder mittelst der früher gegebenen Tabelle:

$$\begin{aligned} \text{arc } 22^\circ &= 0·383972 \\ \text{arc } 37' &= 0·010763 \\ \text{arc } 11'' &= 0·000053 \\ \hline \text{arc } 22^\circ 37' 11'' &= 0·394788 \text{ für den Halbmesser} = 1, \\ \text{also } b &= 5·13224 \text{ für den Halbmesser } 13. \end{aligned}$$

Für die Fälle, wo der Bogen und die Sehne oder der Bogen und die Höhe desselben gegeben sind, werden die Gleichungen transcendent, und um nicht bei Anwendung der Regula falsi die Probierwerthe so lange herumsuchen zu müssen, haben wir hier eine Tabelle angehängt, die von 5° zu 5°, von 5° bis 180° gehend, für jeden Winkel φ, für den Halbmesser 1 seinen Bogen b, seine Sehne a, den Quotus $\frac{b}{a}$ und $\frac{b - a}{b}$, die Höhe h und die Quotienten $\frac{b}{h}$ und $\frac{a}{h}$ angibt. Durch diese Tabelle ist man dann im Stande, wenn b und a oder b und h gegeben sind, den zugehörigen Winkel φ° bis ungefähr 5°, und durch Interpoliren ungefähr auf einen Grad zu bestimmen; die Minuten und Sekunden findet man dann durch die Regula falsi.

Beispiel 3. Es sey die Länge des Bogens $= 120'$ und seine Sehne $= 100'$, wie groß ist der zugehörige Mittelpunktwinkel, Halbmesser, Höhe u. s. w.?

Hier ist $b = 120$, $a = 100$, daher $\frac{b}{a} = 1·2$, $\frac{b}{b - a} = \frac{120}{20} = 6$; nun gibt unsere Tafel

φ	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{b-a}$
115°	1·1899	6·26
120	1·2092	5·78 ;

also muß unser Winkel zwischen 115° und 120° liegen; um dieß nun näher zu bestimmen, sehe ich, wenn der Winkel um 5° zunimmt, wächst $\frac{b}{a}$ um 0·0193, um wie viele Grade muß also 115° wachsen, damit $\frac{b}{a} = 1·2$ werde, wofür wir die Proportion haben:

$$0·0193 \;:\; (1·2 - 1·1899) = 5^0 : x^0$$
$$0·01927 : 0·0101 = 5^0 : x^0$$
$$x = 2^0\,6\,;$$

wir haben also nahe für $\varphi = 115^0 + 2·^0 6 = 117^0 6$; hat man $\frac{b}{a} = 1·2$, und nun haben wir zur Auflösung der Gleichung

$$b = \frac{\pi\, a\, \varphi}{360 \sin \frac{\varphi}{2}} \text{ in unserem Falle } 120 = \frac{\pi \,.\, 100 \,.\, \varphi}{360 \,.\, \sin \frac{\varphi}{2}}$$

die Regula falsi anzuwenden (siehe mein Handbuch der Arithmetik für Praktiker, Seite 439).

Obige Gleichung gehet über in $\frac{432}{\pi} = \frac{\varphi}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ oder

$$\log 432 - \log \pi - \log \varphi + \log \sin \frac{\varphi}{2} = 0, \text{ oder}$$

$$2·138334 - \log \varphi + \log \sin \frac{\varphi}{2} = 0 \;(\dagger).$$

Setzen wir also hier $\varphi = 117^0 36' = 117^0 6$, daher $\frac{\varphi}{2} = 58^0\, 48'$, so hat man:

$$\begin{array}{rr} & 2·138334 \\ \log \sin \frac{\varphi}{2} = & 9·932151 - 10 \\ \hline & 2·070485 \\ \log 117·6 = & 2·070407 \\ \hline & 0·000078. \end{array}$$

Das Resultat der Gleichung (†) ist also + 0·000078, und wie wir sehen, ist der Werth von φ schon ziemlich nahe bestimmt. Um nun ein negatives Resultat zu erhalten, so werde ich, da der Bogen schneller als die Sehne wächst, φ größer machen, und $\varphi = 117·^0 7 = 117^0\, 42'$ setzen, daher $\frac{\varphi}{2} = 58^0\, 51'$; man hat so:

$$\begin{array}{rl} & 2{\cdot}138334 \\ \log\sin 58^{\circ}\ 51' = & 9{\cdot}932380-10 \\ \hline & 2{\cdot}070714 \\ \log 117{\cdot}7 = & 2{\cdot}070776 \\ \hline \text{Resultat} = & -\ 0{\cdot}000062\text{, also} \end{array}$$

erster Satz 117·6 Fehler des Resultats $+\ 0{\cdot}000078$,
zweiter » 117·7 » » » $-\ 0{\cdot}000062$;

daher Verbesserung des kleineren Satzes $= 0{\cdot}1\,\frac{78}{140} = 0{\cdot}055$; daher verbesserter Werth $\varphi = 117{\cdot}^{\circ}655 = 117^{\circ}\ 39'\ 18''$.

$\frac{\varphi}{2} = 58^{\circ}\ 49'\ 39''$; daher

$$\begin{array}{rl} & 2{\cdot}138334 \\ \log\sin\frac{\varphi}{2} = & 9{\cdot}932278-10 \\ \hline & 2{\cdot}070612 \\ \log 117{\cdot}655 = & 2{\cdot}070611 \\ \hline \text{Resultat} = & 0{\cdot}000001. \end{array}$$

Setzet man nun $\varphi = 117^{\circ}{\cdot}656 = 117^{\circ}\ 39'\ 21''6$, so hat man:

$$\begin{array}{rl} & 2{\cdot}138334 \\ \log\sin\frac{\varphi}{2} = & 9{\cdot}932280 \\ \hline & 2{\cdot}070614 \\ \log 117{\cdot}656 = & 2{\cdot}070614 \\ \hline & 0. \end{array}$$

(Die Rechnung mit siebenstelligen Logarithmen gibt 19·″5).

Um den Halbmesser zu finden, hat man:

$$\begin{array}{rl} \log\frac{a}{2} = & 1{\cdot}698970 \\ \log\sin\frac{\varphi}{2} = & 9{\cdot}932280-10 \\ \hline \log r = & 1{\cdot}766690 \\ r = & 58'4373. \end{array}$$

Um die Höhe zu finden, hat man:

$$h = r\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = 2\,r\sin^2\frac{\varphi}{4},$$

und findet $h = 28{\cdot}190$.

Beispiel 4. Es sey die Bogenlänge $= 10'$ und die Höhe $= \frac{1'}{4}$, wie groß der Halbmesser, die Sehne, der Mittelpunktwinkel?

Es ist also $\frac{b}{h} = 40$, unsere Tabelle gibt:

$$\varphi = 10^{\circ};\ \frac{b}{h} = 45{\cdot}86,$$

$$\varphi = 15^\circ;\ \frac{b}{h} = 30\cdot60;$$

also für 5° nimmt $\frac{b}{h}$ um 15·26 ab, also entsprechen dem 0·01 des $\frac{b}{h}$ daher $\frac{5^\circ}{15\cdot26}$, da nun unser $\frac{b}{h} = 40$, also um 5·86 kleiner ist als 45·86, so wird unser $\varphi = 10^\circ + \frac{5 \cdot 5.86}{15\cdot26} = 10^\circ + 1\cdot9 = 11\cdot^\circ9$ nahe seyn.

Zur näheren Bestimmung des φ haben wir die Gleichung (7)

$$h = \frac{180 \cdot b}{\pi\,\varphi}\left(1 - \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{3600}{\pi\,\varphi} \cdot \sin^2\frac{\varphi}{4};\ \text{daher}$$

$$\log \cdot \frac{360 \cdot b}{\pi\,h} + 2\log\sin\frac{\varphi}{4} - \log\varphi = 0,\ \text{oder}$$

$$3\cdot661213 + 2\log\sin\frac{\varphi}{4} - \log\varphi = 0.$$

Setzen wir hier nun statt φ 12°, so hat man:

$$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8\cdot718800 - 10$$

$$2\log\sin\frac{\varphi}{4} = 7\cdot437600 - 10$$

$$\begin{array}{r} 3\cdot661213 \\ \hline 1\cdot098813 \end{array}$$

$$\log\varphi = 1\cdot079181$$

$$+\ 0\cdot019632.$$

Setzen wir nun statt φ 11°, so hat man:

$$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8\cdot681043 - 10$$

$$\begin{array}{r} 7\cdot362086 - 10 \\ 3\cdot661213 \\ \hline 1\cdot023299 \end{array}$$

$$\log\varphi = 1\cdot041393$$

$$-\ 0\cdot018094;$$

also liegt φ zwischen 11° und 12°; wenden wir nun die Regula falsi an, so ist:

erster Satz	$\varphi = 12^\circ$,	Resultat =	0·019632
zweiter »	$\varphi = 11^\circ$,	» = —	0·018094
	1°		0·037726

daher Verbesserung $= \frac{18094}{37726} \cdot 1^\circ = 0\cdot48$; daher verbessertes $\varphi = 11\cdot^\circ48$.

Setzt man nun: $\varphi = 11\cdot^\circ48 = 11^\circ\ 28'\ 48''$;

$$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8\cdot699578 - 10$$

$$\begin{array}{r} 7\cdot399156 - 10 \\ 3\cdot661213 \\ \hline 1\cdot050369 \end{array}$$

$$\log\varphi = 1\cdot059942$$

$$+\ 0\cdot000427$$

$\varphi = 11^{\circ}{\cdot}47 = 11^{\circ}28'12''$	$\varphi = 11^{\circ}466 = 11^{\circ}27'57'6$
$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8{\cdot}699200-10$	$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8{\cdot}699048-10$
$7{\cdot}398400-10$	$7{\cdot}398096-10$
$3{\cdot}661213$	$3{\cdot}661213$
$1{\cdot}059613$	$1{\cdot}059309$
$\log\varphi = 1{\cdot}059563$	$\log\varphi = 1{\cdot}059412$
$+\ 0{\cdot}000050$	$-\ 0{\cdot}000103.$

Aus den letzten zwei Setzungen erhält man durch die Regula falsi Verbesserung des

$\varphi = \frac{103}{153}\,0{\cdot}004 = 0{\cdot}0027$; daher verbessertes $\varphi = 11{\cdot}4687 = 11^{\circ}28'7''3$.

$$\log\sin\frac{\varphi}{4} = 8{\cdot}699151$$
$$7{\cdot}398302$$
$$3{\cdot}661213$$
$$1{\cdot}059515$$
$$\log\varphi = 1{\cdot}059515$$
$$0.$$

Um nun den Halbmesser zu finden, gibt uns die Gleichung (1)

$$r = \frac{b\,.\,180}{\pi\cdot\varphi} \text{ oder } 2r = \frac{360}{\pi}\,.\,\frac{b}{\varphi}$$
$$\log\frac{360\,.\,b}{\pi} = 3{\cdot}059153$$
$$\log\varphi = 1{\cdot}059515$$
$$\log 2r = 1{\cdot}999638$$
$$2r = 99{\cdot}9165$$
$$r = 49{\cdot}95825,$$

oder auch die Gleichung (3) gibt $h = 2r\sin^2\frac{\varphi}{4}$, also

$$2r = \frac{h}{\sin^2\frac{\varphi}{4}}; \text{ daher}$$
$$\log h = 9{\cdot}397940-10$$
$$2\log\sin\frac{\varphi}{4} = 7{\cdot}398302-10$$
$$\log 2r = 1{\cdot}999638.$$

Um endlich a zu bestimmen, so haben wir nach der Gleichung (2)

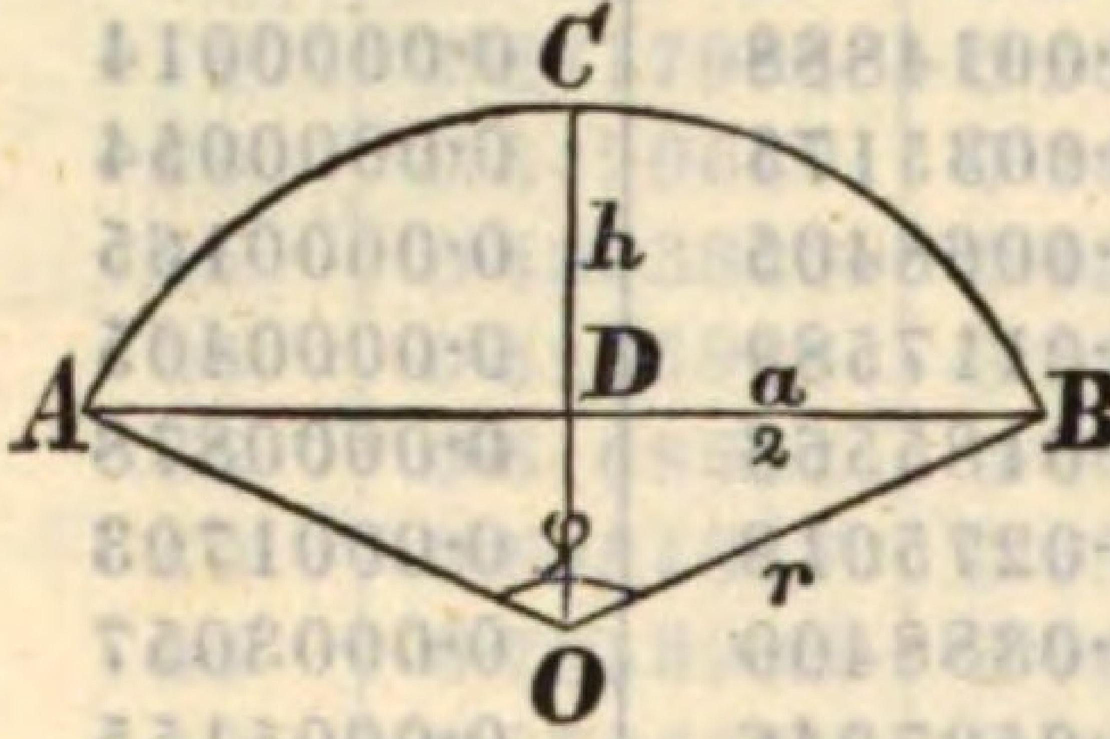
$$\log 2r = 1{\cdot}999638$$
$$\log\sin\frac{\varphi}{2} = 8{\cdot}999638-10$$
$$\log a = 0{\cdot}999276$$
$$a = 9{\cdot}9833.$$

Winkel $= \varphi$	Bogen $= b$	Sehne $= a$	$\frac{b}{a}$	$\frac{b}{b-a}$	Höhe $= h$
5	0·0872665	0·0872388	1·0003	·	0·00095
10	0·1745329	0·1743114	1·0013	787·9	0·00381
15	0·2617994	0·2610524	1·0029	350·5	0·00856
20	0·3490659	0·3472964	1·0051	197·3	0·01519
25	0·4363323	0·4328792	1·0080	126·3	0·02370
30	0·5235988	0·5176380	1·0115	87·84	0·03407
35	0·6108652	0·6014116	1·0157	64·62	0·04628
40	0·6981317	0·6840402	1·0206	49·55	0·06031
45	0·7853982	0·7653668	1·0261	39·21	0·07612
50	0·8726646	0·8452366	1·0324	31·82	0·09369
55	0·9599311	0·9234972	1·0393	26·35	0·11299
60	1·0471976	1·0000000	1·0472	22·19	0·13397
65	1·1344640	1·0745992	1·0558	18·95	0·15661
70	1·2217305	1·1471528	1·0650	16·38	0·18085
75	1·3089969	1·2175228	1·0752	14·31	0·20665
80	1·3962634	1·2855752	1·0862	12·62	0·23396
85	1·4835299	1·3511804	1·0979	11·22	0·26272
90	1·5707963	1·4142136	1·1108	10·03	0·29289
95	1·6580628	1·4745546	1·1244	9·03	0·32442
100	1·7453293	1·5320888	1·1391	8·18	0·35721
105	1·8325957	1·5867066	1·1550	7·46	0·39124
110	1·9198622	1·6383040	1·1719	6·81	0·42642
115	2·0071286	1·6867828	1·1899	6·26	0·46271
120	2·0943951	1·7320508	1·2092	5·78	0·50000
125	2·1816565	1·7740216	1·2299	5·35	0·53825
130	2·2689280	1·8126156	1·2518	4·97	0·57738
135	2·3561945	1·8477590	1·2752	4·63	0·61731
140	2·4434610	1·8793852	1·3001	4·33	0·65798
145	2·5307274	1·9074340	1·3268	4·06	0·69929
150	2·6179939	1·9318516	1·3551	3·81	0·74118
155	2·7052603	1·9525920	1·3854	3·59	0·78356
160	2·7925268	1·9696156	1·4179	3·39	0·82635
165	2·8797933	1·9828898	1·4523	3·21	0·86947
170	2·9670597	1·9923894	1·4892	3·04	0·91284
175	3·0543262	1·9980964	1·5287	2·90	0·95638
180	3·1415926	2·0000000	1·5708	2·75	1·00000

$\frac{b}{h}$	$\frac{a}{h}$	$\frac{1}{2}(\text{arc}\,\varphi - \sin\varphi)$	$\frac{2}{3}$ a h	Differenz
92·73	91·65	0·0000554	0·0000553	0·0000001
45·86	45·81	0·0004423	0·0004422	0·0000001
30·60	30·51	0·0014902	0·0014888	0·0000014
22·98	22·86	0·0035229	0·0035175	0·0000054
18·41	18·27	0·0068570	0·0068405	0·0000165
15·36	15·19	0·0117994	0·0117589	0·0000405
13·20	12·99	0·0186444	0·0185566	0·0000878
11·57	11·34	0·0276721	0·0275018	0·0001703
10·32	10·05	0·0391457	0·0388400	0·0003057
9·31	9·02	0·0533101	0·0527946	0·0005155
8·51	8·18	0·0703895	0·0695632	0·0008263
7·83	7·48	0·0905861	0·0893164	0·0012697
7·25	6·87	0·1140781	0·1121942	0·0018839
6·76	6·34	0·1410189	0·1383068	0·0027121
6·33	5·90	0·1715355	0·1677314	0·0038041
5·97	5·50	0·2057278	0·2007117	0·0050161
5·65	5·14	0·2436676	0·2366571	0·0070105
5·36	4·83	0·2853981	0·2761422	0·0092559
5·11	4·54	0·3309340	0·3189064	0·0120276
4·88	4·29	0·3802607	0·3648540	0·0154067
4·68	4·05	0·4333349	0·4138538	0·0194811
4·50	3·84	0·4900848	0·4657409	0·0243439
4·33	3·65	0·5504104	0·5205416	0·0298688
4·19	3·44	0·6141848	0·5773502	0·0368346
4·05	3·29	0·6812522	0·6365796	0·0446726
3·93	3·14	0·7514418	0·6977139	0·0537279
3·82	2·99	0·8245438	0·7604347	0·0641091
3·71	2·85	0·9003367	0·8243983	0·0759384
3·62	2·73	0·9785755	0·8892382	0·0893373
3·53	2·61	1·0589969	0·9545678	0·1044291
3·45	2·49	1·1413210	1·0199825	1·1213385
3·38	2·38	1·2252533	1·0850635	0·1401898
3·31	2·28	1·3104871	1·1493804	0·1611067
3·25	2·18	1·3967057	1·2124941	0·1842116
3·19	2·09	1·4835852	1·2739605	0·2096247
3·14	2·00	1·5707963	1·3333333	0·2374630

§. 272. Um den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes zu finden, muß man den Flächeninhalt des zugehörigen Kreisausschnittes berechnen, und dann das Dreieck, welches zwischen den beiden Halbmessern enthalten ist, abziehen.

Fig. 313.



Abschnitt $ABC = AOBC - AOB$, der Ausschnitt $AOBC = \frac{\pi r^2 \varphi}{360}$; $AOB = \frac{r^2}{2} \sin \varphi$; daher Abschnitt

$$ABC = \left(\frac{\pi \varphi}{360} - \tfrac{1}{2} \sin \varphi\right) r^2,$$

oder Abschnitt $= (\text{arc}\, \varphi^0 - \sin \varphi^0) \frac{r^2}{2}$, wo hier arc φ^0 der Bogen von φ^0 für den Halbmesser $= 1$ bedeutet.

Sobald also φ und r gegeben sind, so hat die Berechnung des Flächeninhalts eines Kreisabschnittes keine Schwierigkeit. Sind hingegen zwei andere von den fünf Größen φ, r, b, a, h gegeben, so bestimmt man nach den Formeln des vorigen Paragraphes das r und φ, und setzet ihre Werthe in die gegenwärtige Formel.

Beispiel 1. Es sey die Höhe des Bogens 1′ und die Sehne $= 24'$, wie groß ist der Flächeninhalt des Abschnittes?

$a = 24$; $h = 1$ gibt $r = 72{\cdot}5$; $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2r}$;

$\log a =$	$1{\cdot}380211$	$\frac{\varphi}{2} =$	$9^0\ 31'\ 38''$
$\log 2r =$	$2{\cdot}161368$		
$\log \sin \frac{\varphi}{2} =$	$9{\cdot}218843$	$\varphi =$	$19^0\ \ 3'\ 16''$
$\log \pi =$	$0{\cdot}497150$	$\log \sin \varphi =$	$9{\cdot}513838$
$\log \varphi =$	$1{\cdot}279998$	$2 \log r =$	$3{\cdot}720676$
	$1{\cdot}777148$		$3{\cdot}234514$
$\log 360 =$	$2{\cdot}556303$	$\log 2 =$	$0{\cdot}301030$
	$9{\cdot}220845$		$2{\cdot}933484$
$2 \log r =$	$3{\cdot}720676$		
	$2{\cdot}941521$		
Ausschnitt $=$	$874{\cdot}019$		
Dreieck $=$	$857{\cdot}993$		
	$16{\cdot}026$		

Also Kreisabschnitt $= 16{\cdot}026$ Quadratschuh.

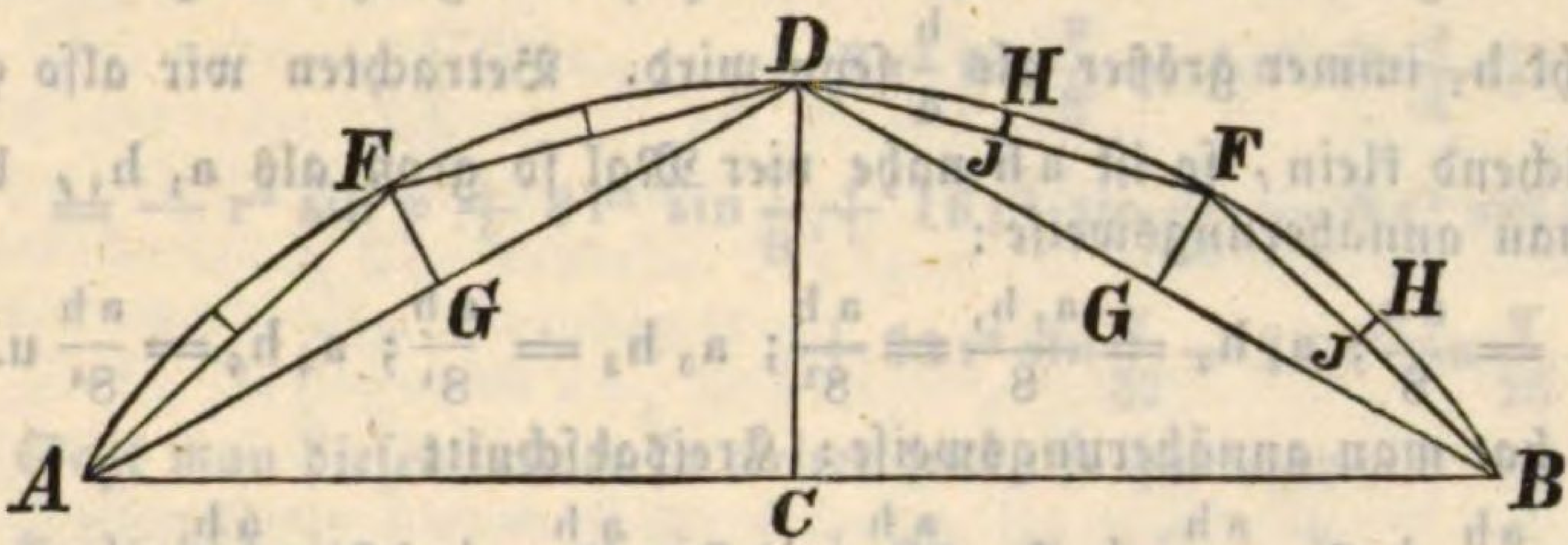
Beispiel 2. Es sey die Spannweite des Bogens vier Mal so groß als die Pfeilhöhe h desselben, d. h $a = 4h$, so hat man $2r = 5h$; $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{5}$, daher $\varphi = 106^0\ 15'\ 36''{\cdot}7$, daher der Flächeninhalt des Kreisabschnittes

$$= (1{\cdot}8545902 - 0{\cdot}96) \frac{r^2}{2} = 0{\cdot}4472951\, r^2$$

$$= 2{\cdot}79559\, h^2 = 0{\cdot}174724\, a^2.$$

§. 273. In vielen Fällen des praktischen Lebens will man den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes schnell haben, wenn er auch nur annäherungsweise richtig ist. Um nun eine solche Annäherungsformel zu finden, wollen wir folgende Betrachtungen anstellen.

Fig 314.



Es sey AB = a, CD = h; halbiren wir den Bogen AD in F, und es sey FG ⊥ AD; es sey nun AD = a_1; FG = h_1; halbiren wir wieder FD in H, und es sey HI ⊥ DF, und es sey DF = a_2 und HI = h_2 u. s. w., d. h. halbiren wir stets die Bögen, nennen ihre Sehnen a_1 a_2 a_3 a_4 u. s. w., und ihre zugehörigen Höhen h_1 h_2 h_3 ... u. s. w., so besteht der Kreisabschnitt ADB aus dem Dreiecke ADB, mehr dem doppelten Dreiecke DFB, mehr dem vierfachen Dreiecke DHF u. s. w., d. h. der Kreisabschnitt

$$ADB = \frac{ah}{2} + 2 \cdot \frac{a_1 h_1}{2} + 4 \cdot \frac{a_2 h_2}{2} + 8 \cdot \frac{a_3 h_3}{2} + 16 \cdot \frac{a_4 h_4}{2} +$$

u. s. f. bis ins Unendliche.

Nun ist, wie wir wissen, $a = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$, wenn φ den Mittelpunktwinkel bedeutet, der zu der Sehne AB gehört, und

$$h = 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{4}.$$

Ganz eben so ist $a_1 = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{4}$; $h_1 = 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{8}$,

$$a_2 = 2r \cdot \sin\frac{\varphi}{8};\ h_2 = 2r \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{16} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist $\frac{a}{a_1} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{4}} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{4}\cos\frac{\varphi}{4}}{\sin\frac{\varphi}{4}} = 2\cos\frac{\varphi}{4}$.

Eben so $\frac{a_1}{a_2} = 2\cos\frac{\varphi}{8}$; $\frac{a_2}{a_3} = 2\cos\frac{\varphi}{16}$ u. s. w.

Je kleiner aber der Winkel ist, desto mehr nähert sich sein Cosinus der Einheit, d. h. je kleiner der Mittelpunktwinkel ist, desto mehr wird die Sehne des halben Bogens sich der halben Sehne des ganzen Bogens nähern, obwohl erstere doch stets größer seyn wird, als die letztere. Eben so ist:

$$\frac{h}{h_1} = \frac{\frac{\sin^2 \frac{\varphi}{4}}{}}{\sin^2 \frac{\varphi}{8}} = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{8} \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{8}}{\sin^2 \frac{\varphi}{8}} = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{8},$$

d. h. je kleiner der Winkel ist, um desto mehr wird sich die Höhe des halben Bogens dem vierten Theile der Höhe des ganzen Bogens nähern, obwohl h_1 immer größer als $\frac{h}{4}$ seyn wird. Betrachten wir also φ als hinreichend klein, so ist a h nahe vier Mal so groß als $a_1 h_1$, daher hat man annäherungsweise:

$$a_1 h_1 = \frac{a h}{8};\; a_2 h_2 = \frac{a_1 h_1}{8} = \frac{a h}{8^2};\; a_3 h_3 = \frac{a h}{8^3};\; a_4 h_4 = \frac{a h}{8^4} \text{ u.s.w.},$$

daher hat man annäherungsweise: Kreisabschnitt

$$= \frac{a h}{2} + 2 \cdot \frac{a h}{2 \cdot 8} + 4 \cdot \frac{a h}{2 \cdot 8^2} + 8 \cdot \frac{a h}{2 \cdot 8^3} + 16 \cdot \frac{a h}{2\ 8^4} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{a h}{2}\left(1 + \frac{2}{2^3} + \frac{2^2}{2^6} + \frac{2^3}{2^9} + \frac{2^4}{2^{12}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$= \frac{a h}{2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \text{ꝛc.}\right).$$

Die Summe der eingeklammerten Reihe ist gleich $\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{4}{3}$; daher hat man Kreisabschnitt näherungsweise $= \frac{a h}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2 a h}{3}$, d. h. der Flächeninhalt eines Kreisabschnittes ist näherungsweise gleich $\frac{2}{3}$ aus dem Produkte von Höhe und Sehne.

Bei dem ersten Beispiele des vorhergehenden Paragraphes ist $a = 24'$, $h = 1'$, daher hat man $\frac{2}{3}\, a h = 16\square'$, was vom wahren Resultate nur um $0{\cdot}026\square''$ abweicht.

§. 274. Unsere Reihe im letzten Paragraphe für den Flächeninhalt des Kreisabschnittes gibt

2 . Kreisabschnitt

$$= a h + 2 a_1 h_1 + 4 a_2 h_2 + 8 a_3 h_3 + \text{ꝛc. bis ins Unendliche.}$$

Setzen wir hier statt $a\ a_1\ a_2\ a_3 \ldots h\ h_1\ h_2 \ldots$ ihre Werthe, so ist: da wir

$$a h = 4 r^2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{4} = 2 r^2 \sin \frac{\varphi}{2}\left(1 - \cos \frac{\varphi}{2}\right) = r^2\left(2 \sin \frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right),$$

und eben so

$$a_1 h_1 = r^2\left(2 \sin \frac{\varphi}{4} - \sin \frac{\varphi}{2}\right);\; a_2 h_2 = r^2\left(2 \sin \frac{\varphi}{8} - \sin \frac{\varphi}{4}\right) \text{ u.s.w. haben}$$

2 . Kreisabschnitt

$$= r^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \sin\varphi\right) + 2r^2\left(2\sin\frac{\varphi}{4} - \sin\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$+ 4r^2\left(2\sin\frac{\varphi}{8} - \sin\frac{\varphi}{4}\right) + \text{ꝛc.}$$

$$= 2r^2\sin\frac{\varphi}{2} - r^2\sin\varphi + 4r^2\sin\frac{\varphi}{4} - 2r^2\sin\frac{\varphi}{2}$$
$$+ 8r^2\sin\frac{\varphi}{8} - 4r^2\sin\frac{\varphi}{4} + \text{ꝛc.}$$

$$= -r^2\sin\varphi + 8r^2\sin\frac{\varphi}{8} + 16r^2\sin\frac{\varphi}{16} - 8r^2\sin\frac{\varphi}{8}$$
$$+ 32r^2\sin\frac{\varphi}{32} - 16r^2\sin\frac{\varphi}{16} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man dieses immer so weiter fort, so hat man:

$$2\,.\,\text{Kreisabschnitt} = -r^2\sin\varphi + 2^m\,.\,r^2\,.\sin\,.\frac{\varphi}{2^m}$$
$$+ 2^m r^2\left(2\,.\sin\frac{\varphi}{2^{m+1}} - \sin\,.\frac{\varphi}{m}\right) + \text{ꝛc.}$$

Je größer nun m ist, desto mehr nähert sich $\sin\frac{\varphi^0}{m}$ dem $\frac{\text{arc}\ \varphi^0}{m}$; da uns nun nichts hindert, m über alle Grenzen groß wachsen zu lassen, so hat man:

$$2\,.\,\text{Kreisabschnitt} = -r^2\sin\varphi^0 + 2^m\,.\,r^2\,.\,\frac{\text{arc}\ \varphi^0}{2^m}$$
$$+ 2^{m+1}\,r^2\,\frac{\text{arc}\ \varphi^0}{2^{m+1}} - 2^m\,r^2\,\frac{\text{arc}\ \varphi^0}{2^m} + \text{ꝛc.}$$

oder $2\,.\,\text{Kreisabschnitt} = -r^2\,.\sin\varphi + r^2\,\text{arc}\,\varphi^0 + r^2\,\text{arc}\ \varphi^0 - r^2\,\text{arc}\ \varphi^0$
$$+ r^2\ \text{arc}\ \varphi^0 - r^2\,\text{arc}\,\varphi^0 + \text{ꝛc.}$$

$2\,.\,\text{Kreisabschnitt} = (\text{arc}\ \varphi^0 - \sin\ \varphi^0)\ r^2$; daher

Kreisabschnitt $= \frac{r^2}{2}(\text{arc}\ \varphi^0 - \sin\ \varphi^0)$, wie früher.

§. 275. Um die Größe des Fehlers zu beurtheilen, den man begeht, wenn man $\frac{2}{3}$ des Produktes aus Höhe und Sehne als Flächeninhalt des Kreisabschnittes annimmt; nehmen wir einen Kreisabschnitt, dessen Bogen der nte Theil des Kreisumfanges ist, wo also der Mittelwinkel $\varphi\ \frac{360^0}{n}$ die Sehne a, also $= 2r\sin\frac{180^0}{n}$, die Höhe h $= 2r\sin^2\frac{90^0}{n}$, daher der Flächeninhalt des Kreisabschnittes

$$= \frac{\pi r^2}{n} - \frac{r^2}{2}\sin\frac{360^0}{n}\ \text{und}\ \frac{2}{3}\,a\,h = \frac{8r^2}{3}\sin\frac{180^0}{n}\,.\sin^2\frac{90^0}{n},$$

es ist daher $\triangle$ der Unterschied zwischen dem wahren und dem angenäherten Flächeninhalt

$$\triangle = r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \tfrac{1}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} - \tfrac{8}{3} \sin \frac{180^\circ}{n} \sin^2 \frac{90^\circ}{n}\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{180}{n} . \cos \frac{180^\circ}{n} - \tfrac{8}{3} \sin \frac{180^\circ}{n} \sin^2 \frac{90^\circ}{n}\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} \left[1 - 2 \sin^2 \frac{90}{n} + \tfrac{8}{3} \sin^2 \frac{90^\circ}{n}\right]\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} \left[1 + \tfrac{2}{3} \sin^2 \frac{90^\circ}{n}\right]\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} - \tfrac{2}{3} \sin \frac{180}{n} . \sin^2 \frac{90^\circ}{n}\right)$$

$$= r^2 \left(\frac{\pi}{n} - \sin \frac{180^\circ}{n} - \tfrac{4}{3} \sin^3 \frac{90^\circ}{n} . \cos \frac{90^\circ}{n}\right).$$

Aus den Werthen von a und h erhält man $\frac{a}{h} = 2 \operatorname{cotg} \frac{90^\circ}{n}$.

Zur Beurtheilung des Fehlers der Näherungsformel hat man:

$n = 10$; $\frac{a}{h} = 12{\cdot}628$; $\triangle = 0{\cdot}0001008\ r^2$, also

$\triangle < \frac{r^2}{10^4}$, ist also $a = 13\,h$, so ist

$\triangle < 0{\cdot}0467\ h^2$, also $\triangle < \frac{5}{100} h^2$;

$n = 20$; $\frac{a}{h} = 25{\cdot}412$; $\triangle = 0{\cdot}0000031\ r^2$, also $\triangle < \frac{3\,r^2}{10^6}$,

also $a = 25\,h$; $\triangle < 0{\cdot}018\ h^2$;

$n = 30$; $\frac{a}{h} = 38{\cdot}16$; $\triangle = 0{\cdot}0000004\,r^2$, also $\triangle < \frac{4\,r^2}{10^7}$,

also $a = 38\,h$; $\triangle < 0{\cdot}013\ h^2$.

Sobald also die Sehne mehr als zwölf Mal so groß ist als die Höhe, wird man diese Annäherungsformel in den gewöhnlichen Fällen des praktischen Lebens ungescheut anwenden können; da dann der Fehler sicher $< \frac{1}{20} h^2$ ist.

Will man aber doch ein genaueres Resultat haben, und ist nicht mit trigonometrischen Tafeln versehen, oder will Jemanden die Arbeit geben, der nicht mit solchen Tafeln umgehen kann, so hat man Kreisabschnitt

$$= \frac{a\,h}{2} + 2\ .\ \frac{2\,a_1\,h_1}{3}, \text{ oder}$$

$$= \frac{a\,h}{2} + 2\ .\ \frac{a_1\,h_1}{2} + 4\ .\ \frac{2\,a_2\,h_2}{3}, \text{ oder}$$

$$= \frac{a\,h}{2} + 2\ .\ \frac{a_1\,h_1}{2} + 4\ .\ \frac{a_2\,h_2}{2} + 8\ .\ \frac{2\,a_3\,h_3}{3}, \text{ oder u. s. w.,}$$

wo man zur Berechnung von $a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ h_1\ h_2\ h_3 \ldots$ folgende Formeln hat:

$$r = \frac{a^2 + 4\,h^2}{8\,h}$$

$$a_1 = \sqrt{2\,h\,r}\,;\quad h_1 = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{2\,r}}\right)$$
$$a_2 = \sqrt{2\,h_1\,r}\,;\quad h_2 = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h_1}{2\,r}}\right)$$
$$a_3 = \sqrt{2\,h_2\,r}\,;\quad h_3 = r\left(1 - \sqrt{1 - \frac{h_2}{2\,r}}\right) \text{ u. s. w.}$$

Mit anderen Worten: man theilt den Kreisabschnitt in das Dreieck über der Sehne und die Kreisabschnitte der halben Bögen, verfährt mit diesen Abschnitten wieder so, und fährt so fort, bis die Kreisabschnitte so klein werden, daß man die Annäherungsformel für dieselben zweckmäßig anwenden kann.

Z. B. Es sey $a = 4\,h$, so gibt die genaue Berechnung des Flächeninhalts des Kreisabschnittes $= 0{\cdot}4472951\ r^2 = 2{\cdot}79559\ h^2$.

Rechnen wir nun nach der so eben angedeuteten Methode, so finden wir:

$$a_1 = 2{\cdot}236068\ h;\quad h_1 = 0{\cdot}263932\ h\ .\ \frac{a_1}{h_1} = 8{\cdot}4721$$
$$a_2 = 1{\cdot}149764\ h;\quad h_2 = 0{\cdot}066877\ h\ .\ \frac{a_2}{h_2} = 17{\cdot}177$$
$$a_3 = 0{\cdot}578261\ h;\quad h_3 = 0{\cdot}016775\ h\ .\ \frac{a_3}{h_3} = 34{\cdot}470$$
$$a_4 = 0{\cdot}289617\ h;\quad h_4 = 0{\cdot}004197\ h\ .\ \frac{a_4}{h_4} = 68{\cdot}998$$
$$a_5 = 0{\cdot}144869\ h;\quad h_5 = 0{\cdot}001049\ h\ .\ \frac{a_5}{h_5} = 138{\cdot}027$$
$$a_6 = 0{\cdot}072442\ h;\quad h_6 = 0{\cdot}000262\ h\ .\ \frac{a_6}{h_6} = 276{\cdot}068$$

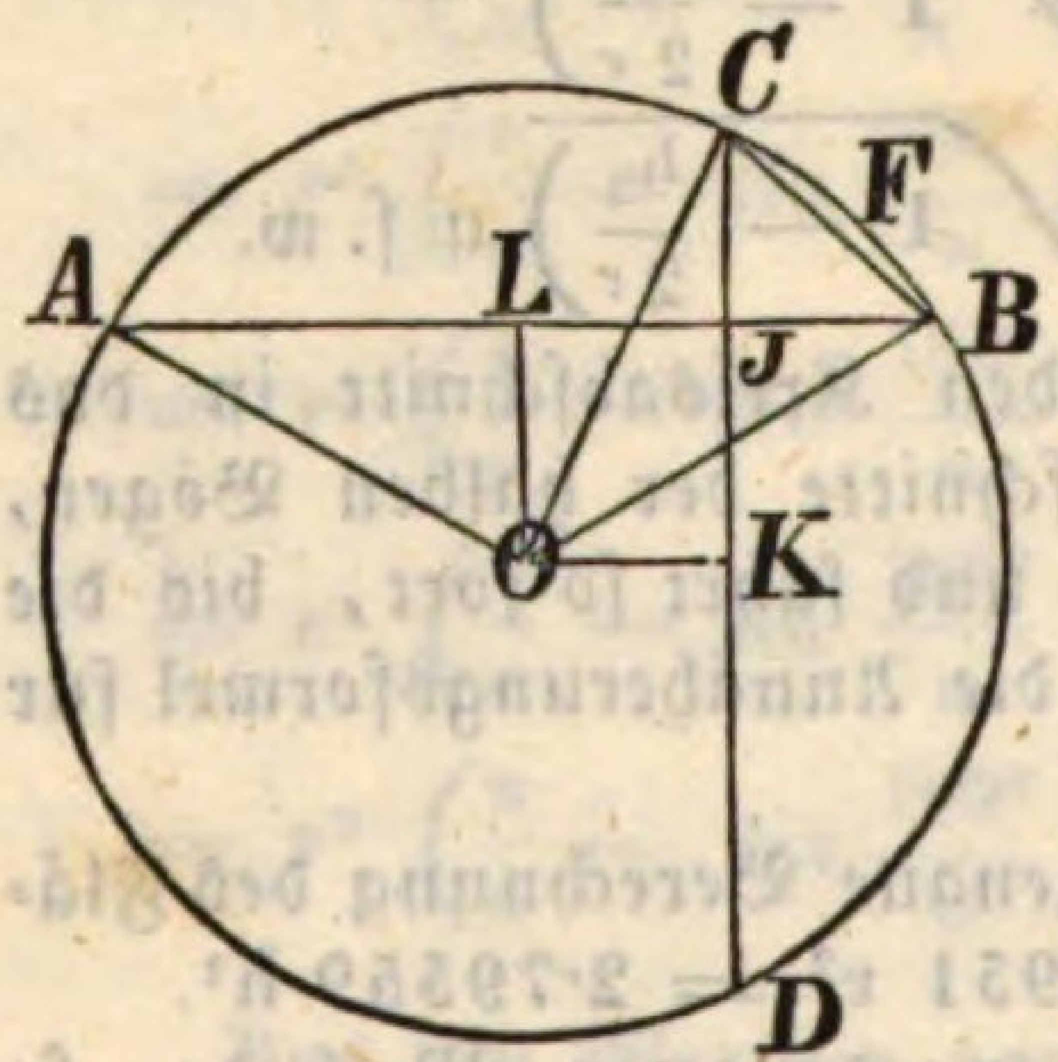
$$a\,h = 4\,h^2$$
$$a_1\,h_1 = 0{\cdot}5901701\ h^2$$
$$a_2\,h_2 = 0{\cdot}0768263\ h^2$$
$$a_3\,h_3 = 0{\cdot}0097067\ h^2$$
$$a_4\,h_4 = 0{\cdot}0012156\ h^2$$
$$a_5\,h_5 = 0{\cdot}0001531\ h^2$$
$$a_6\,h_6 = 0{\cdot}0000190\ h^2.$$

$$\frac{2\,a\,h}{3} = 2{\cdot}66667\ h^2,\ \text{Fehler}\ \triangle = 0{\cdot}08892\,h^2\,;$$
$$\frac{a\,h}{2} + 2\,.\,\frac{2\,a_1\,h_1}{3} = 2{\cdot}78689\,;\ \triangle = 0{\cdot}00870\,h^2\,;$$
$$\frac{a\,h}{2} + 2\,.\,\frac{a_1\,h_1}{2} + 4\,.\,\frac{2\,a_2\,h_2}{3} = 2{\cdot}79504\,;\ \triangle = 0{\cdot}00055\,h^2\,;$$
$$\frac{a\,h}{2} + 2\,.\,\frac{a_1\,h_1}{2} + 4\,.\,\frac{a_2\,h_2}{2} + 8\,.\,\frac{2\,a_3\,h_3}{3} = 2{\cdot}79556\ h^2\,;$$
$$\triangle = 0{\cdot}00003\ h^2\,;$$
$$\frac{a\,h}{2} + 2\,.\,\frac{a_1\,h_1}{2} + 4\,.\,\frac{a_2\,h_2}{2} + 8\,.\,\frac{a_3\,h_3}{2} + 16\,.\,\frac{2\,a_4\,h_4}{3} = 2{\cdot}79559\ h^2\,;$$

also hier $\triangle < \frac{1}{10^5}\,.\,h^2$.

§. 276. Wir wollen nun zeigen, wie man ein Stück eines Kreisabschnittes berechnet.

Fig. 315.



Es sey CI ⊥ AB, und wir wollen den Flächeninhalt des Stückes BICF berechnen. Nennen wir zu diesem Behufe AB = a, BI = x, CI = y, welche Stücke wir uns als gegeben denken wollen; es sey ferners der Kürze wegen CD = a′, OC = OB = r; der Winkel AOB = φ, COD = φ'. Es ist der Flächeninhalt von ICFB = dem Abschnitte CFB mehr dem Dreiecke CIB; nun ist der Abschnitt CFB gleich dem Ausschnitte COB weniger dem Dreiecke COB.

Fällt man von O das Loth OL auf AB, so ist LOB = $\frac{\varphi}{2}$, und LOC = OCD = $90^\circ - \frac{\varphi'}{2}$; da nun COB = LOB — LOC ist, so hat man

$$COB = \frac{\varphi}{2} - \left(90 - \frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{\varphi + \varphi'}{2} - 90;$$

daher Kreisabschnitt

$$CFB = \frac{\pi r^2}{360}\left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} - 90\right) - \frac{r^2}{2}\cos\frac{\varphi + \varphi'}{2},$$

wir müssen nun zeigen, wie man φ, φ', r findet.

Man findet

$$y\,(a' - y) = x\,(a - x),\ \text{woraus}\ a' = \frac{x\,(a - x)}{y} + y \quad (1)$$

$$\text{tang}\ AOL = \text{tang}\ \frac{\varphi}{2} = \frac{AL}{LO} = \frac{AL}{IK} = \frac{a}{a' - 2y} \quad (2)$$

$$\text{tang}\ COK = \text{tang}\ \frac{\varphi'}{2} = \frac{CK}{OK} = \frac{CK}{LI} = \frac{a'}{a - 2x} \quad (3)$$

$$2\,r \sin\frac{\varphi}{2} = a;\ 2\,r \sin\frac{\varphi'}{2} = a';\ \text{daher}$$

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{a'}{2\sin\frac{\varphi'}{2}},\ (4).$$

Hat man so durch die Formeln (1) (2) (3) (4) die Werthe von a′, φ, φ' und r, so hat man zur Bestimmung des Flächeninhalts von ICFB folgende Formel

$$ICFB = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{\varphi + \varphi' - 180}{360} - \frac{r^2}{2}\cos\frac{\varphi + \varphi'}{2} + \frac{x\,y}{2} \quad (5)$$

Ist aber x, a und r gegeben, so hat man

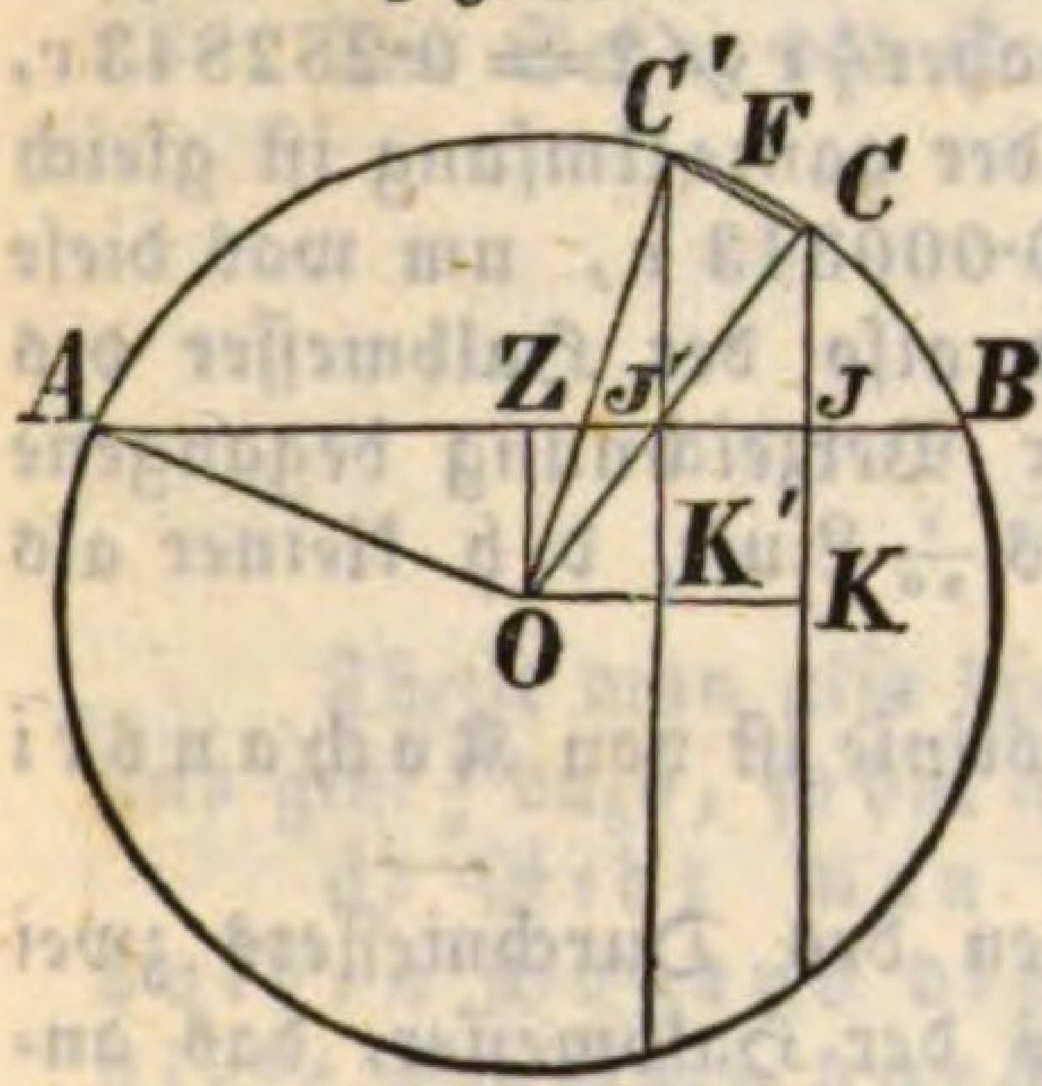
$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a}{2\,r};\ \cos\frac{\varphi'}{2} = \frac{a - 2\,x}{r};\ y = r\left(\sin\frac{\varphi'}{2} - \cos\frac{\varphi}{2}\right),$$

welche Werthe man dann in (5) zu substituiren hat.

Schlüßlich hat man noch die Formel $r^2 = \frac{(a\,x - x^2 - y^2)^2 + a^2 y^2}{4\,y^2}$.

Wäre CI nicht senkrecht auf AB, so fälle ich von C ein Loth auf AB, und zerlege dadurch das Dreieck CIB in zwei rechtwinklichte Dreiecke, die ich dann zum Kreisabschnitte CFB hinzuzugeben habe.

Fig. 316.



§. 277. Wir wollen nun den Flächeninhalt der Figur CFC'I'I bestimmen; es seyen IB = x, I'B = x', CI = y, C'I' = y' gegeben, so ist CFC'I'I = Abschnitt CFC' + CII'C.

Nennt man nun COK = ψ, C'OK' = ψ', OC = OC' = r, so ist der Kreisabschnitt

$$CFC' = \frac{\pi r^2}{360}(\psi' - \psi) - \frac{r^2}{2}\sin(\psi' - \psi).$$

Zur Bestimmung von ψ, ψ' und r hat man:

$$\text{tang}\,\psi = \frac{CK}{OK};\quad \text{tang}\,\psi' = \frac{C'K'}{OK'}.$$

Nennt man nun AZ = a, CK = a', C'K' = 2a'', so hat man

$$(1)\quad 2a' = \frac{(2a - x)x}{y} + y;\qquad (2)\quad 2a'' = \frac{(2a - x')x'}{y'} + y',$$

woraus durch Elimination $(3)\quad 2a = \dfrac{y(x'^2 + y'^2) - y'(x^2 + y^2)}{x'y - xy'}$.

Da nun OK = ZI = a — x, OK' = ZI = a — x; daher

$$(4)\quad \text{tang}\,\psi = \frac{a'}{a - x};\quad \text{tang}\,\psi' = \frac{a''}{a - x'}\quad (5)$$

$$(6)\quad r = \frac{a'}{\sin\psi} = \frac{a''}{\sin\psi'},$$

wodurch man also

$$ICFC'I' = \pi r^2 \cdot \frac{\psi' - \psi}{360} - \frac{r^2}{2}\sin(\psi' - \psi) + \frac{y + y'}{2}(x' - x)\quad (7)$$

erhält; durch die Formeln (1) bis (6) ist alles zur Berechnung von (7) Nothwendige gegeben.

Will man den Halbmesser r aus $xx'yy'$ unmittelbar haben, so hat man:

$$2r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\sqrt{x'^2 + y'^2}\cdot\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}}{x'y - xy'}$$

und eben so ist

$$\cos(\psi' - \psi) = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2}\cdot\sqrt{x'^2 + y'^2}}.$$

§. 278. **Annäherungs-Construktionen.** Beim technischen Zeichnen ist man oft in der Lage, den ganzen oder halben Umfang, oder einen Bogen auf einer geraden Linie aufzutragen, da das Material der Zeichnung ohnehin keine sehr große Genauigkeit gestattet, so wendet man in der Praxis hier gern annähernde Verzeichnungen an.

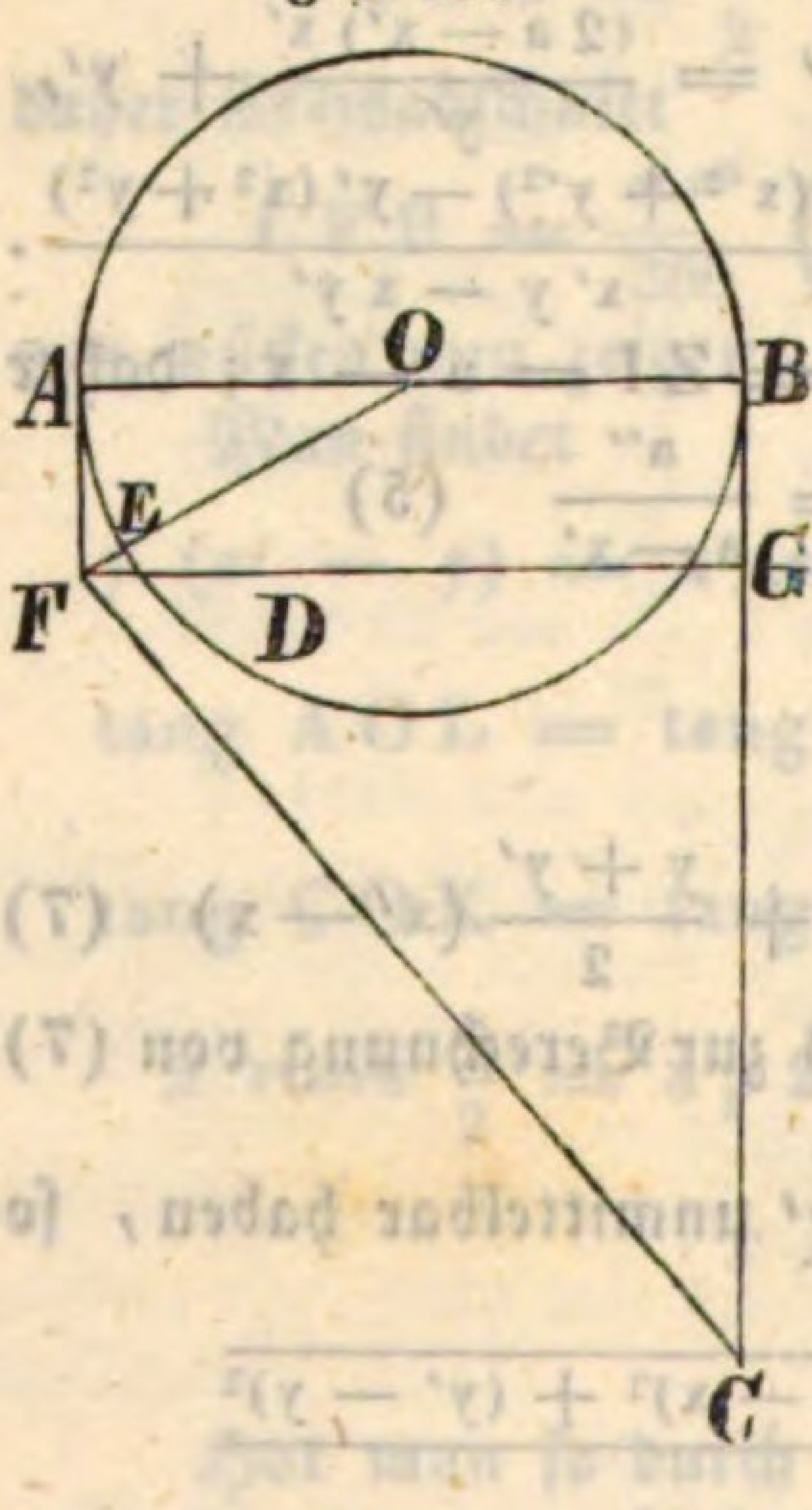
a) Wenn man von der Sehne des Quadranten $\frac{1}{5}$ zum dreifachen Durchmesser hinzugibt, so hat man eine gerade Linie, die sehr nahe dem Umfange des Kreises gleich ist.

Ist r der Halbmesser, also 2r der Durchmesser, so ist $r\sqrt{2} = 1{\cdot}414214\,r$ die Sehne des Quadranten; daher $\frac{1}{5} r\sqrt{2} = 0{\cdot}282843\,r$, daher $6r + \frac{1}{5} r\sqrt{2} = 6{\cdot}282843\,r$, aber der ganze Umfang ist gleich $6{\cdot}283186\,r$, daher beträgt der Fehler $= 0{\cdot}000343\,r$, um was diese Linie kürzer ist als der Umfang. Beträgt also der Halbmesser des Kreises einen Schuh, so ist der bei dieser Verzeichnung begangene Fehler $= 0{\cdot}049392$ Linien, also kleiner als $\frac{1}{20}$ Linie, d. h. kleiner als die Dicke einer Bleilinie.

b) Eine andere Verzeichnung der Kreislinie ist von Kochanski im Jahre 1685 angegeben worden.

Man errichte an den zwei Endpunkten des Durchmessers zwei Lothe, wovon das eine drei Mal so groß als der Halbmesser, das andere gleich $r \tan 30^\circ$. Die gerade Linie, welche die Endpunkte beider Lothe verbindet, ist gleich dem halben Umfange.

Fig. 317.



Es sey AB der Durchmesser, in B errichte ich das Loth $BC = 3r$, verzeichne den Bogen AD von 60°, halbire diesen in E, so daß $AE = 30^\circ$, also auch $AOE = 30^\circ$ ist, errichte das Loth AF; der Punkt F ist durch den Durchschnitt dieses Lothes und der Geraden EO bestimmt.

Da $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ Sehne von $60^\circ = \frac{1}{2}$ ist, so hat man $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; daher $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; daher $AF = \frac{r\sqrt{3}}{3}$; fällt man von F das Loth FG auf CB, so ist

$$BG = \frac{r\sqrt{3}}{3}, \text{ daher } GC = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$= \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r; \text{ daher}$$

$$FC^2 = 4r^2 + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 . r^2 = 9{\cdot}8692317\,r,$$

daher $FC = 3{\cdot}141533\,r$, während die halbe Peripherie $= 3{\cdot}141593\,r$ ist, daher

der Fehler $= 0{\cdot}000060\,r$.

Man darf sich durch die viel größere Genauigkeit der zweiten Construktionsart nicht täuschen lassen; denn im Errichten der Lothe, im Halbiren des Winkels, im Verbinden der Punkte F und C geschehen überall unvermeidliche Fehler, so daß die wirkliche Genauigkeit bei weitem nicht so groß ist, als sie hier scheint. Man kann sich also leicht denken, wie viel von solchen Construktionsarten zu halten ist, die bei schwer verwickelter Construktion des π in 10, 12 oder oft mehr Deci-

malstellen geben, wo natürlich durch Anhäufung der unvermeidlichen Fehler recht bedeutende Abweichungen herauskommen, da die scheinbar große Genauigkeit ja mathematisch genaue Verzeichnungen voraussetzt.

c) Der Quadrant eines Kreises ist sehr nahe $\frac{10}{9}$ seiner Sehne.

$$\begin{aligned}
\text{Die Sehne des Quadranten} &= r\sqrt{2} = 1\cdot414213\,r \\
\tfrac{1}{9}\ \text{davon} &= 0\cdot157135\,r \\
\tfrac{10}{9}\ \text{der Sehne} &= 1\cdot571348\,r \\
\text{der Quadrant}\ \frac{\pi r}{2} &= 1\cdot570796\,r \\
\text{also Fehler} &= 0\cdot000552\,r.
\end{aligned}$$

Theilt man also die Sehne des Quadranten in neun gleiche Theile, und gibt $\frac{1}{9}$ dazu, so hat man eine Gerade, die dem Quadranten gleich ist.

d) Gibt man zum Achtfachen der Sehne eines halben Bogens die ganze Sehne hinzu, und dividirt diese Summe durch 5, so hat man nahe die Größe des Bogens.

Ist φ der Mittelpunktwinkel des Bogens und r der Halbmesser, so ist seine Sehne $= 2\,r \sin\frac{\varphi}{2}$, die Sehne des halben Bogens $= 2\,r\sin\frac{\varphi}{4}$.

Man hat daher

$$\frac{16\,r\sin\frac{\varphi}{4} + 2r\sin\frac{\varphi}{2}}{5} = \frac{16\,r\,.\,\sin\frac{\varphi}{4} + 4\,r\sin\frac{\varphi}{4}\,.\,\cos\frac{\varphi}{4}}{5}.$$

Ist nun φ sehr klein, so ist nahe $\sin\frac{\varphi}{4} = \frac{\text{arc}\,\varphi^0}{4}$, $\cos\frac{\varphi}{4} = 1$;

daher $\frac{1}{5}\left(16\,r\sin\frac{\varphi}{4} + 4\,r\,\sin\frac{\varphi}{4}\,.\,\cos\frac{\varphi}{4}\right)$ nahe gleich

$$\tfrac{1}{5}\left(16\,r\,.\,\frac{\text{arc}\,\varphi}{4} + 4\,r\,.\,\frac{\text{arc}\,\varphi}{4}\right) = \tfrac{1}{5}\,5\,r\ \text{arc}\,\varphi^0 = r\ \text{arc}\,\varphi^0.$$

Die Genauigkeit dieser Annäherungsformel beruht darauf, daß $\sin\frac{\varphi}{4}$ von $\frac{\text{arc}\,\varphi}{4}$ nur sehr wenig abweicht.

Nehmen wir z. B. einen Bogen von 24°, so ist seine Sehne $= 0\cdot41582\,r$, die Sehne seines halben Bogens $= 0\cdot20906\,r$; daher

$$\begin{aligned}
8\,.\,0\cdot20906\,r + 0\cdot41582\,r &= 2\cdot08830\,r, \\
\text{davon der fünfte Theil} &= 0\cdot41766\,r, \\
\text{während der Bogen von } 24^0 &= 0\cdot41888\,r\ \text{ist:} \\
\text{daher der Fehler} &= 0\cdot00122\,r\ \text{ist.}
\end{aligned}$$

Es sey zweitens ein Bogen von 40° der Halbmesser 500, so ist die Sehne dieses Bogens $= 342\cdot020$, und die Sehne des halben Bogens $= 173\cdot648$; daher hat man:

$$\begin{aligned}
8\,.\,173\cdot648 + 342\cdot020 &= 1731\cdot204, \\
\text{davon der fünfte Theil} &= 346\cdot241; \\
\text{dagegen ein Bogen von } 40^0 &= 349\cdot066
\end{aligned}$$

für einen Halbmesser von 500; folglich der Unterschied $= 2\cdot825$.

e) Eine genauere Annäherungsformel ist folgende Formel, wo b die Länge des Bogens, a seine Sehne und r den Halbmesser bedeutet.

$$b = a\left(1 + \frac{1}{24}\,\frac{a^2}{r^2}\right).$$

Es sey z. B. a die Sehne eines Winkels von 40°, so ist $a = 0{\cdot}68404\,r$, daher $\frac{a}{r} = 0{\cdot}68404$, folglich $\frac{a^2}{r^2} = 0{\cdot}46792$; $\frac{1}{24} \cdot \frac{a^2}{r^2} = 0{\cdot}01949$,

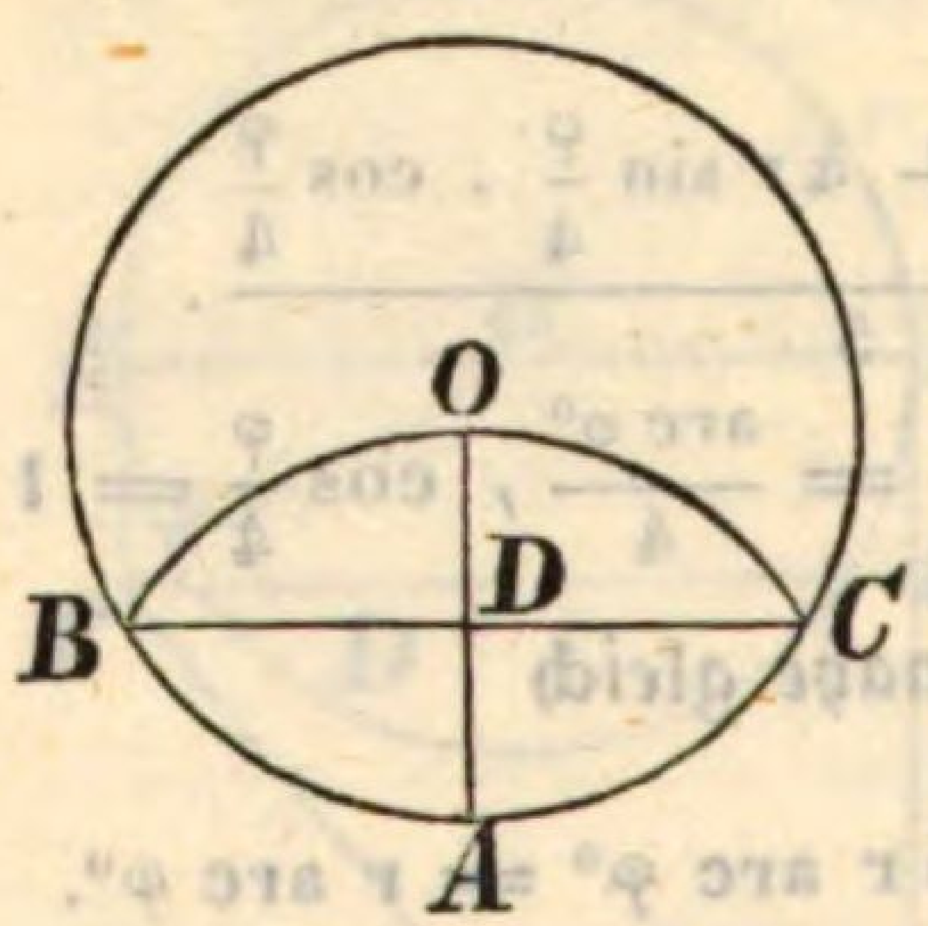
daher gibt unsere Formel $b = 0{\cdot}69737\ r$, während
der Bogen von $40^{\circ} = 0{\cdot}69813\ r$ ist;
daher ist der Fehler $= 0{\cdot}00076\ r$;
daher für $r = 500$ Fehler $= 0{\cdot}38$.

Nehmen wir sogar einen Quadranten, so daß $a = r\sqrt{2}$, also $\frac{a^2}{r^2} = 2$, daher $b = a\left(1 + \frac{1}{12}\right)$, $b = r\sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{12}\right) = 1{\cdot}53206\ r$,

während der Quadrant $= 1{\cdot}57080\,r$ ist,
daher der Fehler $= 0{\cdot}03874\ r$ ist

§. 279. **Annäherungsweise Verzeichnungen der Vielecke.**

Fig. 316.

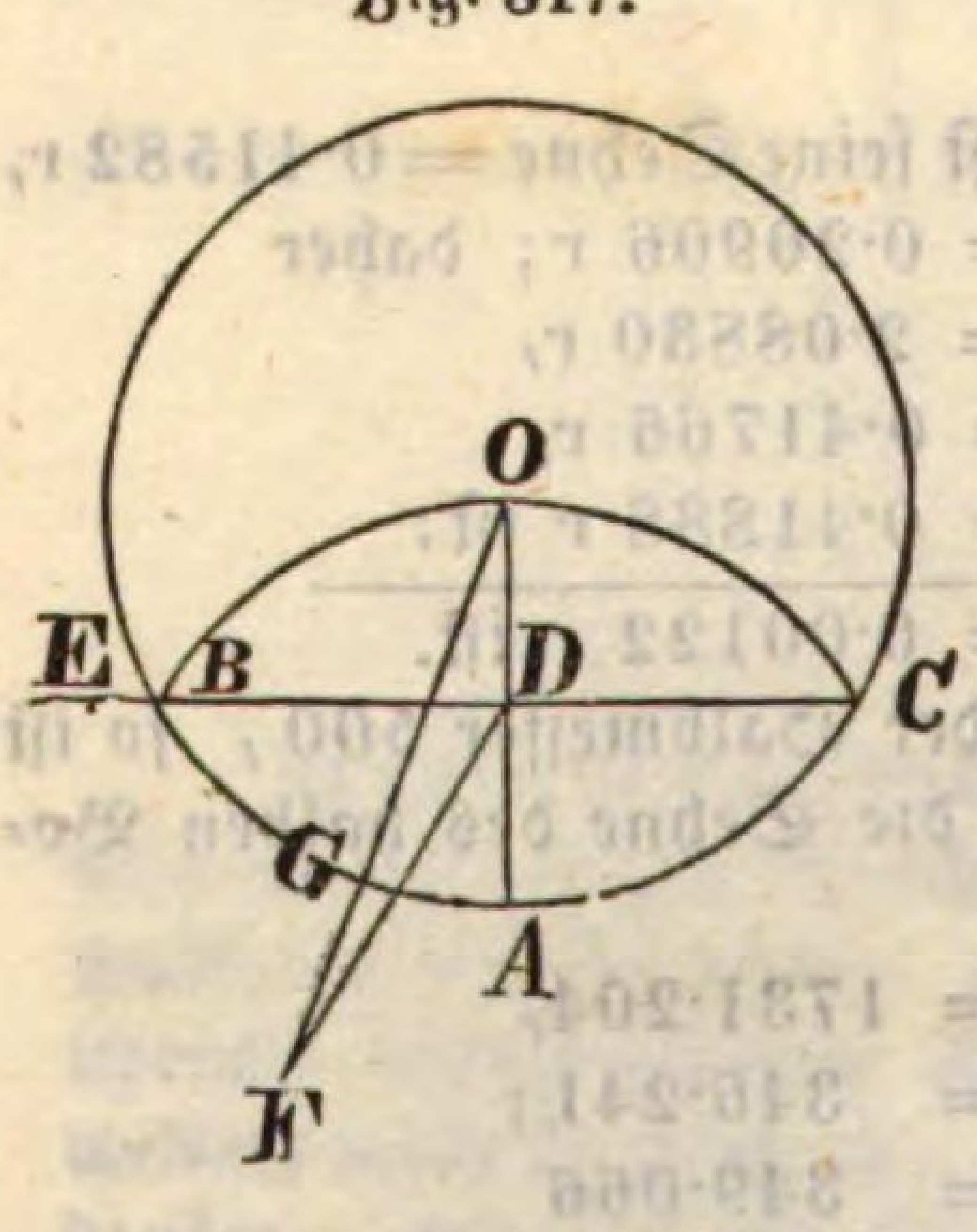


a) Siebeneck. Man ziehe den Halbmesser O A, aus A mit demselben Halbmesser beschreibe man den Bogen B O C, verbinde B mit C, so schneidet B C die O A in D, und B D ist sehr nahe der Seite des regelmäßigen Siebenecks; denn es ist $BOA = 60^{\circ}$, also $BD = r \sin 60^{\circ} = 0{\cdot}8660\,r$, und die Seite des regelmäßigen Siebenecks

$$l_7 = 2r \sin \frac{180^{\circ}}{7} = 0{\cdot}8678\ r, \text{ daher}$$

$l_7 - BD = 0{\cdot}0018\,r$; ein für die gewöhnliche Zeichnung verschwindender Fehler.

Fig. 317.



b) Neuneck. Aus A mit dem Halbmesser O A beschreibt man den Bogen B C; B C schneidet die A O in D; man macht $DE = OA$; aus D und E beschreibt man Bögen mit dem Halbmesser A O, die sich in F schneiden; verbinde F mit O, wodurch der Umfang in G geschnitten wird, so ist B G nahe der neunte Theil des Umfanges.

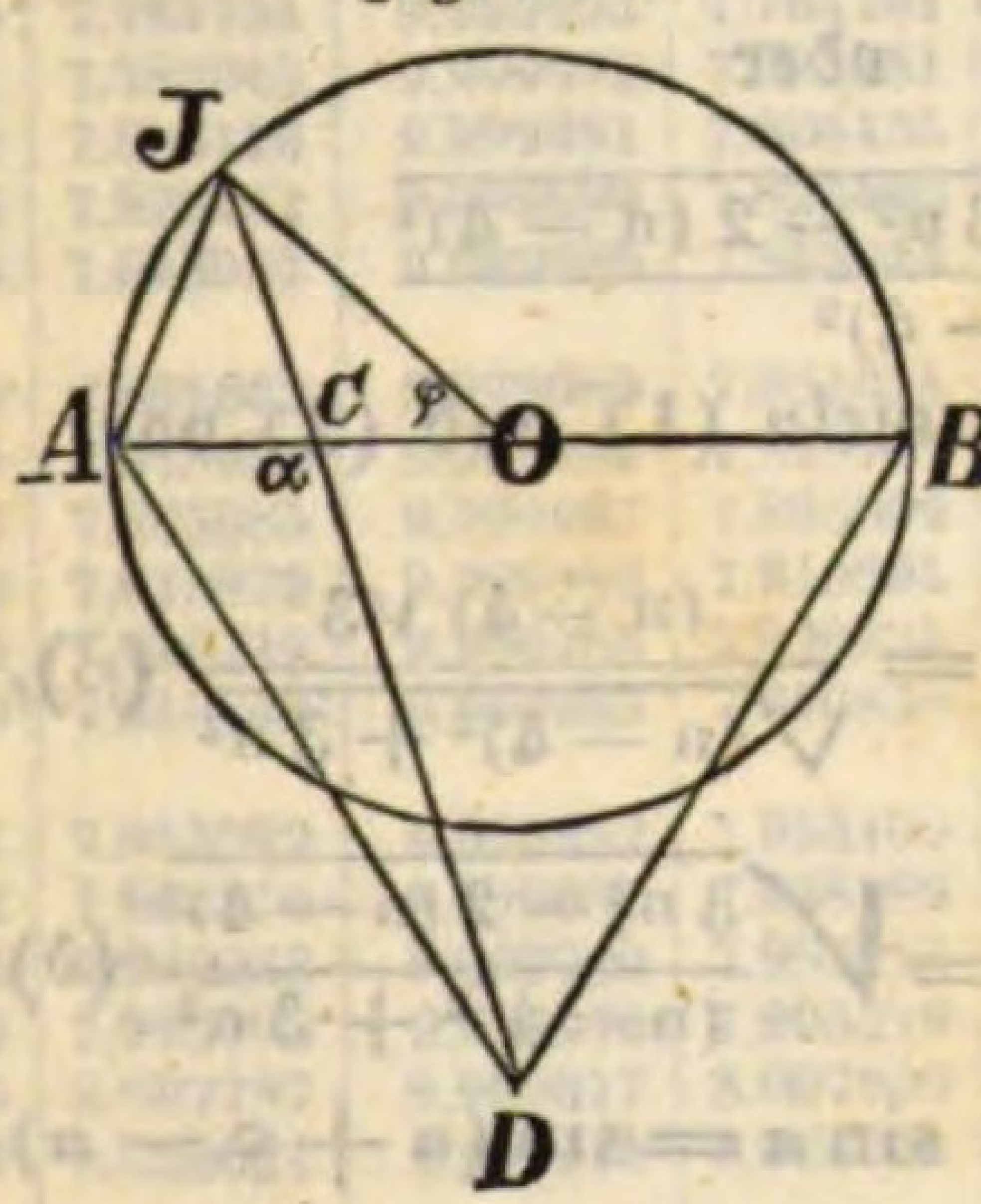
Da $OD = \frac{r}{2}$, $DF = r$, $EOD = 60^{\circ}$, $EDO = 90^{\circ}$, also $ODF = 150^{\circ}$ ist, so hat man:

$$\frac{r + \frac{r}{2}}{r - \frac{r}{2}} = \frac{\text{tang}\,\frac{FOD + DFO}{2}}{\text{tang}\,\frac{FOD - DFO}{2}};$$

daher $\text{tang}\left(\frac{FOD - DFO}{2}\right) = \frac{1}{3}\,\text{tang}\; 15^\circ = \text{tang}\; 5^\circ\, 6'\, 14''$; daher $FOD = 20^\circ\, 6'\, 14''$; daher hat der Bogen $BG = 60^\circ - 20^\circ\, 6'\, 14'' = 39^\circ\, 53'\, 46''$; daher Bogen $BG = 0{\cdot}69632\, r$, während der neunte Theil des Umfanges $= 0{\cdot}69813\, r$ ist; daher der Unterschied $= 0{\cdot}00181\, r$.

c) Die sogenannte Renaldinische Regel gibt zur Verzeichnung irgend eines regelmäßigen Vielecks folgendes Verfahren an. Wenn man über dem Durchmesser AB eines Kreises ein gleichseitiges Dreieck ABD errichtet, die AB in n gleiche Theile theilet; den zweiten Theilungspunkt C $\left(AC = 2 \cdot \frac{AB}{n}\right)$ mit D verbindet, die DC bis zum Kreisumfange in I verlängert, so ist der Bogen AI nahe der nte Theil des Kreisumfanges, und die Sehne AI nahe die Seite des regelmäßigen eingeschriebenen nseitigen Vielecks.

Fig. 318.



Wir wollen nun die Genauigkeit dieses Verfahrens untersuchen. Es sey $AB = d$, daher $AC = 2 \cdot \frac{d}{n}$, $AD = AB = d$, $BAD = 60^\circ$; da BAD ein gleichseitiges Dreieck ist, daher sind im Dreiecke ACD, AC, AD und CAD bekannt; nennt man nun den Winkel $ACD = \alpha$, so ist der Winkel $ADC = 180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ - \alpha$, man hat daher

$AD : AC = \sin\alpha : \sin(120^\circ - \alpha)$ oder

$d : \frac{2}{n} d = \sin\alpha : \sin(\alpha + 60^\circ)$, was uns die Gleichung $\sin(\alpha + 60^\circ) = \frac{2}{n}\sin\alpha$

gibt, oder $\sin\alpha \cdot \cos 60^\circ + \cos\alpha \cdot \sin 60^\circ = \frac{2}{n}\sin\alpha$;

$$\frac{1}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \frac{2}{n}\sin\alpha, \text{ woraus man}$$

$$\text{tang}\,\alpha = -\frac{n\sqrt{3}}{n-4} \text{ oder } \sin\alpha = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}} \quad (1).$$

In dem Dreiecke ICO ist nun somit der Winkel α $CO = \frac{d}{2} - \frac{2d}{n}$, $IO = \frac{d}{2}$ bekannt, und wir haben:

$$\frac{d}{2} : \frac{n-4}{n} d = \sin\alpha : \sin(\alpha + \varphi), \text{ woraus}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{n-4}{n}\sin\alpha, \text{ oder}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}} \quad (2)$$

Manchem unserer Leser dürfte es nicht unangenehm seyn, zu wissen, wie man hier aus den Gleichungen (1) und (2) einen bloß von n abhängigen Werth des φ finden könne.

Zu diesem Behufe gibt uns die Gleichung (2)

$$\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}}.$$

Setzt man hier statt sin α und cos α ihre Werthe, so hat man:

$$n\sqrt{3} \,.\, \cos \varphi + (n-4) \,.\, \sin \varphi = (n-4)\sqrt{3},$$

wofür wir der Kürze halber

$a \,.\, \cos \varphi + b \,.\, \sin \varphi = c$ setzen wollen, so ist:

$$a\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} + b \,.\, \sin \varphi = c$$
$$a\sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = c - b \sin \varphi$$
$$a^2 (1 - \sin^2 \varphi) = c^2 - 2bc \sin \varphi + b^2 \sin^2 \varphi$$
$$a^2 - c^2 = (a^2 + b^2) \sin^2 \varphi - 2bc \,.\, \sin \varphi;$$ daher

$$\sin \varphi = \frac{bc \pm a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$$ oder

$$\sin \varphi = \frac{(n-4)^2 \sqrt{3} \pm n\sqrt{3}\sqrt{3n^2 - 2(n-4)^2}}{3n^2 + (n-4)^2}.$$

Wir ziehen hier zur Berechnung die Formeln (1) und (2) vor. Da wir nämlich

$$\sin \alpha = \frac{n\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}}; \; (\alpha) \quad \sin(\alpha + \varphi) = \frac{(n-4)\sqrt{3}}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}} \; (\beta),$$

also

$$\cos \alpha = \frac{n-4}{\sqrt{(n-4)^2 + 3n^2}} \; (\gamma); \quad \cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{\frac{3n^2 - 2(n-4)^2}{(n-4)^2 + 3n^2}} \; (\delta)$$

haben, und $\sin(\alpha + \varphi) \cos \alpha - \cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha = \sin(\alpha + \varphi - \alpha) = \sin \varphi$ ist, so hat man

$$\sin \varphi = \sin(\alpha + \varphi) \cos \alpha - \cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha,$$ und
$$\cos \varphi = \cos(\alpha + \varphi) \cos \alpha + \cos(\alpha + \varphi) \sin \alpha.$$

Man hat also nur in den Formeln α, β, γ, δ den Werth des n zu substituiren, und die gefundenen Werthe in eine der letzten Formeln zu setzen.

Setzen wir hier statt n die Werthe 7, 8, 9, 10 u. s. w., so hat man:

$n = 7$; $\alpha = 103^\circ 53' 53''$; $\alpha + \varphi = 155^\circ 24' 58''$; $\varphi = 51^\circ 31' 5''$,
also Fehler $= 5' 22''$;

$n = 8$; $\alpha = 106^\circ 6' 8''$; $\alpha + \varphi = 151^\circ 17' 22''$; $\varphi = 45^\circ 11' 14''$,
also Fehler $= 11' 14''$;

$n = 9$; $\alpha = 107^\circ 47' 1''$; $\alpha + \varphi = 148^\circ 3' 41''$; $\varphi = 40^\circ 16' 40''$,
also Fehler $= 16' 40''$;

$n = 10$; $\alpha = 109^\circ 6' 24''$; $\alpha + \varphi = 145^\circ 27' 45''$; $\varphi = 36^\circ 21' 21''$,
also Fehler $= 21' 21''$.

Für n = 18 steigt der Fehler bis auf 38′, bei 25, 30, 40 u. s. w. nimmt dann der Fehler wieder ab.

Man sieht, daß der Werth der Renaldinischen Regel, die man in beinahe allen praktischen Büchern angeführt findet, ziemlich beschränkt ist.

	0 Grad.				1 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0		10.000000			8.241855	9.999934	8.241921	11.758079	60
1	6.463726	10.000000	6.463726	13.536274	8.249033	9.999932	8.249102	11.750898	59
2	6.764756	10.000000	6.764756	13.235244	8.256094	9.999929	8.256165	11.743835	58
3	6.940847	10.000000	6.940847	13.059153	8.263042	9.999927	8.263115	11.736885	57
4	7.065786	10.000000	7.065786	12.934214	8.269881	9.999925	8.269956	11.730044	56
5	7.162696	10.000000	7.162696	12.837304	8.276614	9.999922	8.276691	11.723309	55
6	7.241877	9.999999	7.241878	12.758122	8.283243	9.999920	8.283323	11.716677	54
7	7.308824	9.999999	7.308825	12.691175	8.289773	9.999918	8.289856	11.710144	53
8	7.366816	9.999999	7.366817	12.633183	8.296207	9.999915	8.296292	11.703708	52
9	7.417968	9.999999	7.417970	12.582030	8.302546	9.999913	8.302634	11.697366	51
10	7.463726	9.999998	7.463727	12.536273	8.308794	9.999910	8.308884	11.691116	50
11	7.505118	9.999998	7.505120	12.494880	8.314954	9.999907	8.315046	11.684954	49
12	7.542906	9.999997	7.542909	12.457091	8.321027	9.999905	8.321122	11.678878	48
13	7.577668	9.999997	7.577672	12.422328	8.327016	9.999902	8.327114	11.672886	47
14	7.609853	9.999996	7.609857	12.390143	8.332924	9.999899	8.333025	11.666975	46
15	7.639816	9.999996	7.639820	12.360180	8.338753	9.999897	8.338856	11.661144	45
16	7.667845	9.999995	7.667849	12.332151	8.344504	9.999894	8.344610	11.655390	44
17	7.694173	9.999995	7.694179	12.305821	8.350181	9.999891	8.350289	11.649711	43
18	7.718997	9.999994	7.719003	12.280997	8.355783	9.999888	8.355895	11.644105	42
19	7.742478	9.999993	7.742484	12.257516	8.361315	9.999885	8.361430	11.638570	41
20	7.764754	9.999993	7.764761	12.235239	8.366777	9.999882	8.366895	11.633105	40
21	7.785943	9.999992	7.785951	12.214049	8.372171	9.999879	8.372292	11.627708	39
22	7.806146	9.999991	7.806155	12.193845	8.377499	9.999876	8.377622	11.622378	38
23	7.825451	9.999990	7.825460	12.174540	8.382762	9.999873	8.382889	11.617111	37
24	7.843934	9.999989	7.843944	12.156056	8.387962	9.999870	8.388092	11.611908	36
25	7.861662	9.999989	7.861674	12.138326	8.393101	9.999867	8.393234	11.606766	35
26	7.878695	9.999988	7.878708	12.121292	8.398179	9.999864	8.398315	11.601685	34
27	7.895085	9.999987	7.895099	12.104901	8.403199	9.999861	8.403338	11.596662	33
28	7.910879	9.999986	7.910894	12.089106	8.408161	9.999858	8.408304	11.591696	32
29	7.926119	9.999985	7.926134	12.073866	8.413068	9.999854	8.413213	11.586787	31
30	7.940842	9.999983	7.940858	12.059142	8.417919	9.999851	8.418068	11.581932	30
31	7.955082	9.999982	7.955100	12.044900	8.422717	9.999848	8.422869	11.577131	29
32	7.968870	9.999981	7.968889	12.031111	8.427462	9.999845	8.427618	11.572382	28
33	7.982233	9.999980	7.982253	12.017747	8.432156	9.999841	8.432315	11.567685	27
34	7.995198	9.999979	7.995219	12.004781	8.436800	9.999838	8.436962	11.563038	26
35	8.007787	9.999977	8.007809	11.992191	8.441394	9.999834	8.441560	11.558440	25
36	8.020021	9.999976	8.020044	11.979956	8.445941	9.999831	8.446110	11.553890	24
37	8.031919	9.999975	8.031945	11.968055	8.450440	9.999827	8.450613	11.549387	23
38	8.043501	9.999973	8.043527	11.956473	8.454893	9.999824	8.455070	11.544930	22
39	8.054781	9.999972	8.054809	11.945191	8.459301	9.999820	8.459481	11.540519	21
40	8.065776	9.999971	8.065806	11.934194	8.463665	9.999816	8.463849	11.536151	20
41	8.076500	9.999969	8.076531	11.923469	8.467985	9.999813	8.468172	11.531828	19
42	8.086965	9.999968	8.086997	11.913003	8.472263	9.999809	8.472454	11.527546	18
43	8.097183	9.999966	8.097217	11.902783	8.476498	9.999805	8.476693	11.523307	17
44	8.107167	9.999964	8.107203	11.892797	8.480693	9.999801	8.480892	11.519108	16
45	8.116926	9.999963	8.116963	11.883037	8.484848	9.999797	8.485050	11.514950	15
46	8.126471	9.999961	8.126510	11.873490	8.488963	9.999794	8.489170	11.510830	14
47	8.135810	9.999959	8.135851	11.864149	8.493040	9.999790	8.493250	11.506750	13
48	8.144953	9.999958	8.144996	11.855004	8.497078	9.999786	8.497293	11.502707	12
49	8.153907	9.999956	8.153952	11.846048	8.501080	9.999782	8.501298	11.498702	11
50	8.162681	9.999954	8.162727	11.837273	8.505045	9.999778	8.505267	11.494733	10
51	8.171280	9.999952	8.171328	11.828672	8.508974	9.999774	8.509200	11.490800	9
52	8.179713	9.999950	8.179763	11.820237	8.512867	9.999769	8.513098	11.486902	8
53	8.187985	9.999948	8.188036	11.811964	8.516726	9.999765	8.516961	11.483039	7
54	8.196102	9.999946	8.196156	11.803844	8.520551	9.999761	8.520790	11.479210	6
55	8.204070	9.999944	8.204126	11.795874	8.524343	9.999757	8.524586	11.475414	5
56	8.211895	9.999942	8.211953	11.788047	8.528102	9.999753	8.528349	11.471651	4
57	8.219581	9.999940	8.219641	11.780359	8.531828	9.999748	8.532080	11.467920	3
58	8.227134	9.999938	8.227195	11.772805	8.535523	9.999744	8.535779	11.464221	2
59	8.234557	9.999936	8.234621	11.765379	8.539186	9.999740	8.539447	11.460553	1
60	8.241855	9.999934	8.241921	11.758079	8.542819	9.999735	8.543084	11.456916	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	89 Grad.				88 Grad.				

′	2 Grad.				3 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	8.542819	9.999735	8.543084	11.456916	8.718800	9.999404	8.719396	11.280604	60
1	8.546422	9.999731	8.546691	11.453309	8.721204	9.999398	8.721806	11.278194	59
2	8.549995	9.999726	8.550268	11.449732	8.723595	9.999391	8.724204	11.275796	58
3	8.553539	9.999722	8.553817	11.446183	8.725972	9.999384	8.726588	11.273412	57
4	8.557054	9.999717	8.557336	11.442664	8.728337	9.999378	8.728959	11.271041	56
5	8.560540	9.999713	8.560828	11.439172	8.730688	9.999371	8.731317	11.268683	55
6	8.563999	9.999708	8.564291	11.435709	8.733027	9.999364	8.733663	11.266337	54
7	8.567431	9.999704	8.567727	11.432273	8.735354	9.999357	8.735996	11.264004	53
8	8.570836	9.999699	8.571137	11.428863	8.737667	9.999350	8.738317	11.261683	52
9	8.574214	9.999694	8.574520	11.425480	8.739969	9.999343	8.740626	11.259374	51
10	8.577566	9.999689	8.577877	11.422123	8.742259	9.999336	8.742922	11.257078	50
11	8.580892	9.999685	8.581208	11.418792	8.744536	9.999329	8.745207	11.254793	49
12	8.584193	9.999680	8.584514	11.415486	8.746802	9.999322	8.747479	11.252521	48
13	8.587469	9.999675	8.587795	11.412205	8.749055	9.999315	8.749740	11.250260	47
14	8.590721	9.999670	8.591051	11.408949	8.751297	9.999308	8.751989	11.248011	46
15	8.593948	9.999665	8.594283	11.405717	8.753528	9.999301	8.754227	11.245773	45
16	8.597152	9.999660	8.597492	11.402508	8.755747	9.999294	8.756453	11.243547	44
17	8.600332	9.999655	8.600677	11.399323	8.757955	9.999287	8.758668	11.241332	43
18	8.603489	9.999650	8.603839	11.396161	8.760151	9.999279	8.760872	11.239128	42
19	8.606623	9.999645	8.606978	11.393022	8.762337	9.999272	8.763065	11.236935	41
20	8.609734	9.999640	8.610094	11.389906	8.764511	9.999265	8.765246	11.234754	40
21	8.612823	9.999635	8.613189	11.386811	8.766675	9.999257	8.767417	11.232583	39
22	8.615891	9.999629	8.616262	11.383738	8.768828	9.999250	8.769578	11.230422	38
23	8.618937	9.999624	8.619313	11.380687	8.770970	9.999242	8.771727	11.228273	37
24	8.621962	9.999619	8.622343	11.377657	8.773101	9.999235	8.773866	11.226134	36
25	8.624965	9.999614	8.625352	11.374648	8.775223	9.999227	8.775995	11.224005	35
26	8.627948	9.999608	8.628340	11.371660	8.777333	9.999220	8.778114	11.221886	34
27	8.630911	9.999603	8.631308	11.368692	8.779434	9.999212	8.780222	11.219778	33
28	8.633854	9.999597	8.634256	11.365744	8.781524	9.999205	8.782320	11.217680	32
29	8.636776	9.999592	8.637184	11.362816	8.783605	9.999197	8.784408	11.215592	31
30	8.639680	9.999586	8.640093	11.359907	8.785675	9.999189	8.786486	11.213514	30
31	8.642563	9.999581	8.642982	11.357018	8.787736	9.999181	8.788554	11.211446	29
32	8.645428	9.999575	8.645853	11.354147	8.789787	9.999174	8.790613	11.209387	28
33	8.648274	9 999570	8.648704	11.351296	8.791828	9.999166	8.792662	11.207338	27
34	8.651102	9.999564	8.651537	11.348463	8.793859	9.999158	8.794701	11.205299	26
35	8.653911	9.999558	8.654352	11.345648	8.795881	9.999150	8.796731	11.203269	25
36	8.656702	9.999553	8.657149	11.342851	8.797894	9.999142	8.798752	11.201248	24
37	8.659475	9.999547	8.659928	11.340072	8.799897	9.999134	8.800763	11.199237	23
38	8.662230	9.999541	8.662689	11.337311	8.801892	9.999126	8.802765	11.197235	22
39	8.664968	9.999535	8.665433	11.334567	8.803876	9.999118	8.804758	11.195242	21
40	8.667689	9.999529	8.668160	11.331840	8.805852	9.999110	8.806742	11.193258	20
41	8.670393	9.999524	8.670870	11.329130	8.807819	9.999102	8.808717	11.191283	19
42	8.673080	9.999518	8.673563	11.326437	8.809777	9.999094	8.810683	11.189317	18
43	8.675751	9.999512	8.676239	11.323761	8.811726	9.999086	8.812641	11.187359	17
44	8.678405	9.999506	8.678900	11.321100	8.813667	9.999077	8.814589	11.185411	16
45	8.681043	9.999500	8.681544	11.318456	8.815599	9.999069	8.816529	11.183471	15
46	8.683665	9.999493	8.684172	11.315828	8.817522	9.999061	8.818461	11.181539	14
47	8.686272	9.999487	8.686784	11.313216	8.819436	9.999053	8.820384	11.179616	13
48	8.688863	9.999481	8.689381	11.310619	8.821343	9.999044	8.822298	11.177702	12
49	8.691438	9.999475	8.691963	11.308037	8.823240	9.999036	8.824205	11.175795	11
50	8.693998	9.999469	8.694529	11.305471	8.825130	9.999027	8.826103	11.173897	10
51	8.696543	9.999463	8.697081	11.302919	8.827011	9.999019	8.827992	11.172008	9
52	8.699073	9.999456	8.699617	11.300383	8.828884	9.999010	8.829874	11.170126	8
53	8.701589	9.999450	8.702139	11.297861	8.830749	9.999002	8.831748	11.168252	7
54	8.704090	9.999443	8.704646	11.295354	8.832607	9.998993	8.833613	11.166387	6
55	8.706577	9.999437	8.707140	11.292860	8.834456	9.998984	8.835471	11.164529	5
56	8.709049	9.999431	8.709618	11.290382	8.836297	9.998976	8.837321	11.162679	4
57	8.711507	9.999424	8.712083	11.287917	8.838130	9.998967	8.839163	11.160837	3
58	8.713952	9.999418	8.714534	11.285466	8.839956	9.998958	8.840998	11.159002	2
59	8.716383	9.999411	8.716972	11.283028	8.841774	9.998950	8.842825	11.157175	1
60	8.718800	9.999404	8.719396	11.280604	8.843585	9.998941	8.844644	11.155356	0
	Cosin	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	87 Grad.				86 Grad.				

	4 Grad.				5 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	8.843585	9.998941	8.844644	11.155356	8.940296	9.998344	8.941952	11.058048	60
1	8.845387	9.998932	8.846455	11.153545	8.941738	9.998333	8.943404	11.056596	59
2	8.847183	9.998923	8.848260	11.151740	8.943174	9.998322	8.944852	11.055148	58
3	8.848971	9.998914	8.850057	11.149943	8.944606	9.998311	8.946295	11.053705	57
4	8.850751	9.998905	8.851846	11.148154	8.946034	9.998300	8.947734	11.052266	56
5	8.852525	9.998896	8.853628	11.146372	8.947456	9.998289	8.949168	11.050832	55
6	8.854291	9.998887	8.855403	11.144597	8.948874	9.998277	8.950597	11.049403	54
7	8.856049	9.998878	8.857171	11.142829	8.950287	9.998266	8.952021	11.047979	53
8	8.857801	9.998869	8.858932	11.141068	8.951696	9.998255	8.953441	11.046559	52
9	8.859546	9.998860	8.860686	11.139314	8.953100	9.998243	8.954856	11.045144	51
10	8.861283	9.998851	8.862433	11.137567	8.954499	9.998232	8.956267	11.043733	50
11	8.863014	9.998841	8.864173	11.135827	8.955894	9.998220	8.957674	11.042326	49
12	8.864738	9.998832	8.865906	11.134094	8.957284	9.998209	8.959075	11.040925	48
13	8.866455	9.998823	8.867632	11.132368	8.958670	9.998197	8.960473	11.039527	47
14	8.868165	9.998813	8.869351	11.130649	8.960052	9.998186	8.961866	11.038134	46
15	8.869868	9.998804	8.871064	11.128936	8.961429	9.998174	8.963255	11.036745	45
16	8.871565	9.998795	8.872770	11.127230	8.962801	9.998163	8.964639	11.035361	44
17	8.873255	9.998785	8.874469	11.125531	8.964170	9.998151	8.966019	11.033981	43
18	8.874938	9.998776	8.876162	11.123838	8.965534	9.998139	8.967394	11.032606	42
19	8.876615	9.998766	8.877849	11.122151	8.966893	9.998128	8.968766	11.031234	41
20	8.878285	9.998757	8.879529	11.120471	8.968249	9.998116	8.970133	11.029867	40
21	8.879949	9.998747	8.881202	11.118798	8.969600	9.998104	8.971496	11.028504	39
22	8.881607	9.998738	8.882869	11.117131	8.970947	9.998092	8.972855	11.027145	38
23	8.883258	9.998728	8.884530	11.115470	8.972289	9.998080	8.974209	11.025791	37
24	8.884903	9.998718	8.886185	11.113815	8.973628	9.998068	8.975560	11.024440	36
25	8.886542	9.998708	8.887833	11.112167	8.974962	9.998056	8.976906	11.023094	35
26	8.888174	9.998699	8.889476	11.110524	8.976293	9.998044	8.978248	11.021752	34
27	8.889801	9.998689	8.891112	11.108888	8.977619	9.998032	8.979586	11.020414	33
28	8.891421	9.998679	8.892742	11.107258	8.978941	9.998020	8.980921	11.019079	32
29	8.893035	9.998669	8.894366	11.105634	8.980259	9.998008	8.982251	11.017749	31
30	8.894643	9.998659	8.895984	11.104016	8.981573	9.997996	8.983577	11.016423	30
31	8.896246	9.998649	8.897596	11.102404	8.982883	9.997984	8.984899	11.015101	29
32	8.897842	9.998639	8.899203	11.100797	8.984189	9.997972	8.986217	11.013783	28
33	8.899432	9.998629	8.900803	11.099197	8.985491	9.997959	8.987532	11.012468	27
34	8.901017	9.998619	8.902398	11.097602	8.986789	9.997947	8.988842	11.011158	26
35	8.902596	9.998609	8.903987	11.096013	8.988083	9.997935	8.990149	11.009851	25
36	8.904169	9.998599	8.905570	11.094430	8.989374	9.997922	8.991451	11.008549	24
37	8.905736	9.998589	8.907147	11.092853	8.990660	9.997910	8.992750	11.007250	23
38	8.907297	9.998578	8.908719	11.091281	8.991943	9.997897	8.994045	11.005955	22
39	8.908853	9.998568	8.910285	11.089715	8.993222	9.997885	8.995337	11.004663	21
40	8.910404	9.998558	8.911846	11.088154	8.994497	9.997872	8.996624	11.003376	20
41	8.911949	9.998548	8.913401	11.086599	8.995768	9.997860	8.997908	11.002092	19
42	8.913488	9.998537	8.914951	11.085049	8.997036	9.997847	8.999188	11.000812	18
43	8.915022	9.998527	8.916495	11.083505	8.998299	9.997835	9.000465	10.999535	17
44	8.916550	9.998516	8.918034	11.081966	8.999560	9.997822	9.001738	10.998262	16
45	8.918073	9.998506	8.919568	11.080432	9.000816	9.997809	9.003007	10.996993	15
46	8.919591	9.998495	8.921096	11.078904	9.002069	9.997797	9.004272	10.995728	14
47	8.921103	9.998485	8.922619	11.077381	9.003318	9.997784	9.005534	10.994466	13
48	8.922610	9.998474	8.924136	11.075864	9.004563	9.997771	9.006792	10.993208	12
49	8.924112	9.998464	8.925649	11.074351	9.005805	9.997758	9.008047	10.991953	11
50	8.925609	9.998453	8.927156	11.072844	9.007044	9.997745	9.009298	10.990702	10
51	8.927100	9.998442	8.928658	11.071342	9.008278	9.997732	9.010546	10.989454	9
52	8.928587	9.998431	8.930155	11.069845	9.009510	9.997719	9.011790	10.988210	8
53	8.930068	9.998421	8.931647	11.068353	9.010737	9.997706	9.013031	10.986969	7
54	8.931544	9.998410	8.933134	11.066866	9.011962	9.997693	9.014268	10.985732	6
55	8.933015	9.998399	8.934616	11.065384	9.013182	9.997680	9.015502	10.984498	5
56	8.934481	9.998388	8.936093	11.063907	9.014400	9.997667	9.016732	10.983268	4
57	8.935942	9.998377	8.937565	11.062435	9.015613	9.997654	9.017959	10.982041	3
58	8.937398	9.998366	8.939032	11.060968	9.016824	9.997641	9.019183	10.980817	2
59	8.938850	9.998355	8.940494	11.059506	9.018031	9.997628	9.020403	10.979597	1
60	8.940296	9.998344	8.941952	11.058048	9.019235	9.997614	9.021620	10.978380	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	85 Grad.				84 Grad.				

	6 Grad.				7 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.019235	9.997614	9.021620	10.978380	9.085894	9.996751	9.089144	10.910856	60
1	9.020435	9.997601	9.022834	10.977166	9.086922	9.996735	9.090187	10.909813	59
2	9.021632	9.997588	9.024044	10.975956	9.087947	9.996720	9.091228	10.908772	58
3	9.022825	9.997574	9.025251	10.974749	9.088970	9.996704	9.092266	10.907734	57
4	9.024016	9.997561	9.026455	10.973545	9.089990	9.996688	9.093302	10.906698	56
5	9.025203	9.997547	9.027655	10.972345	9.091008	9.996673	9.094336	10.905664	55
6	9.026386	9.997534	9.028852	10.971148	9.092024	9.996657	9.095367	10.904633	54
7	9.027567	9.997520	9.030046	10.969954	9.093037	9.996641	9.096395	10.903605	53
8	9.028744	9.997507	9.031237	10.968763	9.094047	9.996625	9.097422	10.902578	52
9	9.029918	9.997493	9.032425	10.967575	9.095056	9.996610	9.098446	10.901554	51
10	9.031089	9.997480	9.033609	10.966391	9.096062	9.996594	9.099468	10.900532	50
11	9.032257	9.997466	9.034791	10.965209	9.097065	9.996578	9.100487	10.899513	49
12	9.033421	9.997452	9.035969	10.964031	9.098066	9.996562	9.101504	10.898496	48
13	9.034582	9.997439	9.037144	10.962856	9.099065	9.996546	9.102519	10.897481	47
14	9.035741	9.997425	9.038316	10.961684	9.100062	9.996530	9.103532	10.896468	46
15	9.036896	9.997411	9.039485	10.960515	9.101056	9.996514	9.104542	10.895458	45
16	9.038048	9.997397	9.040651	10.959349	9.102048	9.996498	9.105550	10.894450	44
17	9.039197	9.997383	9.041813	10.958187	9.103037	9.996482	9.106556	10.893444	43
18	9.040342	9.997369	9.042973	10.957027	9.104025	9.996465	9.107559	10.892441	42
19	9.041485	9.997355	9.044130	10.955870	9.105010	9.996449	9.108560	10.891440	41
20	9.042625	9.997341	9.045284	10.954716	9.105992	9.996433	9.109559	10.890441	40
21	9.043762	9.997327	9.046434	10.953566	9.106973	9.996417	9.110556	10.889444	39
22	9.044895	9.997313	9.047582	10.952418	9.107951	9.996400	9.111551	10.888449	38
23	9.046026	9.997299	9.048727	10.951273	9.108927	9.996384	9.112543	10.887457	37
24	9.047154	9.997285	9.049869	10.950131	9.109901	9.996368	9.113533	10.886467	36
25	9.048279	9.997271	9.051008	10.948992	9.110873	9.996351	9.114521	10.885479	35
26	9.049400	9.997257	9.052144	10.947856	9.111842	9.996335	9.115507	10.884493	34
27	9.050519	9.997242	9.053277	10.946723	9.112809	9.996318	9.116491	10.883509	33
28	9.051635	9.997228	9.054407	10.945593	9.113774	9.996302	9.117472	10.882528	32
29	9.052749	9.997214	9.055535	10.944465	9.114737	9.996285	9.118452	10.881548	31
30	9.053859	9.997199	9.056659	10.943341	9.115698	9.996269	9.119429	10.880571	30
31	9.054966	9.997185	9.057781	10.942219	9.116656	9.996252	9.120404	10.879596	29
32	9.056071	9.997170	9.058900	10.941100	9.117613	9.996235	9.121377	10.878623	28
33	9.057172	9.997156	9.060016	10.939984	9.118567	9.996219	9.122348	10.877652	27
34	9.058271	9.997141	9.061130	10.938870	9.119519	9.996202	9.123317	10.876683	26
35	9.059367	9.997127	9.062240	10.937760	9.120469	9.996185	9.124284	10.875716	25
36	9.060460	9.997112	9.063348	10.936652	9.121417	9.996168	9.125249	10.874751	24
37	9.061551	9.997098	9.064453	10.935547	9.122362	9.996151	9.126211	10.873789	23
38	9.062639	9.997083	9.065556	10.934444	9.123306	9.996134	9.127172	10.872828	22
39	9.063724	9.997068	9.066655	10.933345	9.124248	9.996117	9.128130	10.871870	21
40	9.064806	9.997053	9.067752	10.932248	9.125187	9.996100	9.129087	10.870913	20
41	9.065885	9.997039	9.068846	10.931154	9.126125	9.996083	9.130041	10.869959	19
42	9.066962	9.997024	9.069938	10.930062	9.127060	9.996066	9.130994	10.869006	18
43	9.068036	9.997009	9.071027	10.928973	9.127993	9.996049	9.131944	10.868056	17
44	9.069107	9.996994	9.072113	10.927887	9.128925	9.996032	9.132893	10.867107	16
45	9.070176	9.996979	9.073197	10.926803	9.129854	9.996015	9.133839	10.866161	15
46	9.071242	9.996964	9.074278	10.925722	9.130781	9.995998	9.134784	10.865216	14
47	9.072306	9.996949	9.075356	10.924644	9.131706	9.995980	9.135726	10.864274	13
48	9.073366	9.996934	9.076432	10.923568	9.132630	9.995963	9.136667	10.863333	12
49	9.074424	9.996919	9.077505	10.922495	9.133551	9.995946	9.137605	10.862395	11
50	9.075480	9.996904	9.078576	10.921424	9.134470	9.995928	9.138542	10.861458	10
51	9.076533	9.996889	9.079644	10.920356	9.135387	9.995911	9.139476	10.860524	9
52	9.077583	9.996874	9.080710	10.919290	9.136303	9.995894	9.140409	10.859591	8
53	9.078631	9.996858	9.081773	10.918227	9.137216	9.995876	9.141340	10.858660	7
54	9.079676	9.996843	9.082833	10.917167	9.138128	9.995859	9.142269	10.857731	6
55	9.080719	9.996828	9.083891	10.916109	9.139037	9.995841	9.143196	10.856804	5
56	9.081759	9.996812	9.084947	10.915053	9.139944	9.995823	9.144121	10.855879	4
57	9.082797	9.996797	9.086000	10.914000	9.140850	9.995806	9.145044	10.854956	3
58	9.083832	9.996782	9.087050	10.912950	9.141754	9.995788	9.145966	10.854034	2
59	9.084864	9.996766	9.088098	10.911902	9.142655	9.995771	9.146885	10.853115	1
60	9.085894	9.996751	9.089144	10.910856	9.143555	9.995753	9.147803	10.852197	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	83 Grad.				82 Grad.				

	8 Grad.				9 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.143555	9.995753	9.147803	10.852197	9.194332	9.994620	9.199713	10.800287	60
1	9.144453	9.995735	9.148718	10.851282	9.195129	9.994600	9.200529	10.799471	59
2	9.145349	9.995717	9.149632	10.850368	9.195925	9.994580	9.201345	10.798655	58
3	9.146243	9.995699	9.150544	10.849456	9.196719	9.994560	9.202159	10.797841	57
4	9.147136	9.995681	9.151454	10.848546	9.197511	9.994540	9.202971	10.797029	56
5	9.148026	9 995664	9.152363	10.847637	9.198302	9.994519	9.203782	10.796218	55
6	9.148915	9.995646	9.153269	10.846731	9.199091	9.994499	9.204592	10.795408	54
7	9.149802	9.995628	9.154174	10.845826	9.199879	9.994479	9.205400	10.794600	53
8	9.150686	9.995610	9.155077	10.844923	9.200666	9.994459	9.206207	10.793793	52
9	9.151569	9.995591	9.155978	10.844022	9.201451	9.994438	9.207013	10.792987	51
10	9.152451	9.995573	9.156877	10.843123	9.202234	9.994418	9.207817	10.792183	50
11	9.153330	9.995555	9.157775	10.842225	9.203017	9.994398	9.208619	10.791381	49
12	9.154208	9.995537	9.158671	10.841329	9.203797	9.994377	9.209420	10.790580	48
13	9.155083	9.995519	9.159565	10.840435	9.204577	9.994357	9.210220	10.789780	47
14	9.155957	9.995501	9.160457	10.839543	9.205354	9.994336	9.211018	10.788982	46
15	9.156830	9.995482	9.161347	10.838653	9.206131	9.994316	9.211815	10.788185	45
16	9.157700	9.995464	9.162236	10.837764	9.206906	9'994295	9.212611	10.787389	44
17	9.158569	9.995446	9.163123	10.836877	9.207679	9.994274	9.213405	10.786595	43
18	9.159435	9.995427	9.164008	10.835992	9.208452	9.994254	9.214198	10.785802	42
19	9.160301	9.995409	9.164892	10.835108	9.209222	9.994233	9.214989	10.785011	41
20	9.161164	9.995390	9.165774	10.834226	9.209992	9.994212	9.215780	10.784220	40
21	9.162025	9.995372	9.166654	10.833346	9.210760	9.994191	9.216568	10.783432	39
22	9.162885	9.995353	9.167532	10.832468	9.211526	9.994171	9.217356	10.782644	38
23	9.163743	9.995334	9.168409	10.831591	9.212291	9.994150	9.218142	10.781858	37
24	9.164600	9.995316	9.169284	10.830716	9.213055	9.994129	9.218926	10.781074	36
25	9.165454	9.995297	9.170157	10.829843	9.213818	9.994108	9.219710	10.780290	35
26	9.166307	9.995278	9.171029	10.828971	9.214579	9.994087	9.220492	10.779508	34
27	9.167159	9.995260	9 171899	10.828101	9.215338	9.994066	9.221272	10.778728	33
28	9.168008	9.995241	9.172767	10.827233	9.216097	9.994045	9.222052	10.777948	32
29	9.168856	9.995222	9.173634	10.826366	9.216854	9.994024	9.222830	10.777170	31
30	9.169702	9.995203	9.174499	10.825501	9.217609	9.994003	9.223607	10.776393	30
31	9.170547	9.995184	9.175362	10.824638	9.218363	9.993982	9.224382	10.775618	29
32	9.171389	9.995165	9.176224	10.823776	9.219116	9.993960	9.225156	10.774844	28
33	9.172230	9.995146	9.177084	10.822916	9.219868	9.993939	9.225929	10.774071	27
34	9.173070	9.995127	9.177942	10.822058	9.220618	9.993918	9.226700	10.773300	26
35	9.173908	9 995108	9.178799	10.821201	9.221367	9.993897	9.227471	10.772529	25
36	9.174744	9.995089	9.179655	10.820345	9.222115	9.993875	9.228239	10.771761	24
37	9.175578	9.995070	9.180508	10.819492	9.222861	9.993854	9.229007	10.770993	23
38	9.176411	9.995051	9.181360	10.818640	9.223606	9.993832	9.229773	10.770227	22
39	9.177242	9.995032	9.182211	10.817789	9.224349	9.993811	9.230539	10.769461	21
40	9.178072	9.995013	9.183059	10.816941	9.225092	9.993789	9.231302	10.768698	20
41	9.178900	9.994993	9.183907	10.816093	9.225833	9.993768	9.232065	10.767935	19
42	9.179726	9.994974	9.184752	10.815248	9.226573	9.993746	9.232826	10.767174	18
43	9 180551	9.994955	9.185597	10.814403	9.227311	9.993725	9.233586	10.766414	17
44	9.181374	9.994935	9.186439	10.813561	9.228048	9.993703	9.234345	10.765655	16
45	9.182196	9.994916	9.187280	10.812720	9.228784	9.993681	9.235103	10.764897	15
46	9.183016	9.994896	9.188120	10.811880	9.229518	9.993660	9.235859	10.764141	14
47	9.183834	9.994877	9.188958	10.811042	9.230252	9.993638	9.236614	10.763386	13
48	9.184651	9.994857	9.189794	10.810206	9.230984	9.993616	9.237368	10.762632	12
49	9.185466	9.994838	9.190629	10.809371	9.231715	9.993594	9.238120	10.761880	11
50	9.186280	9.994818	9.191462	10.808538	9.232444	9.993572	9.238872	10.761128	10
51	9.187092	9.994798	9.192294	10.807706	9.233172	9.993550	9.239622	10.760378	9
52	9.187903	9.994779	9.193124	10.806876	9.233899	9.993528	9.240371	10.759629	8
53	9.188712	9.994759	9.193953	10.806047	9.234625	9.993506	9.241118	10.758882	7
54	9.189519	9.994739	9.194780	10.805220	9.235349	9.993484	9.241865	10.758135	6
55	9.190325	9.994720	9.195606	10.804394	9.236073	9.993462	9.242610	10.757390	5
56	9.191130	9.994700	9.196430	10.803570	9.236795	9.993440	9.243354	10.756646	4
57	9.191933	9.994680	9.197253	10.802747	9.237515	9.993418	9.244097	10.755903	3
58	9.192734	9.994660	9.198074	10.801926	9.238235	9.993396	9.244839	10.755161	2
59	9.193534	9.994640	9.198894	10.801106	9.238953	9.993374	9.245579	10.754421	1
60	9.194332	9.994620	9.199713	10.800287	9.239670	9.993351	9.246319	10.753681	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	81 Grad.				80 Grad.				

′	10 Grad.				11 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.239670	9.993351	9.246319	10.753681	9.280599	9.991947	9.288652	10.711348	60
1	9.240386	9.993329	9.247057	10.752943	9.281248	9.991922	9.289326	10.710674	59
2	9.241101	9.993307	9.247794	10.752206	9.281897	9.991897	9.289999	10.710001	58
3	9.241814	9.993284	9.248530	10.751470	9.282544	9.991873	9.290671	10.709329	57
4	9.242526	9.993262	9.249264	10.750736	9.283190	9.991848	9.291342	10.708658	56
5	9.243237	9.993240	9.249998	10.750002	9.283836	9.991823	9.292013	10.707987	55
6	9.243947	9.993217	9.250730	10.749270	9.284480	9.991799	9.292682	10 707318	54
7	9.244656	9.993195	9.251461	10.748539	9.285124	9.991774	9.293350	10.706650	53
8	9.245363	9.993172	9.252191	10.747809	9.285766	9.991749	9.294017	10.705983	52
9	9.246069	9.993149	9.252920	10.747080	9.286408	9.991724	9.294684	10.705316	51
10	9.246775	9.993127	9.253648	10.746352	9.287048	9.991699	9.295349	10.704651	50
11	9.247478	9.993104	9.254374	10.745626	9.287688	9.991674	9.296013	10.703987	49
12	9.248181	9.993081	9.255100	10.744900	9.288326	9.991649	9.296677	10.703323	48
13	9.248883	9.993059	9.255824	10.744176	9.288964	9.991624	9.297339	10.702661	47
14	9.249583	9.993036	9.256547	10.743453	9.289600	9.991599	9.298001	10.701999	46
15	9.250282	9.993013	9.257269	10.742731	9.290236	9·991574	9.298662	10.701338	45
16	9.250980	9.992990	9.257990	10.742010	9.290870	9.991549	9.299322	10.700678	44
17	9.251677	9.992967	9.258710	10.741290	9.291504	9.991524	9.299980	10.700020	43
18	9.252373	9.992944	9.259429	10.740571	9.292137	9.991498	9.300638	10.699362	42
19	9.253067	9.992921	9.260146	10.739854	9.292768	9.991473	9.301295	10.698705	41
20	9.253761	9.992898	9.260863	10.739137	9.293399	9.991448	9.301951	10.698049	40
21	9.254453	9.992875	9.261578	10.738422	9.294029	9.991422	9.302607	10.697393	39
22	9.255144	9.992852	9.262292	10.737708	9.294658	9.991397	9.303261	10.696739	38
23	9.255834	9.992829	9.263005	10.736995	9.295286	9.991372	9.303914	10.696086	37
24	9.256523	9.992806	9.263717	10.736283	9.295913	9.991346	9.304567	10.695433	36
25	9.257211	9.992783	9.264428	10.735572	9.296539	9.991321	9.305218	10.694782	35
26	9.257898	9.992759	9.265138	10.734862	9.297164	9.991295	9.305869	10.694131	34
27	9.258583	9.992736	9.265847	10.734153	9.297788	9.991270	9.306519	10.693481	33
28	9.259268	9.992713	9.266555	10.733445	9.298412	9.991244	9.307168	10.692832	32
29	9.259951	9.992690	9.267261	10.732739	9.299034	9.991218	9.307816	10.692184	31
30	9.260633	9.992666	9.267967	10.732033	9.299655	9.991193	9.308463	10.691537	30
31	9.261314	9.992643	9.268671	10.731329	9.300276	9.991167	9.309109	10.690891	29
32	9.261994	9.992619	9.269375	10.730625	9.300895	9.991141	9.309754	10.690246	28
33	9.262673	9.992595	9.270077	10.729923	9.301514	9.991115	9.310399	10.689601	27
34	9.263351	9.992572	9.270779	10.729221	9.302132	9.991090	9.311042	10.688958	26
35	9.264027	9.992549	9.271479	10.728521	9.302748	9.991064	9.311685	10.688315	25
36	9.264703	9.992525	9.272178	10.727822	9.303364	9.991038	9.312327	10.687673	24
37	9.265377	9·992501	9.272876	10.727124	9.303979	9.991012	9.312968	10.687032	23
38	9.266051	9.992478	9.273573	10.726427	9.304593	9.990986	9.313608	10.686392	22
39	9.266723	9.992454	9.274269	10.725731	9.305207	9.990960	9.314247	10.685753	21
40	9.267395	9.992430	9.274964	10.725036	9.305819	9.990934	9.314885	10.685115	20
41	9.268065	9.992406	9.275658	10.724342	9.306430	9.990908	9.315523	10.684477	19
42	9.268734	9.992382	9.276351	10.723649	9.307041	9.990882	9.316159	10.683841	18
43	9.269402	9.992359	9.277043	10.722957	9.307650	9.990855	9.316795	10.683205	17
44	9.270069	9.992335	9.277734	10.722266	9.308259	9.990829	9.317430	10.682570	16
45	9.270735	9.992311	9.278424	10.721576	9.308867	9.990803	9.318064	10.681936	15
46	9.271400	9.992287	9.279113	10.720887	9.309474	9.990777	9.318697	10.681303	14
47	9.272064	9.992263	9.279801	10.720199	9.310080	9.990750	9.319330	10.680670	13
48	9.272726	9.992239	9.280488	10.719512	9.310685	9.990724	9.319961	10.680039	12
49	9.273388	9.992214	9.281174	10.718826	9.311289	9.990697	9.320592	10.679408	11
50	9.274049	9.992190	9.281858	10.718142	9.311893	9.990671	9.321222	10.678778	10
51	9.274708	9.992166	9.282542	10.717458	9.312495	9.990645	9.321851	10.678149	9
52	9.275367	9.992142	9.283225	10.716775	9.313097	9.990618	9.322479	10.677521	8
53	9.276025	9.992118	9.283907	10.716093	9.313698	9.990591	9.323106	10.676894	7
54	9.276681	9.992093	9.284588	10.715412	9.314297	9.990565	9.323733	10.676267	6
55	9.277337	9.992069	9.285268	10.714732	9.314897	9.990538	9.324358	10.675642	5
56	9.277991	9.992044	9.285947	10.714053	9.315495	9.990511	9.324983	10.675017	4
57	9.278645	9.992020	9.286624	10.713376	9.316092	9.990485	9.325607	10.674393	3
58	9.279297	9.991996	9.287301	10.712699	9.316689	9.990458	9.326231	10.673769	2
59	9.279948	9.991971	9.287977	10.712023	9.317284	9.990431	9.326853	10.673147	1
60	9.280599	9.991947	9.288652	10.711348	9.317879	9.990404	9.327475	10.672525	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	79 Grad.				78 Grad.				

	12 Grad.				13 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.317879	9.990404	9.327475	10.672525	9.352088	9.988724	9.363364	10.636636	60
1	9.318473	9.990378	9.328095	10.671905	9.352635	9.988695	9.363940	10.636060	59
2	9.319066	9.990351	9.328715	10.671285	9.353181	9.988666	9.364515	10.635485	58
3	9.319658	9.990324	9.329334	10.670666	9.353726	9.988636	9.365090	10.634910	57
4	9.320249	9.990297	9.329953	10.670047	9.354271	9.988607	9.365664	10.634336	56
5	9.320840	9.990270	9.330570	10.669430	9.354815	9.988578	9.366237	10.633763	55
6	9.321430	9.990243	9.331187	10.668813	9.355358	9.988548	9.366810	10.633190	54
7	9.322019	9.990215	9.331803	10.668197	9.355901	9.988519	9.367382	10.632618	53
8	9.322607	9.990188	9.332418	10.667582	9.356443	9.988489	9.367953	10.632047	52
9	9.323194	9.990161	9.333033	10.666967	9.356984	9.988460	9.368524	10.631476	51
10	9.323780	9.990134	9.333646	10.666354	9.357524	9.988430	9.369094	10.630906	50
11	9.324366	9.990107	9.334259	10.665741	9.358064	9.988401	9.369663	10.630337	49
12	9.324950	9.990079	9.353871	10.665129	9.358603	9.988371	9.370232	10.629768	48
13	9.325534	9.990052	9.335482	10.664518	9.359141	9.988342	9.370799	10.629201	47
14	9.326117	9.990025	9.336093	10.663907	9.359678	9.988312	9.371367	10.628633	46
15	9.326700	9.989997	9.336702	10.663298	9.360215	9.988282	9.371933	10.628067	45
16	9.327281	9.989970	9.337311	10.662689	9.360752	9.988252	9.372499	10.627501	44
17	9.327862	9.989942	9.337919	10.662081	9.361287	9.988223	9.373064	10.626936	43
18	9.328442	9.989915	9.338527	10.661473	9.361822	9.988193	9.373629	10.626371	42
19	9.329021	9.989887	9.339133	10.660867	9.362356	9.988163	9.374193	10.625807	41
20	9.329599	9.989860	9.339739	10.660261	9.362889	9.988133	9.374756	10.625244	40
21	9.330176	9.989832	9.340344	10.659656	9.363422	9.988103	9.375319	10.624681	39
22	9.330753	9.989804	9.340948	10.659052	9.363954	9.988073	9.375881	10.624119	38
23	9.331329	9.989777	9.341552	10.658448	9.364485	9.988043	9.376442	10.623558	37
24	9.331903	9.989749	9.342155	10.657845	9.365016	9.988013	9.377003	10.622997	36
25	9.332478	9.989721	9.342757	10.657243	9.365546	9.987983	9.377563	10.622437	35
26	9.333051	9.989693	9.343358	10.656642	9.366075	9.987953	9.378122	10.621878	34
27	9.333624	9.989665	9.343958	10.656042	9.366604	9.987922	9.378681	10.621319	33
28	9.334195	9.989637	9.344558	10.655442	9.367131	9.987892	9.379239	10.620761	32
29	9.334767	9.989610	9.345157	10.654843	9.367659	9.987862	9.379797	10.620203	31
30	9.335337	9.989582	9.345755	10.654245	9.368185	9.987832	9.380354	10.619646	30
31	9.335906	9.989553	9.346353	10.653647	9.368711	9.987801	9.380910	10.619090	29
32	9.336475	9.989525	9.346949	10.653051	9.369236	9.987771	9.381466	10.618534	28
33	9.337043	9.989497	9.347545	10.652455	9.369761	9.987740	9.382020	10.617980	27
34	9.337610	9.989469	9.348141	10.651859	9.370285	9.987710	9.382575	10.617425	26
35	9.338176	9.989441	9.348735	10.651265	9.370808	9.987679	9.383129	10.616871	25
36	9,338742	9.989413	9.349329	10.650671	9.371330	9.987649	9.383682	10.616318	24
37	9.339307	9.989385	9.349922	10.650078	9.371852	9.987618	9.384234	10.615766	23
38	9.339871	9.989356	9.350514	10.649486	9.372373	9.987588	9.384786	10.615214	22
39	9.340434	9.989328	9.351106	10.648894	9.372894	9.987557	9.385337	10.614663	21
40	9.340996	9.989300	9.351697	10.648303	9.373414	9.987526	9.385888	10.614112	20
41	9.341558	9.989271	9.352287	10.647713	9.373933	9.987496	9.386438	10.613562	19
42	9.342119	9.989243	9.352876	10.647124	9.374452	9.987465	9.386987	10.613013	18
43	9.342679	9.989214	9.353465	10.646535	9.374970	9.987434	9.387536	10.612464	17
44	9.343239	9.989186	9.354053	10.645947	9.375487	9.987403	9.388084	10.611916	16
45	9.343797	9.989157	9.354640	10.645360	9.376003	9.987372	9.388631	10.611369	15
46	9.344355	9.989128	9.355227	10.644773	9.376519	9.987341	9.389178	10.610822	14
47	9.344912	9.989100	9.355813	10.644187	9.377035	9.987310	9.389724	10.610276	13
48	9.345469	9.989071	9.356398	10.643602	9.377549	9.987279	9.390270	10.609730	12
49	9.346024	9.989042	9.356982	10.643018	9.378063	9.987248	9.390815	10.609185	11
50	9.346579	9.989014	9.357566	10.642434	9.378577	9.987217	9.391360	10.608640	10
51	9.347134	9.988985	9.358149	10.641851	9.379089	9.987186	9.391903	10.608097	9
52	9.347687	9.988956	9.358731	10.641269	9.379601	9.987155	9.392447	10.607553	8
63	9.348240	9.988927	9.359313	10.640687	9.380113	9.987124	9.392989	10.607011	7
54	9.348792	9.988898	9.359893	10.640107	9.380624	9 987092	9·393531	10.606469	6
55	9.349343	9.988869	9 360474	10.639526	9.381134	9.987061	9.394073	10.605927	5
56	9.349893	9.988840	9.361053	10.638947	9.381643	9.987030	9.394614	10.605386	4
57	9.350443	9.988811	9.361632	10.638368	9.382152	9.986998	9.395154	10.604846	3
58	9.350992	9.988782	9.362210	10.637790	9.382661	9.986967	9.395694	10.604306	2
59	9.351540	9.988753	9.362787	10.637213	9.383168	9.986936	9.396233	10.603767	1
60	9.352088	9.988724	9.363364	10.636636	9.383675	9.986904	9.396771	10.603229	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	77 Grad.				76 Grad.				

14 Grad.					15 Grad.				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang	
0	9.383675	9.986904	9.396771	10.603229	9.412996	9.984944	9.428052	10.571948	60
1	9.384182	9.986873	9.397309	10.602691	9.413467	9.984910	9.428558	10.571442	59
2	9.384687	9.986841	9.397846	10.602154	9.413938	9.984876	9.429062	10.570938	58
3	9.385192	9.986809	9.398383	10.601617	9.414408	9.984842	9.429566	10.570434	57
4	9.385697	9.986778	9.398919	10.601081	9.414878	9.984808	9.430070	10.569930	56
5	9.386201	9.986746	9.399455	10.600545	9.415347	9.984774	9.430573	10.569427	55
6	9.386704	9.986714	9.399990	10.600010	9.415815	9.984740	9.431075	10.568925	54
7	9.387207	9.986683	9.400524	10.599476	9.416283	9.984706	9.431577	10.568423	53
8	9.387709	9·986651	9.401058	10.598942	9.416751	9.984672	9.432079	10.567921	52
9	9.388210	9.986619	9.401591	10.598409	9.417217	9.984638	9.432580	10.567420	51
10	9.388711	9.986587	9.402124	10.597876	9.417684	9.984603	9.433080	10.566920	50
11	9.389211	9.986555	9.402656	10.597344	9.418150	9.984569	9.433580	10.566420	49
12	9.389711	9.986523	9.403187	10.596813	9.418615	9.984535	9.434080	10.565920	48
13	9.390210	9.986491	9.403718	10.596282	9.419079	9.984500	9.434579	10.565421	47
14	9.390708	9.986459	9.404249	10.595751	9.419544	9.984466	9.435078	10.564922	46
15	9.391206	9.986427	9.404778	10.595222	9.420007	9.984432	9.435576	10.564424	45
16	9.391703	9.986395	9.405308	10.594692	9.420470	9.984397	9.436073	10.563927	44
17	9.392199	9.986363	9.405836	10.594164	9.420933	9.984363	9.436570	10.563430	43
18	9.392695	9.986331	9.406364	10.593636	9.421395	9.984328	9.437067	10.562933	42
19	9.393191	9.986299	9.406892	10.593108	9.421857	9.984294	9.437563	10.562437	41
20	9.393685	9.986266	9.407419	10.592581	9.422318	9.984259	9.438059	10.561941	40
21	9.394179	9.986234	9.407945	10.592055	9.422778	9.984224	9.438554	10.561446	39
22	9.394673	9.986202	9.408471	10.591529	9.423238	9.984190	9.439048	10.560952	38
23	9.395166	9.986169	9.408996	10.591004	9.423697	9.984155	9.439543	10.560457	37
24	9.395658	9.986137	9.409521	10.590479	9.424156	9.984120	9.440036	10.559964	36
25	9.396150	9.986104	9.410045	10.589955	9.424615	9.984085	9.440529	10.559471	35
26	9.396641	9.986072	9.410569	10.589431	9.425073	9.984050	9.441022	10.558978	34
27	9.397132	9.986039	9.411092	10.588908	9.425530	9.984015	9.441514	10.558486	33
28	9.397621	9.986007	9.411615	10.588385	9.425987	9.983981	9.442006	10.557994	32
29	9.398111	9.985974	9.412137	10.587863	9.426443	9.983946	9.442497	10.557503	31
30	9.398600	9.985942	9.412658	10.587342	9.426899	9.983911	9.442988	10.557012	30
31	9.399088	9.985909	9.413179	10.586821	9.427354	9.983875	9.443479	10.556521	29
32	9.399575	9.985876	9.413699	10.586301	9.427809	9.983840	9.443968	10.556032	28
33	9.400062	9.985843	9.414219	10.585781	9.428263	9.983805	9.444458	10.555542	27
34	9.400549	9.985811	9.414738	10.585262	9.428717	9.983770	9.444947	10.555053	26
35	9.401035	9.985778	9.415257	10.584743	9.429170	9.983735	9.445435	10.554565	25
36	9.401520	9.985745	9.415775	10.584225	9.429623	9.983700	9.445923	10.554077	24
37	9.402005	9.985712	9.416293	10.583707	9.430075	9.983664	9.446411	10.553589	23
38	9.402489	9.985679	9.416810	10.583190	9.430527	9.983629	9.446898	10.553102	22
39	9.402972	9.985646	9.417326	10.582674	9.430978	9.983594	9.447384	10.552616	21
40	9.403455	9.985613	9.417842	10.582158	9.431429	9.983558	9.447870	10.552130	20
41	9.403938	9.985580	9.418358	10.581642	9.431879	9.983523	9.448356	10.551644	19
42	9.404420	9.985547	9.418873	10.581127	9.432329	9.983487	9.448841	10.551159	18
43	9.404901	9.985514	9.419387	10.580613	9.432778	9.983452	9.449326	10.550674	17
44	9.405382	9.985480	9.419901	10.580099	8.433226	9.983416	9.449810	10.550190	16
45	9.405862	9.985447	9.420415	10.579585	9.433675	9.983381	9.450294	10.549706	15
46	9.406341	9.985414	9.420927	10.579073	9.434122	9.983345	9.450777	10.549223	14
47	9.406820	9.985381	9.421440	10.578560	9.434569	9.983309	9.451260	10.548740	13
48	9.407299	9.985347	9.421952	10.578048	9.435016	9.983273	9.451743	10.548257	12
49	9.407777	9.985314	9.422463	10.577537	9.435462	9.983238	9.452225	10.547775	11
50	9.408254	9.985280	9.422974	10.577026	9.435908	9.983202	9.452706	10.547294	10
51	9.408731	9.985247	9.423484	10.576516	9.436353	9.983166	9.453187	10.546813	9
52	9.409207	9.985213	9.423993	10.576007	9.436798	9.983130	9.453668	10.546332	8
53	9.409682	9.985180	9.424503	10.575497	9.437242	9.983094	9.454148	10.545852	7
54	9.410157	9.985146	9.425011	10.574989	9.437686	9.983058	9.454628	10.545372	6
55	9.410632	9.985113	9.425519	10.574481	9.438129	9.983022	9.455107	10.544893	5
56	9.411106	9.985079	9.426027	10.573973	9.438572	9.982986	9.455586	10.544414	4
57	9.411579	9.985045	9.426534	10.573469	9.439014	9.982950	9.456064	10.543936	3
58	9.412052	9.985011	9.427041	10.572959	9.439456	9.982914	9.456542	10.543458	2
59	9.412524	9.984978	9.427547	10.572453	9.439897	9.982878	9.457019	10.542981	1
60	9.412996	9.984944	9.428052	10.571948	9.440338	9.982842	9.457496	10.542504	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
75 Grad.					74 Grad.				

	16 Grad.				17 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.440338	9.982842	9.457496	10.542504	9.465935	9.980596	9.485339	10.514661	60
1	9.440778	9.982805	9.457973	10.542027	9.466348	9.980558	9.485791	10.514209	59
2	9.441218	9.982769	9.458449	10.541551	9.466761	9.980519	9.486242	10.513758	58
3	9.441658	9.982733	9.458925	10.541075	9.467173	9.980480	9.486693	10.513307	57
4	9.442096	9.982696	9.459400	10.540600	9.467585	9.980442	9.487143	10.512857	56
5	9.442535	9.982660	9.459875	10.540125	9.467996	9.980403	9.487593	10.512407	55
6	9.442973	9.982624	9.460349	10.539651	9.468407	9.980364	9.488043	10.511957	54
7	9.443410	9.982587	9.460823	10.539177	9.468817	9.980325	9.488492	10.511508	53
8	9.443847	9.982551	9.461297	10.538703	9.469227	9.980286	9.488941	10.511059	52
9	9.444284	9.982514	9.461770	10.538230	9.469637	9.980247	9.489390	10.510610	51
10	9.444720	9.982477	9.462242	10.537758	9.470046	9.980208	9.489838	10.510162	50
11	9.445155	9.982441	9.462715	10.537285	9.470455	9.980169	9.490286	10.509714	49
12	9.445590	9.982404	9.463186	10.536814	9.470863	9.980130	9.490733	10.509267	48
13	9.446025	9.982367	9.463658	10.536342	9.471271	9.980091	9.491180	10.508820	47
14	9.446459	9.982331	9.464128	10.535872	9.471679	9.980052	9.491627	10.508373	46
15	9.446893	9.982294	9.464599	10.535401	9.472086	9.980012	9.492073	10.507927	45
16	9.447326	9.982257	9.465069	10.534931	9.472492	9.979973	9.492519	10.507481	44
17	9.447759	9.982220	9.465539	10.534461	9.472898	9.979934	9.492965	10.507035	43
18	9.448191	9.982183	9.466008	10.533992	9.473304	9.979895	9.493410	10.506590	42
19	9.448623	9.982146	9.466477	10.533523	9.473710	9.979855	9.493854	10.506146	41
20	9.449054	9.982109	9.466945	10.533055	9.474115	9.979816	9.494299	10.505701	40
21	9.449485	9.982072	9.467413	10.532587	9.474519	9.979776	9.494743	10.505257	39
22	9.449915	9.982035	9.467880	10.532120	9.474923	9.979737	9.495186	10.504814	38
23	9.450345	9.981998	9.468347	10.531653	9.475327	9.979697	9.495630	10.504370	37
24	9.450775	9.981961	9.468814	10.531186	9.475730	9.979658	9.496073	10.503927	36
25	9.451204	9.981924	9.469280	10.530720	9.476133	9.979618	9.496515	10.503485	35
26	9.451632	9.981886	9.469746	10.530254	9.476536	9.979579	9.496957	10.503043	34
27	9.452060	9.981849	9.470211	10.529789	9.476938	9.979539	9.497399	10.502601	33
28	9.452488	9.981812	9.470676	10.529324	9.477340	9.979499	9.497841	10.502159	32
29	9.452915	9.981774	9.471141	10.528859	9.477741	9.979459	9.498282	10.501718	31
30	9.453342	9.981737	9.471605	10.528395	9.478142	9.979420	9.498722	10.501278	30
31	9.453768	9.981700	9.472069	10.527931	9.478542	9.979380	9.499163	10.500837	29
32	9.454194	9.981662	9.472532	10.527468	9.478942	9.979340	9.499603	10.500397	28
33	9.454619	9.981626	9.472995	10.527005	9.479342	9.979300	9.500042	10.499958	27
34	9.455044	9.981587	9.473457	10.526543	9.479741	9.979260	9.500481	10.499519	26
35	9.455469	9.981549	9.473919	10.526081	9.480140	9.979220	9.500920	10.499080	25
36	9.455893	9.981512	9.474381	10.525619	9.480539	9.979180	9.501359	10.498641	24
37	9.456316	9.981474	9.474842	10.525158	9.480937	9.979140	9.501797	10.498203	23
38	9.456739	9.981436	9.475303	10.524697	9.481334	9.979100	9.502235	10.497765	22
39	9.457162	9.981399	9.475763	10.524237	9.481731	9.979059	9.502672	10.497328	21
40	9.457584	9.981361	9.476223	10.523777	9.482128	9.979019	9.503109	10.496891	20
41	9.458006	9.981323	9.476683	10.523317	9.482525	9.978979	9.503546	10.496454	19
42	9.458427	9.981285	9.477142	10.522858	9.482921	9.978939	9.503982	10.496018	18
43	9.458848	9.981247	9.477601	10.522399	9.483316	9.978898	9.504418	10.495582	17
44	9.459268	9.981209	9.478059	10.521941	9.483712	9.978858	9.504854	10.495146	16
45	9.459688	9.981171	9.478517	10.521483	9.484107	9.978817	9.505289	10.494711	15
46	9.460108	9.981133	9.478975	10.521025	9.484501	9.978777	9.505724	10.494276	14
47	9.460527	9.981095	9.479432	10.520568	9.484895	9.978737	9.506159	10.493841	13
48	9.460946	9.981057	9.479889	10.520111	9.485289	9.978696	9.506593	10.493407	12
49	9.461364	9.981019	9.480345	10.519655	9.485682	9.978655	9.507027	10.492973	11
50	9.461782	9.980981	9.480801	10.519199	9.486075	9.978615	9.507460	10.492540	10
51	9.462199	9.980942	9.481257	10.518743	9.486467	9.978574	9.507893	10.492107	9
52	9.462616	9.980904	9.481712	10.518288	9.486860	9.978533	9.508326	10.491674	8
53	9.463032	9.980866	9.482167	10.517833	9.487251	9.978493	9.508759	10.491241	7
54	9.463448	9.980827	9.482621	10.517379	9.487643	9.978452	9.509191	10.490809	6
55	9.463864	9.980789	9.483075	10.516925	9.488034	9.978411	9.509622	10.490378	5
56	9.464279	9.980750	9.483529	10.516471	9.488424	9.978370	9.510054	10.489946	4
57	9.464694	9.980712	9.483982	10.516018	9.488814	9.978329	9.510485	10.489515	3
58	9.465108	9.980673	9.484435	10.515565	9.489204	9.978288	9.510916	10.489084	2
59	9.465522	9.980635	9.484887	10.515113	9.489593	9.978247	9.511346	10.488654	1
60	9.465935	9.980596	9.485339	10.514661	9.489982	9.978206	9.511776	10.488224	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	73 Grad.				72 Grad.				

′	18 Grad.				19 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.489982	9.978206	9.511776	10.488224	9.512642	9.975670	9.536972	10.463028	60
1	9.490371	9.978165	9.512206	10.487794	9.513009	9.975627	9.537382	10.462618	59
2	9.490759	9.978124	9.512635	10.487365	9.513375	9.975583	9.537792	10.462208	58
3	9.491147	9.978083	9.513064	10.486936	9.513741	9.975539	9.538202	10.461798	57
4	9.491535	9.978042	9.513493	10.486507	9.514107	9.975496	9.538611	10.461389	56
5	9.491922	9.978001	9.513921	10.486079	9.514472	9.975452	9.539020	10.460980	55
6	9.492308	9.977959	9.514349	10.485651	9.514837	9.975408	9.539429	10.460571	54
7	9.492695	9.977918	9.514777	10.485223	9.515202	9.975365	9.539837	10.460163	53
8	9.493081	9.977877	9.515204	10.484796	9.515566	9.975321	9.540245	10.459755	52
9	9.493466	9.977835	9.515631	10.484369	9.515930	9.975277	9.540653	10.459347	51
10	9.493851	9.977794	9.516057	10.483943	9.516294	9.975233	9.541061	10.458939	50
11	9.494236	9.977752	9.516484	10.483516	9.516657	9.975189	9.541468	10.458532	49
12	9.494621	9.977711	9.516910	10.483090	9.517020	9.975145	9.541875	10.458125	48
13	9.495005	9.977669	9.517335	10.482665	9.517382	9.975101	9.542281	10.457719	47
14	9.495388	9.977628	9.517761	10.482239	9.517745	9.975057	9.542688	10.457312	46
15	9.495772	9.977586	9.518186	10.481814	9.518107	9.975013	9.543094	10.456906	45
16	9.496154	9.977544	9.518610	10.481390	9.518468	9.974969	9.543499	10.456501	44
17	9.496537	9.977503	9.519034	10.480966	9.518829	9.974925	9.543905	10.456095	43
18	9.496919	9.977461	9.519458	10.480542	9.519190	9.974880	9.544310	10.455690	42
19	9.497301	9.977419	9.519882	10.480118	9.519551	9.974836	9.544715	10.455285	41
20	9.497682	9.977377	9.520305	10.479695	9.519911	9.974792	9.545119	10.454881	40
21	9.498064	9.977335	9.520728	10.479272	9.520271	9.974748	9.545524	10.454476	39
22	9.498444	9.977293	9.521151	10.478849	9.520631	9.974703	9.545928	10.454072	38
23	9.498825	9.977251	9.521573	10.478427	9.520990	9.974659	9.546331	10.453669	37
24	9.499204	9.977209	9.521995	10.478005	9.521349	9.974614	9.546735	10.453265	36
25	9.499584	9.977167	9.522417	10.477583	9.521707	9.974570	9.547138	10.452862	35
26	9.499963	9.977125	9.522838	10.477162	9.522066	9.974525	9.547540	10.452460	34
27	9.500342	9.977083	9.523259	10.476741	9.522424	9.974481	9.547943	10.452057	33
28	9.500721	9.977041	9.523680	10.476320	9.522781	9.974436	9.548345	10.451655	32
29	9.501099	9.976999	9.524100	10.475900	9.523138	9.974391	9.548747	10.451253	31
30	9.501476	9.976957	9.524520	10.475480	9.523495	9.974347	9.549149	10.450851	30
31	9.501854	9.976914	9.524940	10.475060	9.523852	9.974302	9.549550	10.450450	29
32	9.502231	9.976872	9.525359	10.474641	9.524208	9.974257	9.549951	10.450049	28
33	9.502607	9.976830	9.525778	10.474222	9.524564	9.974212	9.550352	10.449648	27
34	9.502984	9.976787	9.526197	10.473803	9.524920	9.974167	9.550752	10.449248	26
35	9.503360	9.976745	9.526615	10.473385	9.525275	9.974122	9.551153	10.448847	25
36	9.503735	9.976702	9.527033	10.472967	9.525630	9.974077	9.551552	10.448448	24
37	9.504110	9.976660	9.527451	10.472549	9.525984	9.974032	9.551952	10.448048	23
38	9.504485	9.976617	9.527868	10.472132	9.526339	9.973987	9.552351	10.447649	22
39	9.504860	9.976574	9.528285	10.471715	9.526693	9.973942	9.552750	10.447250	21
40	9.505234	9.976532	9.528702	10.471298	9.527046	9.973897	9.553149	10.446851	20
41	9.505608	9.976489	9.529119	10.470881	9.527400	9.973852	9.553548	10.446452	19
42	9.505981	9.976446	9.529535	10.470465	9.527753	9.973807	9.553946	10.446054	18
43	9.506354	9.976404	9.529951	10.470049	9.528105	9.973761	9.554344	10.445656	17
44	9.506727	9.976361	9.530366	10.469634	9.528458	9.973716	9.554741	10.445259	16
45	9.507099	9.976318	9.530781	10.469219	9.528810	9.973671	9.555139	10.444861	15
46	9.507471	9.976275	9.531196	10.468804	9.529161	9.973625	9.555536	10.444464	14
47	9.507843	9.976232	9.531611	10.468389	9.529513	9.973580	9.555933	10.444067	13
48	9.508214	9.976189	9.532025	10.467975	9.529864	9.973535	9.556329	10.443671	12
49	9.508585	9.976146	9.532439	10.467561	9.530215	9.973489	9.556725	10.443275	11
50	9.508956	9.976103	9.532853	10.467147	9.530565	9.973444	9.557121	10.442879	10
51	9.509326	9.976060	9.533266	10.466734	9.530915	9.973398	9.557517	10.442483	9
52	9.509696	9.976017	9.533679	10.466321	9.531265	9.973352	9.557913	10.442087	8
53	9.510065	9.975974	9.534092	10.465908	9.531614	9.973307	9.558308	10.441692	7
54	9.510434	9.975930	9.534504	10.465496	9.531963	9.973261	9.558703	10.441297	6
55	9.510803	9.975887	9.534916	10.465084	9.532312	9.973215	9.559097	10.440903	5
56	9.511172	9.975844	9.535328	10.464672	9.532661	9.973169	9.559491	10.440509	4
57	9.511540	9.975800	9.535739	10.464261	9.533009	9.973124	9.559885	10.440115	3
58	9.511907	9.975757	9.536150	19.463850	9.533357	9.973078	9.560279	10.439721	2
59	9.512275	9.975714	9.536561	10.463439	9.533704	9.973032	9.560673	10.439327	1
60	9.512642	9.975670	9.536972	10.463028	9.534052	9.972986	9.561066	10.438934	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	71 Grad.				70 Grad.				

′	20 Grad. Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	21 Grad. Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.534052	9.972986	9.561066	10.438934	9.554329	9.970152	9.584177	10.415823	60
1	9.534399	9.972940	9.561459	10.438541	9.554658	9.970103	9.584555	10.415445	59
2	9.534745	9.972894	9.561851	10.438149	9.554987	9.970055	9.584932	10.415068	58
3	9.535092	9.972848	9.562244	10.437756	9.555315	9.970006	9.585309	10.414691	57
4	9.535438	9.972802	9.562636	10.437364	9.555643	9.969957	9.585686	10.414314	56
5	9.535783	9.972755	9.563028	10.436972	9.555971	9.969909	9.586062	10.413938	55
6	9.536129	9.972709	9.563419	10.436581	9.556299	9.969860	9.586439	10.413561	54
7	9.536474	9.972663	9.563811	10.436189	9.556626	9.969811	9.586815	10.413185	53
8	9.536818	9.972617	9.564202	10.435798	9.556953	9.969762	9.587190	10.412810	52
9	9.537163	9.972570	9.564593	10.435407	9.557280	9.969714	9.587566	10.412434	51
10	9.537507	9.972524	9.564983	10.435017	9.557606	9.969665	9.587941	10.412059	50
11	9.537851	9.972478	9.565373	10.434627	9.557932	9.969616	9.588316	10.411684	49
12	9.538194	9.972431	9.565763	10.434237	9.558258	9.969567	9.588691	10.411309	48
13	9.538538	9.972385	9.566153	10.433847	9.558583	9.969518	9.589066	10.410934	47
14	9.538880	9.972338	9.566542	10.433458	9.558909	9.969469	9.589440	10.410560	46
15	9.539223	9.972291	9.566932	10.433068	9.559234	9.969420	9.589814	10.410186	45
16	9.539565	9.972245	9.567320	10.432680	9.559558	9.969370	9.590188	10.409812	44
17	9.539907	9.972198	9.567709	10.432291	9.559883	9.969321	9.590562	10.409438	43
18	9.540249	9.972151	9.568098	10.431902	9.560207	9.969272	9.590935	10.409065	42
19	9.540590	9.972105	9.568486	10.431514	9.560531	9.969223	9.591308	10.408692	41
20	9.540931	9.972058	9.568873	10.431127	9.560855	9.969173	9.591681	10.408319	40
21	9.541272	9.972011	9.569261	10.430739	9.561178	9.969124	9.592054	10.407946	39
22	9.541613	9.971064	9.569648	10.430352	9.561501	9.969075	9.592426	10.407574	38
23	9.541953	9.971917	9.570035	10.429965	9.561824	9.969025	9.592799	10.407201	37
24	9.542293	9.971870	9.570422	10.429578	9.562146	9.968976	9.593171	10.406829	36
25	9.542632	9.971823	9.570809	10.429191	9.562468	9.968926	9.593542	10.406458	35
26	9.542971	9.971776	9.571195	10.428805	9.562790	9.968877	9.593914	10.406086	34
27	9.543310	9.971729	9.571581	10.428419	9.563112	9.968827	9.594285	10.405715	33
28	9.543649	9.971682	9.571967	10.428033	9.563433	9.968777	9.594656	10.405344	32
29	9.543987	9.971635	9.572352	10.427648	9.563755	9.968728	9.595027	10.404973	31
30	9.544325	9.971588	9.572738	10.427262	9.564075	9.968678	9.595398	10.404602	30
31	9·544663	9.971540	9.573123	10.426877	9.564396	9.968628	9.595768	10.404232	29
32	9.545000	9.971493	9.573507	10.426493	9.564716	9.968578	9.596138	10.403862	28
33	9.545338	9.971446	9.573892	10.426108	9.565036	9.968528	9.596508	10.403492	27
34	9.545674	9.971398	9.574276	10.425724	9.565356	9.968479	9.596878	10.403122	26
35	9.546011	9.971351	9.574660	10.425340	9.565676	9.968429	9.597247	10.402753	25
36	9.546347	9.971303	9.575044	10.424956	9.565995	9.968379	9.597616	10.402384	24
37	9.546683	9.971256	9.575427	10.424573	9.566314	9.968329	9.597985	10.402015	23
38	9.547019	9·971208	9.575810	10.424190	9.566632	9.968278	9.598354	10.401646	22
39	9.547354	9.971161	9.576193	10.423807	9.566951	9.968228	9.598722	10.401278	21
40	9.547689	9.971113	9.576576	10.423424	9.567269	9.968178	9.599091	10.400909	20
41	9.548024	9.971066	9.576959	10.423041	9.567587	9.968128	9.599459	10.400541	19
42	9.548359	9.971018	9.577341	10.422659	9.567904	9.968078	9.599827	10.400173	18
43	9.548693	9.970970	9.577723	10.422277	9.568222	9.968027	9.600194	10.399806	17
44	9.549027	9.970922	9.578104	10.421896	9.568539	9.967977	9.600562	10.399438	16
45	9.549360	9.970874	9.578486	10.421514	9.568856	9.967927	9.600929	10.399071	15
46	9.549693	9.979827	9.578867	10.421133	9.569172	9.967876	9.601296	10.398704	14
47	9.550026	9.970779	9.579248	10.420752	9.569488	9.967826	9.601663	10.398337	13
48	9.550359	9.970731	9.579629	10.420371	9.569804	9.967775	9.602029	10.397971	12
49	9.550692	9.970683	9.580009	10.419991	9.570120	9.967725	9.602395	10.397605	11
50	9.551024	9.970635	9.580389	10.419611	9.570435	9.967674	9.602761	10.397239	10
51	9.531356	9.970586	9.580769	10.419231	9.570751	9.967624	9.603127	10.396873	9
52	9.551687	9.970538	9.581149	10.418851	9.571066	9.967573	9.603493	10.396507	8
53	9.552018	9.970490	9.581528	10.418472	9.571380	9.967522	9.603858	10.396142	7
54	9.552349	9.970442	9.581907	10.418093	9.571695	9.967471	9.604223	10.395777	6
55	9.552680	9.970394	9.582286	10.417714	9.572009	9.967421	9.604588	10.395412	5
56	9.553010	9.970345	9.582665	10.417335	9.572323	9.967370	9.604953	10.395047	4
57	9.553341	9.970297	9.583044	10.416956	9.572636	9.967319	9.605317	10.394683	3
58	9.553670	9.970249	9.583422	10.416578	9.572950	9.967268	9.605682	10.394318	2
59	9.554000	9.970200	9.583800	10.416200	9.5732[illegible]3	9.967217	9.606046	10.393954	1
60	9.554329	9.970152	9.584177	10.415823	9.573575	9.967166	9.606410	10.393590	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang	Tang.	′
	69 Grad.				68 Grad.				

	22 Grad.				23 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.573575	9.967166	9.606410	10.393590	9.591878	9.964026	9.627852	10.372148	60
1	9.573888	9.967115	9.606773	10.393227	9.592176	9.963972	9.628203	10.371797	59
2	9.574200	9.967064	9.607137	10.392863	9.592473	9.963919	9.628554	10.371446	58
3	9.574512	9.967013	9.607500	10.392500	9.592770	9.963865	9.628905	10.371095	57
4	9.574824	9.966961	9.607863	10.392137	9.593067	9.963811	9.629255	10.370745	56
5	9.575136	9.966910	9.608225	10.391775	9.593363	9.963757	9.629606	10.370394	55
6	9.575447	9.966859	9.608588	10.391412	9.593659	9.963704	9.629956	10.370044	54
7	9.575758	9.966808	9.608950	10.391050	9.593955	9.963650	9.630306	10.369694	53
8	9.576069	9.966756	9.609312	10.390688	9.594251	9.963596	9.630656	10.369344	52
9	9.576379	9.966705	9.609674	10.390326	9.594547	9.963542	9.631005	10.368995	51
10	9.576689	9.966653	9.610036	10.389964	9.594842	9.963488	9.631355	10.368645	50
11	9.576999	9.966602	9.610397	10.389603	9.595137	9.963434	9.631704	10.368296	49
12	9.577309	9.966550	9.610759	10.389241	9.595432	9.963379	9.632053	10.367947	48
13	9.577618	9.966499	9.611120	10.388880	9.595727	9.963325	9.632402	10.367598	47
14	9.577927	9.966447	9.611480	10.388520	9.596021	9.963271	9.632750	10.367250	46
15	9.578236	9.966395	9.611841	10.388159	9.596315	9.963217	9.633099	10.366901	45
16	9.578545	9.966344	9.612201	10.387799	9.596609	9.963163	9.633447	10.366553	44
17	9.578853	9.966292	9.612561	10.387439	9.596903	9.963108	9.633795	10.366205	43
18	9.579162	9.966240	9.612921	10.387079	9.597196	9.963054	9.634143	10.365857	42
19	9.579470	9.966188	9.613281	10.386719	9.597490	9.962999	9.634490	10.365510	41
20	9.579777	9.966136	9.613641	10.386359	9.597783	9.962945	9.634838	10.365162	40
21	9.580085	9.966085	9.614000	10.386000	9.598075	9.962890	9.635185	10.364815	39
22	9.580392	9.966033	9.614359	10.385641	9.598368	9.962836	9.635532	10.364468	38
23	9.580699	9.965981	9.614718	10.385282	9.598660	9.962781	9.635879	10.364121	37
24	9.581005	9.965929	9.615077	10.384923	9.598952	9.962727	9.636226	10.363774	36
25	9.581312	9.965876	9.615435	10.384565	9.599244	9.962672	9.636572	10.363428	35
26	9.581618	9.965824	9.615793	10.384207	9.599536	9.962617	9.636919	10.363081	34
27	9.581924	9.965772	9.616151	10.383849	9.599827	9.962562	9.637265	10.362735	33
28	9.582229	9.965720	9.616509	10.383491	9.600118	9.962508	9.637611	10.362389	32
29	9.582535	9.965668	9.616867	10.383133	9.600409	9.962453	9.637956	10.362044	31
30	9.582840	9.965615	9.617224	10.382776	9.600700	9.962398	9.638302	10.361698	30
31	9.583145	9.965563	9.617582	10.382418	9.600990	9.962343	9.638647	10.361353	29
32	9.583449	9.965511	9.617939	10.382061	9.601280	9.962288	9.638992	10.361008	28
33	9.583754	9.965458	9.618295	10.381705	9.601570	9.962233	9.639337	10.360663	27
34	9.584058	9.965406	9.618652	10.381348	9.601860	9.962178	9.639682	10.360318	26
35	9.584361	9.965353	9.619008	10.380992	9.602150	9.962123	9.640027	10.359973	25
36	9.584665	9.965301	9.619364	10.380636	9.602439	9.962067	9.640371	10.359629	24
37	9.584968	9.965248	9.619720	10.380280	9.602728	9.962012	9.640716	10.359284	23
38	9.585272	9.965195	9.620076	10.379924	9.603017	9.961957	9.641060	10.358940	22
39	9.585574	9.965143	9.620432	10.379568	9.603305	9.961902	9.641404	10.358596	21
40	9.585877	9.965090	9.620787	10.379213	9.603594	9.961846	9.641747	10.358253	20
41	9.586179	9.965037	9.621142	10.378858	9.603882	9.961791	9.642091	10.357909	19
42	9.586482	9.964984	9.621497	10.378503	9.604170	9.961735	9.642434	10.357566	18
43	9.586783	9.964931	9.621852	10.378148	9.604457	9.961680	9.642777	10.357223	17
44	9.587085	9.964879	9.622207	10.377793	9.604745	9.961624	9.643120	10.356880	16
45	9.587386	9.964826	9.622561	10.377439	9.605032	9.961569	9.643463	10.356537	15
46	9.587688	9.964773	9.622915	10.377085	9.605319	9.961513	9.643806	10.356194	14
47	9.587989	9.964720	9.623269	10.376731	9.605606	9.961458	9.644148	10.355852	13
48	9.588289	9.964666	9.623623	10.376377	9.605892	9.961402	9.644490	10.355510	12
49	9.588590	9.964613	9.623976	10.376024	9.606179	9.961346	9.644832	10.355168	11
50	9.588890	9.964560	9.624330	10.375670	9.606465	9.961290	9.645174	10.354826	10
51	9.589190	9.964507	9.624683	10.375317	9.606751	9.961235	9.645516	10.354484	9
52	9.589489	9.964454	9.625036	10.374964	9.607036	9.961179	9.645857	10.354143	8
53	9.589789	9.964400	9.625388	10.374612	9.607322	9.961123	9.646199	10.353801	7
54	9.590088	9.964347	9.625741	10.374259	9.607607	9.961067	9.646540	10.353460	6
55	9.590387	9.964294	9.626093	10.373907	9.607892	9.961011	9.646881	10.353119	5
56	9.590686	9.964240	9.626445	10.373555	9.608177	9.960955	9.647222	10.352778	4
57	9.590984	9.964187	9.626797	10.373203	9.608461	9.960899	9.647562	10.352438	3
58	9.591282	9.964133	9.627149	10.372851	9.608745	9.960843	9.647903	10.352097	2
59	9.591580	9.964080	9.627501	10.372499	9.609029	9.960786	9.648243	10.351757	1
60	9.591878	9.964026	9.627852	10.372148	9.609313	9.960730	9.648583	10.351417	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	67 Grad.				66 Grad.				

24 Grad.					25 Grad.				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.609313	9.960730	9.648583	10.351417	9.625948	9.957276	9.668673	10.331327	60
1	9.609597	9.960674	9.648923	10.351077	9.626219	9.957217	9.669002	10.330998	59
2	9.609880	9.960618	9.649263	10.350737	9.626490	9.957158	9.669332	10.330668	58
3	9.610164	9.960561	9.649602	10.350398	9.626760	9.957099	9.669661	10.330339	57
4	9.610447	9.960505	9.649942	10.350058	9.627030	9.957040	9.669991	10.330009	56
5	9.610729	9·960448	9.650281	10.349719	9.627300	9.956981	9.670320	10.329680	55
6	9.611012	9.960392	9.650620	10.349380	9.627570	9.956921	9.670649	10.329351	54
7	9.611294	9.960335	9.650959	10.349041	9.627840	9.956862	9.670977	10.329023	53
8	9.611576	9.960279	9.651297	10.348703	9.628109	9.956803	9.671306	10.328694	52
9	9.611858	9.960222	9.651636	10.348364	9.628378	9.956744	9.671635	10.328365	51
10	9.612140	9.960165	9.651974	10.348026	9.628647	9.956684	9.671963	10.328037	50
11	9.612421	9.960109	9.652312	10.347688	9.628916	9.956625	9.672291	10.327709	49
12	9.612702	9.960052	9.652650	10.347350	9.629185	9.956566	9.672619	10.327381	48
13	9.612983	9.959995	9.652988	10.347012	9.629453	9.956506	9.672947	10.327053	45
14	9.613264	9.959938	9.653326	10.346674	9.629721	9.956447	9.673274	10.326726	47
15	9.613545	9.959882	9.653663	10.346337	9.629989	9.956387	9.673602	10.326398	46
16	9.613825	9.959825	9.654000	10.346000	9.630257	9·956327	9.673929	10.326071	44
17	9.614105	9.959768	9.654337	10.345663	9.630524	9.956268	9.674257	10.325743	43
18	9.614385	9.959711	9.654674	10.345326	9.630792	9.956208	9.674584	10.325416	42
19	9.614665	9.959654	9.655011	10.344989	9.631059	9.956148	9.674911	10.325089	41
20	9.614944	9.959596	9.655348	10.344652	9.631326	9.956089	9.675237	10.324763	40
21	9.615223	9.959539	9.655684	10.344316	9.631593	9.956029	9.675564	10.324436	39
22	9.615502	9.959482	9.656020	10.343980	9.631859	9.955969	9.675890	10.324110	38
23	9.615781	9.959425	9.656356	10.343644	9.632125	9.955909	9.676217	10.323783	37
24	9.616060	9.959368	9.656692	10.343308	9.632392	9.955849	9.676543	10.323457	36
25	9.616338	9.959310	9.657028	10.342972	9.632658	9.955789	9.676869	10.323131	35
26	9.616616	9.959253	9.657364	10.342636	9.632923	9.955729	9.677194	10.322806	34
27	9.616894	9.959195	9.657699	10.342301	9.633189	9.955669	9.677520	10.322480	33
28	9.617172	9.959138	9.658034	10.341966	9.633454	9.955609	9.677846	10.322154	32
29	9.617450	9.959080	9.658369	10.341631	9.633719	9.955548	9.678171	10.321829	31
30	9.617727	9.959023	9.658704	10.341296	9.633984	9.955488	9.678496	10.321504	30
31	9.618004	9.958965	9.659039	10.340961	9.634249	9.955428	9.678821	10.321179	29
32	9.618281	9.958908	9.659373	10.340627	9.634514	9.955368	9.679146	10.320854	28
33	9.618558	9.958850	9.659708	10.340292	9.634778	9.955307	9.679471	10.320529	27
34	9.618834	9.958792	9.660042	10.339958	9.635042	9.955247	9.679795	10.320205	26
35	9.619110	9.958734	9.660376	10.339624	9.635306	9.955186	9.680120	10.319880	25
36	9.619386	9.958677	9.660710	10.339290	9.635570	9.955126	9.680444	10.319556	24
37	9.619662	9.958619	9.661043	10.338957	9.635834	9.955065	9.680768	10.319232	23
38	9.619938	9.958561	9.661377	10.338623	9.636097	9.955005	9.681092	10.318908	22
39	9.620213	9.958503	9.661710	10.338290	9.636360	9.954944	9.681416	10.318584	21
40	9.620488	9.958445	9.662043	10.337957	9.636623	9.954883	9.681740	10.318260	20
41	9.620763	9.958387	9.662376	10.337624	9.636886	9.954823	9.682063	10.317937	19
42	9.621038	9.958329	9.662709	10.337291	9.637148	9.954762	9.682387	10.317613	18
43	9.621313	9.958271	9.663042	10.336958	9.637411	9.954701	9.682710	10.317290	17
44	9.621587	9.958213	9.663375	10.336625	9.637673	9.954640	9.683033	10.316967	16
45	9.621861	9.958154	9.663707	10.336293	9.637935	9.954579	9.683356	10.316644	15
46	9.622135	9.958096	9.664039	10.335961	9.638197	9.954518	9.683679	10.316321	14
47	9.622409	9.958038	9.664371	10.335629	9.638458	9.954457	9.684001	10.315999	13
48	9.622682	9.957979	9.664703	10.335297	9.638720	9.954396	9.684324	10.315676	12
49	9.622956	9.957921	9.665035	10.334965	9.638981	9.954334	9.684646	10.315354	11
50	9.623229	9.957863	9.665366	10.334634	9.639242	9.954275	9.684968	10.315032	10
51	9.623502	9.957804	9.665698	10.334302	9.639503	9.954213	9.685290	10.314710	9
52	9.623774	9.957746	9.666029	10.333971	9.639764	9.954152	9.685612	10.314388	8
53	9.624047	9.957687	9.666360	10.333640	9.640024	9.954090	9.685934	10.314066	7
54	9.624319	9.957628	9.666691	10.333309	9.640284	9.954029	9.686255	10.313745	.6
55	9.624591	9.957570	9.667021	10.332979	9.640544	9.953968	9.686577	10.313423	5
56	9.624863	9.957511	9.667352	10.332648	9.640804	9.953906	9.686898	10.313102	4
57	9.625135	9.957452	9.667682	10.332318	9.641064	9.953845	9.687219	10.312781	3
58	9.625406	9.957393	9.668013	10.331987	9.641324	9.953783	9.687540	10.312460	2
59	9.625677	9.957335	9.668343	10.331657	9.641583	9.953722	9.687861	10.312139	1
60	9.625948	9.957276	9.668673	10.331327	9.641842	9.953660	9.688182	10.311818	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
65 Grad.					64 Grad.				

	26 Grad.				27 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.641842	9.953660	9.688182	10.311818	9.657047	9.949881	9.707166	10.292834	60
1	9.642101	9.953599	9.688502	10.311498	9.657295	9.949816	9.707478	10.292522	59
2	9.642360	9.953537	9.688823	10.311177	9.657542	9.949752	9.707790	10.292210	58
3	9.642618	9.953475	9.689143	10.310857	9.657790	9.949688	9.708102	10.291898	57
4	9.642877	9.953413	9.689463	10.310537	9.658037	9.949623	9.708414	10.291586	56
5	9.643135	9.953352	9.689783	10.310217	9.658284	9.949558	9.708726	10.291274	55
6	9.643393	9.953290	9.690103	10.309897	9.658531	9.949494	9.709037	10.290963	54
7	9.643650	9.953228	9.690423	10.309577	9.658778	9.949429	9.709349	10.290651	53
8	9.643908	9.953166	9.690742	10.309258	9.659025	9.949364	9.709660	10.290340	52
9	9.644165	9.953104	9.691062	10.308938	9.659271	9.949300	9.709971	10.290029	51
10	9.644423	9.953042	9.691381	10.308619	9.659517	9.949235	9.710282	10.289718	50
11	9.644680	9.952980	9.691700	10.308300	9.659763	9.949170	9.710593	10.289407	49
12	9.644936	9.952918	9.692019	10.307981	9.660009	9.949105	9.710904	10.289096	48
13	9.645193	9.952855	9.692338	10.307662	9.660255	9.949040	9.711215	10.288785	47
14	9.645450	9.952793	9.692656	10.307344	9.660501	9.948975	9.711525	10.288475	46
15	9.645706	9.952731	9.692975	10.307025	9.660746	9.948910	9.711836	10.288164	45
16	9.645962	9.952669	9.693293	10.306707	9.660991	9.948845	9.712146	10.287854	44
17	9.646218	9.952606	9.693612	10.306388	9.661236	9.948780	9.712456	10.287544	43
18	9.646474	9.952544	9.693930	10.306070	9.661481	9.948715	9.712766	10.287234	42
19	9.646729	9.952481	9.694248	10.305752	9.661726	9.948650	9.713076	10.286924	41
20	9.646984	9.952419	9.694566	10.305434	9.661970	9.948584	9.713386	10.286614	40
21	9.647240	9.952356	9.694883	10.305117	9.662214	9.948519	9.713696	10.286304	39
22	9.647494	9.952294	9.695201	10.304799	9.662459	9.948454	9.714005	10.285995	38
23	9.647749	9.952231	9.695518	10.304482	9.662703	9.948388	9.714314	10.285686	37
24	9.648004	9.952168	9.695836	10.304164	9.662946	9.948323	9.714624	10.285376	36
25	9.648258	9.952106	9.696153	10.303847	9.663190	9.948257	9.714933	10.285067	35
26	9.648512	9.952043	9.696470	10.303530	9.663433	9.948192	9.715242	10.284758	34
27	9.648766	9.951980	9.696787	10.303213	9.663677	9.948126	9.715551	10.284449	33
28	9.649020	9.951917	9.697103	10.302897	9.663920	9.948060	9.715860	10.284140	32
29	9.649274	9.951854	9.697420	10.302580	9.664163	9.947995	9.716168	10.283832	31
30	9.649527	9.951791	9.697736	10.302264	9.664406	9.947929	9.716477	10.283523	30
31	9.649781	9.951728	9.698053	10.301947	9.664648	9.947863	9.716785	10.283215	29
32	9.650034	9.951665	9.698369	10.301631	9.664891	9.947797	9.717093	10.282907	28
33	9.650287	9.951602	9.698685	10.301315	9.665133	9.947731	9.717401	10.282599	27
34	9.650539	9.951539	9.699001	10.300999	9.665375	9.947665	9.717709	10.282291	26
35	9.650792	9.951476	9.699316	10.300684	9.665617	9.947600	9.718017	10.281983	25
36	9.651044	9.951412	9.699632	10.300368	9.665859	9.947533	9.718325	10.281675	24
37	9.651297	9.951349	9.699947	10.300053	9.666100	9.947467	9.718633	10.281367	23
38	9.651549	9.951286	9.700263	10.299737	9.666342	9.947401	9.718940	10.281060	22
39	9.651800	9.951222	9.700578	10.299422	9.666583	9.947335	9.719248	10.280752	21
40	9.652052	9.951159	9.700893	10.299107	9.666824	9.947269	9.719555	10.280445	20
41	9.652304	9.951096	9.701208	10.298792	9.667065	9.947203	9.719862	10.280138	19
42	9.652555	9.951032	9.701523	10.298477	9.667305	9.947136	9.720169	10.279831	18
43	9.652806	9.950968	9.701837	10.298163	9.667546	9.947070	9.720476	10.279524	17
44	9.653057	9.950905	9.702152	10.297848	9.667786	9.947004	9.720783	10.279217	16
45	9.653308	9.950841	9.702466	10.297534	9.668027	9.946937	9.721089	10.278911	15
46	9.653558	9.950778	9.702781	10.297219	9.668267	9.946871	9.721396	10.278604	14
47	9.653808	9.950714	9.703095	10.296905	9.668506	9.946804	9.721702	10.278298	13
48	9.654059	9.950650	9.703409	10.296591	9.668746	9.946738	9.722009	10.277991	12
49	9.654309	9.950586	9.703722	10.296278	9.668986	9.946671	9.722315	10.277685	11
50	9.654558	9.950522	9.704036	10.295964	9.669225	9.946604	9.722621	10.277379	10
51	9.654808	9.950458	9.704350	10.295650	9.669464	9.946538	9.722927	10.277073	9
52	9.655058	9.950394	9.704663	10.295337	9.669703	9.946471	9.723232	10.276768	8
53	9.655307	9.950330	9.704976	10.295024	9.669942	9.946404	9.723538	10.276462	7
54	9.655556	9.950266	9.705290	10.294710	9.670181	9.946337	9.723844	10.276156	6
55	9.655805	9.950202	9.705603	10.294397	9.670419	9.946270	9.724149	10.275851	5
56	9.656054	9.950138	9.705916	10.294084	9,670658	9.946203	9.724454	10.275546	4
57	9.656302	9.950074	9.706228	10.293772	9.670896	9.946136	9.724760	10.275240	3
58	9.656551	9.950010	9.706541	10.293459	9.671134	9.946069	9.725065	10.274935	2
59	9.656799	9.949945	9.706854	10.293146	9.671372	9.946002	9.725370	10.274630	1
60	9.657047	9.949881	9.707166	10.292834	9.671609	9.945935	9.725674	10.274326	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	63 Grad.				62 Grad.				

	28 Grad.				29 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.671609	9.945935	9.725674	10.274326	9.685571	9.941819	9.743752	10.256248	60
1	9.671847	9.945868	9.725979	10.274021	9.685799	9.941749	9.744050	10.255950	59
2	9.672084	9.945800	9.726284	10.273716	9.686027	9.941679	9.744348	10.255652	58
3	9.672321	9.945733	9.726588	10.273412	9.686254	9.941609	9.744645	10.255355	57
4	9.672558	9.945666	9.726892	10.273108	9.686482	9.941539	9.744943	10.255057	56
5	9.672795	9.945598	9.727197	10.272803	9.686709	9.941469	9.745240	10.254760	55
6	9.673032	9.945531	9.727501	10.272499	9.686936	9.941398	9.745538	10.254462	54
7	9.673268	9.945464	9.727805	10.272195	9.687163	9.941328	9.745835	10.254165	53
8	9.673505	9.945369	9.728109	10.271891	9.687389	9.941258	9.746132	10.253868	52
9	9.673741	9.945328	9.728412	10.271588	9.687616	9.941187	9.746429	10.253571	51
10	9.673977	9.945261	9.728716	10.271284	9.687843	9.941117	9.746726	10.253274	50
11	9.674213	9.945193	9.729020	10.270980	9.688069	9.941046	9.747023	10.252977	49
12	9.674448	9.945125	9.729323	10.270677	9.688295	9.940975	9.747319	10.252681	48
13	9.674684	9.945058	9.729626	10.270374	9.688521	9.940905	9.747616	10.252384	47
14	9.674919	9.944990	9.729929	10.270071	9.688747	9.940834	9.747913	10.252087	46
15	9.675155	9.944922	9.730233	10.269767	9.688972	9.940763	9.748209	10.251791	45
16	9.675390	9.944854	9.730535	10.269465	9.689198	9.940693	9.748505	10.251495	44
17	9.675624	9.944786	9.730838	10.269162	9.689423	9.940622	9.748801	10.251199	43
18	9.675859	9.944718	9.731141	10.268859	9.689648	9.940551	9.749097	10.250903	42
19	9.676094	9.944650	9.731444	10.268556	9.689873	9.940480	9.749393	10.250607	41
20	9.676328	9.944582	9.731746	10.268254	9.690098	9.940409	9.749689	10.250311	40
21	9.676562	9.944514	9.732048	10.267952	9.690323	9.940338	9.749985	10.250015	39
22	9.676796	9.944446	9.732351	10.267649	9.690548	9.940267	9.750281	10.249719	38
23	9.677030	9.944377	9.732653	10.267347	9.690772	9.940196	9.750576	10.249424	37
24	9.677264	9.944309	9.732955	10.267045	9.690996	9.940125	9.750872	10.249128	36
25	9.677498	9.944241	9.733257	10.266743	9.691220	9.940054	9.751167	10.248833	35
26	9.677731	9.944172	9.733558	10.266442	9.691444	9.939982	9.751462	10.248538	34
27	9.677964	9.944104	9.733860	10.266140	9.691668	9.939911	9.751757	10.248243	33
28	9.678197	9.944036	9.734162	10.265838	9.691892	9.939840	9.752052	10.247948	32
29	9.678430	9.943967	9.734463	10.265537	9.692115	9.939768	9.752347	10.247653	31
30	9.678663	9.943899	9.734764	10.265236	9.692339	9.939697	9.752642	10.247358	30
31	9.678895	9.943830	9.735066	10.264934	9.692562	9.939625	9.752937	10.247063	29
32	9.679128	9.943761	9.735367	10.264633	9.692785	9.939554	9.753231	10.246769	28
33	9.679360	9.943693	9.735668	10.264332	9.693008	9.939482	9.753526	10.246474	27
34	9.679592	9.943624	9.735969	10.264031	9.693231	9.939410	9.753820	10.246180	26
35	9.679824	9.943555	9.736269	10.263731	9.693453	9.939339	9.754115	10.245885	25
36	9.680056	9.943486	9.736570	10.263430	9.693676	9.939267	9.754409	10.245591	24
37	9.680288	9.943417	9.736870	10.263130	9.693898	9.939195	9.754703	10.245297	23
38	9.680519	9.943348	9.737171	10.262829	9.694120	9.939123	9.754997	10.245003	22
39	9.680750	9.943279	9.737471	10.262529	9.694342	9.939052	9.755291	10.244709	21
40	9.680982	9.943210	9.737771	10.262229	9.694564	9.938980	9.755585	10.244415	20
41	9.681213	9.943141	9.738071	10.261929	9.694786	9.938908	9.755878	10.244122	19
42	9.681443	9.943072	9.738371	10.261629	9.695007	9.938836	9.756172	10.243828	18
43	9.681674	9.943003	9.738671	10.261329	9.695229	9.938763	9.756465	10.243535	17
44	9.681905	9.942934	9.738971	10.261029	9.695450	9.938691	9.756759	10.243241	16
45	9.682135	9.942864	9.739271	10.260729	9.695671	9.938619	9.757052	10.242948	15
46	9.682365	9.942795	9.739570	10.260430	9.695892	9.938547	9.757345	10.242655	14
47	9.682595	9.942726	9.739870	10.260130	9.696113	9.938475	9.757638	10.242362	13
48	9.682825	9.942656	9.740169	10.259831	9.696334	9.938402	9.757931	10.242069	12
49	9.683055	9.942587	9.740468	10.259532	9.696554	9.938330	9.758224	10.241776	11
50	9.683284	9.942517	9.740767	10.259233	9.696775	9.938258	9.758517	10.241483	10
51	9.683514	9.942448	9.741066	10.258934	9.696995	9.938185	9.758810	10.241190	9
52	9.683743	9.942378	9.741365	10.258635	9.697215	9.938113	9.759102	10.240898	8
53	9.683972	9.942308	9.741664	10.258336	9.697435	9.938040	9.759395	10.240605	7
54	9.684201	9.942239	9.741962	10.258038	9.697654	9.937967	9.759687	10.240313	6
55	9.684430	9.942169	9.742261	10.257739	9.697874	9.937895	9.759979	10.240021	5
56	9.684658	9.942099	9.742559	10.257441	9.698094	9.937822	9.760272	10.239728	4
57	9.684887	9.942029	9.742858	10.257142	9.698313	9.937749	9.760564	10.239436	3
58	9.685115	9.941959	9.743156	10.256844	9.698532	9.937676	9.760856	10.239144	2
59	9.685343	9.941889	9.743454	10.256546	9.698751	9.937604	9.761148	10.238852	1
60	9.685571	9.941819	9.743752	10.256248	9.698970	9.937531	9.761439	10.238561	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	61 Grad.				60 Grad.				

	30 Grad.				31 Grad.				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.698970	9.937531	9.761439	10.238561	9.711839	9.933066	9.778774	10.221226	60
1	9.699189	9.937458	9.761731	10.238269	9.712050	9.932990	9.779060	10.220940	59
2	9.699407	9.937385	9.762023	10.237977	9.712260	9.932914	9.779346	10.220654	58
3	9.699626	9.937312	9.762314	10.237686	9.712469	9.932838	9.779632	10.220368	57
4	9.699844	9.937238	9.762606	10.237394	9.712679	9.932762	9.779918	10.220082	56
5	9.700062	9.937165	9.762897	10.237103	9.712889	9.932685	9.780203	10.219797	55
6	9.700280	9.937092	9.763188	10.236812	9.713098	9.932609	9.780489	10.219511	54
7	9.700498	9.937019	9.763479	10.236521	9.713308	9.932533	9.780775	10.219225	53
8	9.700716	9.936946	9.763770	10.236230	9.713517	9.932457	9.781060	10.218940	52
9	9.700933	9.936872	9.764061	10.235939	9.713726	9.932380	9.781346	10.218654	51
10	9.701151	9.936799	9.764352	10.235648	9.713935	9.932304	9.781631	10.218369	50
11	9.701368	9.936725	9.764643	10.235357	9.714144	9.932228	9.781916	10.218084	49
12	9.701585	9.936652	9.764933	10.235067	9.714352	9.932151	9.782201	10.217799	48
13	9.701802	9.936578	9.765224	10.234776	9.714561	9.932075	9.782486	10.217514	47
14	9.702019	9.936505	9.765514	10.234486	9.714769	9.931998	9.782771	10.217229	46
15	9.702236	9.936431	9.765805	10.234195	9.714978	9.931921	9.783056	10.216944	45
16	9.702452	9.936357	9.766095	10.233905	9.715186	9.931845	9.783341	10.216659	44
17	9.702669	9.936284	9.766385	10.233615	9.715394	9.931768	9.783626	10.216374	43
18	9.702885	9.936210	9.766675	10.233325	9.715602	9.931691	9.783910	10.216090	42
19	9.703101	9.936136	9.766965	10.233035	9.715809	9.931614	9.784195	10.215805	41
20	9.703317	9.936062	9.767255	10.232745	9.716017	9.931537	9.784479	10.215521	40
21	9.703533	9.935988	9.767545	10.232455	9.716224	9.981460	9.784764	10.215236	39
22	9.703749	9.935914	9.767834	10.232166	9.716432	9.931383	9.785048	10.214952	38
23	9.703964	9.935840	9.768124	10.231876	9.716639	9.931306	9.785332	10.214668	37
24	9.704179	9.935766	9.768414	10.231586	9.716846	9.931229	9.785616	10.214384	36
25	9.704395	9.935692	9.768703	10.231297	9.717053	9.931152	9.785900	10.214100	35
26	9.704610	9.935618	9.768992	10.231008	9.717259	9.931075	9.786184	10.213816	34
27	9.704825	9.935543	9.769281	10.230719	9.717466	9.930998	9.786468	10.213532	33
28	9.705040	9.935469	9.769571	10.230429	9.717673	9.930921	9.786752	10.213248	32
29	9.705254	9.935395	9.769860	10.230140	9.717879	9.930843	9.787036	10.212964	31
30	9.705469	9.935320	9.770148	10.229852	9.718085	9.930766	9.787319	10.212681	30
31	9.705683	9.935246	9.770437	10.229563	9.718291	9.930688	9.787603	10.212397	29
32	9.705898	9.935171	9.770726	10.229274	9.718497	9.930611	9.787886	10.212114	28
33	9.706112	9.935097	9.771015	10.228985	9.718703	9.930533	9.788170	10.211830	27
34	9.706326	9.935022	9.771303	10.228697	9.718909	9.930456	9.788453	10.211547	26
35	9.706539	9.934948	9.771592	10.228408	9.719114	9.930378	9.788736	10.211264	25
36	9.706753	9.934873	9.771880	10.228120	9.719320	9.930300	9.789019	10.210981	24
37	9.706967	9.934798	9.772168	10.227832	9.719525	9.930223	9.789302	10.210698	23
38	9.707180	9.934723	9.772457	10.227543	9.719730	9.930145	9.789585	10.210415	22
39	9.707393	9.934649	9.772745	10.227255	9.719935	9.930067	9.789868	10.210132	21
40	9.707606	9.934574	9.773033	10.226967	9.720140	9.929989	9.790151	10.209849	20
41	9.707819	9.934499	9.773321	10.226679	9.720345	9.929911	9.790434	10.209566	19
42	9.708032	9.934424	9.773608	10.226392	9.720549	9.929833	9.790716	10.209284	18
43	9.708245	9.934349	9.773896	10.226104	9.720754	9.929755	9.790999	10.209001	17
44	9.708458	9.934274	9.774184	10.225816	9.720958	9.929677	9.791281	10.208719	16
45	9.708670	9.934199	9.774471	10.225529	9.721162	9.929599	9.791563	10.208437	15
46	9.708882	9.934123	9.774759	10.225241	9.721366	9.929521	9.791846	10.208154	14
47	9.709094	9.934048	9.775046	10.224954	9.721570	9.929442	9.792128	10.207872	13
48	9.709306	9.933973	9.775333	10.224667	9.721774	9.929364	9.792410	10.207590	12
49	9.709518	9.933898	9.775621	10.224379	9.721978	9.929286	9.792692	10.207308	11
50	9.709730	9.933822	9.775908	10.224092	9.722181	9.929207	9.792974	10.207026	10
51	9.709941	9.933747	9.776195	10.223805	9.722385	9.929129	9.793256	10.206744	9
52	9.710153	9.933671	9.776482	10.223518	9.722588	9.929050	9.793538	10.206462	8
53	9.710364	9·933596	9.776769	10.223232	9.722791	9.928972	9.793819	10.206181	7
54	9.710575	9.933520	9.777055	10.222945	9.722994	9.928893	9.794101	10.205899	6
55	9.710786	9.933445	9.777342	10.222658	9.723197	9.928815	9.794383	10.205617	5
56	9.710997	9.933369	9.777628	10.222372	9.723400	9.928736	9.794664	10.205336	4
57	9.711208	9.933293	9.777915	10.222085	9.723603	9.928657	9.794946	10.205054	3
58	9.711419	9.933217	9.778201	10.221799	9.723805	9.928578	9.795227	10.204773	2
59	9.711629	9.933141	9.778488	10.221512	9.724007	9.928499	9.795508	10.204492	1
60	9.711839	9.933066	9.778774	10.221226	9.724210	9.928420	9.795789	10.204211	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
	59 Grad.				58 Grad.				

′	32 Grad.				33 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.724210	9.928420	9.795789	10.204211	9.736109	9.923591	9.812517	10.187483	60
1	9.724412	9.928342	9.796070	10.203930	9·736303	9.923509	9.812794	10.187206	59
2	9.724614	9.928263	9.796351	10.203649	9.736498	9.923427	9.813070	10.186930	58
3	9.724816	9.928183	9.796632	10.203368	9.736692	9.923345	9.813347	10.186653	57
4	9.725017	9.928104	9.796913	10.209087	9.736886	9.923263	9.813623	10.186377	56
5	9.725219	9.928025	9.797194	10.202806	9.737080	9.923181	9.813899	10.186101	55
6	9.725420	9.927946	9.797474	10.202526	9.737274	9.923098	9.814176	10.185824	54
7	9.725622	9.927867	9.797755	10.202245	9.737467	9.923016	9.814452	10.185548	53
8	9.725823	9.927787	9.798036	10.201964	9.737661	9.922933	9.814728	10.185272	52
9	9.726024	9.927708	9.798316	10.201684	9.737855	9.922851	9.815004	10.184996	51
10	9.726225	9.927629	9.798596	10.201404	9.738048	9.922768	9.815280	10.184720	50
11	9.726426	9.927549	9.798877	10.201123	9.738241	9.922686	9.815555	10.184445	49
12	9.726626	9.927470	9.799157	10.200843	9.738434	9.922603	9.815831	10.184169	48
13	9.726827	9.927390	9.799437	10.200563	9.738627	9.922520	9.816107	10.183893	47
14	9.727027	9.927310	9.799717	10.200283	9.738820	9.922438	9.816382	10.183618	46
15	9.727228	9.927231	9.799997	10.200003	9.739013	9.922355	9.816658	10.183342	45
16	9.727428	9.927151	9.800277	10.199723	9.739206	9.922272	9.816933	10.183067	44
17	9.727628	9.927071	9.800557	10.199443	9.739398	9.922189	9.817209	10.182791	43
18	9.727828	9.926991	9.800836	10.199164	9.739590	9.922106	9.817484	10.182516	42
19	9.728027	9.926911	9.801116	10.198884	9.739783	9.922023	9.817759	10.182241	41
20	9.728227	9.926831	9.801396	10.198604	9.739975	9.921940	9.818035	10.181965	40
21	9.728427	9.926751	9.801675	10.198325	9.740167	9.921857	9.818310	10.181690	39
22	9.728626	9.926671	9.801955	10.198045	9.740359	9.921774	9.818585	10.181415	38
23	9.728825	9.926591	9.802234	10.197766	9.740550	9.921691	9.818860	10.181140	37
24	9.729024	9.926511	9.802513	10.197487	9.740742	9.921607	9.819135	10.180865	36
25	9.729223	9.926431	9.802792	10.197208	9.740934	9.921524	9.819410	10.180590	35
26	9.729422	9.926351	9.803072	10.196928	9.741125	9.921441	9.819684	10.180316	34
27	9.729621	9.926270	9.803351	10.196649	9.741316	9.921357	9.819959	10.180041	33
28	9.729820	9.926190	9.803630	10.196370	9.741508	9.921274	9.820234	10.179766	32
29	9.730018	9.926110	9.803909	10.196091	9.741699	9.921190	9.820508	10.179492	31
30	9.730217	9.926029	9.804187	10.195813	9.741889	9.921107	9.820783	10.179217	30
31	9·730415	9.925949	9.804466	10.195534	9.742080	9.921023	9.821057	10.178943	29
32	9.730613	9.925868	9.804745	10.195255	9.742271	9.920939	9.821332	10.178668	28
33	9.730811	9.925788	9.805023	10.194977	9.742462	9.920856	9.821606	10.178394	27
34	9.731009	9.925707	9.805302	10.194698	9.742652	9.920772	9.821880	10.178120	26
35	9.731206	9.925626	9.805580	10.194420	9.742842	9.920668	9.822154	10.178846	25
36	9.731404	9.925545	9.805859	10.194141	9.743033	9.920604	9.822429	10.177571	24
37	9.731602	9.925465	9.806137	10.193863	9.743223	9.920520	9.822703	10.177297	23
38	9.731799	9·925384	9.806415	10.193585	9.743413	9.920436	9.822977	10.177023	22
39	9.731996	9.925303	9.806693	10.193307	9.743602	9.920352	9.823251	10.176749	21
40	9.732193	9.925222	9.806971	10.193029	9.743792	9.920268	9.823524	10.176476	20
41	9.732390	9.925141	9.807249	10.192751	9.743982	9.920184	9.823798	10.176202	19
42	9.732587	9.925060	9.807527	10.192473	9.744171	9.920099	9.824072	10.175928	18
43	9.732784	9.924979	9.807805	10.192195	9.744361	9.920015	9.824345	10.175655	17
44	9.732980	9.924897	9.808083	10.191917	9.744550	9.919931	9.824619	10.175381	16
45	9.733177	9.924816	9.808361	10.191639	9.744739	9.919846	9.824893	10.175107	15
46	9.733373	9.924735	9.808638	10.191362	9.744928	9.919762	9.825166	10.174834	14
47	9.733569	9.924654	9.808916	10.191084	9.745117	9.919677	9.825439	10.174561	13
48	9.733765	9.924572	9.809193	10.190807	9.745306	9.919593	9.825713	10.174287	12
49	9.733961	9.924491	9.809471	10.190529	9.745494	9.919508	9.825986	10.174014	11
50	9.734157	9.924409	9.809748	10.190252	9.745683	9.919424	9.826259	10.173741	10
51	9.734353	9.924328	9.810025	10.189975	9.745871	9.919339	9.826532	10.173468	9
52	9.734549	9.924246	9.810302	10.189698	9.746060	9.919254	9.826805	10.173195	8
53	9.734744	9.924164	9.810580	10.189420	9.746248	9.919169	9.827078	10.172922	7
54	9.734939	9.924083	9.810857	10.189143	9.746436	9.919085	9.827351	10.172649	6
55	9.735135	9.924001	9.811134	10.188866	9.746624	9.919000	9.827624	10.172376	5
56	9.735330	9.923919	9.811410	10.188590	9.746812	9.918915	9.827897	10.172103	4
57	9.735525	9.923837	9.811687	10.188313	9.746699	9.918830	9.828170	10.171830	3
58	9.735719	9.923755	9.811964	10.188036	9.747187	9.918745	9.828442	10.171558	2
59	9.735914	9.923673	9.812241	10.187759	9.747374	9.918659	9.828715	10.171285	1
60	9.736109	9.923591	9.812517	10.187483	9.747562	9.918574	9.828987	10.171013	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	57 Grad.				56 Grad.				

	34 Grad.				35 Grad.				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.747562	9.918574	9.828987	10.171013	9.758591	9.913365	9.845227	10.154773	60
1	9.747749	9.918489	9.829260	10.170740	9.758772	9.913276	9.845496	10.154504	59
2	9.747936	9.918404	9.829532	10.170468	9.758952	9.913187	9.845764	10.154236	58
3	9.748123	9.918318	9.829805	10.170195	9.759132	9.913099	9.846033	10.153967	57
4	9.748310	9.918233	9.830077	10.169923	9.759312	9.913010	9.846302	10.153698	56
5	9.748497	9.918147	9.830349	10.169651	9.759492	9.912922	9.846570	10.153430	55
6	9.748683	9.918062	9.830621	10.169379	9.759672	9.912833	9.846839	10.153161	54
7	9.748870	9.917976	9.830893	10.169107	9.759852	9.912744	9.847108	10.152892	53
8	9.749056	9.917891	9.831165	10.168835	9.760031	9.912655	9.847376	10.152624	52
9	9.749243	9.917805	9.831437	10.168563	9.760211	9.912566	9.847644	10.152356	51
10	9.749429	9.917719	9.831709	10.168291	9.760390	9.912477	9.847913	10.152087	50
11	9.749615	9.917634	9.831981	10.168019	9.760569	9.912388	9.848181	10.151819	49
12	9.749801	9.917548	9.832253	10.167747	9.760748	9.912299	9.848449	10.151551	48
13	9.749987	9.917462	9.832525	10.167475	9.760927	9.912210	9.848717	10.151283	47
14	9.750172	9.917376	9.832796	10.167204	9.761106	9.912121	9.848986	10.151014	46
15	9.750358	9.917290	9.833068	10.166932	9.761285	9.912031	9.849254	10.150746	45
16	9.750543	9.917204	9.833339	10.166661	9.761464	9.911942	9.849522	10.150478	44
17	9.750729	9.917118	9.833611	10.166389	9.761642	9.911853	9.849790	10.150210	43
18	9.750914	9.917032	9.833882	10.166118	9.761821	9.911763	9.850057	10.149943	42
19	9.751099	9.916946	9.834154	10.165846	9.761999	9.911674	9.850325	10.149675	41
20	9.751284	9.916859	9.834425	10.165575	9.762177	9.911584	9.850593	10.149407	40
21	9.751469	9.916773	9.834696	10.165304	9.762356	9.911495	9.850861	10.149139	39
22	9.751654	9.916687	9.834967	10.165033	9.762534	9.911405	9.851129	10.148871	38
23	9.751839	9.916600	9.835238	10.164762	9.762712	9.911315	9.851396	10.148604	37
24	9.752023	9.916514	9.835509	10.164491	9.762889	9.911226	9.851664	10.148336	36
25	9.752208	9.916427	9.835780	10.164220	9.763067	9.911136	9.851931	10 148069	35
26	9.752392	9.916341	9.836051	10.163949	9.763245	9.911046	9.852199	10.147801	34
27	9.752576	9.916254	9.836322	10.163678	9.763422	9.910956	9.852466	10.147534	33
28	9.752760	9.916167	9.836593	10.163407	9.763600	9.910866	9.852733	10.147267	32
29	9.752944	9.916081	9.836864	10.163136	9.763777	9.910776	9.853001	10.146999	31
30	9.753128	9.915994	9.837134	10.162866	9.763954	9.910686	9.853268	10.146732	30
31	9.753312	9.915907	9.837405	10.162595	9.764131	9.910596	9.853535	10.146465	29
32	9.753495	9.915820	9.837675	10.162325	9.764308	9.910506	9.853802	10.146198	28
33	9.753679	9.915733	9.837946	10.162054	9.764485	9.910415	9.854069	10.145931	27
34	9.753862	9.915646	9.838210	10.161784	9.764662	9.910325	9.854336	10.145664	26
35	9.754046	9.915559	9.838487	10.161513	9.764838	9.910235	9.854603	10.145397	25
36	9.754229	9.915472	9.838757	10.161243	9.765015	9.910144	9.854870	10.145130	24
37	9.754412	9.915385	9.839027	10.160973	9.765191	9.910054	9.855137	10.144863	23
38	9.754595	9.915297	9.839297	10.160703	9.765367	9.909963	9.855404	10.144596	22
39	9.754778	9.915210	9.839568	10.160432	9.765544	9.909873	9.855671	10.144329	21
40	9.754960	9.915123	9.839838	10.160162	9.765720	9.909782	9.855938	10.144062	20
41	9.755143	9.915035	9.840108	10.159892	9.765896	9.909691	9.856204	10.143796	19
42	9.755326	9.914948	9.840378	10.159622	9.766072	9.909601	9.856471	10.143529	18
43	9.755508	9.914860	9.840648	10.159352	9.766247	9.909510	9.856737	10.143263	17
44	9.755690	9.914773	9.840917	10.159083	9.766423	9.909419	9.857004	10.142996	16
45	9.755872	9.914685	9.841187	10.158813	9.766598	9.909328	9.857270	10.142730	15
46	9.756054	9.914598	9.841457	10.158543	9.766774	9.909237	9.857537	10.142463	14
47	9.756236	9.914510	9.841727	10.158273	9.766949	9 909146	9.857803	10.142197	13
48	9.756418	9.914422	9.841996	10.158004	9.767124	9.909055	9.858069	10.141931	12
49	9.756600	9.914334	9.842266	10.157734	9.767300	9.908964	9.858336	10.141664	11
50	9.756782	9.914246	9.842535	10.157465	9.767475	9 908873	9.858602	10.141398	10
51	9.756963	9.914158	9.842805	10.157195	9.767649	9.908781	9.858868	10.141132	9
52	9.757144	9.914070	9.843074	10.156926	9.767824	9.908690	9.859134	10.140866	8
53	9.757326	9.913982	9.843343	10.156657	9.767999	9.908599	9.859400	10.140600	7
54	9.757507	9.913894	9.843612	10.156388	9.768173	9 908507	9.859666	10.140334	6
55	9.757688	9.913806	9.843882	10.156118	9.768348	9.908416	9.859932	10.140068	5
56	9.757869	9.913718	9.844151	10.155849	9.768522	9.908324	9.860198	10.139802	4
57	9.758050	9.913630	9.844420	10.155580	9.768697	9.908233	9.860464	10.139536	3
58	9.758230	9.913541	9.844689	10.155311	9.768871	9.908141	9.860730	10.139270	2
59	9.758411	9.913453	9.844958	10.155042	9.769045	9.908049	9.860995	10.139005	1
60	9.758591	9.913365	9.845227	10.154773	9.769219	9.907958	9.861261	10.138739	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
	55 Grad.				54 Grad.				

	36 Grad.				37 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.769219	9.907958	9.861261	10.138739	9.779463	9.902349	9.877114	10.122886	60
1	9.769393	9.907866	9.861527	10.138473	9.779631	9.902253	9.877377	10.122623	59
2	9.769566	9.907774	9.861792	10.138208	9.779798	9.902158	9.877640	10.122360	58
3	9.769740	9.907682	9.862058	10.137942	9.779966	9.902063	9.877903	10.122097	57
4	9.769913	9.907590	9.862323	10.137677	9.780133	9.901967	9.878165	10.121835	56
5	9.770087	9.907498	9.862589	10.137411	9.780300	9.901872	9.878428	10.121572	55
6	9.770260	9.907406	9.862854	10.137146	9.780467	9.901776	9.878691	10.121309	54
7	9.770433	9.907314	9.863119	10.136881	9.780634	9.901681	9.878953	10.121047	53
8	9.770606	9.907222	9.863385	10.136615	9.780801	9.901585	9.879216	10.120784	52
9	9.770779	9.907129	9.863650	10.136350	9.780968	9.901490	9.879478	10.120522	51
10	9.770952	9.907037	9.863915	10.136085	9.781134	9.901394	9.879741	10.120259	50
11	9.771125	9.906945	9.864180	10.135820	9.781301	9.901298	9.880003	10.119997	49
12	9.771298	9.906852	9.864445	10.135555	9.781468	9.901202	9.880265	10.119735	48
13	9.771470	9.906760	9.864710	10.135290	9.781634	9.901106	9.880528	10.119472	47
14	9.771643	9.906667	9.864975	10.135025	9.781800	9.901010	9.880790	10.119210	46
15	9.771815	9.906575	9.865240	10.134760	9.781966	9.900914	9.881052	10.118948	45
16	9.771987	9.906482	9.865505	10.134495	9.782132	9.900818	9.881314	10.118686	44
17	9.772159	9.906389	9.865770	10.134230	9.782298	9.900722	9.881577	10.118423	43
18	9.772331	9.906296	9.866035	10.133965	9.782464	9.900626	9.881839	10.118161	42
19	9.772503	9.906204	9.866300	10.133700	9.782630	9.900529	9.882101	10.117899	41
20	9.772675	9.906111	9.866564	10.133436	9.782796	9.900433	9.882363	10.117637	40
21	9.772847	9.906018	9.866829	10.133171	9.782961	9.900337	9.882625	10.117375	39
22	9.773018	9.905925	9.867094	10.132906	9.783127	9.900240	9.882887	10.117113	38
23	9.773190	9.905832	9.867358	10.132642	9.783292	9.900144	9.883148	10.116852	37
24	9.773361	9.905739	9 867623	10.132377	9.783458	9.900047	9.883410	10.116590	36
25	9.773533	9.905645	9.867887	10.132113	9.783623	9.899951	9.883672	10.116328	35
26	9.773704	9.905552	9.868152	10.131848	9.783788	9.899854	9.883934	10.116066	34
27	9.773875	9.905459	9.868416	10.131584	9.783953	9.899757	9.884196	10.115804	33
28	9.774046	9.905366	9.868680	10.131320	9.784118	9.899660	9.884457	10.115543	32
29	9.774217	9.905272	9.868945	10.131055	9.784282	9.899564	9.884719	10.115281	31
30	9.774388	9.905179	9.869209	10.130791	9.784447	9.899467	9.884980	10.115020	30
31	9.774558	9.905085	9.869473	10.130527	9.784612	9.899370	9.885242	10.114758	29
32	9.774729	9.904992	9.869737	10.130263	9.784776	9.899273	9.885504	10.114496	28
33	9.774899	9.904898	9.870001	10.129999	9.784941	9.899176	9.885765	10.114235	27
34	9.775070	9.904804	9.870265	10.129735	9.785105	9.899078	9.886026	10.113974	26
35	9.775240	9.904711	9.870529	10.129471	9.785269	9.898981	9.886288	10.113712	25
36	9.775410	9.904617	9.870793	10.129207	9.785433	9.898884	9.886549	10.113451	24
37	9.775580	9.904523	9.871057	10.128943	9.785597	9.898787	9.886811	10.113189	23
38	9.775750	9.904429	9.871321	10.128679	9.785761	9.898689	9.887072	10.112928	22
39	9.775920	9.904335	9.871585	10.128415	9.785925	9.898592	9.887333	10.112667	21
40	9.776090	9.904241	9.871849	10.128151	9.786089	9.898494	9.887594	10.112406	20
41	9.776259	9.904147	9.872112	10.127888	9.786252	9.898397	9.887855	10.112145	19
42	9.776429	9.904053	9.872376	10.127624	9.786416	9.898299	9.888116	10.111884	18
43	9.776598	9.903959	9.872640	10.127360	9.786579	9.898202	9.888378	10.111622	17
44	9.776768	9.903864	9.872903	10.127097	9.786742	9.898104	9.888639	10.111361	16
45	9.776937	9.903770	9.873167	10.126833	9.786906	9.898006	9.888900	10.111100	15
46	9.777106	9.903676	9.873430	10.126570	9.787069	9.897908	9.889161	10.110839	14
47	9.777275	9.903581	9.873694	10.126306	9.787232	9.897810	9.889421	10.110579	13
48	9.777444	9.903487	9.873957	10.126043	9.787395	9.897712	9.889682	10.110318	12
49	9.777613	9.903392	9.874220	10.125780	9.787557	9.897614	9.889943	10.110057	11
50	9.777781	9.903298	9.874484	10.125516	9.787720	9.897516	9.890204	10.109796	10
51	9.777950	9.903203	9.874747	10.125253	9.787883	9.897418	9.890465	10.109535	9
52	9.778119	9.903108	9.875010	10.124990	9.788045	9.897320	9.890725	10.109275	8
53	9.778287	9.903014	9.875273	10.124727	9.788208	9.897222	9.890986	10.109014	7
54	9.778455	9.902919	9.875537	10.124463	9.788370	9.897123	9.891247	10.108753	6
55	9.778624	9.902824	9.875800	10.124200	9.788532	9.897025	9.891507	10.108493	5
56	9.778792	9.902729	9.876063	10.123937	9.788694	9.896926	9.891768	10.108232	4
57	9.778960	9.902634	9.876326	10.123674	9.788856	9.896828	9.892028	10.107972	3
58	9.779128	9.902539	9.876589	10.123411	9.789018	9.896729	9.892289	10.107711	2
59	9.779295	9.902444	9.876852	10.123148	9.789180	9.896631	9.892549	10.107451	1
60	9.779463	9.902349	9.877114	10.122886	9.789342	9.896532	9.892810	10.107190	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	53 Grad.				52 Grad.				

	38 Grad.				39 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin	Tang.	Cotang.	
0	9.789342	9.896532	9.892810	10.107190	9.798872	9.890503	9.908369	10.091631	60
1	9.789504	9.896433	9.893070	10.106930	9.799028	9.890400	9.908628	10.091372	59
2	9.789665	9.896335	9.893331	10.106669	9.799184	9.890298	9.908886	10.091114	58
3	9.789827	9.896236	9.893591	10.106409	9.799339	9.890195	9.909144	10.090856	57
4	9.789988	9.896137	9.893851	10.106149	9.799495	9.890093	9.909402	10.090598	56
5	9.790149	9.896038	9.894111	10.105889	9.799651	9.899990	9.909660	10.090340	55
6	9.790310	9.895939	9.894372	10.105628	9.799806	9.899888	9.909918	10.090082	54
7	9.790471	9.895840	9.894632	10.105368	9.799962	9.889785	9.910177	10.089823	53
8	9.790632	9.895741	9.894892	10.105108	9.800117	9.889682	9.910435	10.089565	52
9	9.790793	9.895641	9.895152	10.104848	9.800272	9.889579	9.910693	10.089307	51
10	9.790954	9.895542	9.895412	10.104588	9.800427	9.889477	9.910951	10.089049	50
11	9.791115	9.895443	9.895672	10.104328	9.800582	9.889374	9.911209	10.088791	49
12	9.791275	9.895343	9.895932	10.104068	9.800737	9.889271	9.911467	10.088533	48
13	9.791436	9.895244	9.896192	10.103808	9.800892	9.889168	9.911725	10.088275	47
14	9.791596	9.895145	9.896452	10.103548	9.801047	9.889064	9.911982	10.088018	46
15	9.791757	9.895045	9.896712	10.103288	9.801201	9.888961	9.912240	10.087760	45
16	9.791917	9.894945	9.896971	10.103029	9.801356	9.888858	9.912498	10.087502	44
17	9.792077	9.894846	9.897231	10.102769	9.801511	9.888755	9.912756	10.087244	43
18	9.792237	9.894746	9.897491	10.102509	9.801665	9.888651	9.913014	10.086986	42
19	9.792397	9.894646	9.897751	10.102249	9.801819	9.888548	9.913271	10.086729	41
20	9.792557	9.894546	9.898010	10.101990	9.801973	9.888444	9.913529	10.086471	40
21	9.792716	9.894446	9.898270	10.101730	9.802128	9.888341	9.913787	10.086213	39
22	9.792876	9.894346	9.898530	10.101470	9.802282	9.888237	9.914044	10.085956	38
23	9.793035	9.894246	9.898789	10.101211	9.802436	9.888134	9.914302	10.085698	37
24	9.793195	9.894146	9.899049	10.100951	9.802589	9.888030	9.914560	10.085440	36
25	9.793354	9.894046	9.899308	10.100692	9.802743	9.887926	9.914817	10.085183	35
26	9.793514	9.893946	9.899568	10.100432	9.802897	9.887822	9.915075	10.084925	34
27	9.793673	9.893846	9.899827	10.100173	9.803050	9.887718	9.915332	10.084668	33
28	9.793832	9.893745	9.900087	10.099913	9.803204	9.887614	9.915590	10.084410	32
29	9.793991	9.893645	9.900346	10.099654	9.803357	9.887510	9.915847	10.084153	31
30	9.794150	9.893544	9.900605	10.099395	9.803511	9.887406	9.916104	10.083896	30
31	9.794308	9.893444	9.900864	10.099136	9.803664	9.887302	9.916362	10.083638	29
32	9.794467	9.893343	9.901124	10.098876	9.803817	9.887198	9.916619	10.083381	28
33	9.794626	9.893243	9.901383	10.098617	9.803970	9.887093	9.916877	10.083123	27
34	9.794784	9.893142	9.901642	10.098358	9.804123	9.886989	9.917134	10.082866	26
35	9.794942	9.893041	9.901901	10.098099	9.804276	9.886885	9.917391	10.082609	25
36	9.795101	9.892940	9.902160	10.097840	9.804428	9.886780	9.917648	10.082352	24
37	9.795259	9.892839	9.902420	10.097580	9.804581	9.886676	9.917906	10.082094	23
38	9.795417	9.892739	9.902679	10.097321	9.804734	9.886571	9.918163	10.081837	22
39	9.795575	9.892638	9.902938	10.097062	9.804886	9.886466	9.918420	10.081580	21
40	9.795733	9.892536	9.903197	10.096803	9.805039	9.886362	9.918677	10.081323	20
41	9.795891	9.892432	9.903456	10.096544	9.805191	9.886257	9.918934	10.081066	19
42	9.796049	9.892334	9.903714	10.096286	9.805343	9.886152	9.919191	10.080809	18
43	9.796206	9.892233	9.903973	10.096027	9.805495	9.886047	9.919448	10.080552	17
44	9.796364	9.892132	9.904232	10.095768	9.805647	9.885942	9.919705	10.080295	16
45	9.796521	9.892030	9.904491	10.095509	9.805799	9.885837	9.919962	10.080038	15
46	9.796679	9.891929	9.904750	10.095250	9.805951	9.885732	9.920219	10.079781	14
47	9.796836	9.891827	9.905008	10.094992	9.806103	9.885627	9.920476	10.079524	13
48	9.796993	9.891726	9.905267	10.094733	9.806254	9.885522	9.920733	10.079267	12
49	9.797150	9.891624	9.905526	10.094474	9.806406	9.885416	9.920990	10.079710	11
50	9.797307	9.891523	9.905785	10.094215	9.806557	9.885311	9.921247	10.078753	10
51	9.797464	9.891421	9.906043	10.093957	9.806709	9.885205	9.921503	10.078497	9
52	9.797621	9.891319	9.906302	10.093698	9.806860	9.885100	9.921760	10.078240	8
53	9.797777	9.891217	9.906560	10.093440	9.807011	9·884994	9.922017	10.077983	7
54	9.797934	9.891115	9.906819	10.093181	9.807163	9.884889	9.922274	10.077726	6
55	9.798091	9.891013	9.907077	10.092923	9.807314	9.984783	9.922530	10.077470	5
56	9.798247	9.890911	9.907336	10.092664	9.807465	9.884677	9.922784	10.077213	4
57	9.798403	9.890809	9.907594	10.092406	9.807615	9.884572	9.923044	10.076956	3
58	9.798560	9.890707	9.907853	10.092147	9.807766	9.884466	9.923300	10.076700	2
59	9.798716	9.890605	9.908111	10.091889	9.807917	9.884360	9.923557	10.076443	1
60	9.798872	9.890503	9.908369	10.091631	9.808067	9.884254	9.923814	10.076186	0
′	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	51 Grad.				50 Grad.				

	40 Grad.				41 Grad.				
′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.808067	9.884254	9.923814	10.076186	9.816943	9.877780	9.939163	10.060837	60
1	9.808218	9.884148	9.924070	10.075930	9.817088	9.877670	9.939418	10.060582	59
2	9.808368	9.884042	9.924327	10.075673	9.817233	9.877560	9.939763	10.060327	58
3	9.808519	9.883936	9.924583	10.075417	9.817379	9.877450	9.939928	10.060072	57
4	9.808669	9.883829	9.924840	10.075160	9.817524	9.877340	9.940183	10.059817	56
5	9.808819	9.883723	9.925096	10.074904	9.817668	9.877230	9.940439	10.059561	55
6	9.808969	9.883617	9.925352	10.074648	9.817813	9.877120	9.940694	10.059306	54
7	9.809119	9.883510	9.925609	10.074391	9.817958	9.877010	9.940949	10.059051	53
8	9.809269	9.883404	9.925865	10.074135	9.818103	9.876899	9.941204	10.058796	52
9	9.809419	9.883297	9.926122	10.073878	9.818247	9.876789	9.941459	10.058541	51
10	9.809569	9.883191	9.926378	10.073622	9.818392	9.876678	9.941713	10.058287	50
11	9.809718	9.883084	9.926634	10.073366	9.818536	9.876568	9.941968	10.058032	49
12	9.809·68	9.882977	9.926890	10.073110	9.818681	9.876457	9.942223	10.057777	48
13	9.810017	9.882871	9.927147	10.072853	9.818825	9.876347	9.942478	10.057522	47
14	9.810167	9.882764	9.927403	10.072597	9.818969	9.876236	9.942733	10.057267	46
15	9.810316	9.882657	9.927659	10.072341	9.819113	9.876125	9.942988	10.057012	45
16	9.810465	9.882550	9.927915	10.072085	9.819257	9.876014	9.943243	10.056757	44
17	9.810614	9.882443	9.928171	10.071829	9.819401	9.875904	9.943498	10.056502	43
18	9.810763	9.882336	9.928427	10.071573	9.819545	9.875793	9.943752	10.056248	42
19	9.810912	9.882229	9.928684	10.071316	9.819689	9.875682	9.944007	10.055993	41
20	9.811061	9.882121	9.928940	10.071060	9.819832	9.875571	9.944262	10.055738	40
21	9.811210	9.882014	9.929196	10.070804	9.819976	9.875459	9.944517	10.055483	39
22	9.811358	9.881907	9.929452	10.070548	9.820120	9.875348	9.944771	10.055229	38
23	9.811507	9.881799	9.929708	10.070292	9.820263	9.875237	9.945026	10.054974	37
24	9.811655	9.881692	9.929964	10.070036	9.820406	9.875126	9.945281	10.054719	36
25	9.811804	9.881584	9.930220	10.069780	9.820550	9.875014	9.945535	10 054465	35
26	9.811952	9.881477	9.930475	10.069525	9.820693	9.874903	9.945790	10.054210	34
27	9.812100	9.881369	9.930731	10.069269	9.820836	9.874791	9.946045	10.053955	33
28	9.812248	9.881261	9.930987	10.069013	9.820979	9.874680	9.946299	10.053701	32
29	9.812396	9.881153	9.931243	10.068757	9.821122	9.874568	9.946554	10.053446	31
30	9.812544	9.881046	9.931499	10.068501	9.821265	9.874456	9.946808	10.053192	30
31	9.812692	9.880938	9.931755	10.068245	9.821407	9.874344	9.947063	10.052937	29
32	9.812840	9.880830	9.932010	10.067990	9.821550	9.874232	9.947318	10.052682	28
33	9.812988	9.880722	9.932266	10.067734	9.821693	9.874121	9.947572	10.052428	27
34	9.813135	9.880613	9.932522	10.067478	9.821835	9.874009	9.947827	10.052173	26
35	9.813283	9.880505	9.932778	10.067222	9.821977	9.873896	9.948081	10.051919	25
36	9.813430	9.880397	9.933033	10.066967	9.822120	9.873784	9.948335	10.051665	24
37	9.813578	9.880289	9.933289	10.066711	9.822262	9.873672	9.948590	10.051410	23
38	9.813725	9.880180	9.933545	10.066455	9.822404	9.873560	9.948844	10.051156	22
39	9.813872	9.880072	9.933800	10.066200	9.822546	9.873448	9.949099	10.050901	21
40	9.814019	9.879963	9.934056	10.065944	9.822688	9.873335	9.949353	10.050647	20
41	9.814166	9.879855	9.934311	10.065689	9.822830	9.873223	9.949608	10.050393	19
42	9.814313	9.879746	9.934567	10.065433	9.822972	9.873110	9.949862	10.050132	18
43	9.814460	9.879637	9.934822	10.065178	9.823114	9.872998	9.950116	10.049884	17
44	9.814607	9.879529	9.935078	10.064922	9.823255	9.872885	9.950371	10.049629	16
45	9.814753	9.879420	9.935333	10.064667	9.823397	9.872772	9.950625	10.049375	15
46	9.814900	9.879311	9.935589	10.064411	9.823539	9.872659	9.950879	10.049121	14
47	9.815046	9.879202	9.935844	10.064156	9.823680	9.872547	9.951133	10.048867	13
48	9.815193	9.879093	9.936100	10.063900	9.823821	9.872434	9.951388	10.048612	12
49	9.815339	9.878984	9.936355	10.063645	9.823963	9.872321	9.951642	10.048358	11
50	9.815485	9.878875	9.936611	10.063389	9.824104	9.872208	9.951896	10.048104	10
51	9.815632	9.878766	9.936866	10.063134	9.824245	9.872095	9.952150	10.047850	9
52	9.815778	9.878656	9.937121	10.062879	9.824386	9.871981	9.952405	10.047595	8
53	9.815924	9.878547	9.937377	10.062623	9.824527	9.871868	9.952659	10.047341	7
54	9.816069	9.878438	9.937632	10.062368	9.824668	9 871755	9·952913	10.047087	6
55	9.816215	9.878328	9.937887	10.062113	9.824808	9.871641	9.953167	10.046833	5
56	9.816361	9.878219	9.938142	10.061858	9.824949	9.871528	9.953421	10.046579	4
57	9.816507	9.878109	9.938398	10.061602	9.825090	9.871414	9.953675	10.046325	3
58	9.816652	9.877999	9.938653	10.061347	9.825230	9.871301	9.953929	10.046071	2
59	9.816798	9.877890	9.938908	10.061092	9.825371	9.871187	9.954183	10.045817	1
60	9.816943	9.877780	9.939163	10.060837	9.825511	9.871073	9.954437	10.045563	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′
	49 Grad.				48 Grad.				

	42 Grad.				43 Grad.				
'	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.825511	9.871073	9.954437	10.045563	9.833783	9.864127	9.969656	10.030344	60
1	9.825651	9.870960	9.954691	10.045309	9.833919	9.864010	9.969909	10.030091	59
2	9.825791	9.870846	9.954946	10.045054	9.834054	9.863892	9.970162	10.029838	58
3	9.825931	9.870732	9.955200	10.044800	9.834189	9.863774	9.970416	10.029584	57
4	9.826071	9.870618	9.955454	10.044546	9.834325	9.863656	9.970669	10.029331	56
5	9.826211	9.870504	9.955708	10.044292	9.834460	9.863538	9.970922	10.029078	55
6	9.826351	9.870390	9.955961	10.044039	9.834595	9.863419	9.971175	10.028825	54
7	9.826491	9.870276	9.956215	10.043785	9.834730	9.863301	9.971429	10.028571	53
8	9.826631	9.870161	9.956469	10.043531	9.834865	9.863183	9.971682	10.028318	52
9	9.826770	9.870047	9.956723	10.043277	9.834999	9.863064	9.971935	10.028065	51
10	9.826910	9.869933	9.956977	10.043023	9.835134	9.862946	9.972188	10.027812	50
11	9.827049	9.869818	9.957231	10.042769	9.835269	9.862827	9.972441	10.027559	49
12	9.827189	9.869704	9.957485	10.042515	9.835403	9.862709	9.972695	10.027305	48
13	9.827328	9.869589	9.957739	10.042261	9.835538	9.862590	9.972948	10.027052	47
14	9.827467	9.869474	9.957993	10.042007	9.835672	9.862471	9.973201	10.026799	46
15	9.827606	9.869360	9.958247	10.041753	9.835807	9.862353	9.973454	10.026546	45
16	9.827745	9.869245	9.958500	10.041500	9.835941	9.862234	9.973707	10.026293	44
17	9.827884	9.869130	9.958754	10.041246	9.836075	9.862115	9.973960	10.026040	43
18	9.828023	9.869015	9.959008	10.040992	9.836209	9.861996	9.974213	10.025787	42
19	9.828162	9.868900	9.959262	10.040738	9.836343	9.861877	9.974466	10.025534	41
20	9.828301	9.868785	9.959516	10.040484	9.836477	9.861758	9.974720	10.025280	40
21	9.828439	9.868670	9.959769	10.040231	9.836611	9.861638	9.974973	10.025027	39
22	9.828578	9.868555	9.960023	10.039977	9.836745	9.861519	9.975226	10.024774	38
23	9.828716	9.868440	9.960277	10.039723	9.836878	9.861400	9.975479	10.024521	37
24	9.828855	9.868324	9.960530	10.039470	9.837012	9.861280	9.975732	10.024268	36
25	9.828993	9.868209	9.960784	10.039216	9.837146	9.861161	9.975985	10.024015	35
26	9.829131	9.868093	9.961038	10.038962	9.837279	9.861041	9.976238	10.023762	34
27	9.829269	9.867978	9.961292	10.038708	9.837412	9.860922	9.976491	10.023509	33
28	9.829407	9.867862	9.961545	10.038455	9.837546	9.860802	9.976744	10.023256	32
29	9.829545	9.867747	9.961799	10.038201	9.837679	9.860682	9.976997	10.023003	31
30	9.829683	9.867631	9.962052	10.037948	9.837812	9.860562	9.977250	10.022750	30
31	9.829821	9.867515	9.962306	10.037694	9.837945	9.860442	9.977503	10.022497	29
32	9.829959	9.867399	9.962560	10.037440	9.838078	9.860322	9.977756	10.022244	28
33	9.830097	9.867283	9.962813	10.037187	9.838211	9.860202	9.978009	10.021991	27
34	9.830234	9.867167	9.963067	10.036933	9.838344	9.860082	9.978262	10.021738	26
35	9.830372	9.867051	9.963320	10.036680	9.838477	9.859962	9.978515	10.021485	25
36	9.830509	9.866935	9.963574	10.036426	9.838610	9.859842	9.978768	10.021232	24
37	9.830646	9.866819	9.963828	10.036172	9.838742	9.859721	9.979021	10.020979	23
38	9.830784	9.866703	9.964081	10.035919	9.838875	9.859601	9.979274	10.020726	22
39	9.830921	9.866586	9.964335	10.035665	9.839007	9.859480	9.979527	10.020473	21
40	9.331058	9.866470	9.964588	10.035412	9.839140	9.859360	9.979780	10.020220	20
41	9.831195	9.866353	9.964842	10.035158	9.839272	9.859239	9.980033	10.019967	19
42	9.831332	9.866237	9.965095	10.034905	9.839404	9.859119	9.980286	10.019714	18
43	9.831469	9.866120	9.965349	10.034651	9.839536	9.858998	9.980538	10.019462	17
44	9.831606	9.866004	9.965602	10.034398	9.839668	9.858877	9.980791	10.019209	16
45	9.831742	9.865887	9.965855	10.034145	9.839800	9.858756	9.981044	10.018956	15
46	9.831879	9.865770	9.966109	10.033891	9.839932	9.858635	9.981297	10.018703	14
47	9.832015	9.865653	9.966362	10.033638	9.840064	9.858514	9.981550	10.018450	13
48	9.832152	9.865536	9.966616	10.033384	9.840196	9.858393	9.981803	10.018197	12
49	9.832288	9.865419	9.966869	10.033131	9.840328	9.858272	9.982056	10.017944	11
50	9.832425	9.865302	9.967123	10.032877	9.840459	9.858151	9.982309	10.017691	10
51	9.832561	9.865185	9.967376	10.032624	9.840591	9.858029	9.982562	10.017438	9
52	9.832697	9.865068	9.967629	10.032371	9.840722	9.857908	9.982814	10.017186	8
53	9.832833	9.864950	9.967883	10.032117	9.840854	9.857786	9.983067	10.016933	7
54	9.832969	9.864833	9.968136	10.031864	9.840985	9.857665	9.983320	10.016680	6
55	9.833105	9.864716	9.968389	10.031611	9.841116	9.857543	9.983573	10.016427	5
56	9.833241	9.864598	9.968643	10.031357	9.841247	9.857422	9.983826	10.016174	4
57	9.833377	9.864481	9.968896	10.031104	9.841378	9.857300	9.984079	10.015921	3
58	9.833512	9.864363	9.969149	10.030851	9.841509	9.857178	9.984332	10.015668	2
59	9.833648	9.864245	9.969403	10.030597	9.841640	9.857056	9.984584	10.015416	1
60	9.833783	9.864127	9.969656	10.030344	9.841771	9.856934	9.984837	10.015163	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	'
	47 Grad.				46 Grad.				

44 Grad.

′	Sin.	Cosin.	Tang.	Cotang.	
0	9.841771	9.856934	9.984837	10.015163	60
1	9.841902	9.856812	9.985090	10.014910	59
2	9.842033	9.856690	9.985343	10.014657	58
3	9.842163	9.856568	9.985596	10.014404	57
4	9.842294	9.856446	9.985848	10.014152	56
5	9.842424	9.856323	9.986101	10.013899	55
6	9.842555	9.856201	9.986354	10.013646	54
7	9.842685	9.856078	9.986607	10.013393	53
8	9.842815	9.855956	9.986860	10.013140	52
9	9.842946	9.855833	9.987112	10.012888	51
10	9.843076	9.855711	9.987365	10.012635	50
11	9.843206	9.855588	9.987618	10.012382	49
12	9.843336	9.855465	9.987871	10.012129	48
13	9.843466	9.855342	9.988123	10.011877	47
14	9.843595	9.855219	9.988376	10.011624	46
15	9.843725	9.855096	9.988629	10.011371	45
16	9.843855	9.854973	9.988882	10.011118	44
17	9.843984	9.854850	9.989134	10.010866	43
18	9.844114	9.854727	9.989387	10.010613	42
19	9.844243	9.854603	9.989640	10.010360	41
20	9.844372	9.854480	9.989893	10.010107	40
21	9.844502	9.854356	9.990145	10.009855	39
22	9.844631	9.854233	9.990398	10.009602	38
23	9.844760	9.854109	9.990651	10.009349	37
24	9.844889	9.853986	9.990903	10.009097	36
25	9.845018	9.853862	9.991156	10.098844	35
26	9.845147	9.853738	9.991409	10.008591	34
27	9.845276	9.853614	9.991662	10.008338	33
28	9.845405	9.853490	9.991914	10.008086	32
29	9.845533	9.853366	9.992167	10.007833	31
30	9.845662	9.853242	9.992420	10.007580	30
31	9·845790	9.853118	9.992672	10.007328	29
32	9.845919	9.852994	9.992925	10.007075	28
33	9.846047	9.852869	9.993178	10.006822	27
34	9.846175	9.852745	9.993431	10.006569	26
35	9.846304	9.852620	9.993683	10.006317	25
36	9.846432	9.852496	9.993936	10.006064	24
37	9.846560	9.852371	9.994189	10.005811	23
38	9.846688	9·852247	9.994441	10.005559	22
39	9.846816	9.852122	9.994694	10.005306	21
40	9.846944	9.851997	9.994947	10.005053	20
41	9.847071	9.851872	9.995199	10.004801	19
42	9.847199	9.851747	9.995452	10.004548	18
43	9.847327	9.851622	9.995705	10.004295	17
44	9.847454	9.851497	9.995957	10.004043	16
45	9.847582	9.851372	9.996210	10.003790	15
46	9.847709	9.851246	9.996463	10.003537	14
47	9.847836	9.851121	9.996715	10.003285	13
48	9.847964	9.850996	9.996968	10.003032	12
49	9.848091	9.850870	9.997221	10.002779	11
50	9.848218	9.850745	9.997473	10.002527	10
51	9.848345	9.850619	9.997726	10.002274	9
52	9.848472	9.850493	9.997979	10.002021	8
53	9.848599	9.850368	9.998231	10.001769	7
54	9.848726	9.850242	9.998484	10.001516	6
55	9.848852	9.850116	9.998737	10.001263	5
56	9.848979	9.849990	9.998989	10.001011	4
57	9.849106	9.849864	9.999242	10.000758	3
58	9.849232	9.849738	9.999495	10.000505	2
59	9.849359	9.849611	9.999747	10.000253	1
60	9.849485	9.849485	10.00000	10.000000	0
	Cosin.	Sin.	Cotang.	Tang.	′

45 Grad.

Sechstes Buch.

Krumme Linien in einer Ebene.

Erste Abtheilung.

Linien der zweiten Ordnung, oder Kegelschnittlinien.

§. 280. Zwei gerade Linien können sich nur in einem einzigen Punkte schneiden, eine krumme kann aber von derselben geraden in mehreren Punkten getroffen werden. Eine Krumme, die durch eine Gerade, man mag ihr was immer für eine Richtung geben, **nie in mehr als zwei Punkten getroffen wird**, heißt eine Linie der zweiten Ordnung.

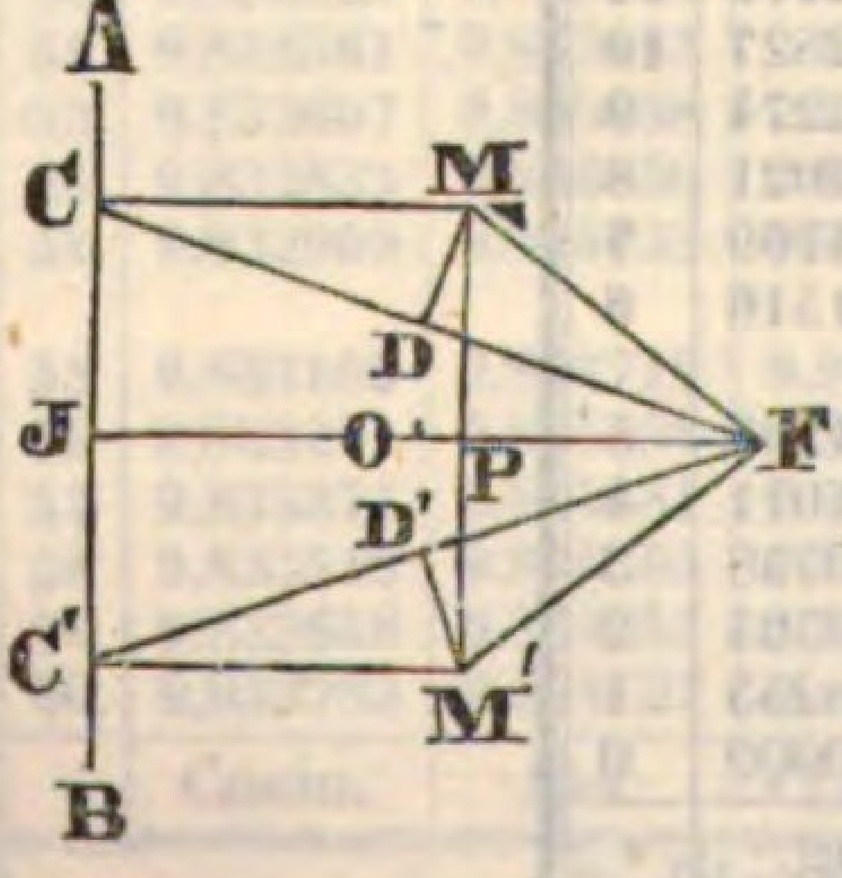
Eine Krumme, die von derselben Geraden höchstens in drei, vier u. s. w. Punkten getroffen werden kann, heißt eine Linie der dritten, vierten u. s. w. Ordnung. Nach diesen ist die gerade Linie eine Linie der ersten Ordnung.

Aus unseren späteren Entwickelungen wird es sich zeigen, daß die drei Arten von krummen Linien, die man Parabel, Ellipse und Hyperbel nennt, und die uns hier zunächst beschäftigen sollen, zu den Linien der zweiten Ordnung gehören. Daß der Kreis ebenfalls eine Linie der zweiten Ordnung ist, versteht sich aus dem Gesagten von selbst.

I.

§. 281. **Parabel** ist diejenige krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, daß jeder ihrer Punkte von einem gegebenen Punkte (**Brennpunkte**) und einer gegebenen Geraden (**Leitlinie**) gleichweit absteht.

Fig. 321.



Es sey die gegebene Gerade die Leitlinie (directrix) AB, der gegebene Punkt Brennpunkt (focus) F. Ziehe ich nun eine willkürliche Gerade CF zur Leitlinie, halbire dieselbe in D, errichte in D ein Loth auf CF und in C ein Loth auf AB, so wird der Punkt M, wo diese beiden Lothe sich schneiden, ein Punkt der Parabel seyn; denn wie man leicht sieht, ist MC = MF, bewegt sich nun der Punkt F fort, aber stets so, daß sein Abstand MF vom

Brennpunkte gleich ist dem Lothe CM, welches seinen Abstand von AB ausdrückt, so beschreibt der Punkt M eine Parabel. Wie man also sieht, kann man beliebig viele Punkte dieser Parabel hier verzeichnen, indem man den Brennpunkt F immer mit andern und andern Punkten der Leitlinie verbindet, diese Verbindungslinie halbiret, im Halbirungspunkte auf die Verbindungslinie ein Loth errichtet, eben so auf die Leitlinie in dem verbundenen Punkte ein Loth errichtet, dort, wo sich die beiden Lothe schneiden, dieß ist ein Punkt der Parabel.

Halbire ich das Loth IF vom Brennpunkte F auf die Leitlinie AB in dem Punkte O, so ist begreiflich O ebenfalls ein Punkt der Parabel, deren Gestalt wir nun näher untersuchen wollen. Auf den ersten Blick sieht man, daß von allen Punkten der Parabel der Punkt O am nächsten dem Brennpunkte und der Leitlinie ist. Ferner sieht man, daß diese krumme Linie gegen die Gerade IF ganz gleichmäßig gestaltet — symmetrisch — ist; denn nimmt man unterhalb des I ein Stück $IC' = IC$, verfährt hier gerade so, wie oberhalb, so daß $C'D' = D'F$, $C'M' \perp AB$, $D'M' \perp C'F$ ist, also M' ebenfalls ein Punkt dieser Parabel ist, so hat man, da $CF = C'F$ ist, die Winkel $FCI = IC'F$; da nun $CM \parallel C'M'$, also die Winkel $MCF = M'C'F$, und somit die Dreiecke $MCF \equiv M'C'F$, daher sowohl $CM = C'M'$ als $MF = M'F$, daher das Dreieck MM'F, wenn man M mit M' verbindet, gleichschenklicht ist, daher $MP = M'P$. Es ist also der Punkt M' eben so weit von F entfernt, als M, und der Punkt M' hat einen eben so großen Abstand MP von der Geraden IF als der Punkt M'. Es läßt sich so zu jedem Punkte der Parabel oberhalb der IF ein Punkt der Parabel unterhalb der IF finden, der von der IF denselben Abstand hat, daher die Punkte der Parabel gegen die Gerade IF, d. i. das Loth vom Brennpunkte auf die Leitlinie ganz symmetrisch liegen, diese Gerade heißt deßhalb die Achse der Parabel.

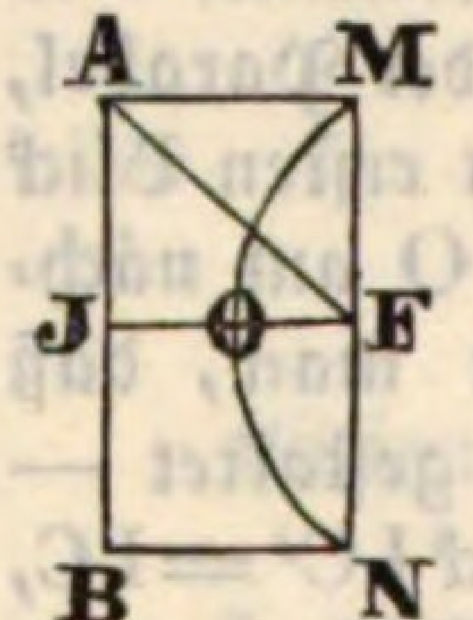
Da $CM \parallel IF$, also $MCF = CFI$, so ist es klar, je höher man den Punkt C, also je größer man IC annimmt, desto größer wird der Winkel CFI, also auch der Winkel MCF, und somit auch CM und MF, d. h. je höher man den willkürlichen Punkt C annimmt, desto weiter stehet der entsprechende Punkt der Parabel von der Leitlinie und dem Brennpunkte ab, und zwar oberhalb der Achse entfernen sich die Punkte immer rechts von der Leitlinie, und zugleich nach oben von der Achse, und unterhalb der Achse ebenfalls nach rechts von der Leitlinie, und nach unten von der Achse; da ich nun den Punkt C in der Leitlinie so weit von I wählen kann, als ich nur will, so sieht man, daß die Parabel keine in sich selbst zurücklaufende krumme Linie, wie der Kreis ist, sondern daß sie aus zwei ganz gleichen und gleichliegenden Aesten besteht, die sich beiderseits unendlich weit von der Achse und von der Leitlinie entfernen.

Die Linie FM oder FM', welche den Brennpunkt mit einem Punkte der Parabel verbindet, heißt der Leitstrahl, Fahrstrahl dieses Punktes. Da $MCF = CFI$, und $MCF = MFC$ ist, so hat

man: CMF = CFI, d. h. die Gerade, welche den Brennpunkt mit dem Fußpunkte des Lothes von einem Punkte der Parabel auf die Leitlinie verbindet, halbiret stets den Winkel, den der Leitstrahl mit der Achse der Parabel macht, nach der Richtung gegen die Leitlinie.

§. 282. Errichten wir nun im Brennpunkte eine auf die Achse der Parabel senkrechte Sehne.

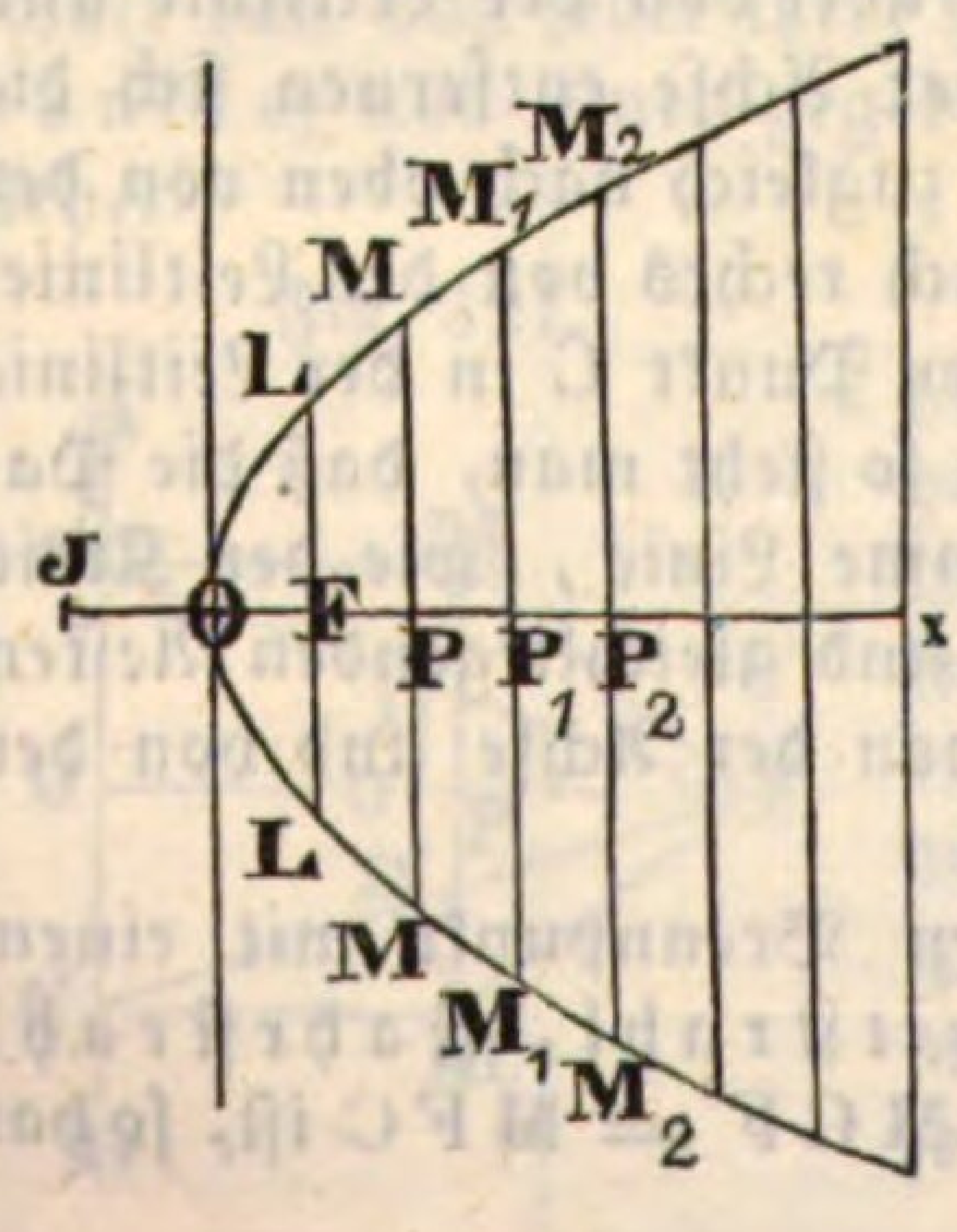
Fig. 322.



Um den über den Brennpunkt F senkrecht stehenden Punkt M der Parabel zu finden, bedenke man, daß, wenn man den Fußpunkt A des Lothes von M auf die Leitlinie mit F verbindet, die Linie AF den Winkel IFM halbiren müsse; da nun IFM = 90 seyn soll, so darf ich nur in F ein Loth errichten, den dadurch entstehenden Winkel halbiren, in dem Punkte A, wo diese Halbirungslinie die Leitlinie trifft, ein Loth auf die Leitlinie errichten, so ist der Punkt M, wo beide Lothe zusammentreffen, ein Punkt der Parabel; verlängert man FM bis FN = FM, so ist auch N ein Punkt der Parabel. Man nennt die im Brennpunkte senkrecht errichtete Sehne MN den Parameter der Parabel, und wie man sieht, ist der Abstand des Brennpunktes F von der Leitlinie AB gleich dem halben Parameter, und der Abstand des Brennpunktes F vom Scheitel O der Parabel gleich dem vierten Theile des Parameters. Die Krümmung und die Art des Seyns einer Parabel hängt auf eine ähnliche Art von der Größe des Parameters ab, wie die Kreislinie von der Größe des Halbmessers.

§. 283. Die Grundeigenschaft, daß jeder Punkt der Parabel vom Brennpunkte und der Leitlinie gleich weit absteht, gibt uns ein Mittel an die Hand, die Parabel zu verzeichnen, wenn uns die Leitlinie und der Brennpunkt, oder der Scheitel und Brennpunkt, oder der Brennpunkt und der Parameter gegeben sind; denn es ist aus dem vorhergehenden Paragraphe klar, daß, wenn zwei von diesen gegeben sind, man leicht das dritte finden kann.

Fig. 323.



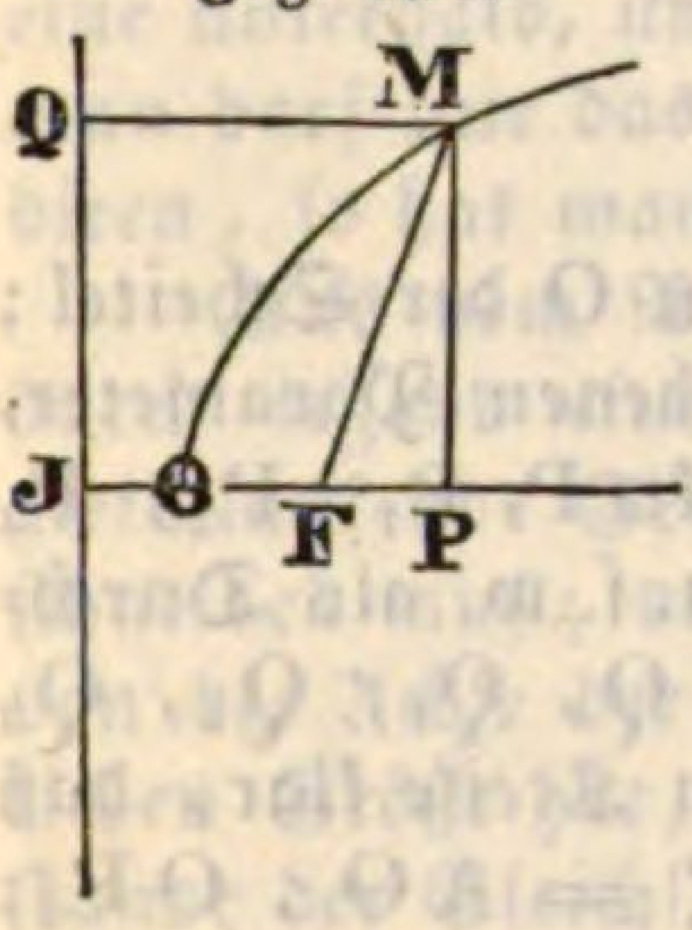
Ist Ox die Achse der Parabel, O der Scheitel und F der Brennpunkt, so verlängere ich die Ox und mache IO = OF, so ist IF der halbe Parameter; ich ziehe nun durch die Punkte F, P, P_1, P_2 u. s. w. der Achse Lothe auf dieselbe, aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmesser IF durchschneide ich das Loth in F in den Punkten L; eben so durchschneide ich das Loth in P mittelst eines Kreisbogens aus F mit dem Halbmesser = IP in M; eben so die Lothe in P_1, P_2 u. s. w. mit Kreisbögen aus dem Mittelpunkte F mit Halbmessern gleich IP_1, IP_2 u. s. w. in den Punkten M_1, M_2 u. s. w.

Die Durchschnittspunkte oben und unten L, M, M_1, M_2 geben die Parabel. Die Stücke OF, OP, OP_1, OP_2 nennt man die Abscissen der Punkte L, M, M_1, M_2.

Die Punkte P, P_1, P_2 u. s. w. sind willkürlich, je mehr man solche Punkte nimmt, und je näher an einander, desto mehr und desto näher an einander liegende Punkte der Parabel erhält man. Diese gefundenen Punkte verbindet man durch Bögen, die mit der freien Hand oder mittelst eines biegsamen Lineals gezogen werden. Diese Verzeichnungsart beruht auf der so leicht ersichtbaren Eigenschaft der Parabel, daß der Leitstrahl jedes Punktes der Parabel gleich der Abscisse desselben Punktes mehr dem vierten Theile des Parameters ist.

§. 284. Jedes Loth, welches man von einem Punkte der Parabel auf die Achse fällt, nennt man eine Ordinate dieses Punktes, und der Abstand der Ordinate vom Scheitel heißt die Abscisse dieses Punktes, so sind in der vorhergehenden Figur MP, M_1P_1, M_2P_2 ... die Ordinaten und OP, OP_1, OP_2, ... die Ordinaten der Punkte M, M_1, M_2 ...

Fig. 324.



Bezeichnen wir hier die Abscisse OP durch x, die Ordinate MP durch y, nennen wir den Parameter dieser Parabel p, so gibt die Grundeigenschaft der Parabel QM = MF, wenn QI die Leitlinie, und QM ⊥ QF ist, was wir hier voraussetzen wollen: da nun QM = IP, so hat man IP = MF, daher auch $IP^2 = MF^2$; da nun $MF^2 = MP^2 + FP^2 = MP^2 + (OP - OF)^2$ und $OF = IO = \frac{p}{4}$, also $MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2$, und $IP = IO + OP = \frac{p}{4} + x$ ist, so hat man:

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{4}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{4}\right)^2, \text{ daher}$$

$$y^2 + x^2 - 2\frac{p}{4} \cdot x + \frac{p^2}{16} = x^2 + 2\frac{p}{4}x + \frac{p^2}{16}, \text{ woraus:}$$

$$y^2 = px,$$

d. h. das Quadrat jeder Ordinate der Parabel ist gleich dem Produkte aus dem Parameter und der zugehörigen Abscisse; oder da obige Gleichung folgende Proportion gibt:

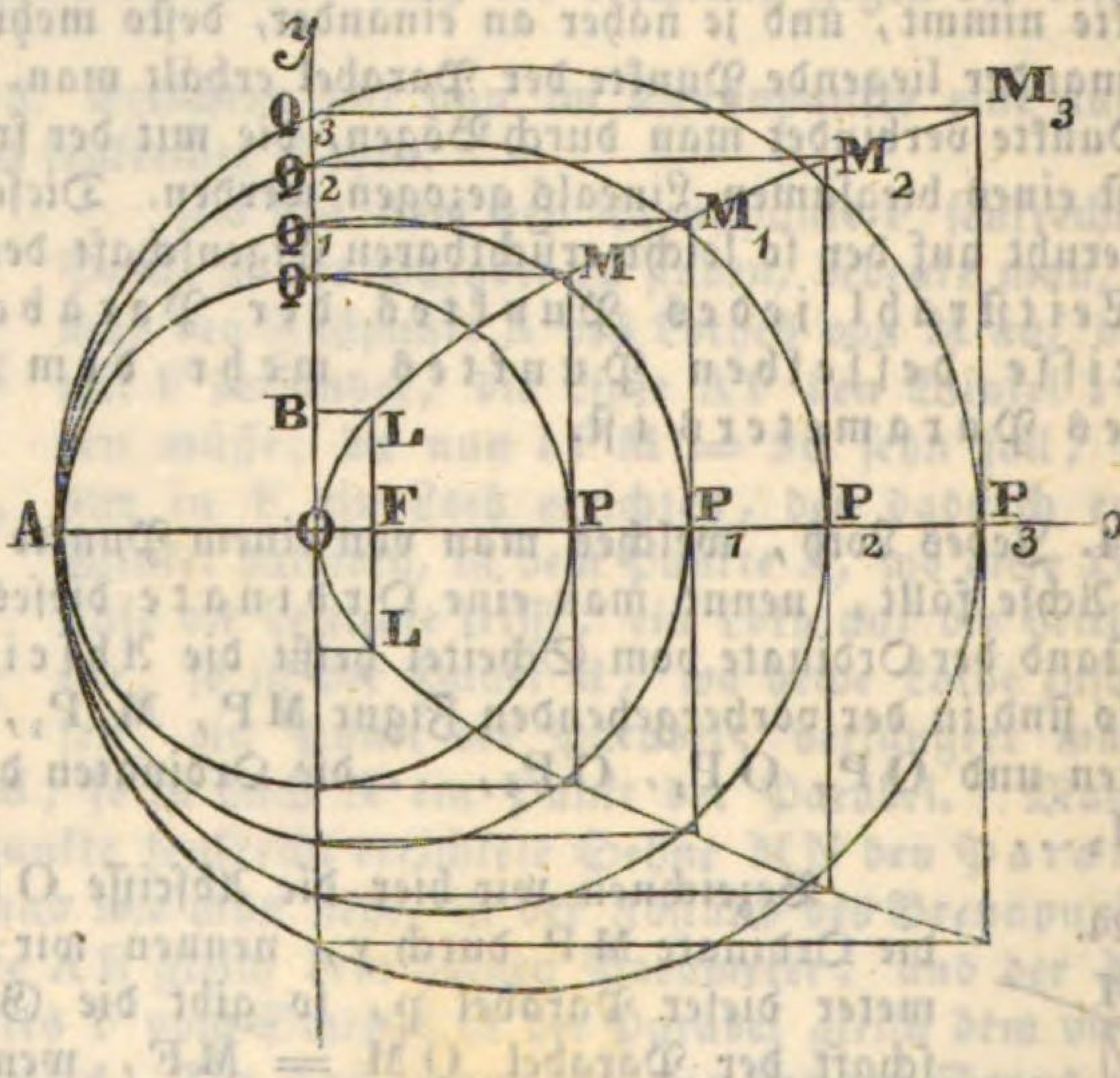
$$p : y = y : x,$$

so ist jede Ordinate die mittlere Proportionale zwischen dem Parameter und der zugehörigen Abscisse, und umgekehrt: jeder Punkt, der dieser Eigenschaft Genüge leistet, liegt in der Parabel.

Diese so eben bewiesene Eigenschaft gibt uns ein neues Hülfsmittel zur Verzeichnung der Parabel. Ich verzeichne mir nämlich am

Scheitel in der Verlängerung der Achse die Größe des Parameters, und suche zwischen diesem und jeder Abscisse die mittlere Proportionale.

Fig. 325.



Es sey nämlich O x die Achse der Parabel, in O der Scheitel; ich verlängere O x und mache A O gleich dem gegebenen Parameter, errichte in O ein Loth, nehme die willkürlichen Punkte P, P_1, P_2, P_3 u. s. w. an, errichte über A P, A P_1, A P_2, A P_3 u. s. w. als Durchmesser Kreise, welche von der O y in den Punkten Q, Q_1, Q_2, Q_3 u. s. w. geschnitten werden, so ist aus der Lehre vom Kreise klar, daß $OQ^2 = AO \cdot OP$; $OQ_1^2 = AO \cdot OP_1$; $OQ_2^2 = AO \cdot OP_2$; $OQ_3^2 = AO \cdot OP_3$ u. s. w.; daher sind O Q, O Q_1, O Q_2, O Q_3 u. s. w. die Größen, welche die Ordinaten der Parabel für die Abscissen O P, O P_1, O P_2 u. s. w. haben sollen; ziehet man daher durch Q, Q_1, Q_2 ... mit der Achse gleichlaufende, bis sie die gehörigen Lothe in P, P_1, P_2 ... treffen, so erhält man die Punkte M, M_1, M_2 ... der Parabel.

Um den Punkt L oberhalb des Brennpunktes zu finden, mache ich $OB = \frac{1}{2} AO$, und ein in F errichtetes Loth trifft die durch B mit der Achse parallel gezogene in L. Diese Construction gibt eben so die Punkte der Parabel unterhalb der Achse.

§. 285. Die so eben bewiesene und angewandte Eigenschaft der Parabel gibt uns das Mittel an die Hand, wenn diese Krumme gegeben ist, ihren Parameter zu finden, sobald der Scheitel und die Richtung der Achse bekannt sind; denn ist irgend eine Ordinate, z. B. M P verzeichnet, so hat man $OP : MP = MP : p$, daher $p = \frac{MP^2}{OP}$;

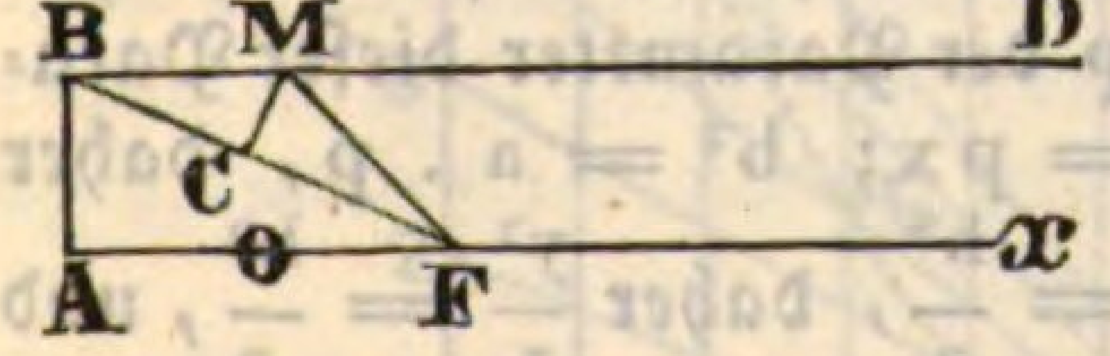
dasselbe Resultat geben $\frac{M_1 P_1^2}{O P_1}$, $\frac{M_2 P_2^2}{O P}$ u. s. w., sobald die Größe des Parameters bekannt ist, findet man leicht den Brennpunkt und die Leitlinie, man darf nur rechts und links vom Scheitel in der Achse Stücke gleich dem vierten Theile des Parameters abschneiden, so gibt das eine den Brennpunkt, das andere den Durchschnittspunkt der Leitlinie mit der Achse, welche da auf letzterer senkrecht steht.

Da $MP^2 = p . OP$; $M_1 P_1^2 = p . OP_1$; $M_2 P_2^2 = p . OP_2$ u. s. w., daher $MP^2 : M_1 P_1^2 = OP : OP_1$ ist, so hat man: **Bei der Parabel verhalten sich die Quadrate der Ordinaten gerade so wie ihre Abscissen.**

Die allgemeine Eigenschaft der Parabel $y^2 = p . x$, d. h., daß das Quadrat jeder Ordinate gleich ist dem Produkte aus dem Parameter und der zugehörigen Abscisse, erlaubt uns, wenn der Parameter bekannt ist, und die Abscisse eines Punktes seine Ordinate und umgekehrt zu finden. Aus dieser Wechselbeziehung zwischen Abscisse und Ordinate ergibt sich neuerdings, daß die beiden Aeste der Parabel ins Unendliche auslaufen; denn für jedes noch so große x, d. h. für jede noch so große Abscisse gibt es zwei Werthe von y (der Ordinate), gleich groß, aber mit verschiedener Bezeichnung, nämlich eine oberhalb und eine unterhalb, und für jede Ordinate gibt es eine entsprechende Abscisse, man darf nur das Quadrat dieser Ordinate durch den Parameter dividiren, so hat man die Größe der gesuchten Abscisse.

Aus dem Vorhergehenden läßt sich beweisen, daß, wenn man durch irgend einen Punkt der Leitlinie zur Achse der Parabel eine gleichlaufende Gerade zieht, diese die Parabel in irgend einem Punkte schneiden muß; denn diese Gleichlaufende behält stets denselben Abstand von der Achse der Parabel; da nun die Parabel Ordinaten jeder möglichen Größe hat, so hat sie auch eine Ordinate, die gleich ist dem Abstande der Gleichlaufenden von der Achse, und in dem Punkte nun der Parabel, wo die Ordinate gleich ist diesem Abstande, trifft diese die Parabel, und für diesen Punkt läßt sich die Abscisse berechnen. Ziehe ich in dem Abstande = 6 eine Gleichlaufende zur Achse der Parabel, deren Parameter gleich 4 ist, so brauche ich nur die Abscisse desjenigen Punktes zu suchen, dessen Ordinate gleich 4 ist, die Abscisse dieses Punktes ist gleich $\frac{36}{4} = 9$; in einem Punkte also der Parabel, deren Abscisse = 4, also dessen Ordinate = 6 ist, trifft die besprochene gleichlaufende Gerade die Parabel; oder auf eine andere Art:

Fig. 326.

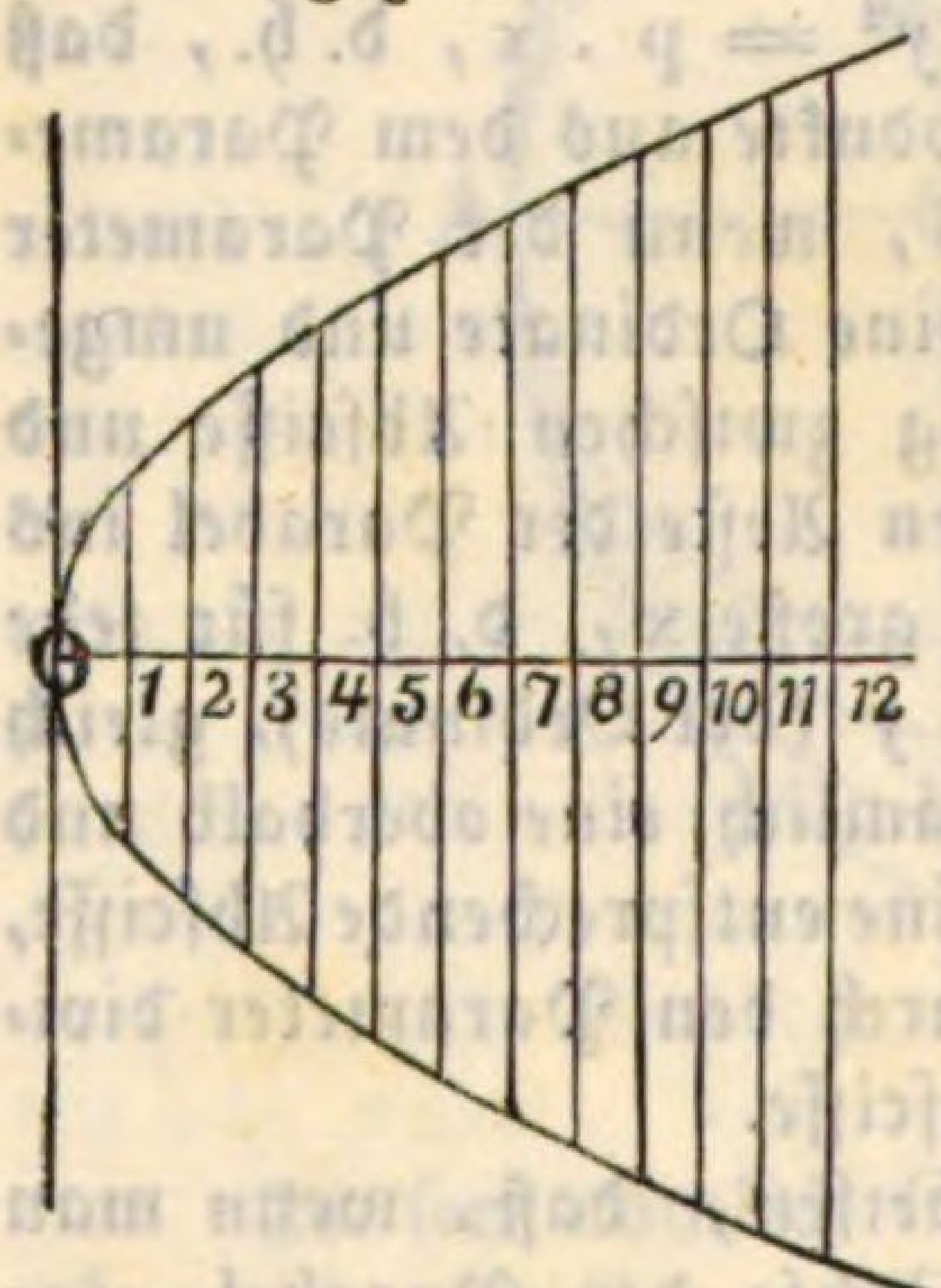


Es sey BD ∥ Ax die Achse, ich verbinde B mit dem Brennpunkte F, halbire BF in C, und ziehe in C eine Gerade lothrecht auf BF, so werden, weil $DBF < 90^\circ$ und $BCM = 90^\circ$, also $DBF + BCM < 180^\circ$ BD und CM sich schneiden, ist nun M der Durchschnittspunkt, und ich verbinde M mit F, so ersieht es sich leicht, daß $MF = BM$, d. h. also, daß M ein Punkt der Parabel sey.

§. 286. Die Eigenschaft der Parabel $y^2 = px$, d. h. daß das Quadrat jeder Ordinate gleich ist dem Parameter, multiplicirt mit der zugehörigen Abscisse, gibt ein drittes Mittel, die Parabel zu verzeichnen.

Ich trage mir nämlich die Achse der Parabel auf, und berechne nun für eine Reihe von willkürlichen Werthen von x die Größe der zugehörigen y, schneide nach einem bestimmten Maßstabe die Werthe der x von der Achse ab, für welche ich die y berechnet habe, trage am Endpunkte jedes x Lothe aufwärts und abwärts auf, die ich den berechneten Werthen von y gleich mache, so sind die Endpunkte der Lothe die Punkte der verlangten Parabel.

Fig. 327.



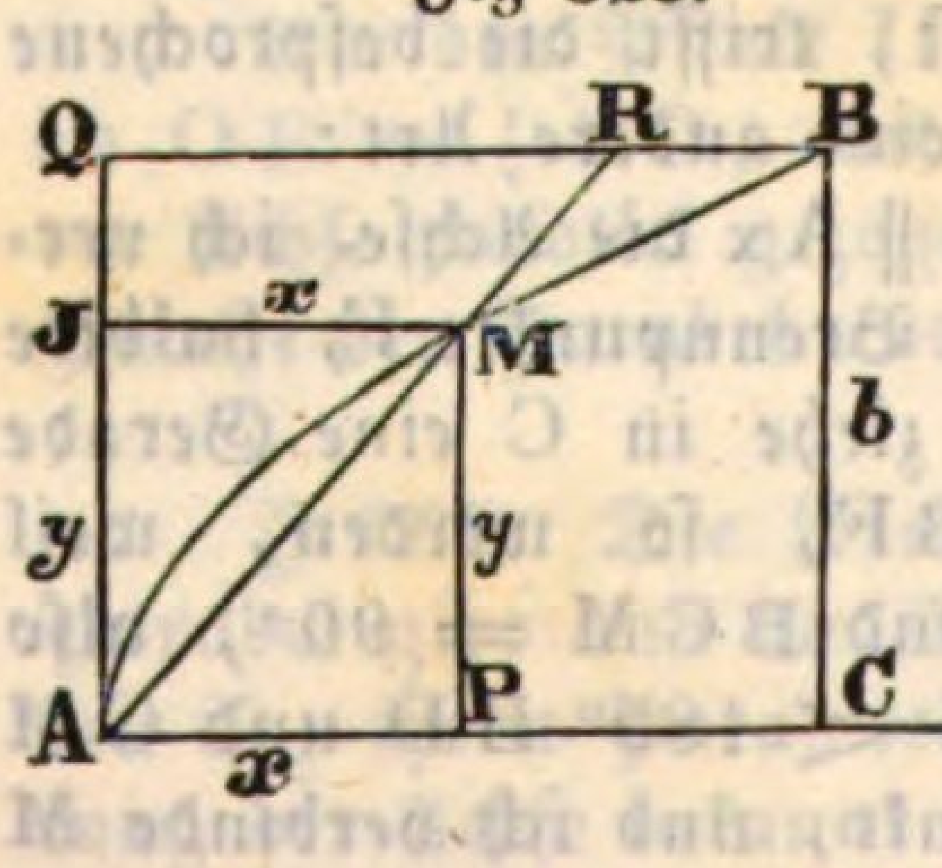
Ist nämlich $y^2 = px$, und $p = 4$, also $y^2 = 4x$, so hat man:

für $x = 1$;	$y = 2$	$x = 9$,	$y = 6$
$= 2$;	$y = 2{\cdot}82$	$= 10$,	$y = 6{\cdot}32$
$= 3$;	$y = 3{\cdot}46$	$= 11$,	$y = 6{\cdot}63$
$= 4$;	$y = 4$	$= 12$,	$y = 6{\cdot}93$
$= 5$;	$y = 4{\cdot}47$	$= 13$,	$y = 7{\cdot}21$
$= 6$;	$y = 4{\cdot}90$	$= 14$,	$y = 7{\cdot}48$
$= 7$;	$y = 5{\cdot}29$	$= 15$,	$y = 7{\cdot}74$
$= 8$;	$y = 5{\cdot}66$	$= 16$,	$y = 8$

Ich trage nun mittelst eines 1000theiligen Maßstabes, von O angefangen, die Werthe von $x = 1, 2, 3, 4$ u. s. w. auf; in 1 errichte ich ein Loth $= 2$, in 2 ein Loth $= 2{\cdot}8$, in 3 ein Loth $= 3{\cdot}5$, in 4 ein Loth $= 4$ u. s. w., und zwar immer auf- und abwärts. Zu diesem Behufe ziehe ich mir früher durch 1, 2, 3 u. s. w. Gerade, die mit der in O errichteten Lothrechten gleichlaufend sind, und von diesen Lothen schneide ich die berechneten Werthe von y am geeigneten Orte ab. — Diese Endpunkte der Lothe bilden die Parabel.

§. 287. Die vorstehende Verzeichnungs-Methode der Parabel ist uns deßfalls wichtig, weil, wie wir später sehen werden, dadurch eine allgemeine Verzeichnungs-Methode aller krummen Linien angebahnt wird. Für die Parabel wollen wir eine noch leichtere Verzeichnungsart angeben.

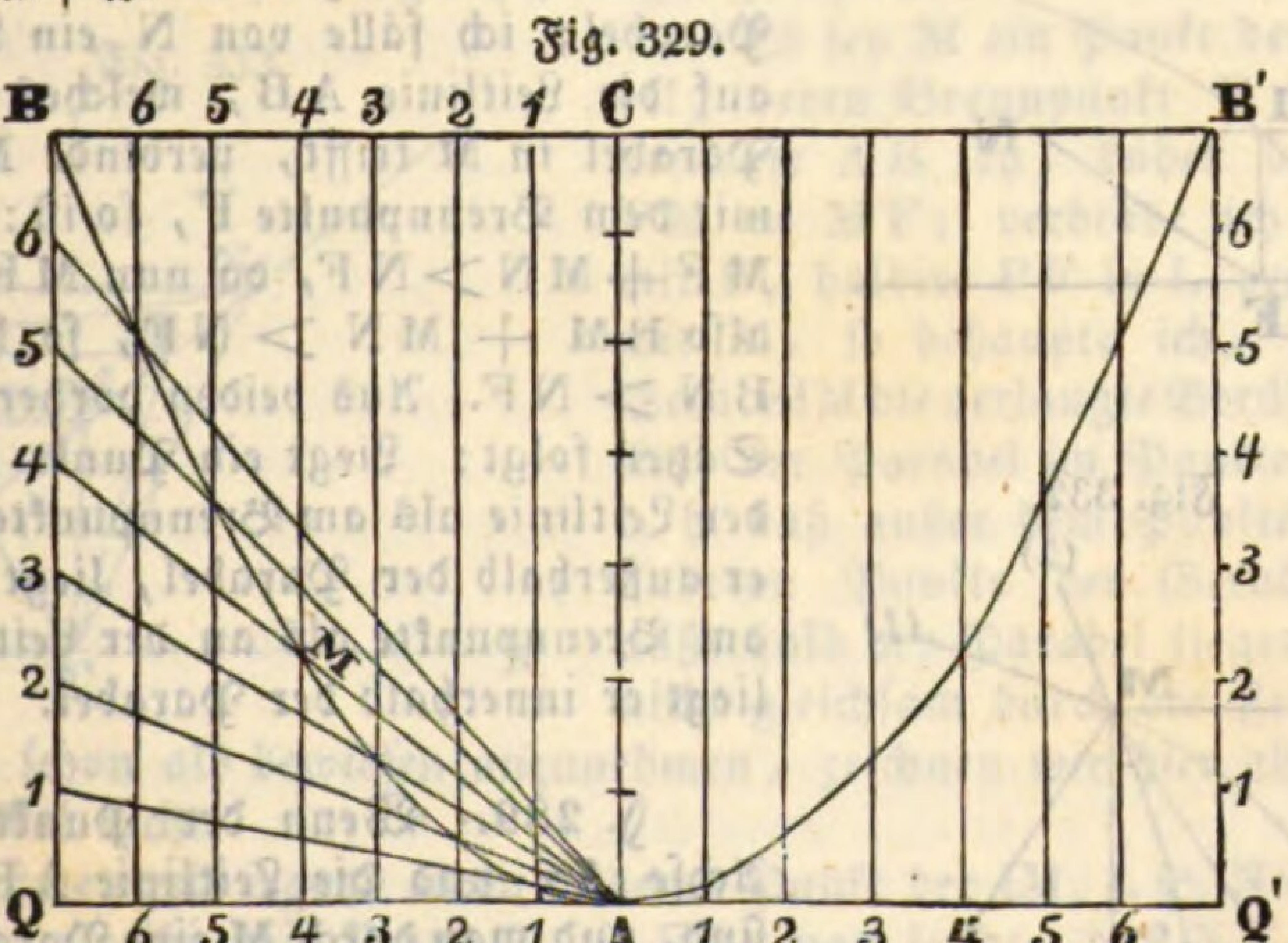
Fig 328.



Es sey AMB eine Parabel, A ihr Scheitel, M und B seyen zwei Punkte der Parabel. Es sey $AP = x$; $MP = y$; $AC = a$; $BC = b$, wo natürlich y und b senkrecht auf die Achse AC sind, so hat man, wenn p der Parameter dieser Parabel ist, $y^2 = px$; $b^2 = a \cdot p$, daher $p = \frac{y^2}{x}$ $p = \frac{b^2}{a}$, daher $\frac{y^2}{x} = \frac{b^2}{a}$, und somit $a\,y^2 = b^2\,x$, daher $a\,y \cdot y = b\,x \cdot x$, folglich $\frac{b\,x}{y} = \frac{a\,y}{b}$.

Errichte ich in A ein Loth A Q, ziehe durch B eine gleichlaufende B Q mit der Achse, ziehe M A, die verlängert die B Q in R trifft, endlich M I ∥ A C, so hat man Q R : I M = A Q : I A, oder Q R : x = b : y, daher $QR = \frac{bx}{y}$; nach dem Obigen aber ist $\frac{bx}{y} = \frac{ay}{b}$, man hat also somit $QR = \frac{ay}{b}$, daher Q R : a = y : b, oder unsere Figur wieder ins Auge gefaßt, Q R : Q B = A I : Q A; gehet also eine Parabel durch die zwei Eckpunkte A und B des Rechtecks A B C Q, so daß in A der Scheitel ist, und man ziehet durch irgend einen Punkt M dieser Parabel eine Verbindungslinie mit dem Scheitel A, verlängert diese Verbindungslinie, bis sie die mit der Achse parallele Seite des Rechtecks trifft, so wird der Punkt R dieses Zusammentreffens die R B in zwei solche Theile Q R und R B theilen, daß sich Q R zur ganzen Q B gerade so verhält, wie der Abstand (I A) der durch den Punkt M mit der Achse gleichlaufend Gezogenen (I M) zur Höhe des Rechtecks A Q. Und jeder Punkt, der dieser Eigenschaft Genüge leistet, wird ein Punkt der Parabel seyn, die durch A, als Scheitel, und durch B gehet. So oft also, als die Punkte R und I in Q B und Q A so angenommen sind, daß Q R : Q B = A I : A Q, so wird der Durchschnitt der Geraden A R und I M ∥ A C ein Punkt der Parabel seyn, wodurch wir ein Mittel haben, so viele Punkte der Parabel zwischen A und B zu bestimmen, als man nur will. — Theilen wir nämlich die B Q in eine Anzahl gleicher Theile, und bezeichnen wir die Theilungspunkte mit 1, 2, 3, 4 ꝛc. von Q an, und theilen eben so A Q in eine eben so große Anzahl gleicher Theile, und benennen die Punkte von A an mit 1, 2, 3, 4 ꝛc., so wird die Verbindungslinie des Scheitels mit dem Punkte 1, der B Q, die durch 1 in A Q mit A C gleichlaufend Gezogene in einem Punkte der Parabel schneiden, eben so A 2, die Parallele zu 2 der A Q ebenfalls in einem Punkte der Parabel u. s. w.

Fig. 329.

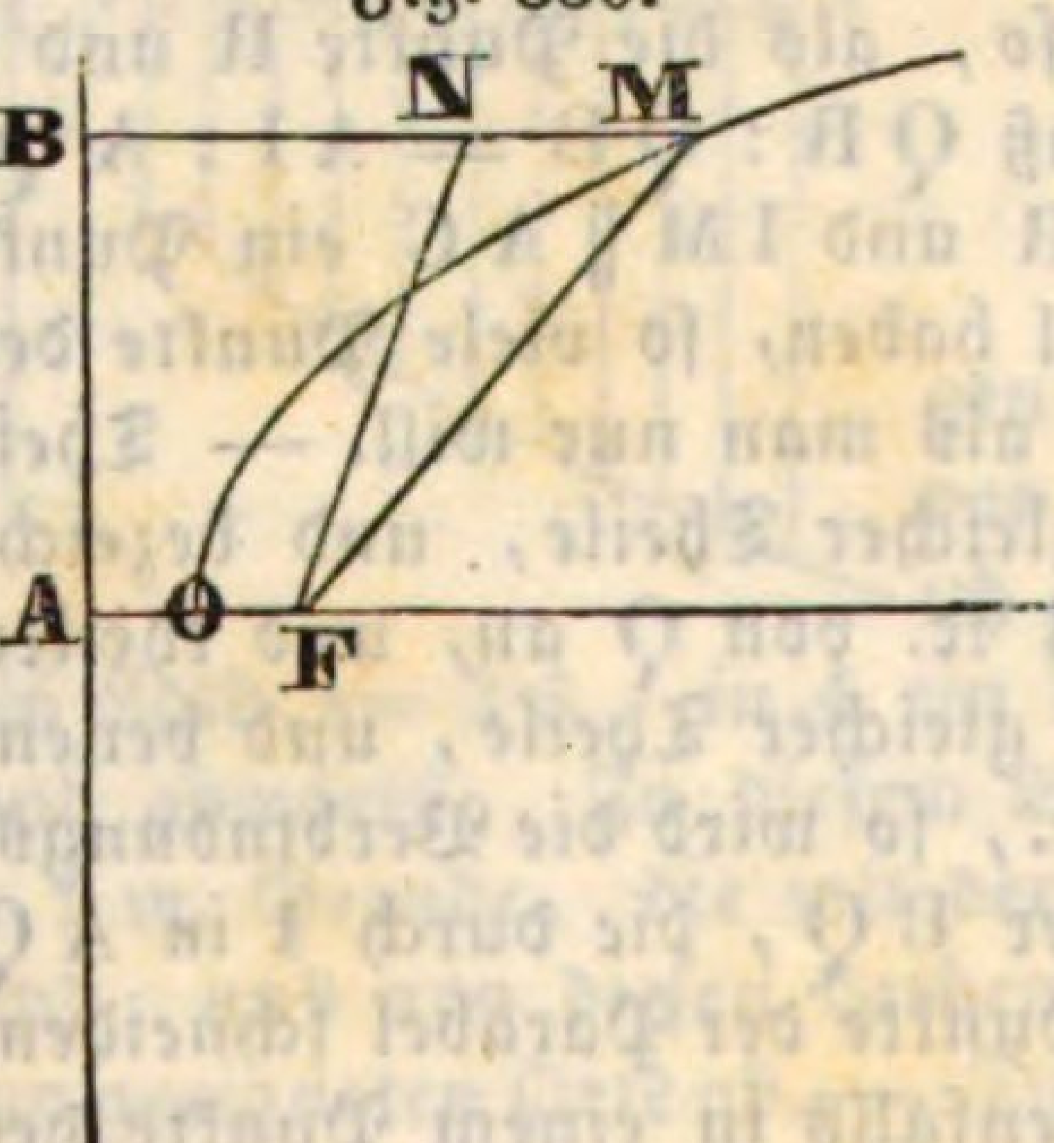


Soll so A der Scheitel einer Parabel seyn, die durch B und B′ gehet, so verzeichne ich das Rechteck B B′ Q Q′, dessen Hälfte B C A Q ist. Ich theile die A Q z. B. in sieben gleiche Theile ein, und bezeichne die Punkte von A nach Q mit 1, 2, 3 ..., eben so theile ich die B Q in sieben gleiche Theile, und bezeichne sie mit 1, 2, 3 u. s. w. von Q an. Die Durchschnittspunkte von A 1, mit der Parallele 1 1 gibt einen Punkt der Parabel, eben so A 2 mit 2 2, A 3 mit 3 3 u. s. w.

Es ist so M der Durchschnitt von A 4 mit der Parallele 4 4, da $Q\,4 = \frac{4}{7}\,B\,Q$ und $A\,4 = \frac{4}{7}\,A\,Q$, so hat man $\frac{Q\,4}{Q\,B} = \frac{4}{7}$ und $\frac{A\,4}{A\,Q} = \frac{4}{7}$; daher $\frac{Q\,4}{Q\,B} = \frac{A\,4}{A\,Q}$, daher der Durchschnittspunkt M ein Punkt der Parabel. Ganz dasselbe läßt sich von den andern Durchschnittspunkten nachweisen.

§. 288. **Jeder Punkt außerhalb der Parabel steht weiter ab vom Brennpunkte als von der Leitlinie.**

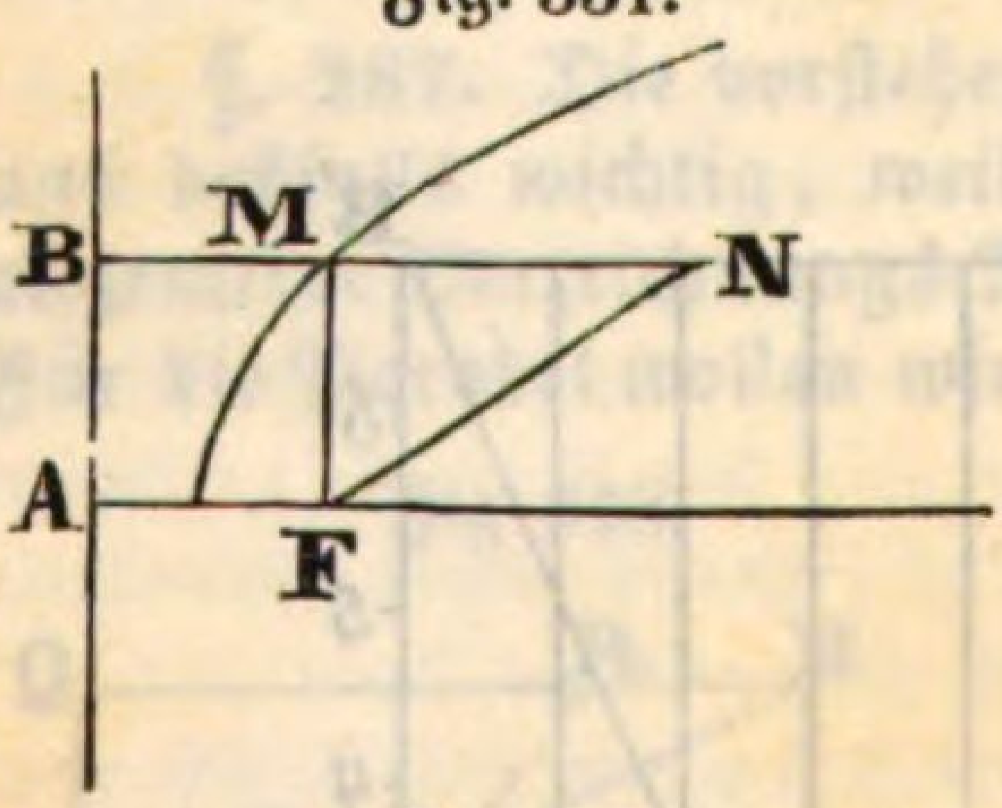
Fig. 330.



Es sey der Punkt N außerhalb der Parabel; ich fälle von N ein Loth N B auf die Leitlinie A B, so muß N B verlängert die Parabel in irgend einem Punkte M treffen, ich verbinde N und M mit dem Brennpunkte F, so ist gewiß
$N F + N M > M F$, da $M F = B M$, daher $N F + N M > B M$, so hat man: $N F > B M - N M$, d. h. $N F > B N$.

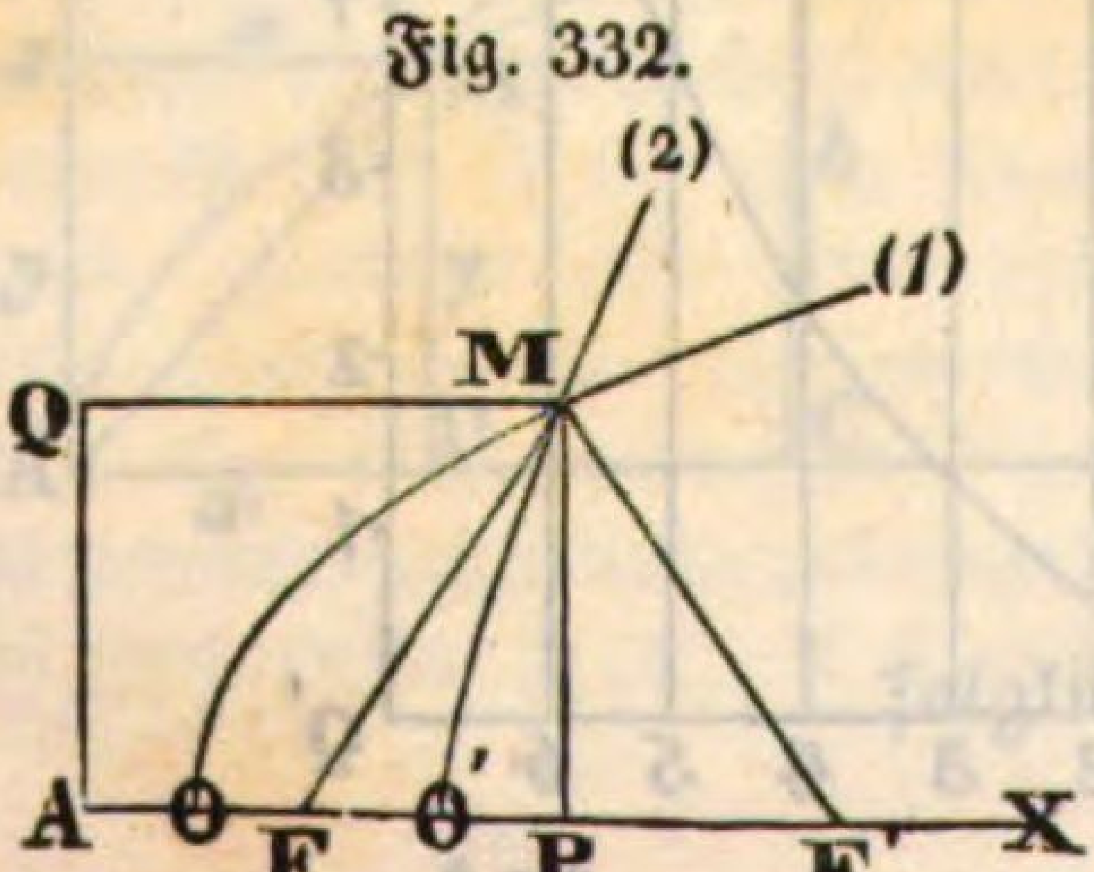
Umgekehrt: **Jeder Punkt innerhalb der Parabel steht näher am Brennpunkte als an der Leitlinie.**

Fig. 331.



Es sey der Punkt N innerhalb der Parabel; ich fälle von N ein Loth N B auf die Leitlinie A B, welches Loth die Parabel in M trifft, verbinde M und N mit dem Brennpunkte F, so ist:
$M F + M N > N F$, da nun $M F = B M$, also $B M + M N > N F$, so hat man: $B N > N F$. Aus beiden vorhergehenden Sätzen folgt: Liegt ein Punkt näher an der Leitlinie als am Brennpunkte, so liegt er außerhalb der Parabel, liegt er näher am Brennpunkte als an der Leitlinie, so liegt er innerhalb der Parabel.

Fig. 332.



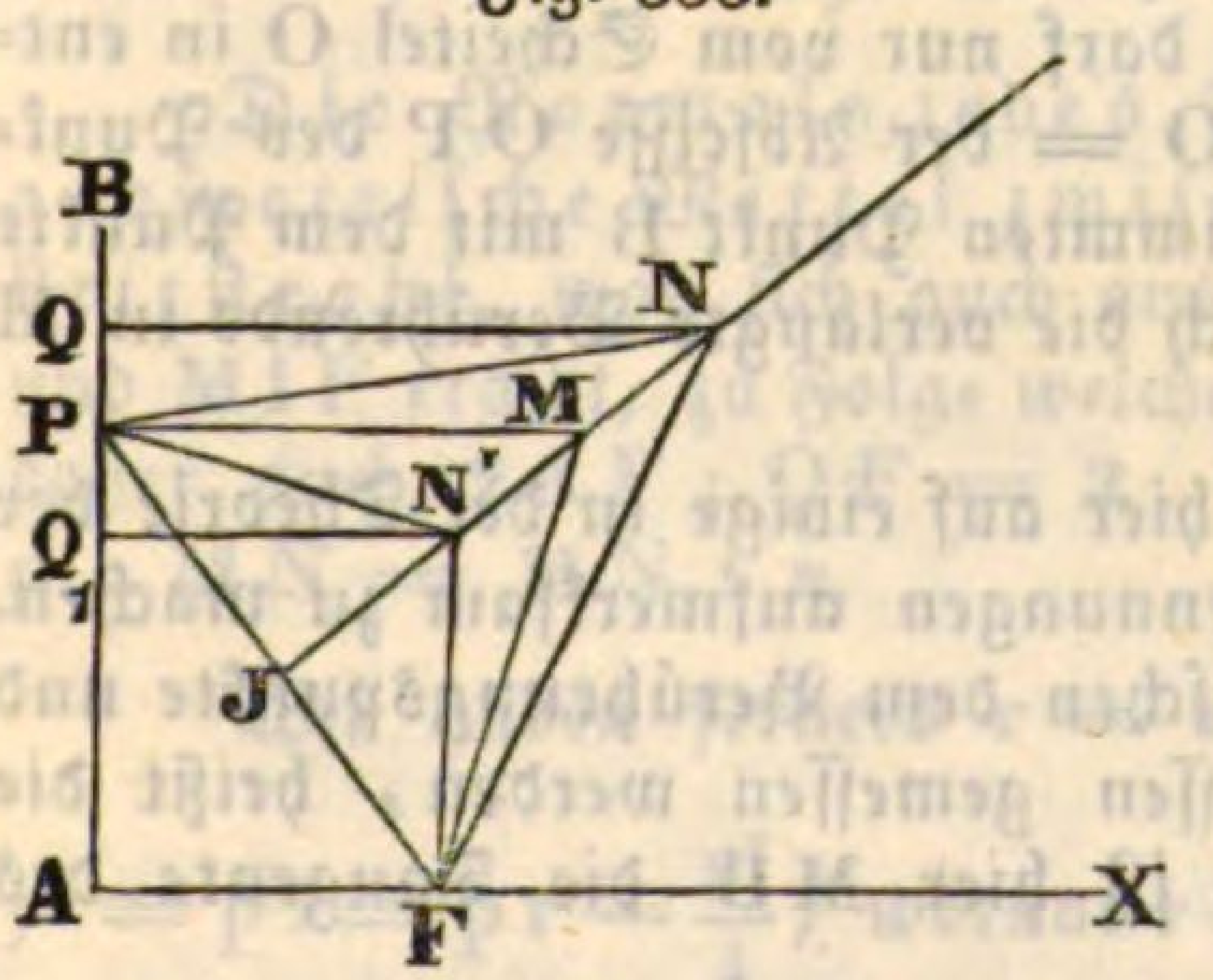
§. 289. Wenn der Punkt M, die Achse A x und die Leitlinie A B gegeben sind, und man durch M eine Parabel zieht,

so fällt man von M ein Loth MQ auf AB, und da M von AB und dem zu suchenden Brennpunkte denselben Abstand = QM haben muß, so beschreibe ich aus M mit einem Halbmesser = QM einen Kreisbogen, der die Achse Ax in F und F′ schneidet, woraus also QM = FM und QM = F′M folgt, daher sowohl F als F′ der Brennpunkt einer Parabel seyn kann, die durch M gehet und deren Leitlinie AB ist. Ist F der Brennpunkt, so ist der Halbirungspunkt O der AF der Scheitel der Parabel, nimmt man aber F′ als Brennpunkt, so hat man AF′ zu halbiren; da nun AF′ = 2OF + 2FP = 2(OF + FP) = 2.OP, so braucht man nur AO′ = OP abzuschneiden, um $\frac{AF'}{2}$ zu erhalten. Man sieht also, daß durch den Punkt M für dieselbe Leitlinie zwei Parabeln möglich sind, die Parabel 1, deren Brennpunkt F und Scheitel O ist, und die Parabel 2, deren Brennpunkt F′ und Scheitel O′ ist.

Die Werthe von AF und AF′, d. h. die halben Parameter, ließen sich durch Rechnung bestimmen; denn da AP gleich der Abscisse des Punktes M vom Scheitel an mehr $\frac{p}{4}$ ist, und MP die Ordinate ist, so hat man, wenn AP = a, MP = b; $b^2 = p\left(a - \frac{p}{4}\right)$, daher $p^2 - 4ap = -4b^2$, woraus $\frac{p}{2} = a \pm \sqrt{a^2 - b^2}$. Sind also a und b bekannt, so erhält man durch den letzten Ausdruck die zwei Werthe für $\frac{p}{2}$, welche auch ganz mit unserer Figur übereinstimmen, da $FP = F'P = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist.

§. 290. Nach diesen Vorbereitungen ist es uns möglich gemacht, durch einen gegebenen Punkt der Parabel zu derselben eine Berührungslinie zu ziehen.

Fig. 333.



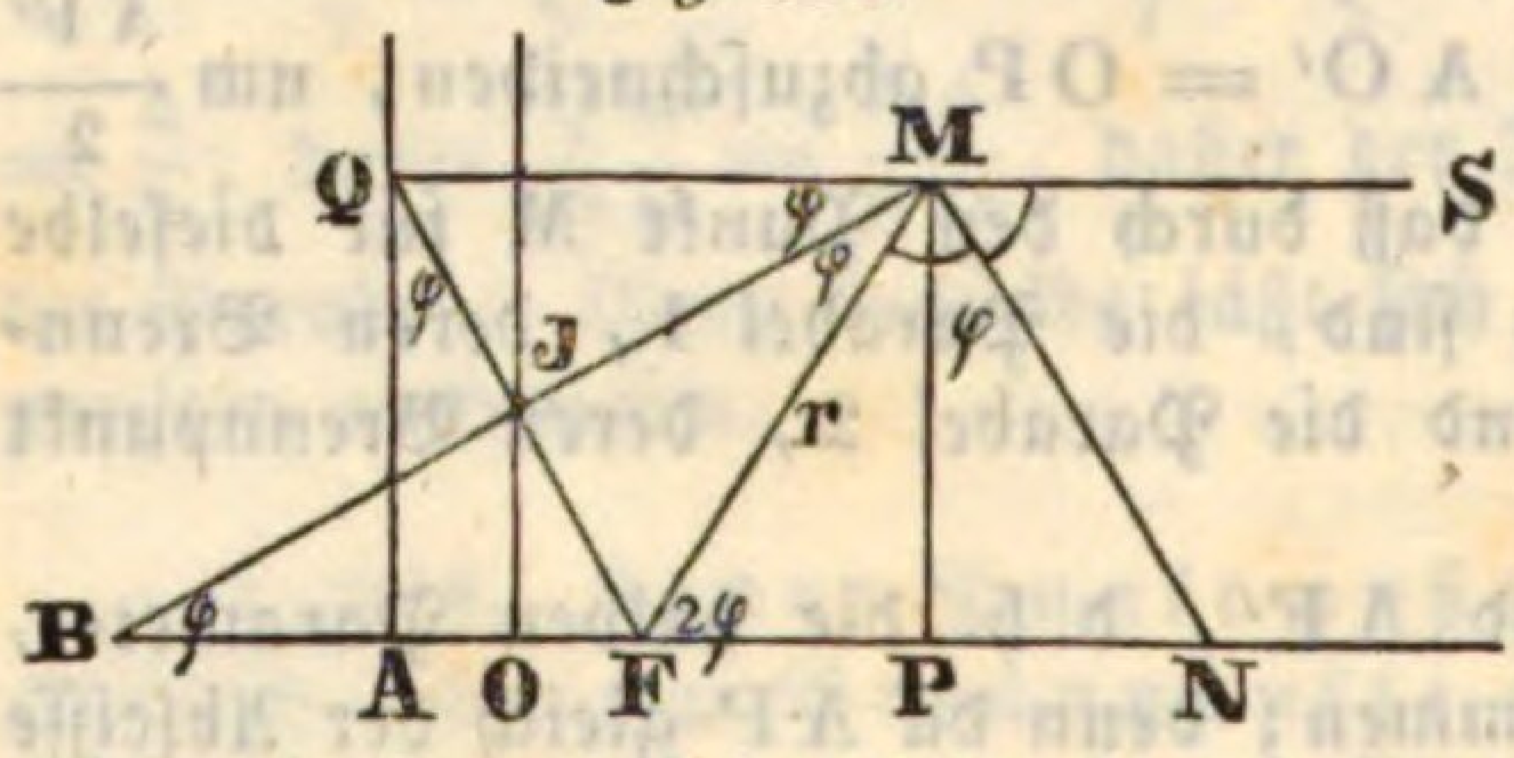
Es sey M ein Punkt der Parabel, deren Brennpunkt F und die Leitlinie AB sey, daher das Loth PM = MF; verbinde ich nun P mit F, halbire PF in I, verbinde I mit M, so behaupte ich, daß die Gerade IM die verlangte Berührungslinie der Parabel im Punkte M sey, d. h daß außer dem Punkte M alle anderen Punkte der Geraden IM außerhalb der Parabel liegen. Um nicht gleichsam durch die Zeichnung den Satz schon als bewiesen anzunehmen, zeichnen wir hier absichtlich die Parabel nicht.

Nehmen wir irgend einen anderen Punkt der IM, z. B. N oder N′, verbinden wir ihn mit P und F, so sieht man leicht, daß NF = NP,

N′F = N′P ist; fällt man nun die Lothe NQ und N′Q′ auf AB, so hat man PN > QN, PN′ > Q′N′, daher FN > QN, FN′ > Q′N′, daher N und N′ außerhalb der Parabel, was sich von allen Punkten der IM außer dem Punkte M nachweisen läßt; daher ist die IM eine Berührungslinie der Parabel im Punkte M.

§. 291. Es sey M ein Punkt der Parabel, verzeichnen wir die ihm zugehörige Berührungslinie.

Fig. 334.



Verbinden wir also M mit dem Brennpunkte F, fällen von M ein Loth MQ auf die Leitlinie AQ, halbiren wir den Winkel QMF durch die MI, welche verlängert die Achse in B schneidet, ziehen wir die Ordinate MP, wo natürlich MP ⊥ AB ist. Wir wissen nun, die MP wird die Parabel in M berühren; halbiren wir AF in O, so wird O der Scheitel der Parabel seyn, und OP die Abscisse des Punktes M. Verbinden wir O mit I, so ist OI ∥ AQ, da QI = IF und AO = OF, daher ist auch OI = $\frac{1}{2}$AQ = $\frac{1}{2}$MP.

Jede Berührungslinie der Parabel schneidet vom Lothe im Scheitel auf die Achse ein Stück ab, welches der Hälfte der Ordinate (y) des Berührungspunktes gleich ist.

Dieß gibt uns eine leichte Verzeichnungsweise der Berührungslinie der Parabel in M, ich brauche nur im Scheitel ein Loth zu errichten, davon ein Stück gleich der halben Ordinate (MP) des Punktes M abzuschneiden, den also bestimmten Punkt I mit M zu verbinden, so hat man die verlangte Berührungslinie MI. Weil OI ∥ MP, so hat man BO : BP = IO : MP, da aber IO = $\frac{1}{2}$MP, so ist BO = $\frac{1}{2}$BP, daher BO = OP. Dieß gibt eine zweite leichte Verzeichnungsart einer Berührenden der Parabel; ich darf nur vom Scheitel O in entgegengesetzter Richtung ein Stück BO = der Abscisse OP des Punktes M abschneiden, den dadurch bestimmten Punkt B mit dem Punkte M der Parabel verbinden, so habe ich die verlangte Berührende in M der Parabel.

Wir erlauben uns unsere Leser hier auf einige in der Theorie der Krummen häufig vorkommende Benennungen aufmerksam zu machen. Das Stück der Berührungslinie zwischen dem Berührungspunkte und der Geraden, auf welcher die Abscissen gemessen werden, heißt die Tangente des Punktes, so ist hier MB die Tangente des Punktes M.

Jede Gerade, die auf der Berührenden im Berührungspunkte senkrecht steht, heißt eine Normallinie, so ist hier, wenn MN ⊥ MB ist, MN eine Normallinie, das Stück der Normallinie zwischen dem Errichtungspunkte und der Achse heißt die Normale des Punk-

tes, so ist das Stück MN die Normale des Punktes M. Das Stück der Achse, das zwischen der Berührenden (BM) und der Ordinate (MP) enthalten ist, heißt die Subtangente des Punktes (M). Hier ist BP die Subtangente von M, und man sieht: bei der Parabel ist die Subtangente des Punktes gleich der doppelten Abscisse dieses Punktes.

Das Stück der Achse zwischen der Normale (MN) und der Ordinate (MP) heißt die Subnormale des Punktes (M). Hier ist PN die Subnormale von M.

Da hier $MPN \equiv QAF$, also $PN = AF = \frac{p}{2}$ ist, so sieht man: bei der Parabel ist die Subnormale jedes Punktes stets dieselbe, gleich dem halben Parameter.

Nennt man den Winkel $MBP = \varphi$, so ist auch $PMN = \varphi$, und man hat aus dem Dreiecke MBP, somit $\tang \varphi = \frac{y}{2x}$.

Drücken wir nun φ durch p und x, p und y, r und x aus, so hat man: $\tang \varphi = \frac{p}{2y}$; $\tang^2 \varphi = \frac{p}{4x}$, und da der Leitstrahl $r = FM = x + \frac{p}{4}$, ist also $x = r - \frac{p}{4}$, so hat man:

$$\tang^2 \varphi = \frac{p}{4r - p}, \text{ daher } \sin^2 \varphi = \frac{p}{4r}$$

(daß $r \sin^2 \varphi = OF = \frac{p}{4}$ ist, sieht man auch aus dem Dreiecke IOF).

Eben so hat man:

$$MN = \frac{p}{4 \sin \varphi} = \frac{y}{\cos \varphi}, \; MN^2 = \frac{px}{\cos^2 \varphi}.$$

Aus dem früheren Werthe von $\tang^2 \varphi$ ergibt sich $\cos^2 \varphi = \frac{x}{x + \frac{p}{4}}$ oder $\cos^2 \varphi = \frac{x}{r}$, daher $MN^2 = pr$, d. h.

Die Normale jedes Punktes der Parabel ist das geometrische Mittel zwischen dem Parameter und dem Leitstrahl, was sich auch aus der Aehnlichkeit der Dreiecke QAF und MIF ergibt, zu Folge welcher man hat: $AF : QF = IF : MF$, daher auch $2AF : QF = 2 . IF : MF$, oder da $QF = MN$ ist, $p : MN = MN : r$.

Wir haben ferners $r = x + \frac{p}{4}$, daher $x = r - \frac{p}{4}$, daher $y^2 = px = pr - \frac{p^2}{4}$, woraus $r = \frac{4y^2 + p^2}{4p}$, eben so ist $x = r \cos^2 \varphi$; $y = r \sin 2\varphi$; $x = \frac{p}{4 \tang^2 \varphi}$; $y = \frac{p}{2 \tang \varphi}$ (aus dem Dreiecke MPN); substituirt man die Werthe von x und y, durch r und φ ausgedrückt, in der Gleichung $y^2 = px$, so hat man $4r^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = pr \cos^2 \varphi$

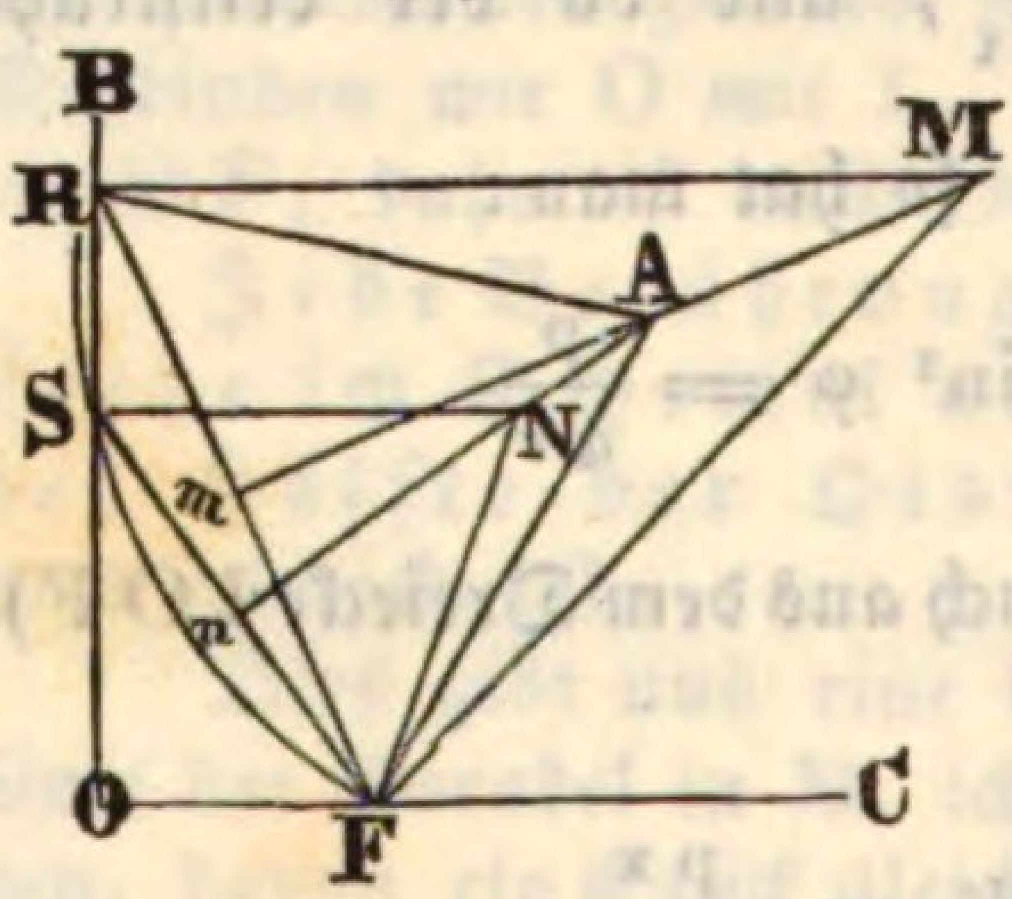
oder $r = \frac{p}{4\sin^2\varphi}$. Diese Gleichung $r\sin^2\varphi = \frac{p}{4}$ ergibt sich auch unmittelbar aus der Figur; denn $r\sin\varphi = IF$, und $IF\sin\varphi = OF = \frac{p}{4}$. Eben so ist $MB = \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{2x}{\cos\varphi} = 2r\cos\varphi = \frac{p\cos\varphi}{2\sin^2.\varphi}$.

Endlich sehen wir, daß die Normale MN den Winkel FMS, den der Leitstrahl eines Punktes der Parabel mit der durch diesen Punkt mit der Achse gleichlaufend gezogenen Geraden bildet, halbiret; denn SMN = MNF, weil MS ∥ AN, MNF = FMN, weil FN = FM, daher SMN = FMN.

§. 292. Durch einen außerhalb der Parabel gegebenen Punkt zu derselben eine Berührende zu ziehen, wenn der Brennpunkt und die Leitlinie gegeben sind.

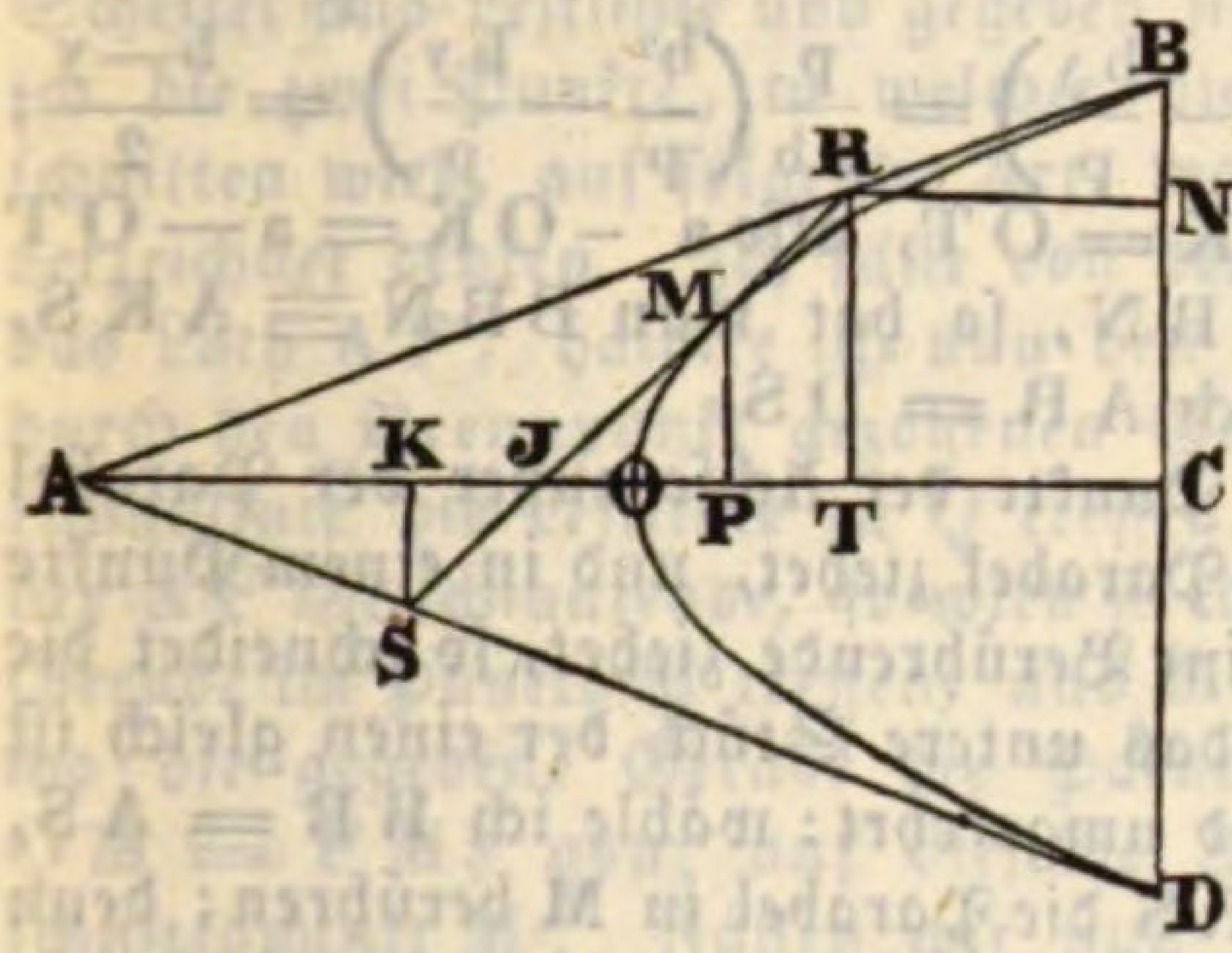
Wir wollen uns der Allgemeinheit wegen die Parabel selbst nicht gezeichnet denken, und wollen diese Aufgabe als aufgelöset betrachten, um so rückwärts schließend die Auflösung zu finden.

Fig. 335.



Denken wir uns durch den Punkt A außerhalb der Parabel, deren Achse OC, Brennpunkt F, Leitlinie AB ist, eine Berührende AM gezogen, wo M der Berührungspunkt sey. Fällt man von M das Loth RM auf AB, verbindet R mit F, so wird AM verlängert die RF in m halbiren, und darauf senkrecht stehen, wornach sich zeigen läßt, daß AR = AF ist. Da nun AF gegeben, so kann ich den Punkt R finden, ich darf nur aus dem gegebenen Punkte A mit einem Halbmesser = AF einen Kreisbogen beschreiben, der die Leitlinie in R trifft; halbire ich nun RF in m, ziehe mA, und durch R die mit der Achse gleichlaufende RM, so schneiden sich beide im Berührungspunkte M, und AM ist die verlangte Berührende. Der Kreisbogen aus A mit dem Halbmesser AF beschrieben, schneidet die Leitlinie im zweiten Punkte S, durch Halbirung der SF in n, Errichtung des Lothes nA und Ziehung der Parallelen SN erhalte ich den zweiten Berührungspunkt N und die zweite Berührende NA. Es lassen sich also durch jeden Punkt außerhalb der Parabel zu derselben zwei Berührende ziehen; man findet die Berührungspunkte, wenn man aus dem gegebenen Punkte mit einem Halbmesser gleich der Entfernung desselben vom Brennpunkte die Leitlinie schneidet, und durch diese Durchschnittspunkte parallele zur Achse ziehet, die die Parabel in den Berührungspunkten schneiden, falls selbe gezeichnet ist; ist dieses nicht der Fall, so hat man selbe nach der hier angezeigten Art zu finden.

Fig 336.



§. 293. Es sey der Punkt A in der Achse der Parabel außerhalb derselben, ziehen wir durch diesen Punkt die zwei Berührenden AB und AD zur Parabel, zu welchem Behufe wir nur OC = AO zu machen brauchen, so wird ein Loth in C auf die Achse errichtet, die Punkte B und D, und diese mit A verbunden die AB und AD geben. Nennen wir OC = a, BC = CD = b, so ist, wenn der Parameter der Parabel = p ist, $b^2 = ap$. Es sey ferner M ein Punkt der Parabel, RS die Berührungslinie in diesem Punkte, und es sey $OP = x$, $MP = y$, folglich $y^2 = px$. Ich fälle ferners von R und S, wo die Berührende in M die AB und AD schneidet, die Lothe RT und KS auf die Achse, und RN ⊥ BC, so hat man:

$$\frac{RT}{AT} = \frac{BC}{AC} \text{ oder } \frac{RT}{a + OT} = \frac{b}{2a},$$

$$\frac{RT}{IT} = \frac{MP}{IP} \text{ oder } \frac{RT}{x + OT} = \frac{y}{2x},$$

$$\text{woraus } \frac{x + OT}{a + OT} = \frac{bx}{ay}.$$

Schaffen wir nun x und a hinaus, mittelst der Gleichungen

$$x = \frac{y^2}{p};\ a = \frac{b^2}{p}, \text{ so hat man:}$$

$$\frac{y^2 + p \cdot OT}{b^2 + p \cdot OT} = \frac{y}{b},$$

$$\text{woraus } OT = \frac{by}{p} = \frac{ay}{b};$$

$$\text{daher } RT = \frac{b}{2a} \cdot (a + OT), \text{ also}$$

$$RT = \frac{b + y}{2};$$

daher ist, wenn man RN ∥ AC zieht, BN = BC − RT, oder

$$BN = b - \frac{b + y}{2} = \frac{b - y}{2}.$$

Eben so hat man:

$$\frac{KS}{AK} = \frac{CD}{AC} \text{ oder } \frac{KS}{a - OK} = \frac{b}{2a},$$

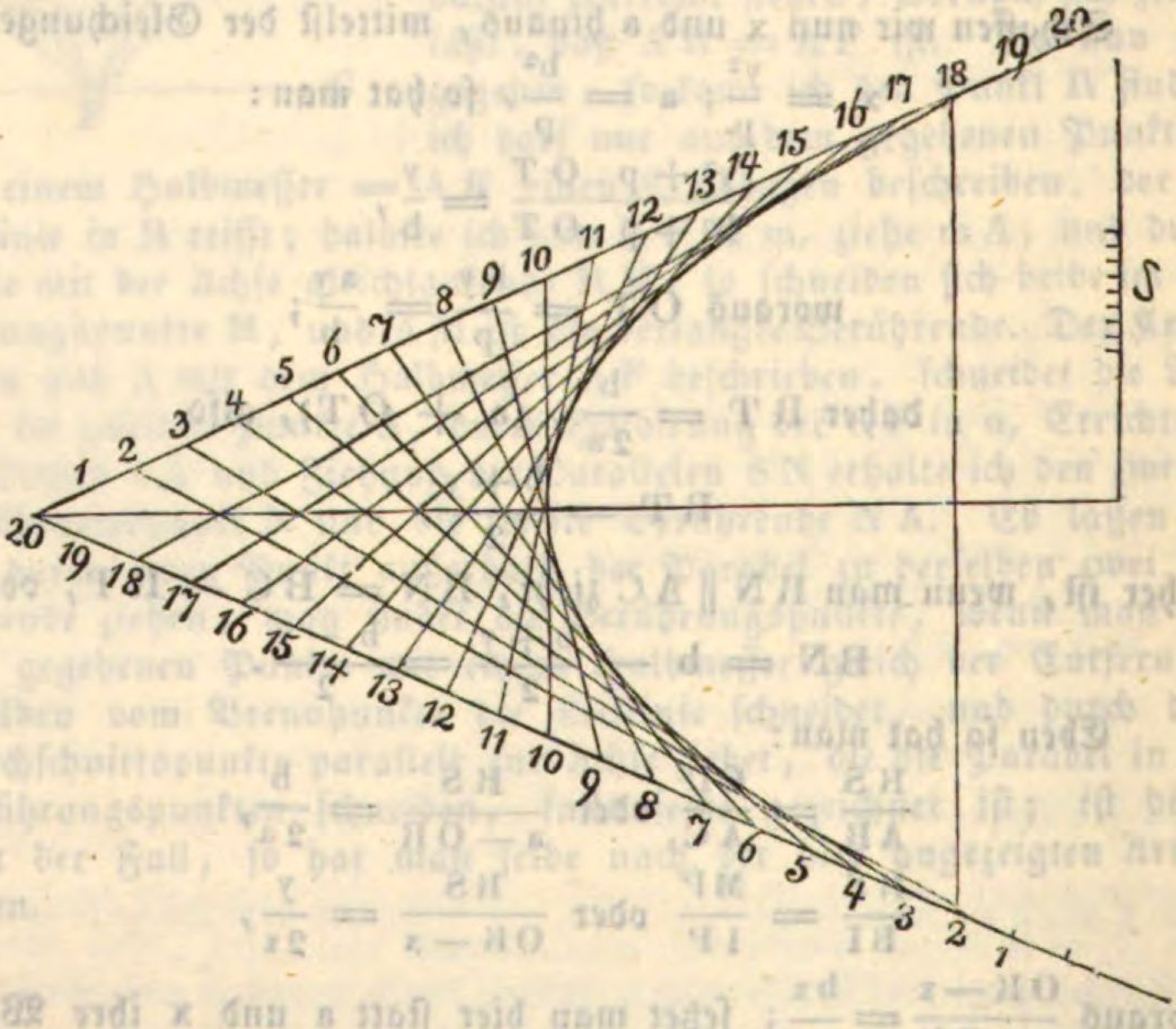
$$\frac{KS}{KI} = \frac{MP}{IP} \text{ oder } \frac{KS}{OK - x} = \frac{y}{2x},$$

woraus $\frac{OK - x}{a - OK} = \frac{bx}{ay}$; setzet man hier statt a und x ihre Werthe,

und bestimmt den Werth von OK, so hat man: $OK = \frac{by}{p}$, daher $OK = OT$ und $KS = \frac{b}{2a}\left(a - \frac{by}{p}\right) = \frac{p}{2b}\left(\frac{b^2}{p} - \frac{by}{p}\right) = \frac{b-y}{2}$; daher $KS = BN$, da nun auch $OK = OT$, also $a - OK = a - OT$ ist, so hat man $AK = CT = RN$, so hat man $BRN \equiv AKS$, daher $AS = RB$, und daher auch $AR = DS$.

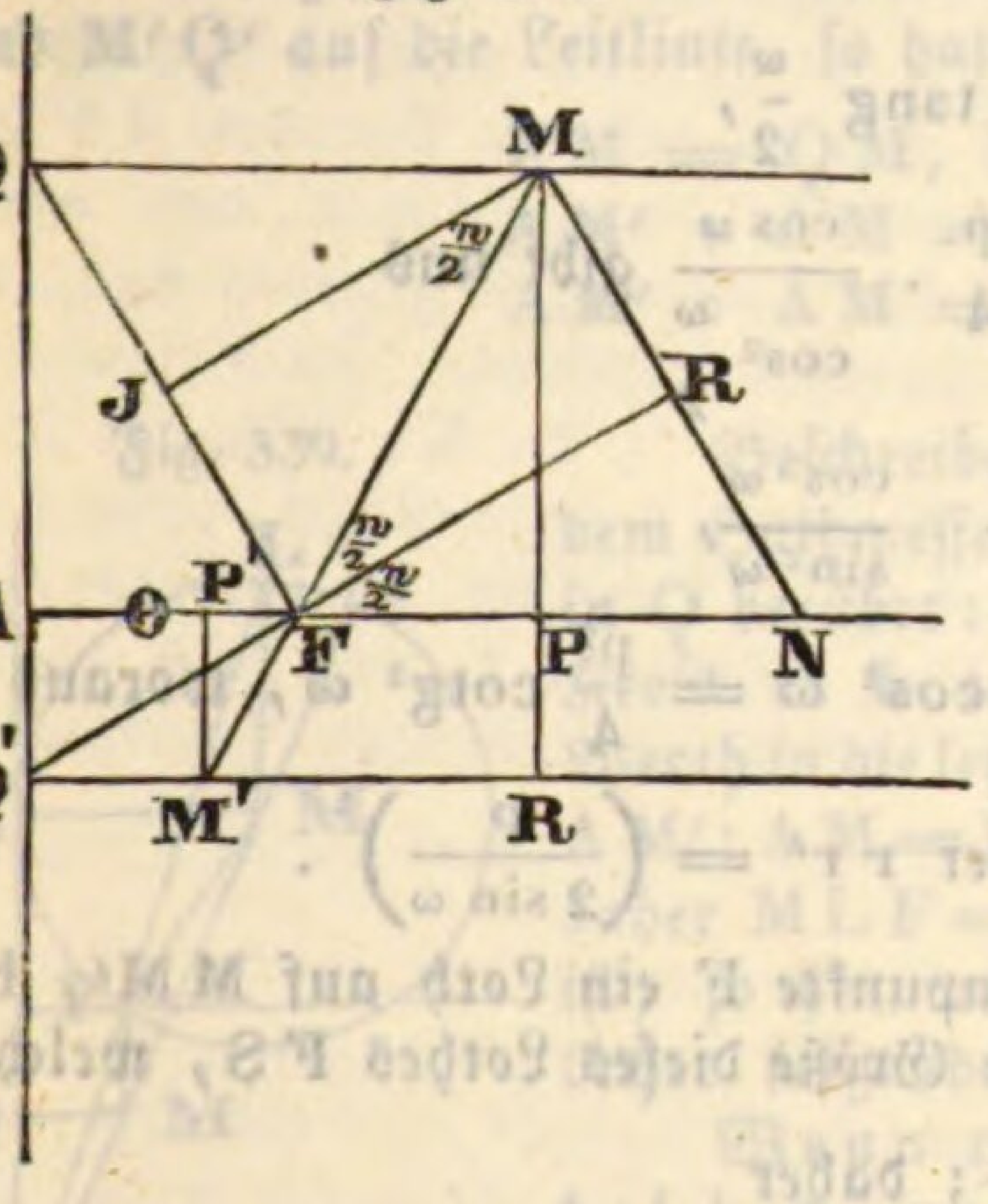
Wenn man also von einem Punkte der Achse außer der Parabel zwei Berührende (AB, AC) zur Parabel ziehet, und in einem Punkte der Parabel inzwischen ebenfalls eine Berührende ziehet, so schneidet die zweite die beiden erstern so, daß das untere Stück der einen gleich ist dem obern Stücke der andern. Und umgekehrt: wähle ich $RB = AS$, daher auch $AR = SD$, so muß RS die Parabel in M berühren; denn da die Berührende in M durch R und S gehet, und durch R und S nur eine Gerade möglich ist, so muß RS jedenfalls eine Berührende seyn, sobald $BR = AS$ gewählt wird. Dieß gibt uns ein neues Mittel, die Parabel zu verzeichnen, und zwar mittelst Berührungslinien. Wenn man ein gleichschenklichtes Dreieck ABD zeichnet, jede der gleichen Seiten AB und AD in gleiche Theile theilet, bei der einen von rechts nach links, bei der andern von links nach rechts die Theilungspunkte beziffert, und die gleich bezifferten Theilungspunkte verbindet, so erzeugt die Aufeinanderfolge der Berührenden die Parabel.

Fig. 337.



§. 294. Ziehen wir durch den Brennpunkt einer Parabel, deren Scheitel und Leitlinie uns gegeben sind, irgend eine Gerade, so finde ich die zwei Punkte, in welcher die Parabel von dieser Geraden geschnitten wird, auf folgende Art, wobei wir uns die Parabel als nicht verzeichnet denken. Ich fälle von dem Brennpunkte F auf die Leitlinie das Loth AF, halbire ich nun den Winkel, den dieses Loth mit der durch den Brennpunkt gezogenen Geraden bildet, so wird diese Halbirungslinie die Leitlinie in Q treffen; ziehe ich nun durch Q eine mit der AF Gleichlaufende, so wird sie die durch den Brennpunkt gezogene Gerade im Punkte M treffen, und M wird der Punkt der Parabel seyn, wo die gegebene Gerade die Parabel trifft, denn leicht findet man $QM = FM$; ganz auf dieselbe Art ergibt sich der zweite Durchschnittspunkt M'. Fällen wir nun die Lothe MP und M'P' auf die Achse, nehmen wir die Abscissen von F an, und nennen $FP = x$, $FP' = x'$, $MP = y$, $M'P' = y'$, $MF = r$, $M'F' = r'$ den Winkel $MFP = \omega$; halbiren wir diesen Winkel durch FR, so haben wir:

Fig. 338.



$$MFQ = AFQ = 90 - \frac{\omega}{2}.$$

Nun ist

$$IF = MF \sin\frac{\omega}{2} = r \sin\frac{\omega}{2},$$

daher $QF = 2\,IF = 2r \sin\frac{\omega}{2}$,

$$AF = QF \cos AFQ = QF \sin\frac{\omega}{2}$$

$= 2r \sin^2\frac{\omega}{2}$; da aber $AF = \frac{p}{2}$ ist, so hat man: $\frac{p}{2} = 2r \sin^2\frac{\omega}{2}$,

somit $r = \dfrac{p}{4\sin^2\frac{\omega}{2}}$.

Eben so ist

$$Q'F = 2M'F \cos\frac{\omega}{2} = 2r' \cos\frac{\omega}{2} \text{ und}$$

$$AF = Q'F \cos\frac{\omega}{2} = 2r' \cos^2\frac{\omega}{2}, \text{ daher } \frac{p}{2} = 2r' \cos^2\frac{\omega}{2},$$

und somit $r' = \dfrac{p}{4\cos^2\frac{\omega}{2}}$.

Da nun $x = r\cos\omega = \dfrac{p\cos\omega}{4\sin^2\frac{\omega}{2}} = \dfrac{p}{4} \cdot \dfrac{\cos^2\frac{\omega}{2} - \sin^2\frac{\omega}{2}}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$ ist, so hat

$$\text{man } x = \frac{p}{4}\left(\operatorname{cotg}^2 . \frac{\omega}{2} - 1\right), \text{ und}$$

$$y = r \sin \omega = \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{p}{4} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\sin^2 \frac{\omega}{2}}, \text{ daher}$$

$$y = \frac{p}{2} \operatorname{cotg} \frac{\omega}{2},$$

$$x' = r' \cos \omega = \frac{p}{4} \cdot \frac{\cos \omega}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{p}{4} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\omega}{2} - \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}, \text{ also}$$

$$x' = \frac{p}{4}\left(1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}\right), \text{ und}$$

$$y' = r' \sin \omega = \frac{p}{4} \cdot \frac{\sin \omega}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{p}{4} \cdot \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cos \frac{\omega}{2}}{\cos^2 \frac{\omega}{2}}, \text{ daher}$$

$$y' = \frac{p}{2} \operatorname{tang} \frac{\omega}{2},$$

$$x x' = \frac{p}{4} \cdot \frac{\cos \omega}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} \cdot \frac{p}{4} \cdot \frac{\cos \omega}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} \text{ gibt uns}$$

$$x x' = \frac{p^2}{4} \cdot \frac{\cos^2 \omega}{\sin^2 \omega},$$

$$x x' = \frac{p^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \omega; \text{ oder } r r' \cos^2 \omega = \frac{p^2}{4} \operatorname{cotg}^2 \omega, \text{ woraus}$$

$$r r' \sin^2 \omega = \frac{p^2}{4}, \text{ oder } r r' = \left(\frac{p}{2 \sin \omega}\right)^2.$$

Denkt man sich in dem Brennpunkte F ein Loth auf MM′, bis es die Leitlinie in S trifft, so ist die Größe dieses Lothes FS, welches wir l nennen wollen, gleich $\frac{p}{2 \sin \omega}$; daher

$$r r' = l^2, \text{ oder } r : l = l : r';$$

d. h. errichtet man im Brennpunkte auf eine durch diesen Punkt gehende Sehne ein Loth, verlängert dieses, bis es die Leitlinie trifft, so ist dieses Loth das geometrische Mittel der zwei Stücke dieser Sehne.

Dem Früheren zu Folge hat man:

$$r r' = \frac{p^2}{4 \sin^2 \omega}; \; r + r' = \frac{p}{\sin^2 \omega}; \text{ daher}$$

$$(r + r') \sin^2 \omega = p, \text{ oder } MM' \sin^2 \omega = p.$$

Verlängert man also MP und Q′M′ bis R, so daß MR = MM′ sin ω ist, fällt von R ein Loth RS auf MM′, so ist MS = p. Aus den

Werthen von r und r′ ergibt sich schließlich noch folgende merkwürdige Gleichung:

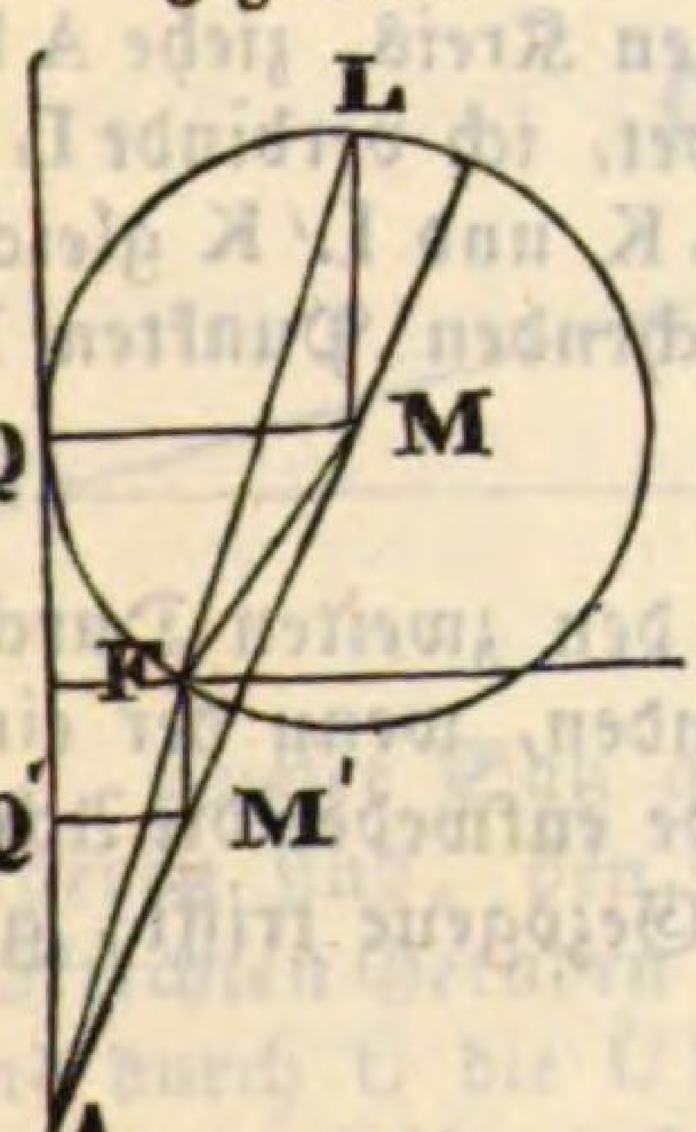
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{\frac{p}{4}}.$$

Die Gleichung $r r' \sin^2 \omega = \frac{p^2}{4}$, oder $r \sin \omega \,.\, r' \sin \omega = \frac{p^2}{4}$ gibt uns $MP \,.\, M'P' = \left(\frac{p}{2}\right)^2$, daher $MP : \frac{p}{2} = \frac{p}{2} : M'P'$, d. h. zieht man durch den Brennpunkt irgend eine gerade Linie, welche die Parabel in zwei Punkten schneidet, so ist der halbe Parameter stets die mittlere Proportionale zwischen den zwei Ordinaten dieser zwei Punkte.

§. 295. Es seyen M und M′ zwei Punkte der Parabel, deren Brennpunkt F seyn soll, die Sehne MM′ schneide verlängert die Leitlinie in A, ziehen wir die AF, MF, M′F, und fällen die Lothe MQ und M′Q′ auf die Leitlinie, so hat man:

$$FM = QM,\ FM' = Q'M'$$
$$AM' : AM = M'Q' : MQ, \text{ oder}$$
$$AM' : AM = FM' : FM.$$

Fig. 339.



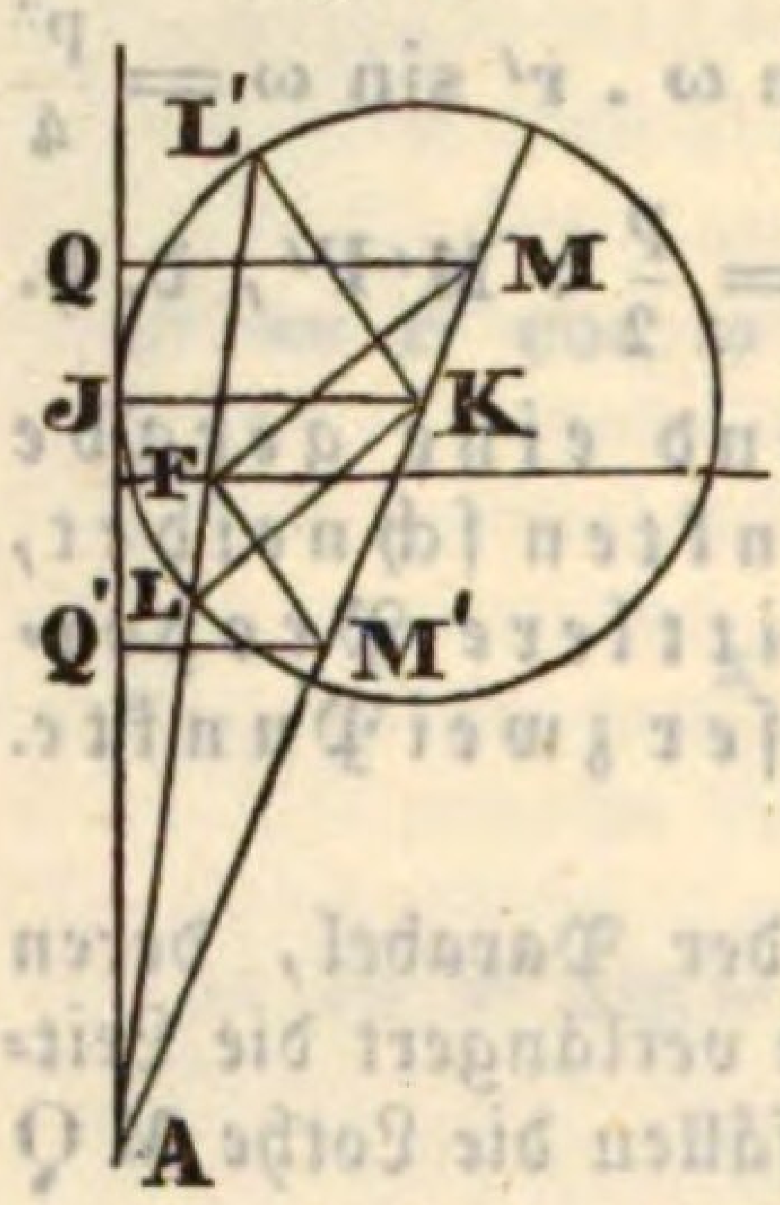
Beschreibe ich nun aus dem Centrum M mit dem Halbmesser FM einen Kreis, der die Leitlinie in Q berührt; verlängere die AF, bis sie diesen Kreis in L trifft, so ist LM = FM, diesen Werth in die letzte Proportion substituirt, hat man: AM′ : AM = FM′ : LM, daher muß LM ∥ FM′, daher MLF = AFM′. Da nun MLF = LFM ist, so hat man: MFL = M′FA, und kann daher folgenden Satz aufstellen:

Wenn man die Sehne einer Parabel bis zur Leitlinie verlängert, diesen Durchschnittspunkt mit dem Brennpunkte verbindet, so wird diese Verbindungslinie verlängert (AL) mit den beiden Leitstrahlen (FM, FM′) der Endpunkte der Sehne gleiche Winkel bilden.

Dieser Satz kann uns dazu dienen, wenn der eine Durchschnittspunkt einer Geraden und der Parabel gegeben ist, den andern Durchschnittspunkt zu finden. Ist der Punkt M ein Punkt der Parabel, und es frägt sich, wo schneidet die Gerade noch die Parabel, so beschreibe ich aus M mit dem Halbmesser FM einen Kreis, ziehe AF, die AF schneidet noch den Kreis in L, verbinde LM, und ziehe durch F die FM′ ∥ LM, so ist der Punkt, wo diese FM′ die AM schneidet, nämlich M′, der zweite Durchschnittspunkt.

§. 296. Dieß bahnt uns den Weg zur Auffindung der Durchschnittspunkte einer schiefen Geraden mit der Parabel durch Verzeichnung, ohne daß die Parabel dabei gezeichnet zu seyn braucht. Um diese Methode aufzufinden, betrachten wir die Gerade AM, welche die Parabel in M und M′ trifft, und suchen wir nun das Verhalten dieser Punkte gegen den Brennpunkt F und die durch den Punkt A gezogene AF.

Fig. 340.



Ich nehme aufs Gerathewohl einen Punkt der MM′, z. B. K, fälle KI ⊥ QQ′ die Leitlinie, eben so QM und Q′M′ lothrecht auf die Leitlinie, beschreibe aus K mit KI einen Kreis, der die AF in L und L′ schneidet, so ist:

$$\frac{AK}{KI} = \frac{AM}{QM}; \quad \frac{AK}{KI} = \frac{AM'}{QM'};$$

da nun KI = LK = L′K, so hat man:

$$\frac{AK}{LK} = \frac{AM}{FM}; \quad \frac{AK}{L'K} = \frac{AM'}{FM'};$$

daher also LK ∥ FM, und L′K ∥ FM′ ist; da nun die Punkte L und L′ als Durchschnittspunkte des Kreises mit der Geraden AF gegeben sind, so kann man das Vorhergehende dazu benützen, um, wenn der Brennpunkt F, die Leitlinie und die Gerade AK gegeben sind, die Punkte zu finden, wo die AK die Parabel schneidet. Zu diesem Behufe nehme ich irgend einen Punkt der AK, z. B. K, fälle ein Loth KI auf die Leitlinie, beschreibe aus K mit KI einen Kreis, ziehe AF, welche den Kreis in den Punkten L und L′ schneidet, ich verbinde LK und L′K, und ziehe durch F Gerade, die mit LK und L′K gleichlaufend sind, diese werden die AK in den zu suchenden Punkten M und M′ schneiden.

§. 297. Leichter ist es, durch Verzeichnung den zweiten Durchschnittspunkt einer Geraden und der Parabel zu finden, wenn der eine Durchschnittspunkt und der Punkt, wo diese Gerade entweder die Achse oder die durch den Scheitel auf die Achse senkrecht Gezogene trifft, gegeben sind.

Fig. 341.

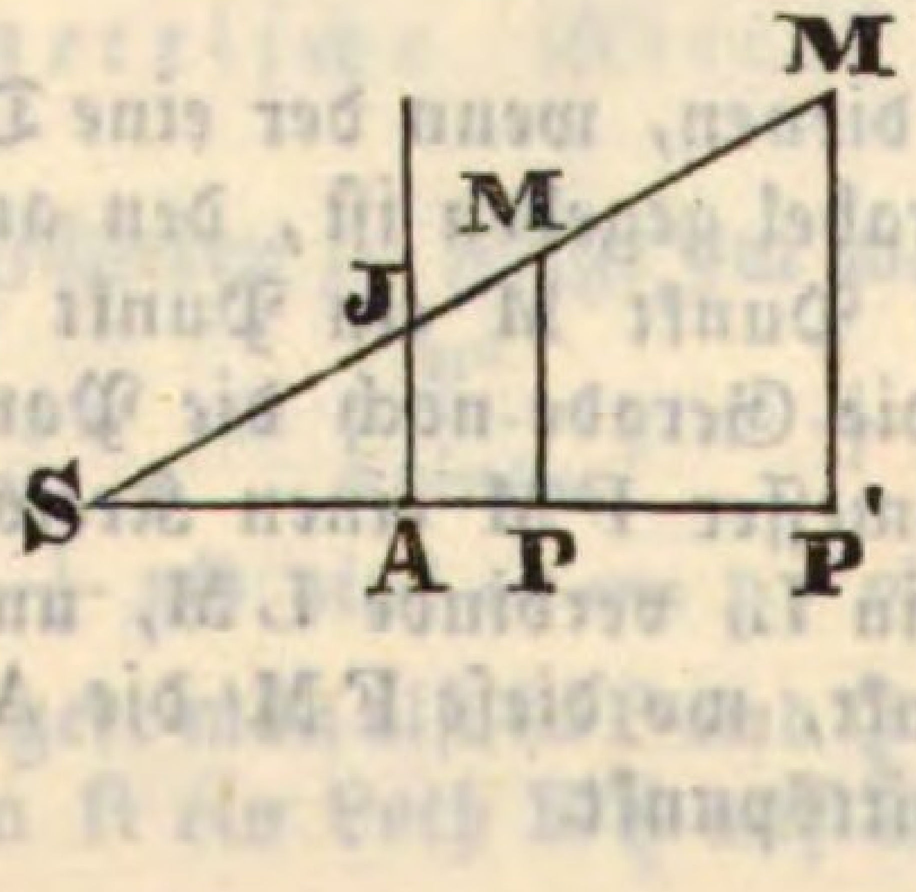
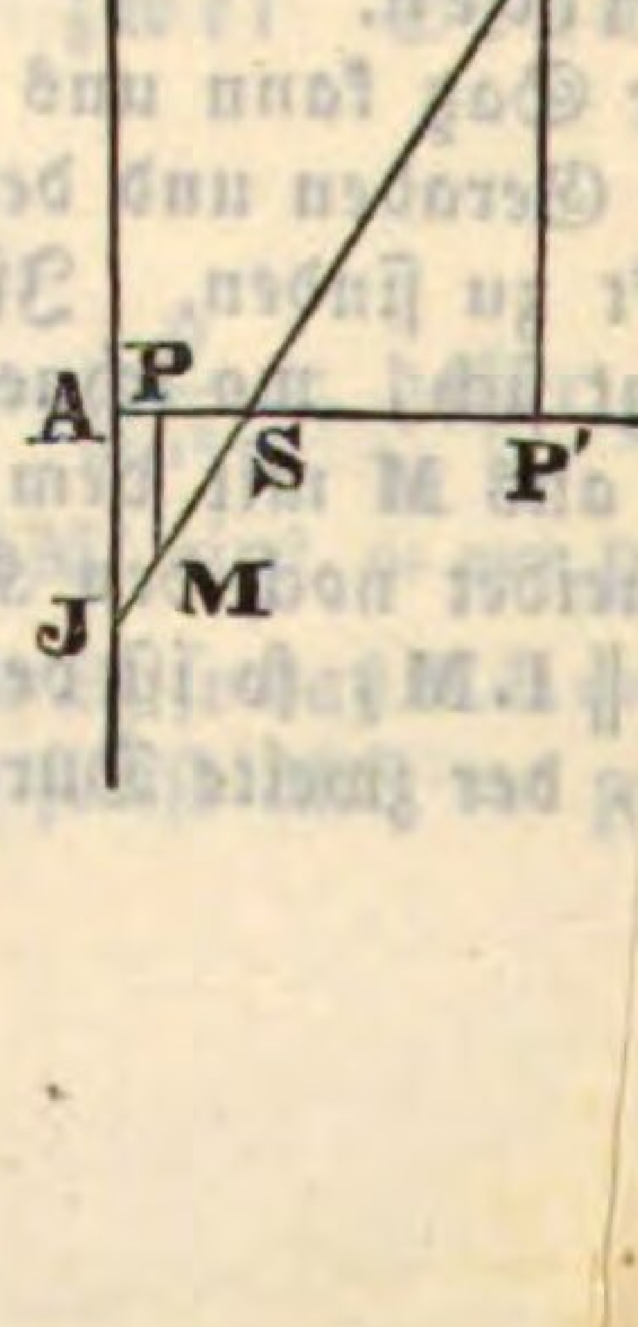


Fig. 342.



Zur Untersuchung der Aufgabe sey die Sehne MM′, welche die Parabel in den Punkten M und M′ die Achse in S, und die auf diese Achse im Scheitel A senkrechte Gerade in I trifft, so hat man:

$$\frac{PM^2}{PM'^2} = \frac{AP}{AP'}, \text{ aber eben so } \frac{MP}{M'P'} = \frac{PS}{P'S}, \text{ daher}$$

$$\frac{PS^2}{P'S^2} = \frac{AP}{AP'} \text{ oder } PS^2 \,.\, AP' = P'S^2 \,.\, AP, \text{ folglich}$$

$(AP + AS)^2 . AP' = (AP' + AS)^2 . AP$ in der einen Figur, und $(AS - AP)^2 . AP' = (AP' - AS)^2 . AP$ in der andern.

Beide Gleichungen geben:

$$AP^2 . AP' + AS^2 . AP' = AP'^2 . AP + AS^2 . AP, \text{ woraus}$$

$$AS^2 (AP' - AP) = AP \,.\, AP' (AP' - AP), \text{ oder}$$

$$AS^2 = AP \,.\, AP', \text{ daher}$$

$$AP : AS = AS : AP' \quad (1),$$

d. h. die Abscisse des Durchschnittspunktes der Sehne der Parabel mit ihrer Achse ist stets das geometrische Mittel zwischen den Abscissen der zwei Endpunkte dieser Sehne.

Fig. 343.

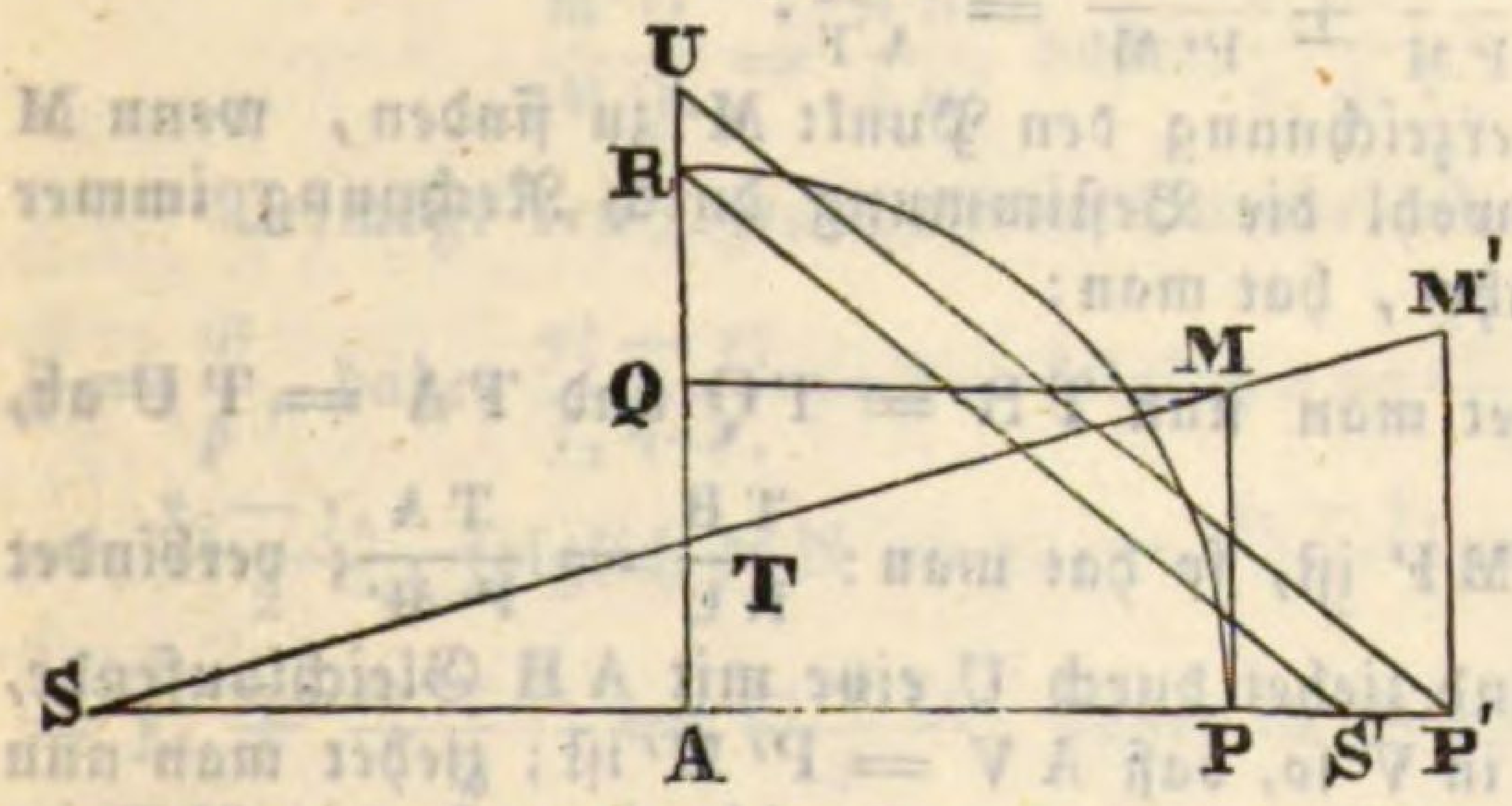
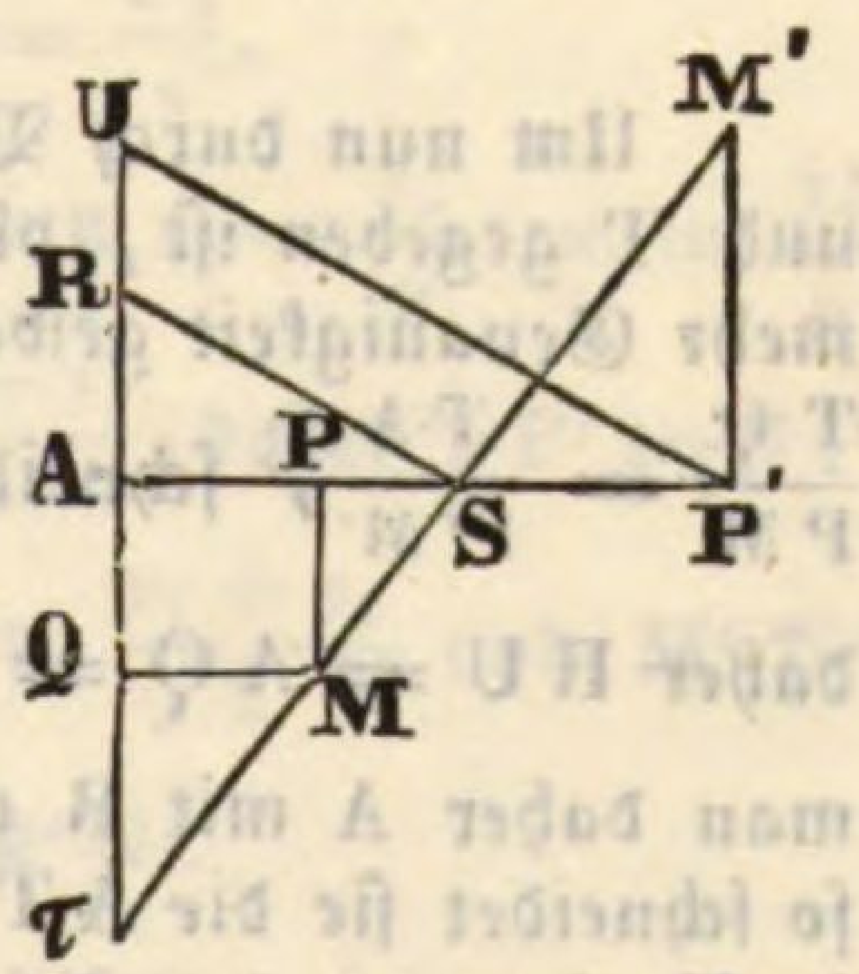


Fig. 344.



Dieser Satz gibt uns ein Mittel an die Hand, wenn M und S gegeben sind, den Punkt M′ zu finden. Ich schneide von der in A senkrechten Geraden AR = AP, AU = AS = AS′ ab, ziehe RS′ und durch U die UP′ ∥ RS′, so hat man AS′ : AP′ = AR : AU, d. i. wie AP : AS; zieht man nun durch P′ die M′P′ ∥ mit MP, so gibt der Durchschnitt von M′P′ und MS den verlangten Punkt M′. Genauer wird es immer seyn, die AP′ lieber durch Rechnung als durch Verzeichnung zu finden. Die Gleichung (1) gibt uns:

$$AP + AS : AP' + AS = AP : AS$$

$$AS - AP : AP' - AS = AP : AS;$$

daher rücksichtlich beider Figuren

$$PS : P'S = AP : AS \quad (2).$$

Aus den beiden Figuren ersehen wir ferner:

$$\frac{TQ}{PM} = \frac{QM}{PS}, \text{ oder da } QM = AP \text{ ist, } \frac{TQ}{PM} = \frac{AP}{PS};$$

da nun ferner $\frac{AT}{P'M'} = \frac{AS}{SP'}$, und $\frac{AP}{PS} = \frac{AS}{SP'}$, vermöge (2), so hat man:

$$\frac{TQ}{PM} = \frac{AT}{M'P'} \text{ oder } \frac{TQ}{TA} = \frac{PM}{P'M'}, \text{ daher}$$

$$\frac{TA \pm TQ}{P'M' \pm PM} = \frac{TA}{P'M'}, \text{ daher } \frac{TA}{P'M'} = \frac{AQ}{P'M' \pm PM}.$$

Da nun $AQ = PM$, so hat man:

$$TA = \frac{PM \cdot P'M'}{P'M' \pm PM} \quad (3),$$

d. h. der Abstand des Punktes, wo eine Sehne der Parabel die im Scheitel auf die Achse senkrechte Gerade schneidet vom Scheitel ist gleich dem Produkte der Ordinaten dividirt durch die Summe oder den Unterschied dieser Ordinaten der beiden Endpunkte der Sehne.

Für $PM = PM'$ wird TA unendlich, d. h. $MM' \parallel AT$, in diesem Falle ist also MM' senkrecht auf der Achse; es werden also nur die auf der Achse senkrechten Sehnen durch die Achse halbirt.

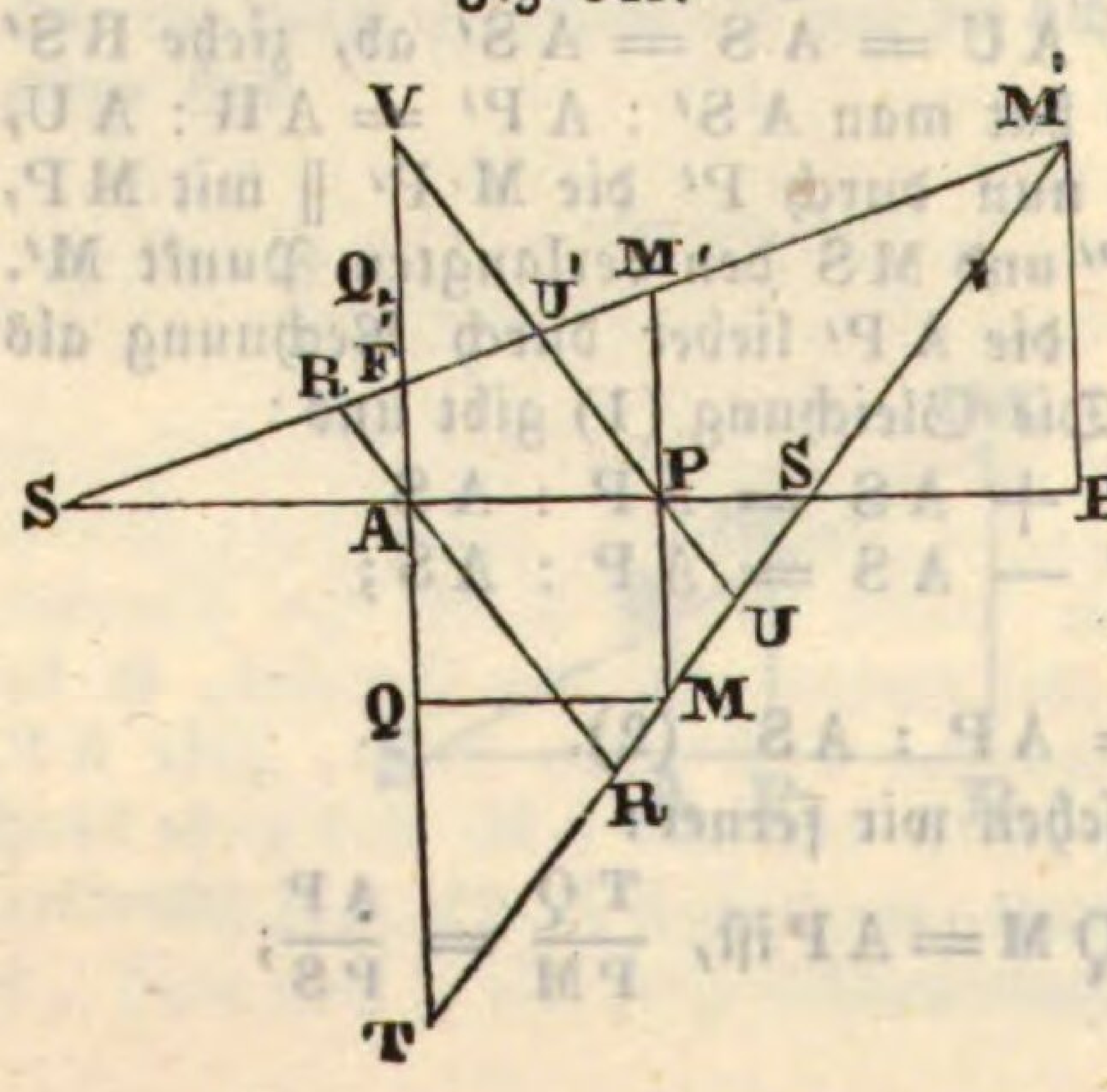
Die Gleichung (3) gibt uns folgende merkwürdige Gleichung:

$$\frac{1}{PM} \pm \frac{1}{P'M'} = \frac{1}{AT}.$$

Um nun durch Verzeichnung den Punkt M' zu finden, wenn M und T gegeben ist, obwohl die Bestimmung durch Rechnung immer mehr Genauigkeit gewährt, hat man:

$\frac{TQ}{PM} = \frac{TA}{P'M'}$, schneidet man nun $TR = TQ$ und $TA = TU$ ab, daher $RU = AQ = MP$ ist, so hat man: $\frac{TR}{RU} = \frac{TA}{P'M'}$; verbindet man daher A mit R und ziehet durch U eine mit AR Gleichlaufende, so schneidet sie die AT in V so, daß $AV = P'M'$ ist; ziehet man nun in V eine mit der Achse Gleichlaufende, so schneidet sie die MT im verlangten Punkte M'.

Fig. 345.

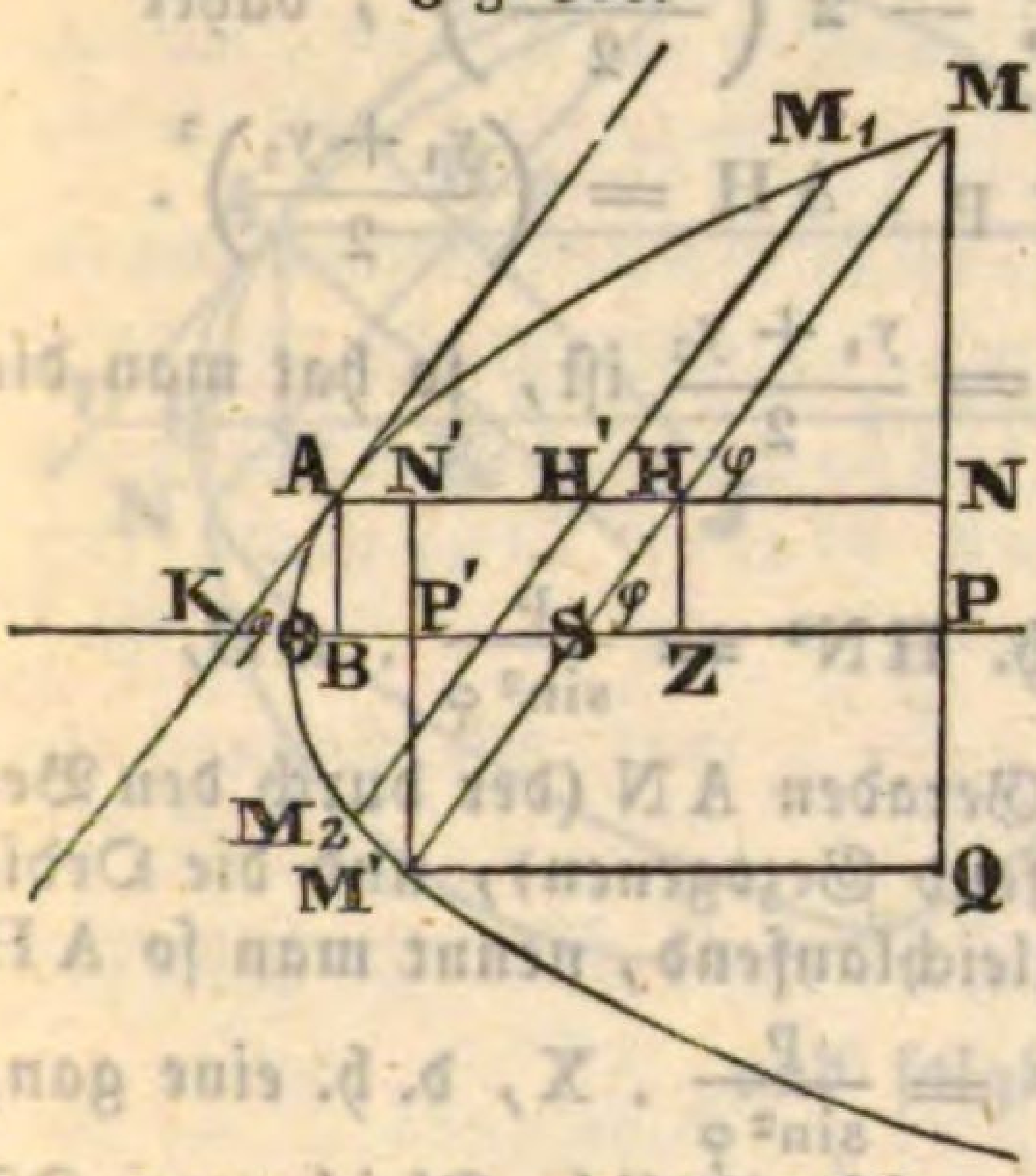


In derselben Figur ist auch dieselbe Verzeichnung rücksichtlich der Sehne MM_1 durchgeführt (wobei $M_1P = MP$ ist), wobei die Punkte $S_1R_1U_1$ gleichgeltende Bedeutung wie SRU haben, und wodurch derselbe Punkt V bestimmt wird.

§. 298. Wir wollen nun zur Parabel eine Berührende ziehen, und eine Sehne, die zu dieser Berührenden gleichlaufend ist, und wollen nachweisen, daß eine durch den Berührungspunkt mit der Achse

gleichlaufend gezogene Gerade, jede mit der Berührungslinie gleichlaufende Sehne halbirt.

Fig. 346.



Es sey durch den Punkt A die Berührende A K gezogen, und mit dieser gleichlaufend die Sehne M M', die Abscissen und Ordinaten der Punkte A, M, M' seyen $OB = \xi$; $OP = x_2$ $OP' = x_1$; $AB = \upsilon$, $MP = y_2$; $M'P' = y_1$. Die durch den Berührungspunkt A mit der Achse gleichlaufend Gezogene schneide die Sehne in H, und die Geraden M P und M'P' in den Punkten N und N'. Ziehen wir ferner durch M' eine mit der Achse gleichlaufende, bis diese von der M P in Q getroffen wird, so hat man $M'Q = PP' = x_2 - x_1$ und $PQ = P'M' = y_1$, daher $MQ = y_1 + y_2$; da nun das Dreieck M M'Q dem Dreiecke K A B ähnlich ist, so hat man:

$$\frac{M'Q}{MQ} = \frac{KB}{AB}, \text{ daher } \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} = \frac{2\xi}{\upsilon}.$$

Vermöge der Eigenschaft der Parabel ist nun $x_1 = \frac{y_1^2}{p}$; $x_2 = \frac{y_2^2}{p}$ $\xi = \frac{\upsilon^2}{p}$, daher $\frac{y_2^2 - y_1^2}{y_2 + y_1} = 2\upsilon$, folglich $\upsilon = \frac{y_2 - y_1}{2}$, daher $N'P' = NP = \frac{y_2 - y_1}{2}$, folglich $MN = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_2 + y_1}{2}$ und $M'N' = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{2} = \frac{y_2 + y_1}{2}$, daher $MN = M'N'$.

Da die Dreiecke M H N und M'H N' einerlei sind, so hat man: $HM = HM'$, daher H der Halbirungspunkt der Sehne M M' ist.

Heißt der Winkel, den die Sehne mit der Achse bildet, φ, so hat man:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\upsilon}{2\xi} = \frac{p}{2\upsilon} = \frac{p}{y_2 - y_1}.$$

Aus welcher Gleichung man auch y_2 berechnen kann, wenn y, p und φ gegeben sind. Man hat auch $\upsilon = \frac{p}{2 \operatorname{tang} \varphi}$, wodurch man das υ desjenigen Punktes der Parabel bestimmen kann, wo die Berührende den Winkel φ mit der Achse der Parabel macht.

Man sieht ferners:

$$HN = \frac{MN}{\sin \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \quad (1).$$

$$AH = BP' + N'H = x_1 - \xi + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} - \xi,$$

$$\text{oder } AH = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2p} - \frac{v^2}{p}, \text{ daher}$$

$$2p\,AH = y_1^2 + y_2^2 - 2\left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2, \text{ daher}$$

$$4p\,.\,AH = (y_1 + y_2)^2 \text{ oder } p\,.\,AH = \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^2.$$

Da nun vermöge (1) $HN \sin\varphi = \frac{y_1 + y_2}{2}$ ist, so hat man die merkwürdige Gleichung:

$$p\,.\,AH = HN^2\,.\,\sin^2\varphi, \text{ d. h. } HN^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}\,.\,AH,$$

d. h. nimmt man die Abscissen auf der Geraden AN (der durch den Berührungspunkt mit der Achse gleichlaufend Gezogenen), und die Ordinaten schief mit der Berührungslinie gleichlaufend, nennt man so AH = X und HM = Y, so hat man: $Y^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}\,.\,X$, d. h. eine ganz der für rechtwinkliche Ordinate auf der Achse ähnliche Gleichung. Ist nun $M_1 M_2 \parallel MM'$, so hat man, wenn $M_1 H_1 = Y_1$; $AH_1 = X_1$ ist,

$$Y_1^2 = \frac{p}{\sin^2\varphi}\,.\,X_1, \text{ daher } Y^2 : Y_1^2 = X : X_1.$$

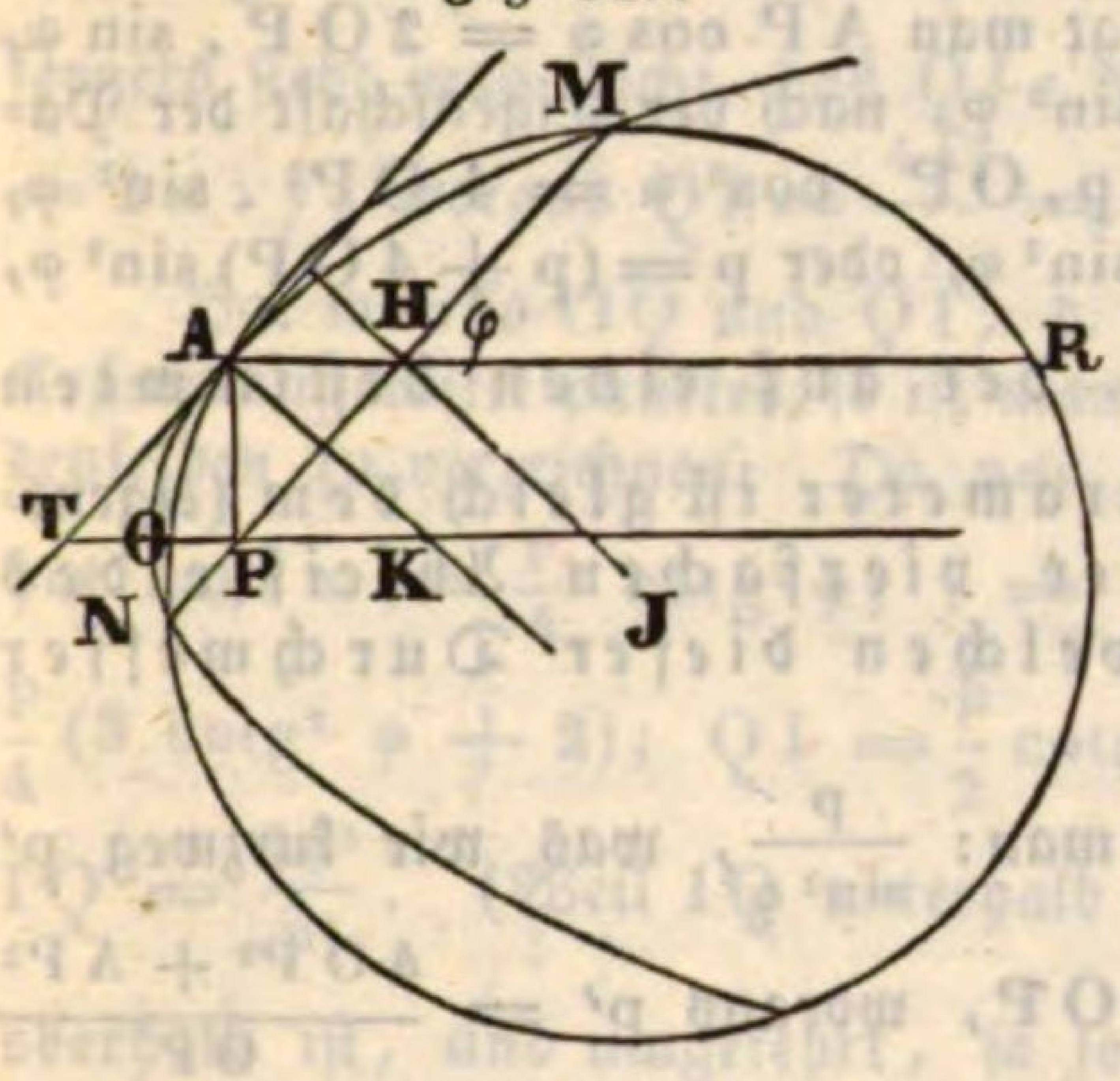
Also auch hier die Quadrate der Ordinaten wie ihre Abscissen.

Die Gerade AN wird also alle mit der Berührenden AK gleichlaufenden Sehnen halbiren, und deßhalb heißt man AN einen Durchmesser dieser Sehnen; man sieht so: alle mit der Achse der Parabel gleichlaufenden Geraden sind Durchmesser derjenigen Sehnen, die gleichlaufend sind mit derjenigen Geraden, die im Durchschnittspunkte des Durchmessers mit der Parabel diese berührt.

Es liegen also die Halbirungspunkte aller gleichlaufenden Sehnen stets in einer Geraden, die zur Achse gleichlaufend ist; alle diese Sehnen werden von ihren Durchmessern schief geschnitten, nur die Achse schneidet die Sehnen, welche zur Berührungslinie im Scheitel gleichlaufend gezogen werden, senkrecht; denn ist $v = 0$, so gibt die Gleichung $\tang\varphi = \frac{p}{2v}$, $\tang\varphi = \infty$, also $\varphi = 90^\circ$.

§. 299. Es sey MN eine Sehne der Parabel und AR ihr zugehöriger Durchmesser; wir wollen nun durch A, M und N einen Kreis durchlegen, dessen Mittelpunkt I ist.

Fig. 347.



Vermöge der so eben bewiesenen Eigenschaft der Parabel ist

$$HM^2 = \frac{p}{\sin^2 \varphi} . AH,$$

wo hier p der Parameter der Parabel, und φ der Winkel der Sehne mit ihrem Durchmesser ist. Schneidet der Kreis den Durchmesser in R, so hat man nach der Eigenschaft des Kreises

$$HM . HN = AH . HR, \text{ oder}$$
$$HM^2 = HR . AH,$$

und man hat somit

$$HR . AH = \frac{p}{\sin^2 \varphi} AH,$$

und folglich $HR = \frac{p}{\sin^2 \varphi}$.

Die Größe $\frac{p}{\sin^2 \varphi}$ könnte man den auf den Durchmesser HR reducirten Parameter nennen.

Legt man also durch drei Punkte A, M, N der Parabel einen Kreis, so wird stets das Stück des Durchmessers zwischen der Sehne und dem andern Durchschnittspunkte des Kreises und des Durchmessers dem auf diesen Durchmesser reducirten Parameter $\frac{p}{\sin^2 \varphi}$ gleich seyn. Es ist nämlich der Werth von HR stets derselbe, wie nahe oder wie weit M und N von A gewählt werden. Je näher wir nun M und N an A wälen, desto näher rückt auch H an A an, und stets wird HR dieselbe Größe behalten. Denken wir uns M und N unendlich nahe an A, so ist auch H unendlich nahe an A. Ist nun AK die Normale des Punktes A, also AK senkrecht auf die Tangente AT, so wird jeder Kreis, dessen Mittelpunkt in AK liegt, und dessen Halbmesser bis A reicht, die AT und auch die Parabel in A berühren. Derjenige aller dieser Kreise nun, der nicht nur die Parabel in A berührt, sondern zugleich durch die nächsten zwei Punkte von A gehet, wird von allen diesen Kreisen die innigste Berührung mit der Parabel haben, und diesen nennt man nun den Krümmungskreis. Je näher M und N an A sind, desto mehr nähert sich HI der AK, und es kommt der Mittelpunkt immer näher in die Normale.

Fallen M, N und H unendlich nahe an A oder in A selbst hinein, so finde ich denjenigen Kreis, der durch A und die unendlich nahen M und N gehet, wenn ich von AR ein Stück $AB = \frac{p}{\sin^2 \varphi}$ abschneide, im Halbirungspunkte dieser AB, und in A auf die berührende Senkrechte errichte; der Durchschnittspunkt dieser Lothe ist der Krümmungsmittelpunkt oder Mittelpunkt des Krümmungskreises; denn in dem Punkte A hat die Parabel und der Krümmungskreis dieselbe Krümmung.

Ist A P die Ordinate des Punktes A, und schneidet die Berührende von A die Achse in T, so hat man $AP \cos\varphi = 2\,OP\,.\,\sin\varphi$, woraus $AP^2\,.\cos^2\varphi = 4\,OP^2 \sin^2\varphi$, nach der Eigenschaft der Parabel ist $AP^2 = p\,.\,OP$, daher $p\,.\,OP\,.\cos^2\varphi = 4\,OP^2\,.\sin^2\varphi$, woraus $p\,(1 - \sin^2\varphi) = 4\,OP \sin^2\varphi$, oder $p = (p + 4\,OP)\sin^2\varphi$, also $\frac{p}{\sin^2\varphi} = p + 4\,OP$, d. h. der auf einen bestimmten Durchmesser reducirte Parameter ist gleich dem (eigentlichen) Parameter mehr der vierfachen Abscisse des Parabelpunktes, durch welchen dieser Durchmesser gehet.

Da nun $p = \frac{AP^2}{OP}$, so hat man: $\frac{p}{\sin^2\varphi}$, was wir kurzweg p' nennen wollen, gleich $\frac{AP^2}{OP} + 4\,OP$, woraus $p' = \frac{4\,OP^2 + AP^2}{OP}$

$$= \frac{PT^2 + AP^2}{OP} = \frac{AT^2}{OP}, \text{ daher } \frac{p'}{2} = \frac{AT^2}{PT},$$

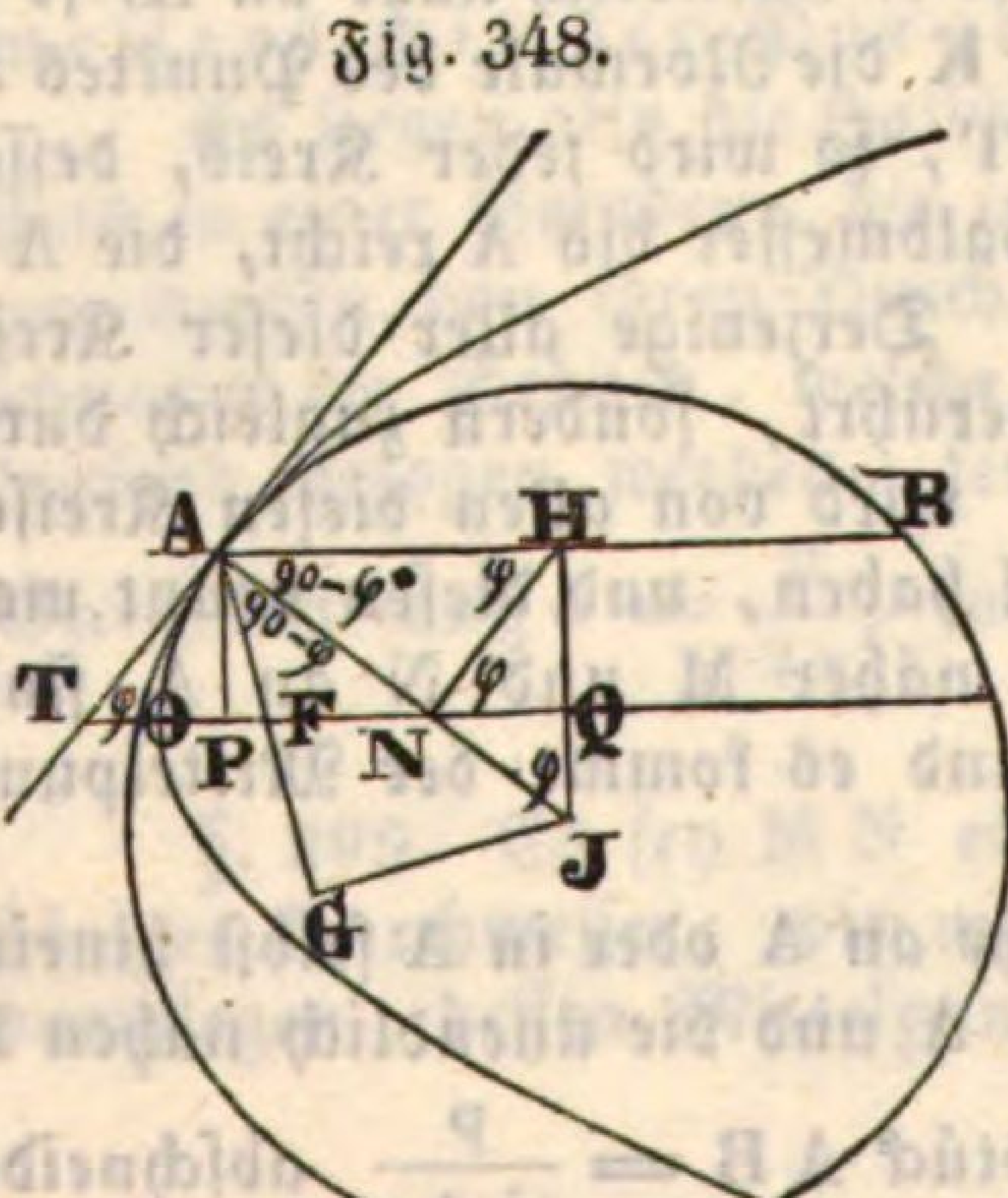
nun gibt uns unsere Figur $PT : AT = AT : TK$, woraus

$$KT = \frac{AT^2}{PT}, \text{ daher } \frac{p'}{2} = TK,$$

d. h. das Stück der Hauptachse zwischen der Berührenden und der Normale ist halb so groß als der reducirte Parameter, der zum Durchmesser des Berührungspunktes gehört.

§. 300. Verzeichnen wir also nach dem Vorhergehenden den Krümmungsmittelpunkt eines Punktes der Parabel.

Fig. 348.



Es sey A T die Berührende, A R ihr Durchmesser, A N die Normale, A P die Ordinate, $ATP = \varphi$, so ist $TN = \frac{p}{2\sin^2\varphi}$; ziehe ich nun durch N eine $NH \parallel AT$, so also, daß $AH = TN = \frac{p'}{2}$, so darf ich nur in H das Loth H I errichten, und I, wo dieses Loth die Normale A N schneidet, ist der Krümmungsmittelpunkt, und A I der Krümmungshalbmesser.

Man hat $AI = \frac{AH}{\sin\varphi}$, da nun $AH = \frac{p}{2\sin^2\varphi}$, so ist der Krümmungshalbmesser A I, den wir durch ρ ausdrücken wollen, $\rho = \frac{p}{2\sin^3\varphi}$.

Man sieht leicht aus der Congruenz der Dreiecke A T P und H N Q,

daß $NQ = TP = 2x$ ist, daher $OQ = x + \frac{p}{2} + 2x = 3x + \frac{p}{2}$; ferners sieht man leicht, daß $QI : NQ = NQ : HQ$, d. h. $QI : 2x = 2x : y$, woraus $QI = \frac{4x^2}{y} = \frac{4x^2}{\sqrt{px}} = 4x\sqrt{\frac{x}{p}}$.

Hat man so OQ und QI, d. h. die Abscisse und Ordinate des Krümmungsmittelpunktes, so ist man durch Rechnung leicht im Stande, denselben zu verzeichnen. Da nun $y^2 = px$; $y = 2x \tang \varphi$, so hat man $x = \frac{p}{4} \cotg^2 \varphi$; $y = \frac{p}{2} \cotg. \varphi$, daher auch $OQ = \frac{p}{4}(3 \cotg^2 \varphi + 2)$; $QI = \frac{p}{2} \cotg^3 \varphi$, eben so $OQ = \frac{6y^2 + p^2}{2p}$; $IQ = \frac{4y^3}{p^2}$. (Weil IQ unterhalb der Achse liegen muß, wenn AP oberhalb ist, und umgekehrt, so soll man eigentlich $IQ = -\frac{4y^3}{p^2} = -\frac{p}{2} \cotg \varphi = -4x\sqrt{\frac{x}{p}}$ schreiben.)

Verbinden wir den Punkt A mit dem Brennpunkte F, und nennen diesen Leitstrahl r, so hat man nach dem Früheren $r = x + \frac{p}{4}$, oder statt x den so eben erhaltenen Werth gesetzt,

$$r = \frac{p}{4} \cotg^2 \varphi + \frac{p}{4} = \frac{p}{4 \sin^2 \varphi};$$

ρ nun der Krümmungshalbmesser $= \frac{p}{2 \sin^3 \varphi}$, daher ist $\rho = \frac{2r}{\sin \varphi}$ oder $\rho \sin \varphi = 2r$. Verlängert man daher AF und fällt von I ein Loth IG auf AF, so hat man $AG = AI \sin \varphi = \rho \sin \varphi = 2r$, daher muß $FG = AF$ seyn, und man hat somit folgende leichte Verzeichnung des Krümmungsmittelpunktes: Man verlängert den Leitstrahl eines Punktes über den Brennpunkt hinaus, so daß diese Verlängerung gleich ist dem Leitstrahle, am Endpunkte dieser Verlängerung errichtet man auf dieselbe ein Loth, wo dieses Loth die Normale des gegebenen Parabelpunktes schneidet, ist der Krümmungsmittelpunkt.

Führt man in den Ausdruck für OQ das r ein, so hat man: $OQ = 3r - \frac{p}{4}$, also $OQ + \frac{p}{4} = 3r$, d. h. der Abstand des Krümmungsmittelpunktes von der Leitlinie ist drei Mal so groß als der Leitstrahl des zugehörigen Punktes der Parabel.

Für den Anfangspunkt ist $x = o$, $y = o$, also $\varphi = 90°$, es ist $OQ = \frac{p}{2}$; $IQ = o$; $\rho = \frac{p}{2}$, d. h der Krümmungshalbmesser des Scheitels ist gleich dem halben Parameter, der Krümmungsmittelpunkt liegt in der Achse und hat den Abstand $= \frac{p}{2}$ vom Scheitel.

Für $x = \frac{p}{4}$ hat man $\varphi = 45^\circ$; $y = \frac{p}{2}$, d. h. in den Punkten der Parabel, die senkrecht über und unter dem Brennpunkte liegen, macht die Berührende einen Winkel von 45° mit der Achse, für diese Punkte ist $OQ = \frac{5p}{4} = p + \frac{p}{4}$; $IQ = \frac{p}{2}$; $\rho = p\sqrt{2}$.

Für $x = 2 \,.\, \frac{p}{4}$; ist $\cotg \varphi = \sqrt{2}$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $y = \frac{p}{\sqrt{2}}$;

$$OQ = \frac{8p}{4};\; IQ = p\sqrt{2}.\; \rho = \frac{3p\sqrt{3}}{2}.$$

Für $x = 3 \,.\, \frac{p}{4}$; ist $\cotg \varphi = \sqrt{3}$; $\sin \varphi = \frac{1}{2}$; $y = \frac{p\sqrt{3}}{2}$;

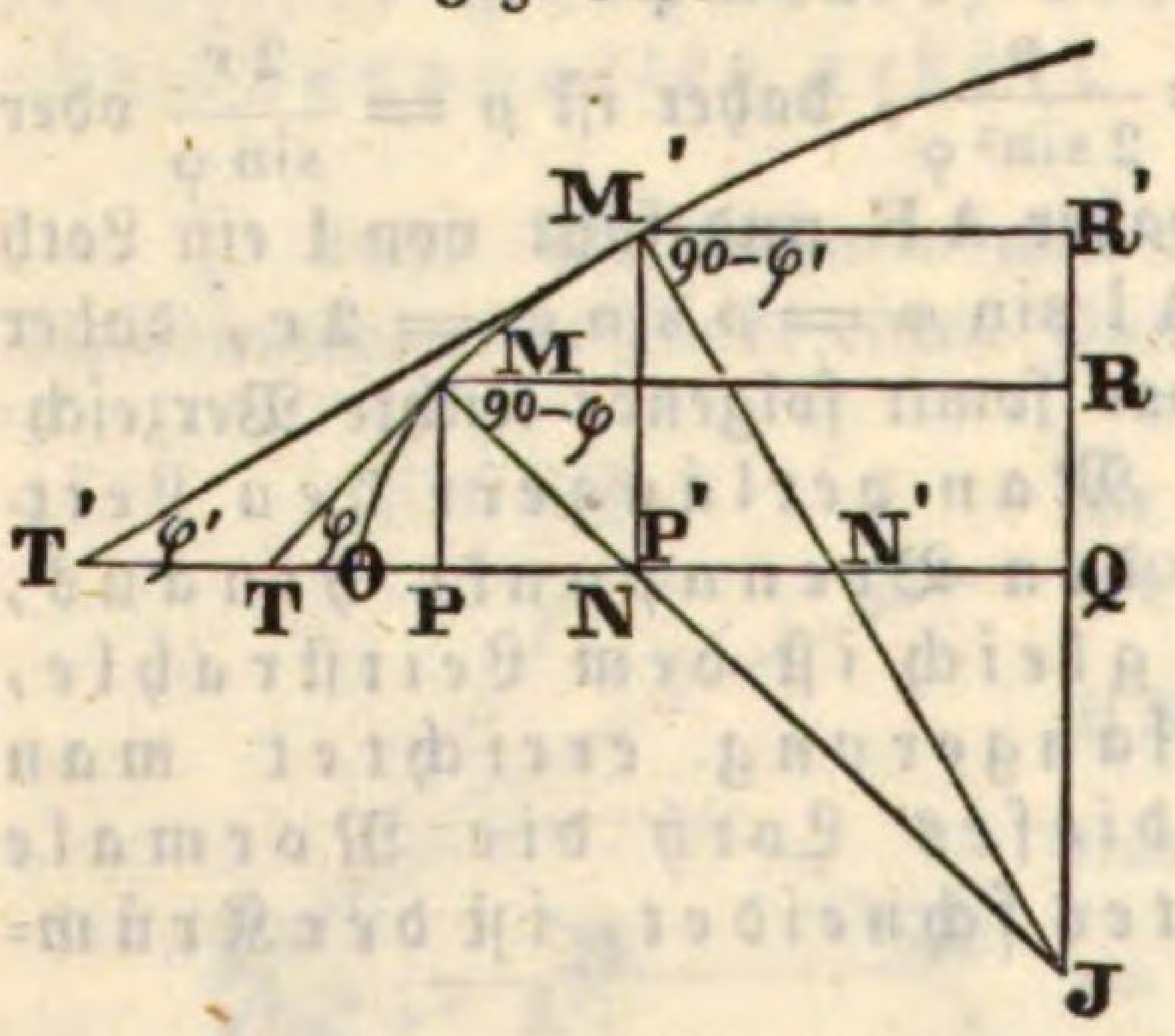
$$OQ = \frac{11p}{4};\; IQ = \frac{3p\sqrt{3}}{2};\; \rho = 4p = \frac{4p\sqrt{4}}{2}.$$

Für $x = 4 \,.\, \frac{p}{4}$; ist $\cotg \varphi = 2$; $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $y = p$;

$$OQ = \frac{14p}{4};\; IQ = 4p;\; \rho = \frac{5p\sqrt{5}}{2}.$$

§. 301. Verzeichnen wir an zwei Punkten der Parabel ihre Berührungslinien und die dazu gehörigen Normallinien, und suchen wir den Punkt zu bestimmen, wo sich diese Normalen schneiden.

Fig. 349.



Es seyen $x = OP$; $x' = OP'$; $y = MP$; $y' = M'P'$ die Abscissen und Ordinaten der Punkte M und M', MN und M'N' ihre Normalen, die sich in I schneiden. Man fälle das Loth IQ auf die Achse, und verlängere dieses Loth, bis es durch die mit OQ Parallelen MR und M'R' getroffen wird. Nennt man nun $OQ = \xi$ und $IQ = \upsilon$, so hat man, wenn $M'T'P' = \varphi'$ und $MTP = \varphi$ ist:

$$MR = RI \tang \varphi;$$

$$M'R' = R'I \,.\, \tang \varphi' \text{. d. h.}$$

$$\xi - x = (y + \upsilon) \tang \varphi;\; \xi - x' = (y' + \upsilon) \tang \varphi';$$

da nun $\tang \varphi = \frac{p}{2y}$; $\tang \varphi' = \frac{p}{2y'}$ ist, so hat man:

$$\xi - x = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \,.\, \frac{\upsilon}{y};\; \xi - x' = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \,.\, \frac{\upsilon}{y'},$$

woraus durch Subtraktion $x' - x = \frac{p\upsilon}{2}\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y'}\right)$, oder

$$\upsilon = \frac{2(x' - x)\, y y'}{p(y' - y)}.$$

Da nun $y^2 = px$; $y'^2 = px'$, also $y'^2 - y^2 = p(x' - x)$,

also $x' - x = \frac{1}{p}(y'^2 - y^2)$ ist, so hat man:

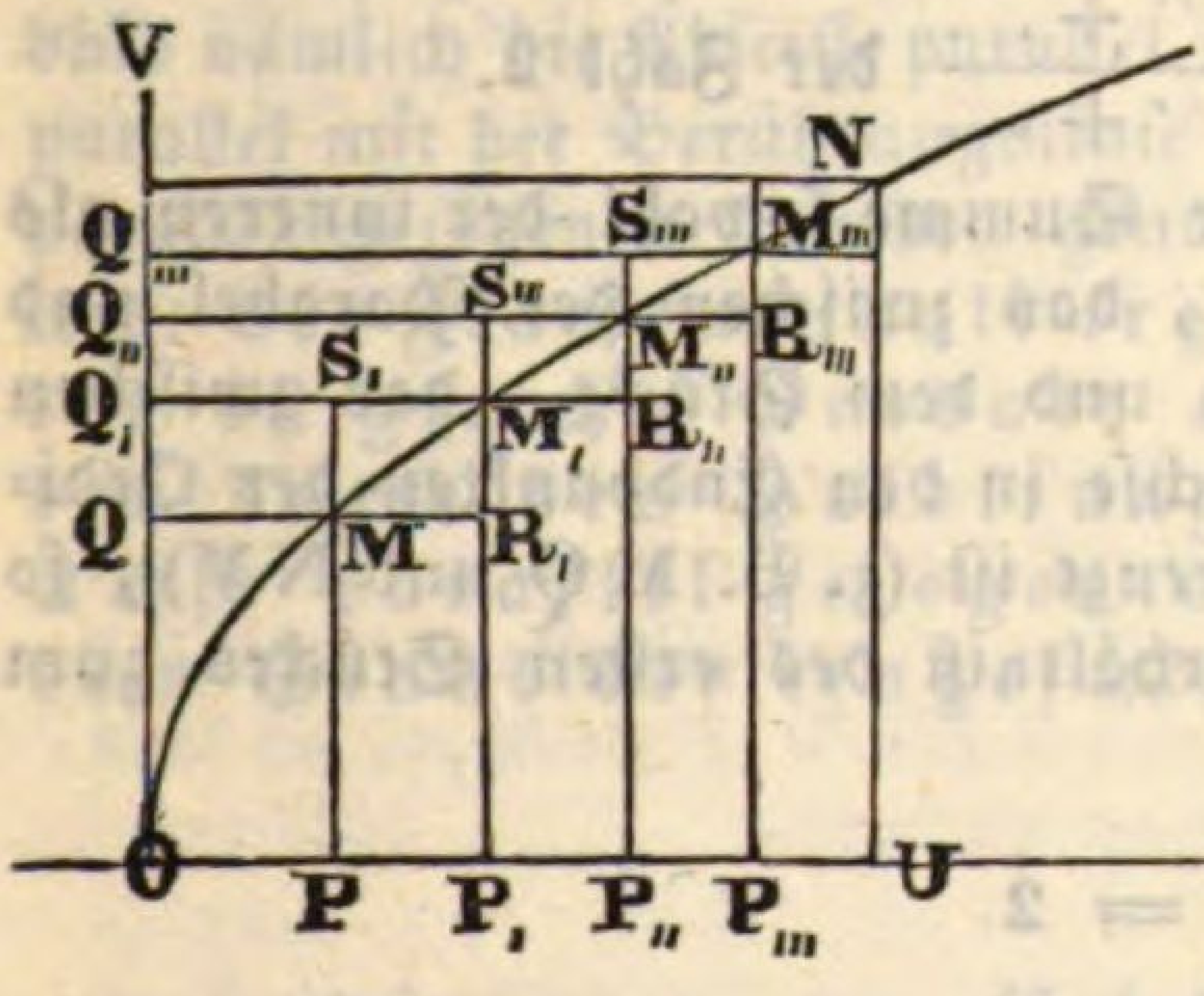
$$v = \frac{2(y + y')yy'}{p^2}, \text{ und daraus } \xi = \frac{2(y^2 + yy' + y'^2) + p^2}{2p}$$

zur Bestimmung des Punktes, wo die beiden Normalen sich schneiden.

Je näher nun die zwei Punkte M und M' an einander genommen werden, je näher also die Werthe von y und y' einander sind, desto mehr nähert sich v dem Ausdrucke $\frac{2y^3}{p^2}$, und ξ dem $\frac{6y^3 + p^2}{2p}$, welches nach dem vorhergehenden Paragraphe die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes des Punktes M sind. Je näher daher zwei Normalen zu einander sind, desto mehr nähert sich ihr Durchschnittspunkt dem Krümmungsmittelpunkte. Ziehet man daher von der Parabel so nahe wie möglich Berührungslinien, errichtet in den Berührungspunkten die Normalen, so geben die auf einander folgenden Durchschnittspunkte nahe die Krümmungsmittelpunkte, die selbst eine eigene krumme Linie bilden, von denen die Normalen Berührungslinien sind; man nennt diese krumme Linie die Evolute der Gegebenen. Wickelt man einen Faden auf der Evolute der Parabel auf, so wird der Endpunkt dieses Fadens, wenn er abgewickelt wird, die Parabel selbst beschreiben.

§. 302. Zum Schlusse wollen wir uns mit der Aufgabe beschäftigen, den Flächeninhalt des Stückes zu berechnen, welches zwischen der Parabel der Abscisse und Ordinate eingeschlossen ist.

Fig 350.



Es sey $OP = x$; $OP' = x_1$; $OP'' = x_2$; $OP''' = x_3$; $MP = y$; $M'P' = y_1$; $M''P'' = y_2$; $M'''P''' = y_3$; denn ist das Rechteck $S'M'PP' = y_1(x_1 - x)$ und das Rechteck $R'M'QQ' = x_1(y_1 - y)$; daher ihr Verhältniß, wenn wir die Rechtecke durch in der Winkellinie einander gegenüberstehenden Buchstaben ausdrücken.

$$\frac{S'P}{Q'R'} = \frac{y_1(x_1 - x)}{x_1(y_1 - y)}.$$

Da nun $y^2 = px$, $y_1^2 = px_1$, daher $x_1 - x = \frac{y_1^2 - y^2}{p}$, $x_1 = \frac{y_1^2}{p}$ ist, so hat man:

$$\frac{S'P'}{Q'R'} = \frac{y_1(y_1^2 - y^2)}{y_1^2(y_1 - y)} = \frac{y_1 + y}{y_1} = 1 + \frac{y}{y_1}.$$

Eben so ist $\frac{S''P''}{Q''R''} = \frac{y_2 + y_1}{y_2} = 1 + \frac{y_1}{y_2}$

$$\frac{S'''P'''}{Q'''R'''} = \frac{y_3 + y_2}{y_3} = 1 + \frac{y_2}{y_3}, \text{ u. s. w.}$$

Da ich nun die Punkte M, M′, M″ u. s. w. willkürlich annehmen kann, so nehme ich sie so an, daß ihre Ordinaten eine geometrische Progression bilden, nämlich daß:

$$\frac{y}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \omega \text{ sey; dann ist}$$

$$\frac{S'P'}{Q'R'} = \frac{S''P''}{Q''R''} = \frac{S'''P'''}{Q'''R'''} = 1 + \omega\text{; daher}$$

$$\frac{S'P' + S''P'' + S'''P''' + \ldots}{Q'R' + Q''R'' + Q'''R''' + \ldots} = 1 + \omega \text{ (A).}$$

Das ω steht ganz in unserer Willkür, je kleiner wir das ω, d. h. je größer y_1 gegen y, also auch y_2 gegen y_1; y_3 gegen y_2 u. s. w. ist, desto weiter stehen die Punkte M, M′, M′... von einander; je größer ω ist, je mehr es sich der Einheit nähert (größer als 1 kann es nicht werden, da ja nach unserer Figur $y < y_1 < y_2 < y_3 \ldots$ ist), desto näher kommen die Punkte M, M′, M″ ... an einander, desto kleiner werden die Rechtecke S′M′R′M, S″M″R″M′, S‴M‴R‴M″ ... und desto mehr nähert sich die Summe der Rechtecke S′P′, S″P″, S‴P‴ ... dem Flächeninhalte der Figur, die zwischen der Parabel und den Ordinaten MP und NU und der Achse eingeschlossen ist: denn die Summe der Dreiecke MM′S′, M′M″S″, M″M‴S‴ wird natürlich immer kleiner, eben so nähert sich die Summe der Rechtecke Q′R′, Q″R″, Q‴R‴ ... dem Flächeninhalte der Figur, der zwischen der Parabel und den Geraden QM, VN und QV eingeschlossen ist. Je näher wir also die Punkte MM′M″... an einander nehmen, desto mehr nähert sich also der Bruch

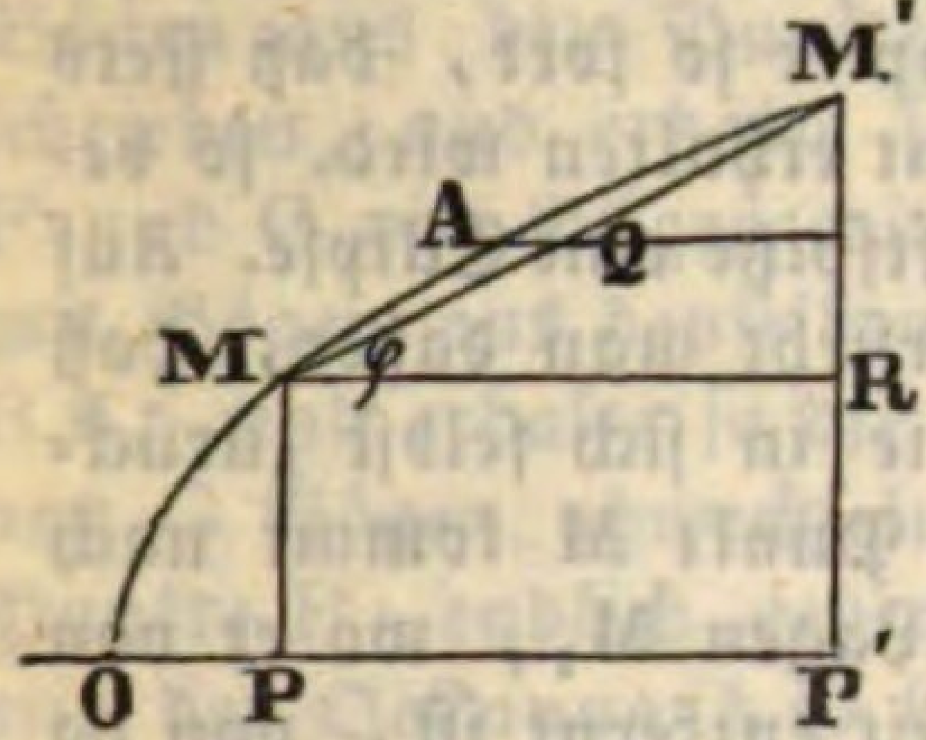
$$\frac{S'P' + S''P'' + S'''P''' + \ldots}{Q'R' + Q''R'' + Q'''R''' + \ldots} \text{ der Zahl 2.}$$

Gehen wir nun zur Grenze der Summe sowohl der inneren als äußeren Rechtecke, d. i. zum Stücke, das zwischen der Parabel und zwei Ordinaten (z. B. MP und NU) und dem Stücke, das zwischen der Leitlinie und zwei zur Abscissenachse in den Endpunkten der Ordinate parallel gezogenen Geraden begrenzt ist (z. B. MQ und NV), so hat man in voller Strenge das Verhältniß des ersten Stückes zum zweiten, wie 2 : 1; daher

$$\frac{MPNU}{QMNV} = 2.$$

Auf diese Art ist auch der Raum ONU das Doppelte vom Raume VON, daher da ONU + VON oder 3 VON = OU NU; folglich VON = $\frac{1}{3}$ OU . NU und ONU = $\frac{2}{3}$ OU . NU; d. h. der Flächeninhalt eines parabolischen Stückes zwischen der Ordinate, Abscisse und der Parabel ist gleich $\frac{2}{3}$ vom Produkte der Abscisse und Ordinate.

Fig. 351.



§. 303. Nennt man $OP = x$, $OP' = x'$, $MP = y$, $M'P' = y'$, so ist der Flächeninhalt von $MOP = \frac{2}{3} xy$ von $M'OP' = \frac{2}{3} x'y'$, daher das parabolische Stück $MM'PP' = \frac{2}{3}(x'y' - xy) = \frac{2}{3}\left(\frac{y'^3 - y^3}{p}\right)$.

Da nun das Trapez $MM'PP' = \frac{1}{2}(y' + y)(x' - x) = \frac{1}{2}(y' + y)\left(\frac{y'^2 - y^2}{p}\right)$ ist, so hat man das parabolische $MAM'Q = \frac{(y' - y)^3}{6p}$.

Ist der Winkel $M'MR = \varphi$, so ist, wenn Q der Halbirungspunkt der Sehne MM', und AQ mit der Achse gleichlaufend ist, $M'Q^2 = \frac{p}{\sin^2 \varphi} \cdot AQ$.

Da nun ferners $M'Q = \frac{y' - y}{2 \sin \varphi}$, also $y' - y = 2 M'Q \sin \varphi$ ist, so hat man den Parabel-Abschnitt $MAM' = \frac{8 M'Q^3 \sin^3 \varphi}{6p}$, obige Gleichung aber gibt $p = \frac{M'Q^2 \sin^2 \varphi}{AQ}$;

daher Abschnitt $MAM' = \frac{4}{3} \cdot M'Q \cdot AQ \sin \varphi$;
daher Stück $AQM' = \frac{2}{3} \cdot M'Q \cdot AQ \sin \varphi$;

daher sieht man: Allgemein der Flächeninhalt eines Parabelstückes zwischen Ordinate, Abscisse und der Parabel auch bei schiefwinklichten Coordinaten ist gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms aus Abscisse und Ordinate, sobald nämlich die Abscisse parallel mit der Hauptachse, und die Ordinaten parallel mit der Berührungslinie am Anfangspunkte der mit der Achse parallel gezogenen Geraden genommen werden; und schlüßlich haben wir: der Flächeninhalt irgend eines Parabel-Abschnittes ist gleich $\frac{2}{3}$ Produkt aus der Sehne in das Stück der durch den Halbirungspunkt der Sehne mit der Achse parallel gezogenen Geraden, multiplicirt mit dem Sinus des eingeschlossenen Winkels.

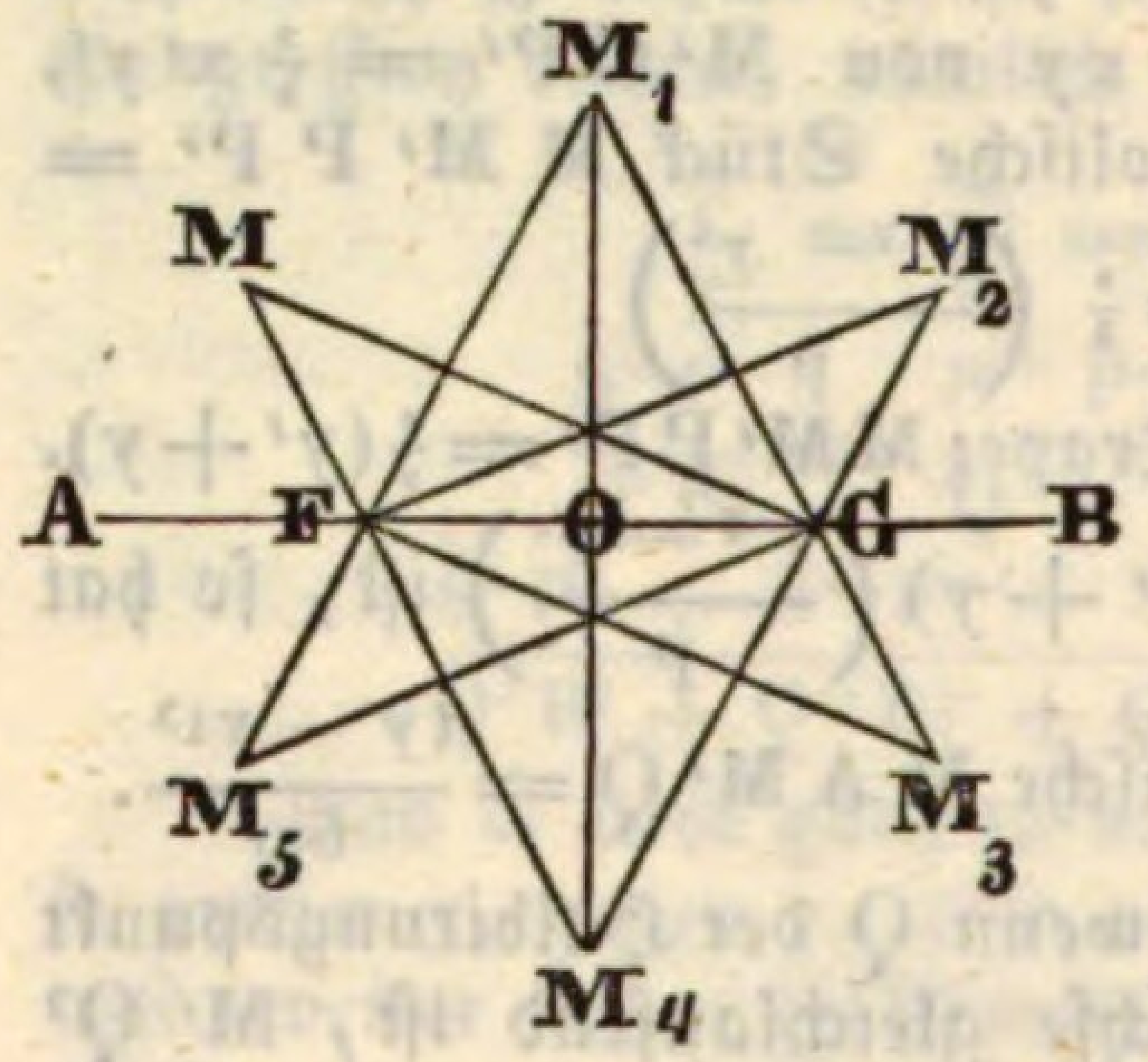
II.

Ellipse.

§. 304. Ellipse ist diejenige krumme Linie, wo die Summe der Abstände jedes Punktes derselben von zwei gegebenen Punkten (Brennpunkten) stets dieselbe ist.

Es seyen die zwei gegebenen Punkte F und G, und es bewege sich der Punkt M so, daß stets die Größe $MF + MG$ gleich groß bleibe. Wir können uns diese Bewegung des Punktes M dadurch herstellen, wenn wir uns in den Punkten F, G zwei Stifte eingeschlagen und darum einen in sich zurückkehrenden Faden geschlungen denken,

Fig. 352.



den wir in M durch die Bleistiftspitze gespannt erhalten; führen wir die Bleistiftspitze auf dem Papier so fort, daß stets der Faden gespannt erhalten wird, so beschreibt die Bleistiftspitze eine Ellipse. Auf den ersten Blick ersieht man daher, daß diese krumme Linie in sich selbst zurückkehrt; denn der Punkt M kommt nach und nach in die Lagen M_1, wo er von F und G gleichweit entfernt ist, von da an wird er weiter von F entfernt seyn, daher dem G näher kommen; kommt der Punkt im Punkte B in die Gerade FG, so ist er am weitesten von F, und natürlich am nächsten von G, von da an entfernt er sich von G und nähert sich dem F; in M_3 ist noch $FM_3 > GM_3$, in M_4 ist schon $FM_4 = GM_4$, in M_5 ist schon $FM_5 < GM_5$, und kommt der Punkt M zum zweiten Male im Punkte A in die Gerade FG, so ist er hier am nächsten dem F und am weitesten von G.

Da vermöge der Grundeigenschaft der Ellipse $MF + MG = M_1F + M_1G = M_2F + M_2G = BG + BF = M_3F + M_3G = M_4F + M_4G = M_5F + M_5G = AF + AG$ ist, so hat man $AF + AG = BG + BF$, d. h. mit andern Worten $AF + AF + FG = BG + BG + FG$, woraus $AF = BG$ folgt daher ist $AF + AG = BG + AG = AB$; daher hat man:

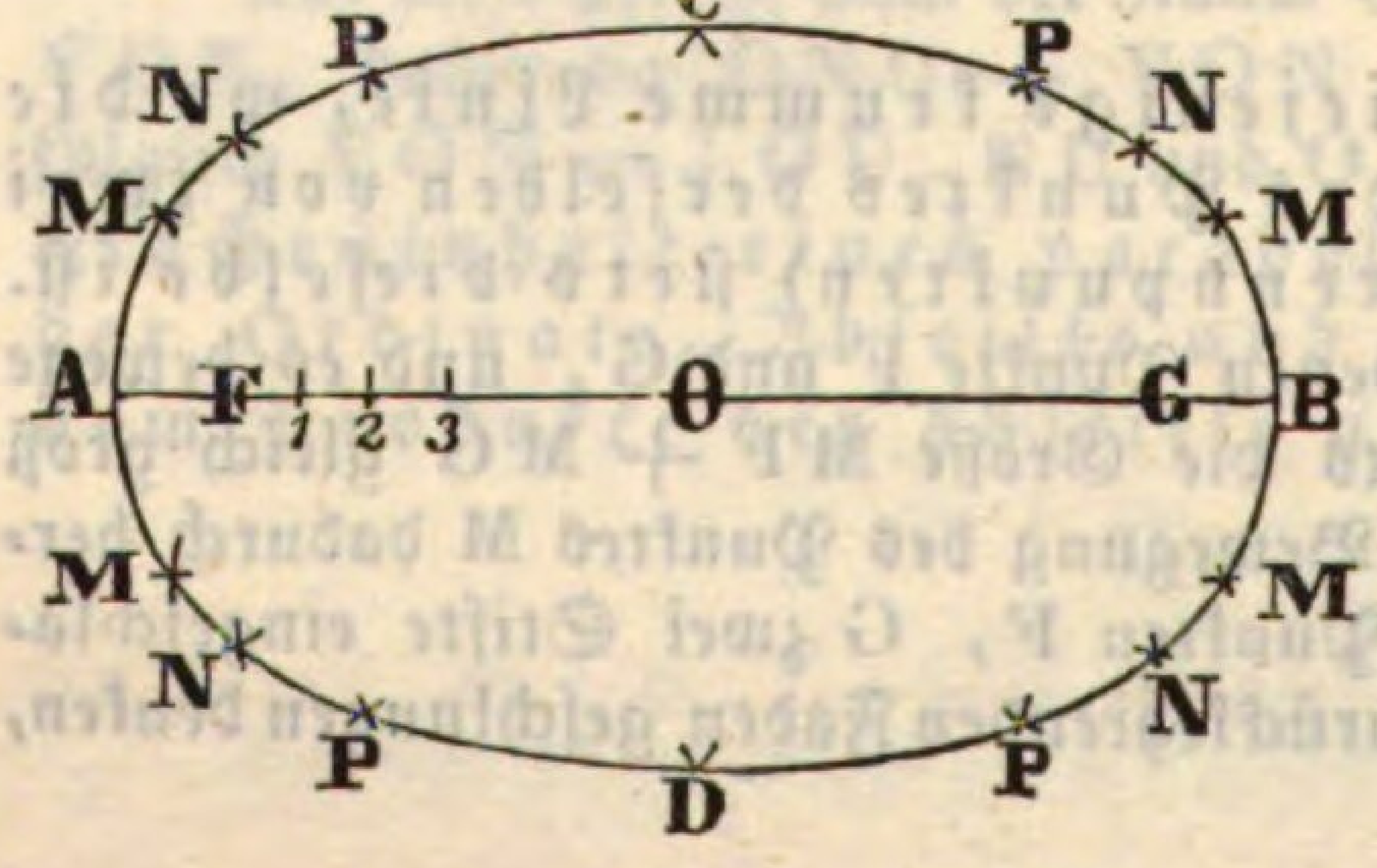
$$MF + MG = M_1F + M_2G = M_2F + M_2G = \ldots = AB.$$

Jede Gerade MF, MG, M_1F u. s. w., die einen Punkt der Krummen mit einem Brennpunkte (F oder G) verbindet, heißt ein Leitstrahl der Ellipse; die Gerade AB heißt die *große Achse* der Ellipse. Dem Vorausgegangenen zu Folge können wir also sagen:

Bei der Ellipse ist die Summe je zweier Leitstrahlen eines Punktes gleich der großen Achse.

Die Gerade M_1, M_4, welche in O die Brennweite FG und die Achse AB halbiret, heißt die *kleine Achse* der Ellipse; der Punkt O der Mittelpunkt der Ellipse. Aus der Natur der Sache ergibt sich, daß der Abstand der Endpunkte der kleinen Achse $M_1F = M_1G = M_4G = AO = OB$ gleich der halben großen Achse ist.

Fig 353.



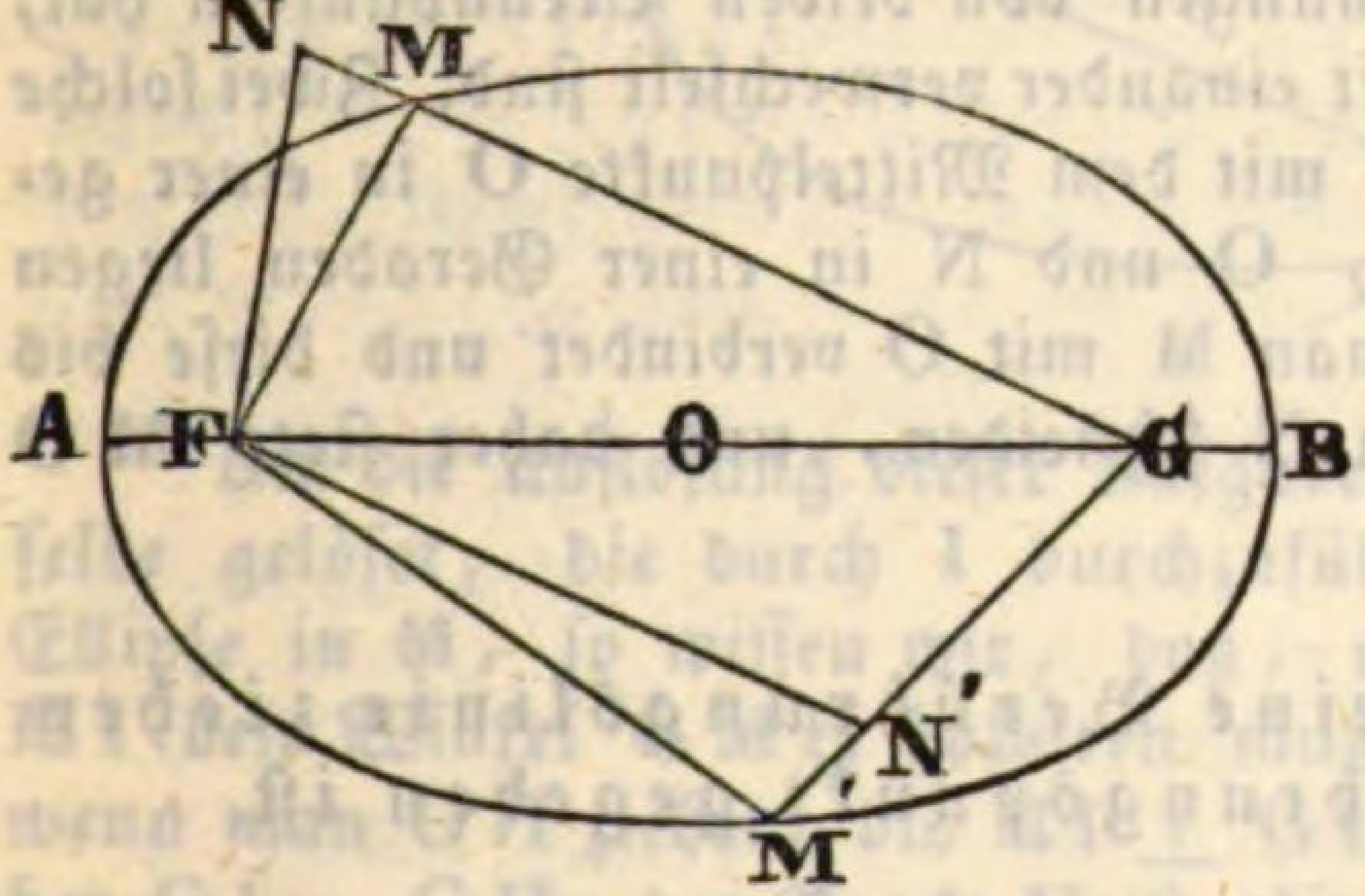
§. 305. Das Vorhergehende setzet uns in den Stand, wenn die zwei Brennpunkte und die große Achse der Ellipse gegeben sind, dieselbe zu verzeichnen.

Es seyen F und G die Brennpunkte, AB die große Achse, O der Mittelpunkt, so nehme ich zwischen F und O die willkürlichen Punkte 1, 2, 3; ich

nehme nun die Zirkelöffnung A 1, und beschreibe aus F und G Bögen mit dem Halbmesser = A 1, durchschneide diese Bögen mit vier andern Bögen aus den Punkten F und G mit dem Halbmesser = B 1 beschrieben, und erhalte so die vier Punkte M; dann beschreibe ich aus F und G vier Bögen mit dem Halbmesser = A 2, und durchschneide sie mit Bögen aus denselben Mittelpunkten F und G mit dem Halbmesser B 2, und erhalte so die vier Punkte N; beschreibt man eben so aus F und G Bögen abwechselnd mit A 3 und B 3, so erhält man die vier Punkte P; endlich geben die Durchschnitte der Bögen aus F und G mit der Oeffnung A O beschrieben die Punkte C und D, welches die Endpunkte der kleinen Achse sind. Verbindet man diese Punkte A M N P C ... entweder durch krumme Züge mit der Hand, oder mittelst eines Curvenlineals, so hat man die verlangte Ellipse, und zwar desto genauer, je mehr man solche Punkte M N P ... bestimmt hat.

§. 306. **Jeder Punkt außerhalb der Ellipse hat die Summe seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten größer als die große Achse, und jeder Punkt innerhalb der Ellipse kleiner als die große Achse.**

Fig 354.



Ist der Punkt N außerhalb der Ellipse, so verbinde ich N mit den Brennpunkten F und G, beide Gerade FN und GN müssen die Ellipse schneiden. Es schneide GN die Ellipse im Punkte M, ich verbinde M mit F, so ist nach der Eigenschaft der Ellipse

$FM + MG = AB$; da nun
$NF + NM > MF$, daher
$MG + NF + NM > MF + MG$,
d. h. $NF + NG > MF + MG$; folglich
$NF + NG > AB$

Für einen Punkt innerhalb der Ellipse N′, verbinde ich N′ mit F und G, verlängere GN′ bis die Ellipse in M′ getroffen wird, und ziehe endlich M′F, so hat man:

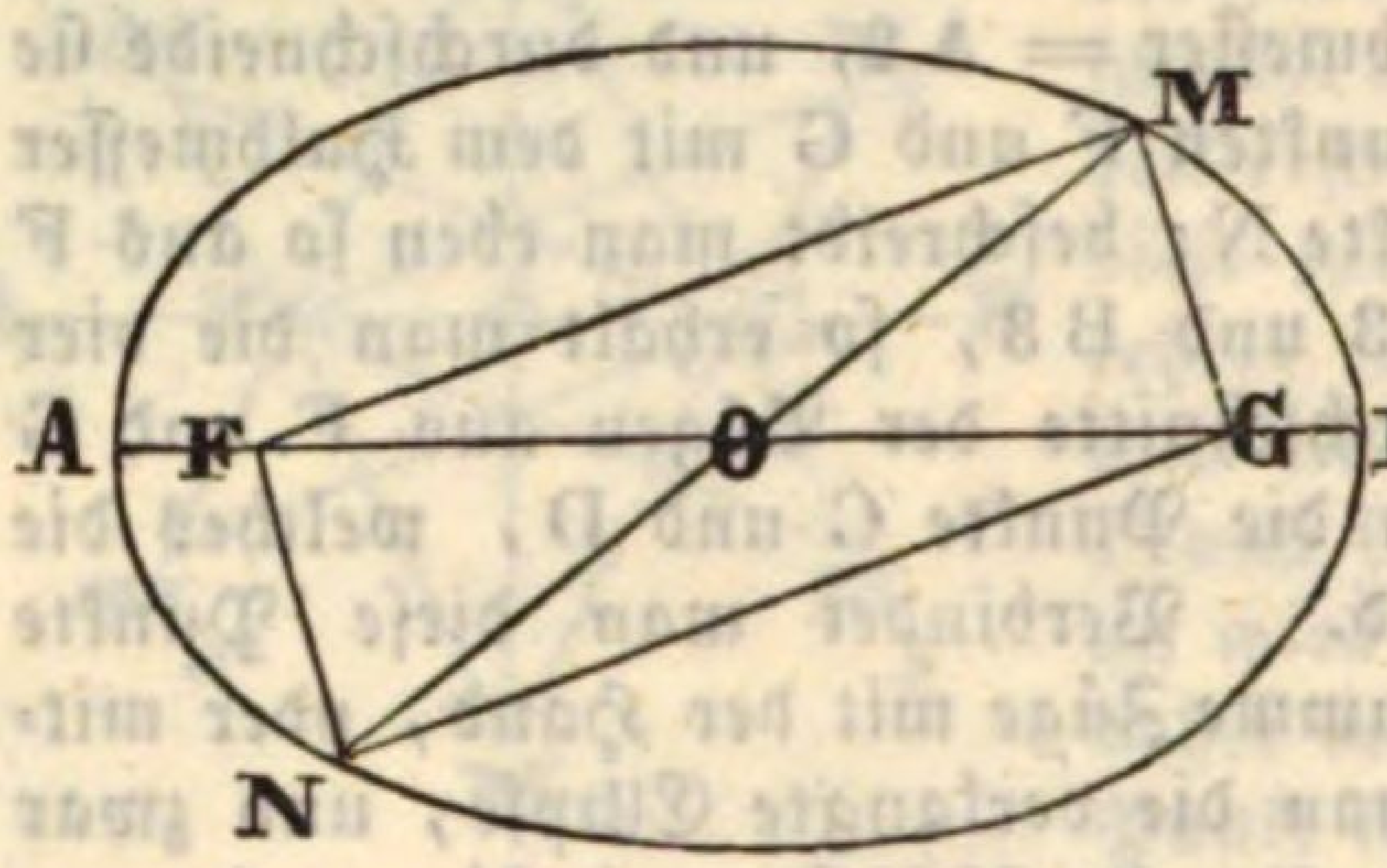
$FM' + M'G = AB$; da nun
$N'F < N'M' + M'F$, also
$GN' + N'F < GN' + N'M' + M'F$, d. h.
$FN' + N'G < FM' + M'G$, so hat man:
$FN' + N'G < AB$.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich die Schlüsse:

Ist die Summe der Entfernungen eines Punktes von den zwei Brennpunkten einer Ellipse größer als die große Achse derselben, so muß dieser Punkt außerhalb dieser Ellipse liegen. Ist die Summe der Entfernungen eines Punktes von den Brennpunkten einer Ellipse kleiner als die große Achse derselben, so muß dieser Punkt innerhalb dieser Ellipse liegen.

§. 307. Jede Sehne der Ellipse wird im Mittelpunkte derselben halbirt.

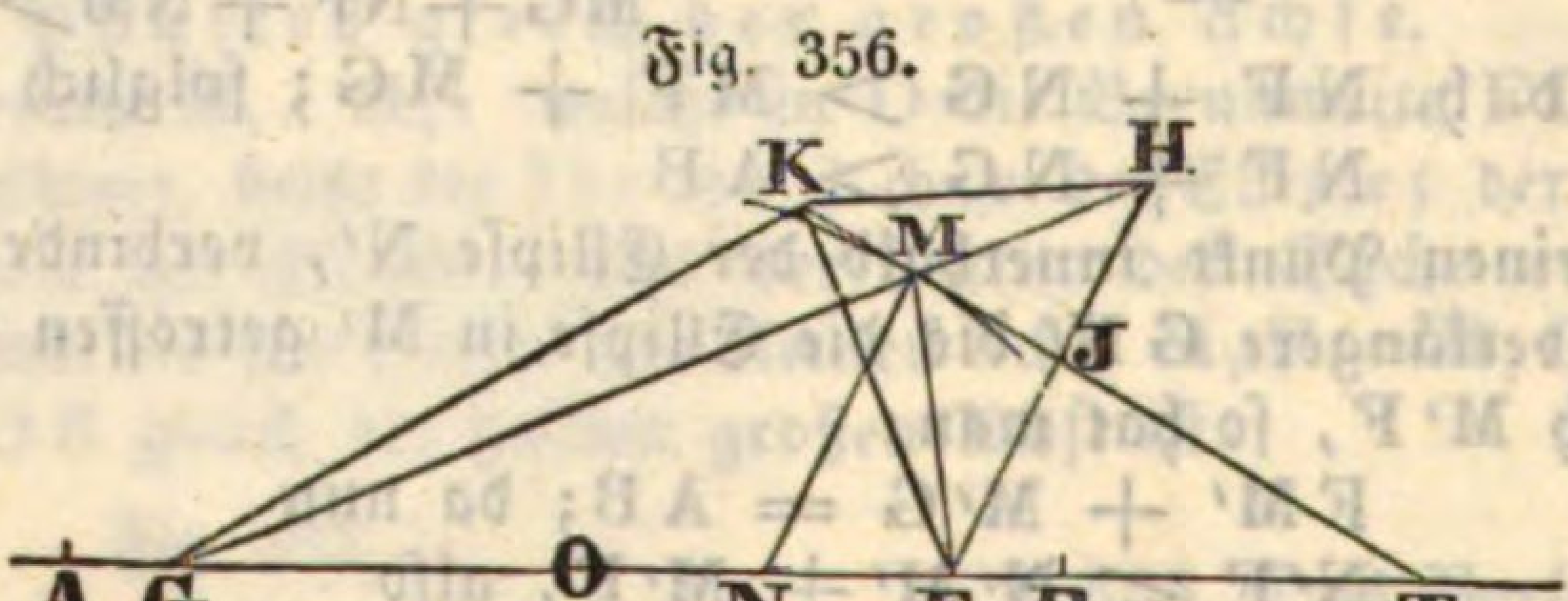
Fig. 355.



Es sey M ein Punkt der Ellipse, seine Leitstrahlen FM und GM; ich suche nun einen Punkt N der Ellipse unterhalb der großen Achse AB, so daß FN = MG, der also von F gerade so weit entfernt ist, als M von G; ich verbinde N mit G, so muß nach der Natur der Ellipse NG = FM seyn. Ich verbinde M mit N, so sind die zwei Dreiecke FMN und GMN mit einander einerlei, weil die drei Seiten des einen Dreiecks gleich sind den drei Seiten des andern Dreiecks, daher FMN = MNG, daher FN ∥ MG und eben so FM ∥ GN. Da nun in jedem Parallelogramme die Diagonalen sich wechselseitig halbiren, so muß also MN durch den Mittelpunkt O durchgehen. Aus dem Vorhergehenden ersehen wir also: jedem Punkte M der Ellipse entspricht ein zweiter Punkt N, der dieselben Entfernungen von beiden Brennpunkten hat, wobei die beiden Brennpunkte mit einander verwechselt sind. Zwei solche Punkte M und N liegen immer mit dem Mittelpunkte O in einer geraden Linie. Da nun also M, O und N in einer Geraden liegen müssen, so wird also, sobald man M mit O verbindet und diese bis zur Ellipse verlängert, diese in N schneiden, und daher stets MO = ON seyn.

§. 308. Zur Ellipse eine Berührungslinie ziehen.
a) Wenn der Berührungspunkt gegeben ist.

Fig. 356.



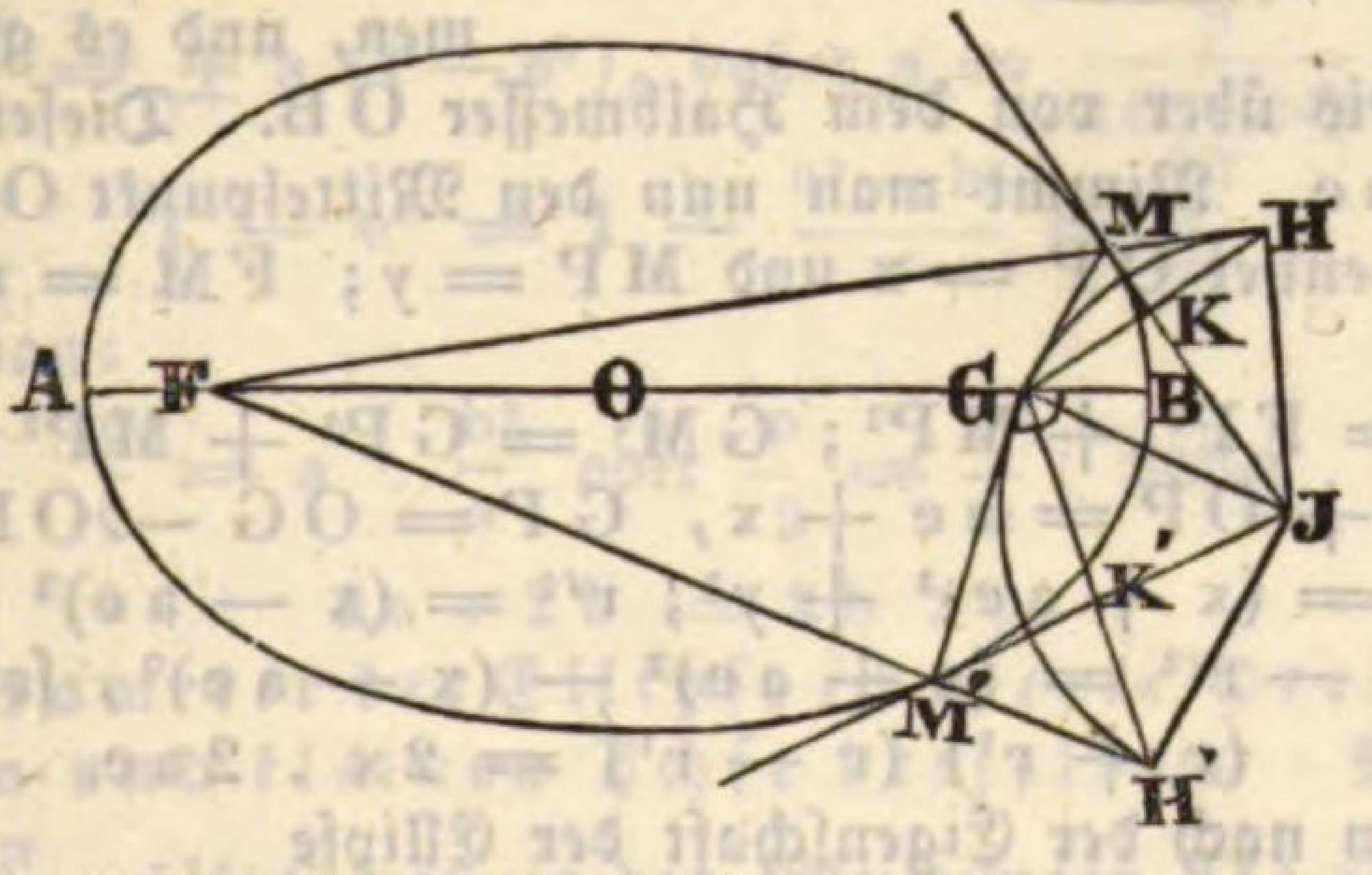
Es sey M ein Punkt der Ellipse, die wir absichtlich nicht zeichnen, um nicht durch die Zeichnung dem Beweise vorzugreifen.

Ziehen wir FM und GM, verlängern GM, und machen die Verlängerung HM = FM, verbinden H und F, halbiren HF in I, so ist IM eine Berührende der Ellipse, d. h. alle anderen Punkte der IM außer dem Punkte M liegen außerhalb der Ellipse, z. B. K; ziehet man KF, KG, KH, so ergibt sich leicht HK = KF; da nun HK + KG > HG, daher KF + KG > HG oder KF + KG > AB,

da nämlich HG = FM + MG gleich der großen Achse AB ist, daher muß der Punkt K und eben so alle anderen Punkte der MI außerhalb der Ellipse liegen. Wie man also sieht, halbiret die Berührende MT den Winkel, den der Leitstrahl MF mit der Verlängerung MH des anderen Leitstrahles bildet. Errichtet man in M die MN ⊥ MT, so ist MN die Normallinie dieses Punktes; da nun MN ∥ HF, also GMN = GHF, aber GHF = MFH = FMN ist, so hat man GMN = FMN, also: **Es halbirt die Normallinie eines Punktes der Ellipse den Winkel seiner beiden Leitstrahlen.**

b) **Wenn der Punkt, durch welchen die Berührende gehen soll, außerhalb der Ellipse gegeben ist.**

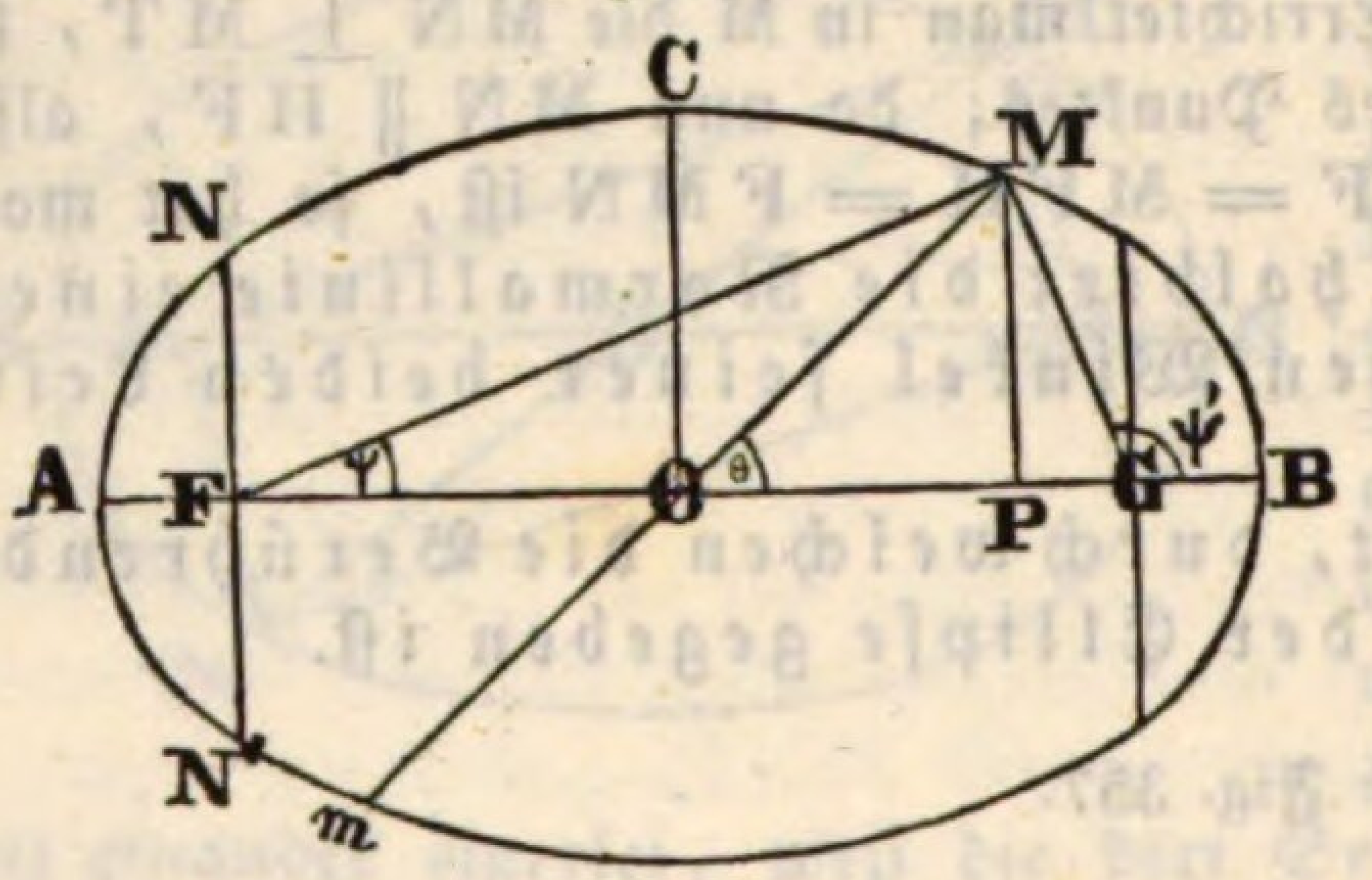
Fig. 357.



Um die Auflösung dieser Aufgabe zu finden, denken wir uns dieselbe gelöset, die durch I durchzuführende Berührende berühre die Ellipse in M, so wissen wir, daß, wenn man FM verlängert, die MI den Winkel GMH halbiren muß; ist nun MH = MG, so ist, wenn man GH ziehet, die MI ⊥ GH, und halbiret diese in K, daher GI = GH; der Punkt H ist also so beschaffen, daß sein Abstand von dem einen Brennpunkte F = AB ist (denn FH = FM + MG = AB), und sein Abstand von dem gegebenen Punkte I, d. i. HI = GI, dem Abstande dieses Punktes I von dem zunächst liegenden Brennpunkte G, wodurch wir also H, dadurch FH und somit den zu suchenden Berührungspunkt M, und dadurch die verlangte Berührende MI zu finden im Stande sind. Um also diese Aufgabe zu lösen, verfährt man folgender Maßen: Aus dem gegebenen Punkte I mit dem Halbmesser GI, d. h. der Entfernung vom nächsten Brennpunkte G beschreibt man einen Kreisbogen, den man mittelst eines Bogens aus dem Centrum F (dem andern Brennpunkte) mit dem Halbmesser = BA, d. i. der großen Achse durchschneidet; es ergibt sich klar, daß dadurch zwei Punkte H und H′, und dadurch zwei Gerade FH und FH′, also zwei Berührungspunkte M und M′, uns also zwei Berührende IM und IM′ bestimmt werden.

§. 309. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen der Größe der Leitstrahlen und der Abscisse und Ordinaten eines Punktes der Ellipse in Untersuchung nehmen.

Fig. 358.



Es sey zu diesem Behufe die große Halbachse OB = OA = a, die kleine Halbachse OC = b; nennen wir ferners die Verhältnißzahl

$$\frac{FG}{AB} \text{ oder } \frac{OG}{OB} = e,$$

welche man Excentricität nennt; denn wie e = o, d. h. OG = o, FG = o, fallen beide Brennpunkte zusammen, und es gehet die Ellipse in einen Kreis über von dem Halbmesser OB. Diesemnach ist OG = OF = ae. Nimmt man nun den Mittelpunkt O als Anfangspunkt an, nennet OP = x und MP = y; FM = r; MG = r', so hat man:

$$FM^2 = FP^2 + MP^2;\ GM^2 = GP^2 + MP^2; \text{ nun ist}$$
$$FP = FO + OP = ae + x,\ GP = OG - OP = ae - x;$$
$$\text{daher } r^2 = (x + ae)^2 + y^2;\ r'^2 = (x - ae)^2 + y^2; \text{ daher}$$
$$r^2 - r'^2 = (x + ae)^2 - (x - ae)^2, \text{ somit}$$
$$(r + r')(r - r') = 2x \,.\, 2ae.$$

Da nun nach der Eigenschaft der Ellipse

$$r + r' = 2a$$

ist, so hat man:

$$r - r' = 2ex$$

und somit mittelst der letzten zwei Gleichungen

$$r = a + ex,\ r' = a - ex.$$

Um nun den Zusammenhang zwischen x und y zu finden, hat man:

$$y^2 = r^2 - (x + ae)^2 = r'^2 - (x - ae)^2,$$
$$y^2 = (a + ex)^2 - (x + ae)^2 = (a - ex)^2 - (x - ae)^2$$
$$y^2 = (a + ex + x + ae)(a + ex - x - ae)$$
$$= (a + x)(1 + e)(a - x)(1 - e)$$
$$y^2 = (1 - e^2)(a^2 - x^2) \quad (1).$$

Nun ist, wie wir wissen,

$$OG = ae = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ daher } e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

daher $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$, wodurch die Gleichung in folgende übergeht:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2),$$

oder wenn man in (1) statt a das b einführt; $y^2 = b^2 - x^2(1 - e^2)$ (3).

Die Gleichung (1) sowohl als (2) zeigt uns, daß jeder Abscisse zwei gleiche y oder Ordinaten entsprechen mit entgegengesetzten Zeichen, denn man hat

$$y = \pm \sqrt{(1-e^2)(a^2-x^2)};\ y = \frac{\pm b}{a}\sqrt{a^2-x^2};$$

daher entspricht jedem M oberhalb der Achse ein M′, wo M′P = MP ist, daher sind der obere und untere Theil dieser Krummen ganz einerlei mit einander.

Errichten wir im Brennpunkte F eine auf die Achse senkrechte Sehne NN′, so ist die Abscisse des Punktes N dann FO = ae; um also die Größe NF der Ordinate des Punktes N zu finden, habe ich in der Gleichung (1) oder (2) statt x, ae zu setzen, wo dann der Werth von y uns das NF gibt, daher

$$NF = \pm \sqrt{(1-e^2)(a^2-a^2e^2)} = \pm a(1-e^2);$$

von diesen doppelten Werthen gilt der eine für NF, der andere für N′F; da man nun die im Brennpunkte auf die große Achse senkrecht errichtete Sehne den Parameter der Ellipse nennt, also NN′ = p ist, so hat man $\frac{p}{2} = \pm a(1-e^2)$, daher $a = \frac{p}{2(1-e^2)}$, oder da

$$1 - e^2 = 1 - \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

ist, so hat man:

$$\frac{p}{2} = a \cdot \frac{b^2}{a^2} \text{ oder } \frac{p}{2} = \frac{b^2}{a}; \text{ daher}$$

$$2a : 2b = 2b : p,$$

d. h. der Parameter der Ellipse ist vierte Proportionirte zur großen und kleinen Achse derselben. Man hat noch $e^2 = 1 - \frac{p}{2a}$; führt man in den Gleichungen (1) und (2) das p ein, so hat man:

$$y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2) \quad (4) \quad \text{und } y^2 = b^2 - \frac{p^2}{4b^2}x^2 \quad (5).$$

Drückt man die Gleichung zwischen x und y bloß durch e und p aus, so hat man:

$$y^2 = \frac{p^2}{4} - (1-e^2)x^2 \quad (6).$$

Stellt man alle Formeln zwischen a, b, p, e zusammen, so hat man folgendes System von Formeln:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{p}{2a} = 1 - \frac{p^2}{4b^2}$$

$$p = \frac{2b^2}{a} = 2a(1-e^2) = 2b\sqrt{1-e^2}$$

$$a = \frac{b}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{2b^2}{p} = \frac{p}{2(1-e^2)}$$

$$b = a\sqrt{1-e^2} = \sqrt{\frac{ap}{2}} = \frac{p}{2\sqrt{1-e^2}}$$

Die obige Gleichung (3) zwischen x und y,

$$y^2 = b^2 - x^2(1-e^2),$$

gibt uns

$$y^2 + x^2 = b^2 + e^2 x^2; \text{ nun ist}$$

$$MO^2 = OP^2 + MP^2 = x^2 + y^2;$$

nennen wir nun ρ die Entfernung des Punktes der Ellipse M vom Mittelpunkte O, was man auch den Radius dieses Punktes nennen kann, so hat man:

$$\rho^2 = b^2 + e^2 x^2 \quad (7); \text{ da nun}$$

$$r r' = a^2 - e^2 x^2, \text{ wo hier } r = FM,\ r' = GM$$

ist, so hat man:

$$\rho^2 = a^2 + b^2 - r r'.$$

Nennet man die Winkel $MOB = \theta$, $MFB = \psi$, $MGB = \psi'$, so ist $OP = MO \cos\theta = \rho \cos\theta$, daher $x = \rho \cos\theta$.

Diesen Werth in (7) substituirt, hat man:

$$\rho^2 = b^2 + e^2 \rho^2 \cos^2\theta, \text{ daher}$$

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2\theta} \quad (8) \quad \text{oder} \quad \rho^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta},$$

eine Formel, durch welche wir für jeden Werth des Winkels θ die entsprechende Größe von ρ und der durch den Mittelpunkt O unter dem Winkel θ gezogenen Sehne M m bestimmen können.

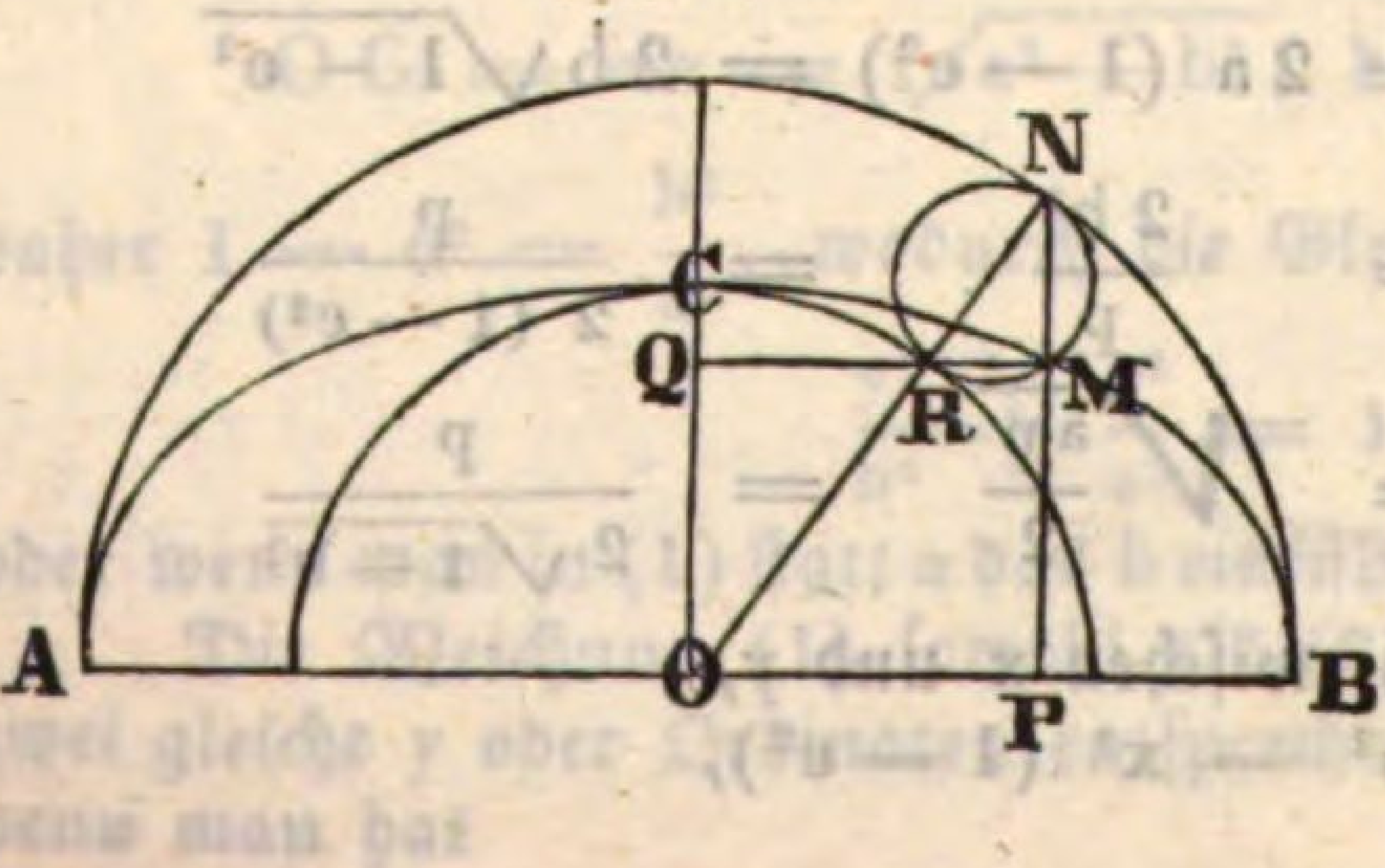
Aus der Formel (8) sieht man, daß für alle Punkte, die dasselbe ρ, d. h. dieselbe Entfernung vom Mittelpunkte haben sollen, $\cos^2\theta$ dasselbe seyn muß, das wird nun für die vier Werthe θ, $180 - \theta$, $180 + \theta$, $360 - \theta$ Statt finden; daher wird es immer vier Punkte in der Ellipse geben, die gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, und alle diese ρ werden gegen die große und kleine Achse gleiche Neigung haben.

Da nun $FP = r \cos\psi$; $GP = -r' \cos\psi'$ ist, so hat man in Hinsicht auf die Gleichungen $r = a + ex$, $r' = a - ex$, und da $FP = ae + x$ und $GP = ae - x$ ist, somit

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\psi};\ r' = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\psi'} \quad (9).$$

§. 310. Da der Kreis in so inniger Beziehung mit der Ellipse stehet (weil der Kreis nur ein Einzelfall der Ellipse für die Gleichheit beider Achsen ist), so wollen wir Kreise verzeichnen, deren Halbmesser die große und kleine Halbachse sind.

Fig. 359.



Es sey der Punkt M der Ellipse; ich fälle von M das Loth MP auf AB, dieses Loth verlängert, schneidet den Kreis der größeren Halbachse in N; ich verbinde N mit O, welche den Kreis der kleineren Halbachse in R schneidet; von R fälle ich das Loth RQ auf OC. Ich nenne den Winkel NOP $= \eta$, so ist, da $NO = OB = a$;

$OP = x$ ist, $\cos \eta = \frac{x}{a}$; da nun auch $RO = b$; $QOR = 90^\circ - \eta$; daher $OQ = b \sin \eta$ ist; daher $\frac{OQ^2}{b^2} = \sin^2 \eta = 1 - \cos^2 \eta$ $= 1 - \frac{x^2}{a^2}$ ist; daher $\frac{OQ^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$ ist, so muß $OQ = y = MP$ seyn; daher muß die QR verlängert durch M gehen; es liegen also die Punkte Q, R, M in einer geraden Linie.

Man nennt den Punkt N den im Kreise der größeren Halbachse zum Punkte M der Ellipse zugehörigen Punkt; eben so ist R der dem M zugehörige Punkt im Kreise der kleineren Halbachse. Diese zwei zugehörigen Punkte N und R liegen also stets mit im Mittelpunkte O in einer geraden Linie NO.

Man ersieht aus dem Obigen, da $\cos \eta = \frac{x}{a}$, und nach dem Erwiesenen $\sin \eta = \frac{y}{b}$ ist, daß daher stets $x = a \cos \eta$, $y = b \sin \eta$.

Es ist also die Abscisse jedes Punktes der Ellipse gleich der großen Halbachse multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den der Halbmesser des zugehörigen Punktes des Kreises der größeren Halbachse mit der großen Achse bildet, die Ordinate gleich der kleineren Halbachse, multiplicirt mit dem Sinus desselben Winkels.

Nennen wir $NP = Y$; $QR = X$, so hat man bei der Ellipse

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, beim größeren Kreise

$x^2 + Y^2 = a^2$; daher

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1$.

Durch Subtraction beider Gleichungen hat man:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{Y^2}{a^2} = 0, \text{ oder } \frac{y}{b} = \frac{Y}{a}, \text{ daher } \frac{Y}{y} = \frac{a}{b},$$

d. h. für dieselbe Abscisse verhält sich die Ordinate des Kreises der großen Halbachse zur Ordinate der Ellipse, wie die große Halbachse zur kleinen.

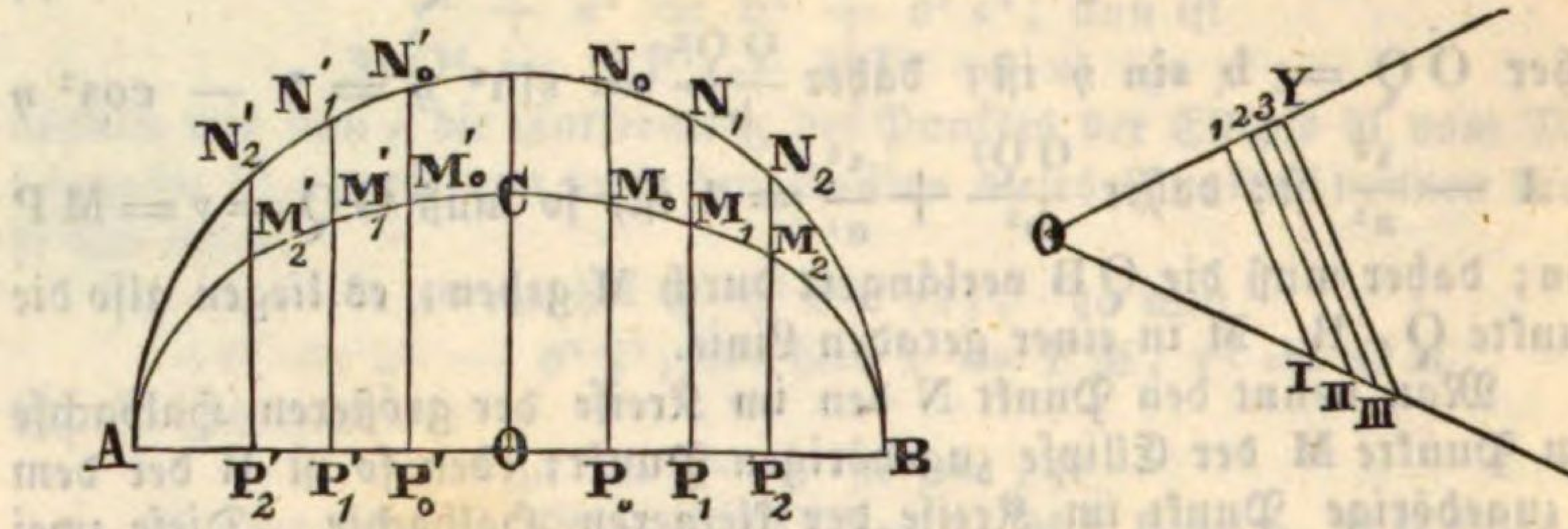
Eben so hat für die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, beim kleineren Kreise

$$X^2 + y^2 = b^2, \text{ oder } \frac{X^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ woraus}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{X^2}{b^2} = 0 \text{ der } \frac{X}{x} = \frac{b}{a},$$

d. h. für dieselbe Ordinate verhält sich die Abscisse des Kreises der kleineren Halbachse zur Abscisse der Ellipse, wie die kleine Halbachse zur großen.

Fig. 360.



Dieß gibt uns ein Mittel an die Hand, die Ellipse zu verzeichnen. Es sey AB die große Achse, OC die kleine Halbachse, so beschreibe ich aus dem Mittelpunkte O mit OB einen Kreis; nehme in diesem Kreise willkürlich die Punkte $N\,N^1\,N_1\,N'_1\,N_2\,N'_2$ an, fälle die Lothe N|P, N'P' u. s. w.

Ich verzeichne mir auf der Seite einen Winkel, von dem einen Schenkel schneide ich $OX = OB$, vom andern $OY = OC$ ab, und nun mache ich $OI = NP = N'P'$; $OII = N_1P_1 = N'_1P'_1$; $OIII = N_2P_2 = N'_2P'_2$, ziehe durch die Punkte I, II, III gleichlaufende mit XY, welche die OY in 1, 2, 3 schneiden, so hat man:

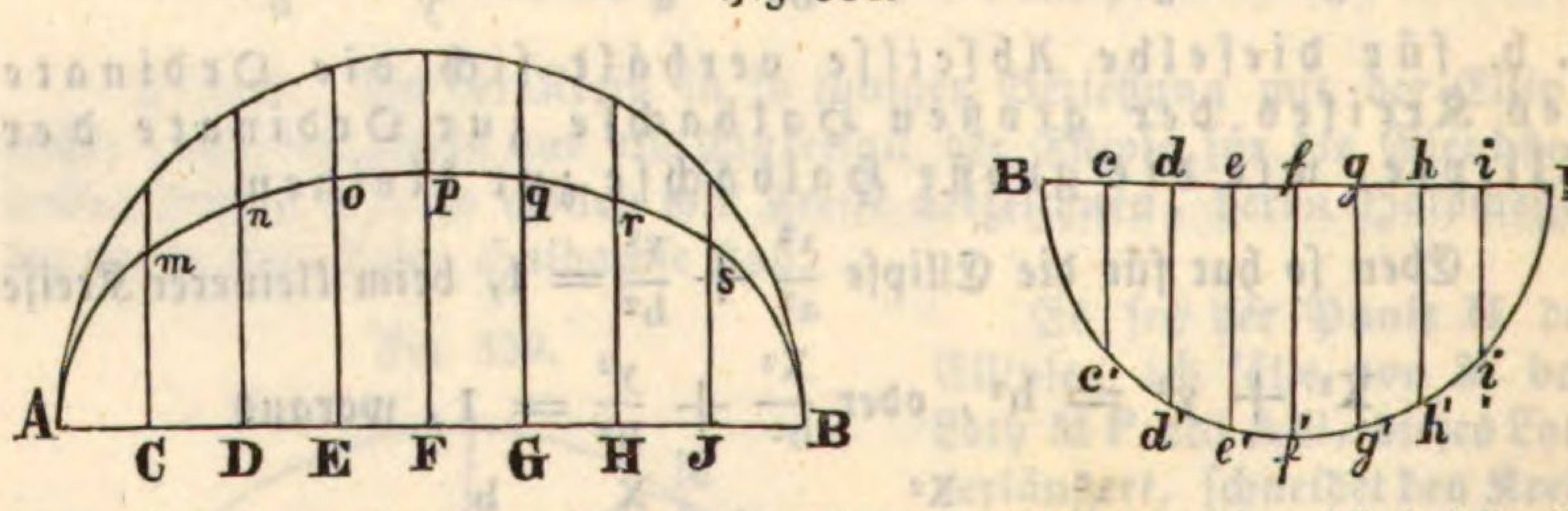
$$\frac{O1}{OI} = \frac{O2}{OII} = \frac{O3}{OIII} = \frac{OY}{OX} = \frac{OC}{OB};$$

daher sind O1, O2, O3 die entsprechenden Ordinaten der Ellipse; ich mache $MP = M'P' = O1$, $M'P' = M'_1P'_1 = O2$ u. s. w., so sind M, M', M_1, M'_1 u. s. w. die verlangten Punkte der Ellipse.

Eben so läßt sich eine Ellipse mittelst des Kreises der kleineren Halbachse verzeichnen.

Das einfachste Verfahren ist wohl folgendes.

Fig. 361.

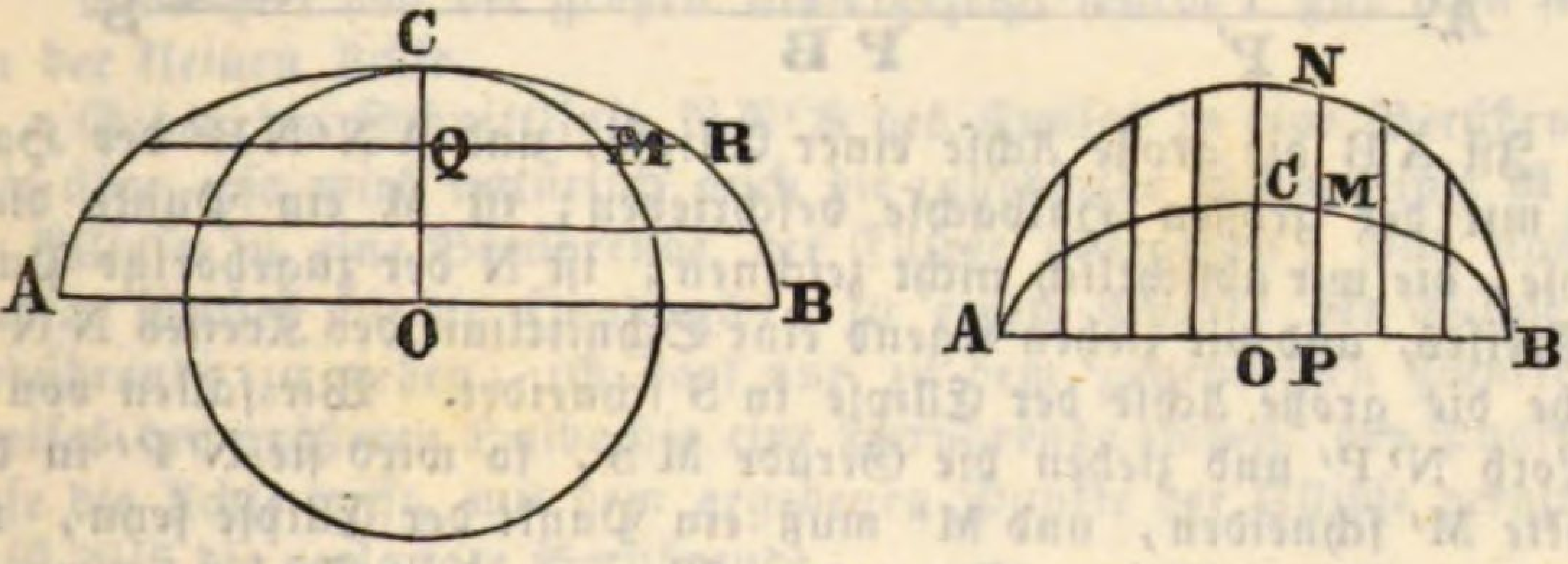


Es sey AB die große und BB' die kleine Achse; ich beschreibe über jeden einen Halbkreis, theile beide in gleich viele Theile, errichte beiderseits Ordinaten; von den Ordinaten über der größeren Achse AB schneide ich $mC = cc'$; $nD = dd'$; $oE = ff'$ u. s. w. ab, so liegen m, n, p in einer Ellipse. Die Auffindung des ganz leichten Beweises überlassen wir unseren Lesern.

Dieß gibt uns ein Hülfsmittel, mittelst eines Kreises die Ellipse

zu construiren. Ich beschreibe entweder mit der großen Halbachse einen Kreis, und verjünge die Ordinaten im Verhältnisse der kleinen zur großen Halbachse, oder ich beschreibe einen Kreis mit der kleinen Halbachse, und vergrößere die Abscissen im Verhältnisse der großen zur kleinen Halbachse.

Fig. 362.

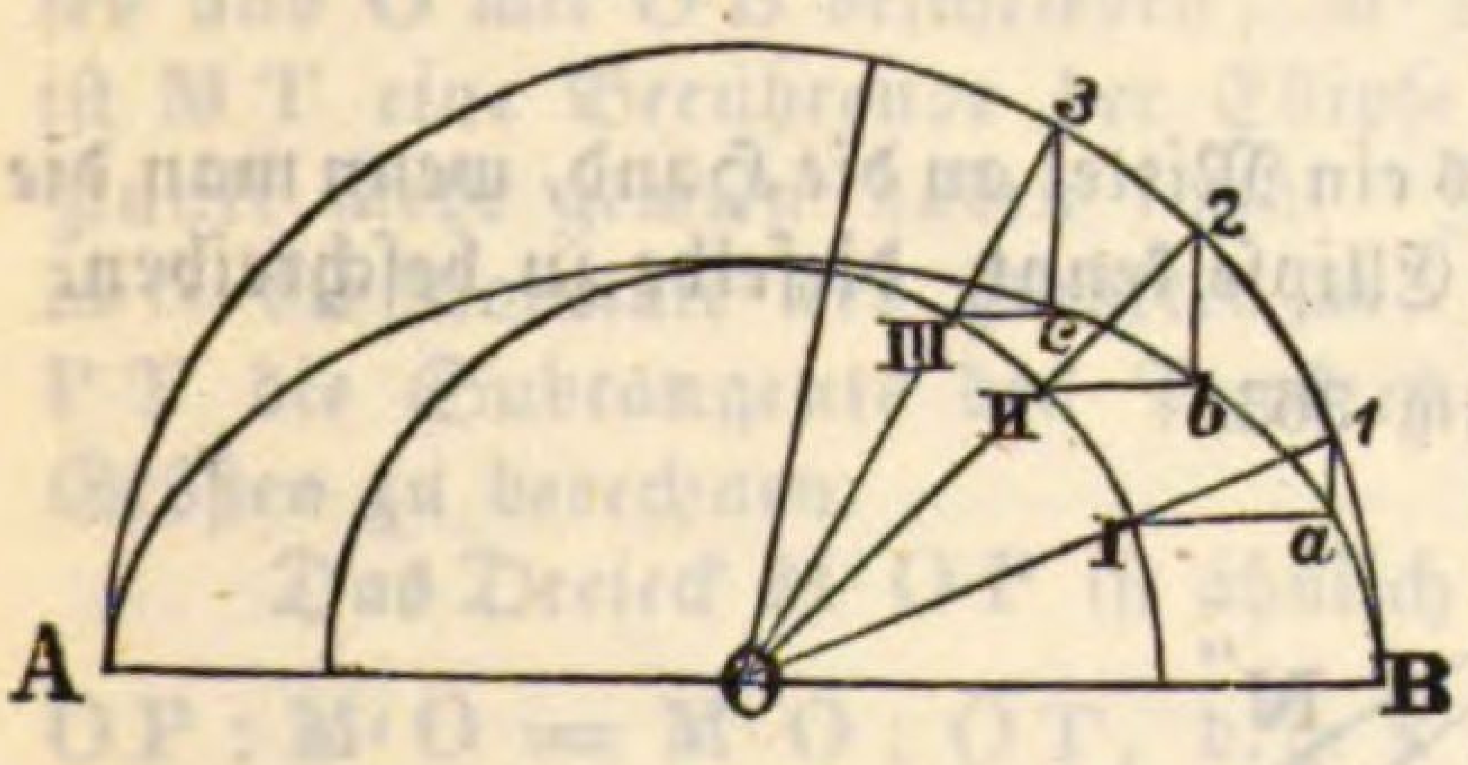


Verjüngt man so hier die Ordinaten im Verhältnisse 1 : 2, so erhält man die halbe Ellipse A C B, wo die große Halbachse A O, die kleine $CO = \frac{AO}{2}$ ist.

Beschreibe ich eben so mit der kleineren Halbachse O C einen Kreis und verlängere jede Abscisse Q M im Verhältnisse 2 : 3, so erhalte ich eine Ellipse A C B, wo die kleine Halbachse O C und die große $\frac{3}{2}$ O C ist.

Die Eigenschaft der Ellipse, daß die zu einem Punkte derselben zugehörigen Punkte in den Kreisen der größeren und kleineren Halbachse stets mit dem Mittelpunkte in einer Geraden liegen, läßt sich ebenfalls zur Verzeichnung der Ellipse benützen.

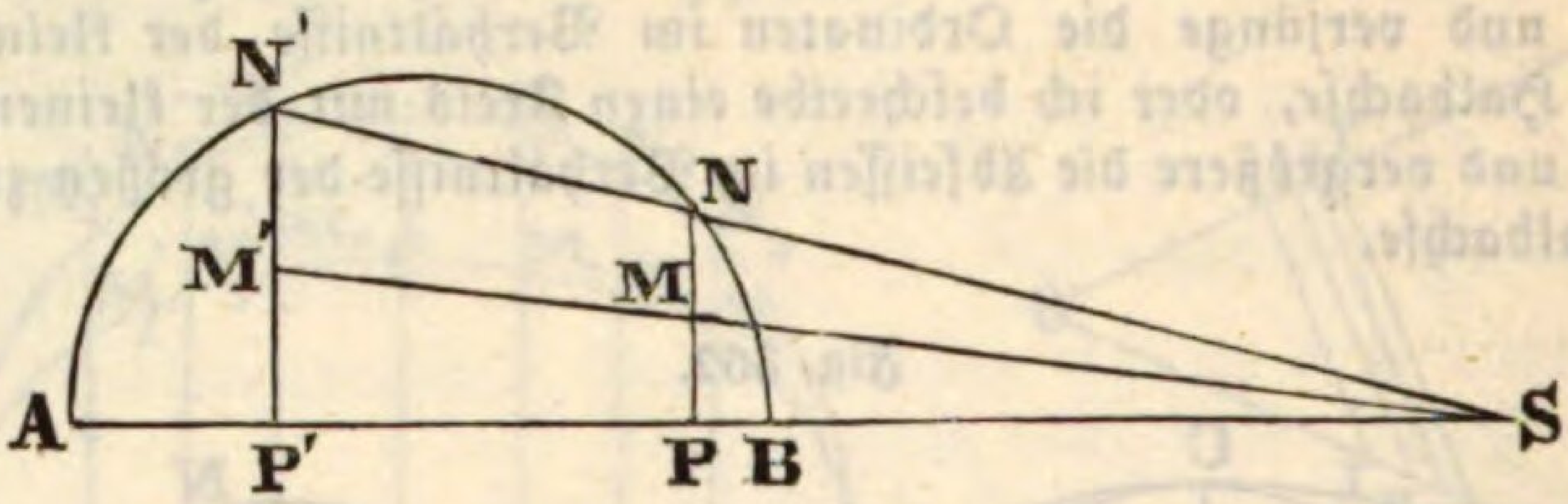
Fig. 363.



Man beschreibt aus dem Mittelpunkte mit der größeren und kleineren Halbachse Kreise, nimmt im Umfange des größeren Kreises nach Willkür und Bedürfniß Punkte 1, 2, 3 ... an, ziehet die Halbmesser, welche den kleineren Kreis in I, II, III... schneiden, fällt von 1, 2, 3... Lothe auf die große Achse, und von I, II, III... auf diese wieder Lothe, so sind die Fußpunkte der letzteren a, b, c... Punkte der Ellipse.

§. 311. Die eben entwickelte Verwandtschaft des Kreises und der Ellipse lernt uns folgende Eigenschaft kennen lernen.

Fig. 364.



Ist A B die große Achse einer Ellipse, und A N′ N B′ der Halbkreis mit der großen Halbachse beschrieben; ist M ein Punkt dieser Ellipse, die wir absichtlich nicht zeichnen; ist N der zugehörige Punkt des Kreises, und wir ziehen irgend eine Schnittlinie des Kreises N N′ S, welche die große Achse der Ellipse in S schneidet. Wir fällen von N′ ein Loth N′ P′ und ziehen die Gerade M S, so wird sie N′ P′ in dem Punkte M′ schneiden, und M′ muß ein Punkt der Ellipse seyn, und zwar der zu N zugehörige. Mit andern Worten: die Sehne zweier Punkte der Ellipse schneidet die Sehne der zwei zugehörigen Punkte der Kreise in demselben Punkte der Achse.

Sind nämlich a und b die Halbachsen, und zwar a die größere, so ist nach unserer Voraussetzung $\frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}$, weil M ein Punkt der Ellipse ist, und weil $NP \parallel N'P'$, so hat man:

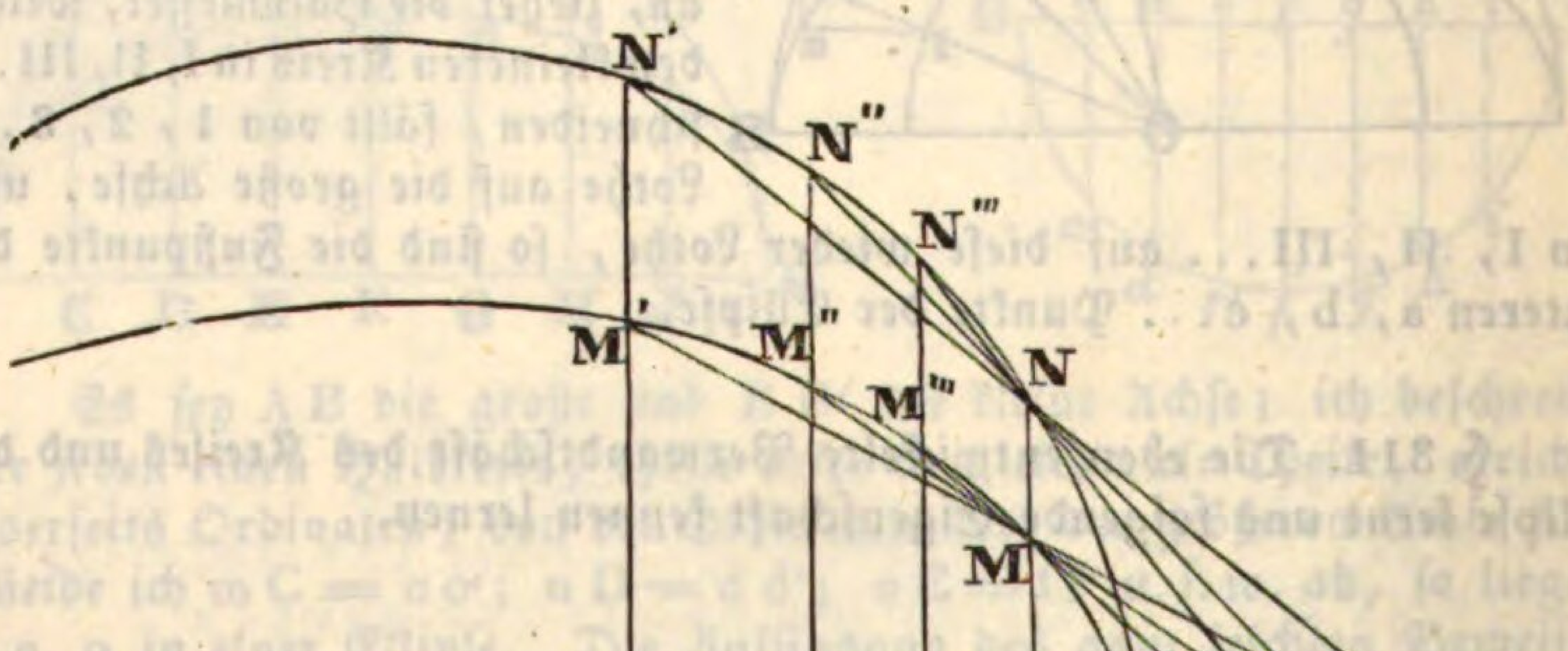
$\frac{NP}{N'P'} = \frac{SP'}{SP'}$, und eben so $\frac{MP}{M'P'} = \frac{SP}{SP'}$, daher also

$\frac{NP}{N'P'} = \frac{MP}{M'P'}$ oder $\frac{NP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'}$, da nun $\frac{NP}{MP} = \frac{a}{b}$,

daher also auch $\frac{N'P'}{M'P'} = \frac{a}{b}$, daher also auch der Punkt M′ ein Punkt derselben Ellipse.

Das Vorhergehende gibt uns ein Mittel an die Hand, wenn man die große Achse und einen Punkt der Ellipse kennt, dieselbe zu beschreiben.

Fig. 363.

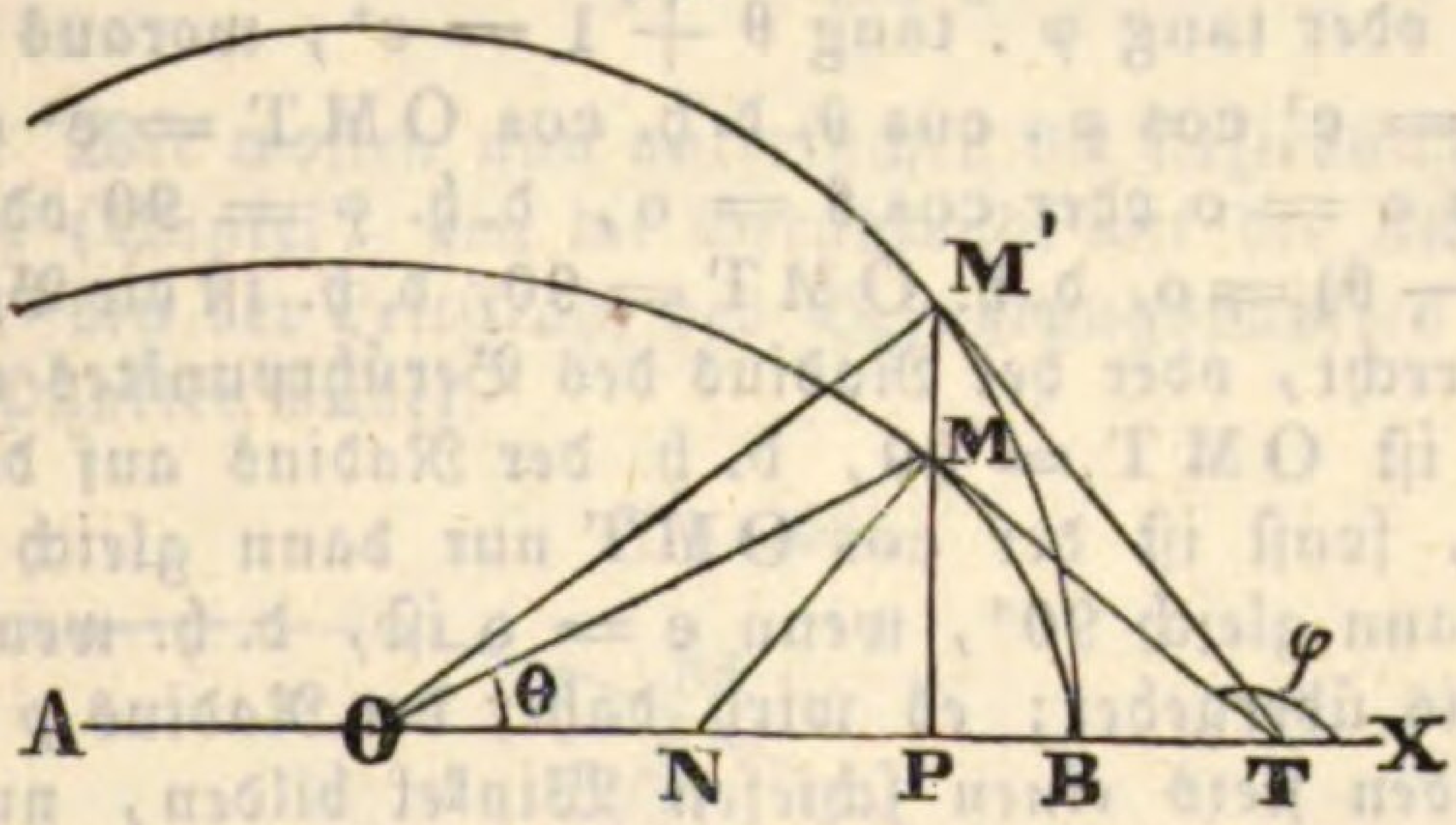


Ist nämlich die große Achse A B und der Punkt M der Ellipse gegeben, so beschreibe ich aus dem Halbirungspunkte O mit O B einen Halbkreis, verbinde N mit den Punkten N′ N″ N‴ ... durch gerade Linien, welche die Achse in S′ S″ S‴ ... schneiden; ziehe nun die Geraden S′ M, S″ M, S‴ M ... die Durchschnittspunkte dieser Geraden mit den Lothen N′ P′, N″ P″, N‴ P‴ ... sind die Punkte der verlangten Ellipse.

Was hier von der großen Achse gezeigt wurde, gilt eben so gut von der kleinen Achse.

Gehet die Schnittlinie N N′ S des Kreises in eine Berührungslinie über, so wird natürlich auch die zugehörige Schnittlinie M M′ S der Ellipse in eine Berührende der Ellipse übergehen, was uns ein zweites Mittel an die Hand gibt, zu einem Punkte der Ellipse eine Berührende zu ziehen; ich darf nur zu dem zugehörigen Punkte des Kreises der größeren Halbachse eine Berührende ziehen, den Punkt, wo diese die Achse trifft, mit dem gegebenen Punkte der Ellipse verbinden, so ist dieß die verlangte Berührende.

Fig. 365.



Ist M ein Punkt der Ellipse, M′ der zugehörige Punkt des Kreises aus O mit O B beschrieben, M′ T eine Berührende des Kreises, so ist M T eine Berührende der Ellipse, weil sie mit ihr keinen zweiten Punkt mehr gemein haben kann. Ist M N senkrecht auf M T, so ist M N die Normale des Punktes M, N P heißt die Subnormale, und P T die Subtangente des Punktes M. Es ist hier der Ort, diese Größen zu berechnen.

Das Dreieck M′ O P ist ähnlich mit dem Dreiecke M′ O T, woraus $OP : M'O = M'O : OT$, d. h. $x : a = a : OT$, daher $OT = \frac{a^2}{x}$ und $PT = \frac{a^2}{x} - x = \frac{a^2 - x^2}{x}$ = Subtangente.

Wie man sieht, ist die Subtangente bei der Ellipse von der kleinen Achse unabhängig, und alle Ellipsen derselben großen Achse werden für die Punkte, welche dieselbe Abscisse haben, alle dieselbe Subtangente haben.

Man hat ferners $MT^2 = MP^2 + PT^2 = y^2 + \frac{(a^2 - x^2)^2}{x^2}$; daher $MT^2 = \frac{y^2 x^2 + (a^2 - x^2)^2}{x^2}$, setzt man hier statt y^2 den Werth

$(1-e^2)(a^2-x^2)$, so erhält man $MT^2 = \frac{(a^2-x^2)(a^2-e^2x^2)}{x^2}$ $=$ tang² des Punktes M (denn MT nennt man die Tangente des Punktes M). Auf ähnliche Art subnorm $= NP = (1-e^2)x$ $= \frac{p}{2a}x$, normal² $= MN^2 = (1-e^2)(a^2-e^2x^2)$ und NT $= \frac{a^2-e^2x^2}{x}$.

Nennen wir den Winkel MTx, den die Berührende mit der Achse bildet, φ, so hat man $\tang \varphi = -\frac{MP}{PT}$; da nun $MP = y$, und $PT = \frac{a^2-x^2}{x} = \frac{y^2}{(1-e^2)x}$ ist, so hat man $\tang \varphi = -(1-e^2)\frac{x}{y}$; heißt nun wie früher der Winkel, den $\rho = MO$ mit der Achse der x bildet, θ, so hat man $\tang \theta = \frac{y}{x}$, daher dann

$\tang \varphi = -(1-e^2)\cotg \theta$, oder $\tang \varphi \tang \theta = -(1-e^2)$ oder $\tang \varphi \,.\, \tang \theta + 1 = e^2$, woraus

$\cos(\varphi-\theta) = e^2 \cos \varphi \,.\, \cos \theta$, d. h. $\cos OMT = e^2 \cos \varphi \,.\, \cos \theta$.

Ist $\cos \varphi = o$ oder $\cos \theta = o$, d. h. $\varphi = 90$ oder $\theta = 90°$, so ist $\cos(\varphi-\theta) = o$, d. h. $OMT = 90$, d. h. ist die Berührende auf der Achse senkrecht, oder der Radius des Berührpunktes auf der Achse senkrecht, so ist $OMT = 90$, d. h. der Radius auf der Berührenden senkrecht, sonst ist der cos OMT nur dann gleich Null, d. h. OMT nur dann gleich 90°, wenn $e = o$ ist, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergehet; es wird daher der Radius $\rho = MO$ mit der Berührenden stets einen schiefen Winkel bilden, nur in den vier Endpunkten der beiden Hauptachsen einen rechten.

Der frühere Werth für tang φ gibt uns

$$\tang^2 \varphi = (1-e^2)^2 \,.\, \frac{x^2}{y^2} = \frac{(1-e^2)^2 x^2}{(1-e^2)(a^2-x^2)},\text{ eben so}$$

$$\tang^2 \varphi = \frac{(1-e^2)^2\left(a^2-\frac{y^2}{1-e^2}\right)}{y^2}.\text{ Man erhält so}$$

$$\tang^2 \varphi = \frac{(1-e^2)x^2}{a^2-x^2}\text{ und }\tang \varphi = (1-e^2)\left(\frac{b^2}{y^2}-1\right),$$

woraus man zurück

$$x^2 = \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}\text{ und }y^2 = \frac{b^2(1-e^2)\cos^2\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi}\text{ erhält;}$$

$$\text{daher } OM^2 = \rho^2 = x^2+y^2 = \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2(1-e^2)\cos^2\varphi}{1-e^2\cos^2\varphi},$$

$$x^2 = \frac{a^4\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};\ y^2 = \frac{b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\text{ und}$$

$$\sin^2\varphi = \frac{b^4x^2}{a^4y^2+b^4x^2},\ \cos^2\varphi = \frac{a^4y^2}{a^4y^2+b^4x^2}.$$

Für die beiden Leitstrahlen r und r′ hat man, da

$$r - a = + e x,\quad r' - a = - e x;$$ daher

$$(r-a)^2 = \frac{a^2 e^2 \sin^2\varphi}{1-e^2\cos^{2}\varphi}$$ für beide Leitstrahlen.

Endlich hat man für den Radius des Punktes M $\rho = MO$,

$$\rho^2 = \frac{a^4 \sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Eben so geben die Gleichungen $\tang\theta = \frac{y}{x}$, und $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ uns folgende Ausdrücke:

$$x^2 = \frac{a^2b^2\cos^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{b^2\cos^2\theta}{1-e^2\cos^2\theta},$$

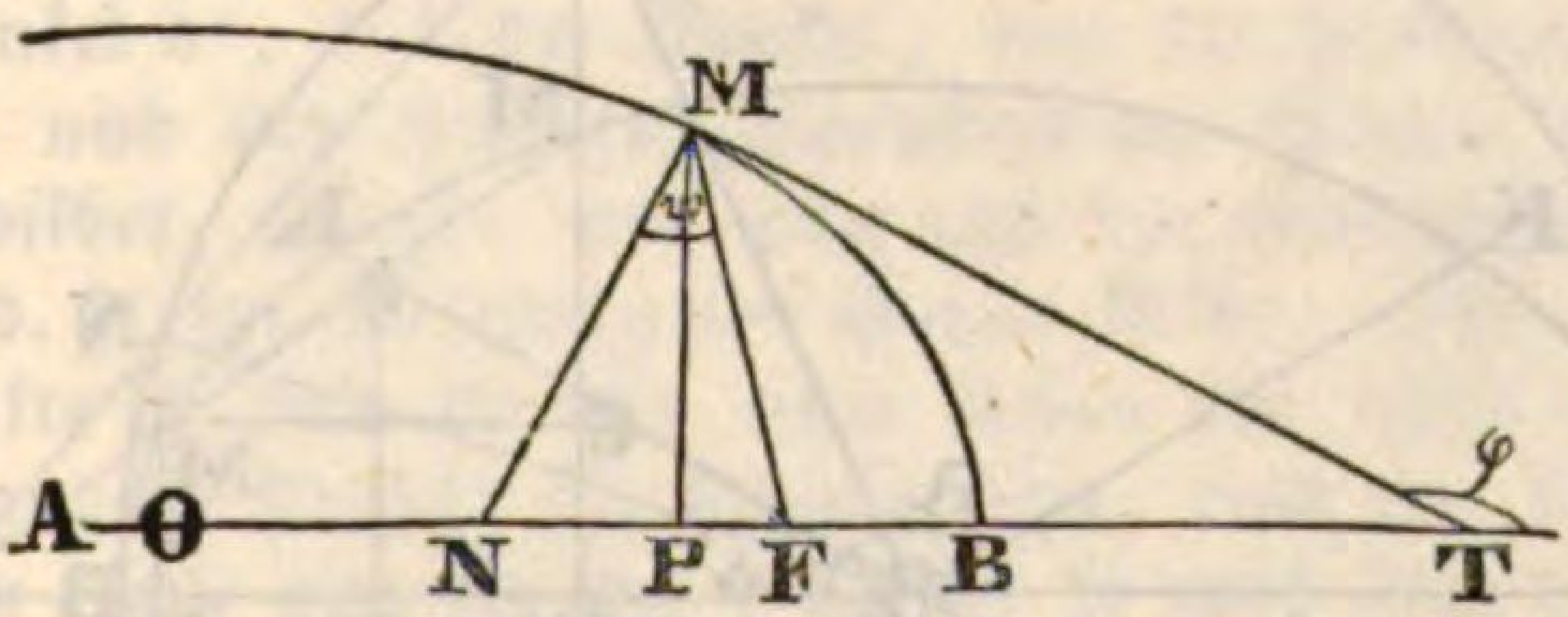
$$y^2 = \frac{a^2b^2\sin^2\theta}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} = \frac{b^2\sin^2\theta}{1-e^2\cos^2\theta},$$

woraus unser Früheres:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1-e^2\cos^2\theta}.$$

§. 312. Wir wollen nun untersuchen die Beziehung, die zwischen dem Winkel φ (Winkel, den die Berührende mit der Achse bildet) und dem Winkel, den der Leitstrahl des Berührungspunktes mit der Normale dieses Punktes bildet.

Fig. 366.



Es sey MT die Berührende, deren Winkel mit der Achse $= \varphi$ sey, MN sey die Normale, FM der Leitstrahl, der Winkel $NMF = \omega$, $MP = y$ die Ordinate, $OP = x$ die Abscisse des Punktes M, so hat man:

$$NMP = MTP = 180^\circ - \varphi;\quad PMF = NMF - NMP$$
$$= \omega - (180 - \varphi) = \omega + \varphi - 180;$$

$$\tang PMF = \frac{PF}{MP} = \frac{ae - x}{y};$$ daher $$\tang(\omega + \varphi) = \frac{x - ae}{y},$$

woraus $$\frac{\tang\omega + \tang\varphi}{1 - \tg\omega\,.\,\tg\varphi} = \frac{x - ae}{y},$$ woraus $$\tang\omega = \frac{x - ae - y\,\tg\varphi}{y + (x - ae)\tg\varphi};$$

Da nun $x = \frac{a\sin\varphi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}$; $y = \frac{a(1-e^2)\cos\varphi}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}}$, so findet man nach einer kleinen Rechnung:

$$\tang\omega = \frac{e\cos\varphi\,[e\sin - \sqrt{1-e^2\omega^2\varphi}]}{\sqrt{1-e^2\cos^2\varphi}\,[\sqrt{1-e^2\cos\varphi - e\sin\varphi}]},$$ daher

$$\tang \omega = \frac{-e \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}};\; 1 + \tang^2 \omega = \frac{1}{1 - e^2 \cos^2 \varphi}, \text{ und somit}$$

$$\frac{\tang \omega}{1 + \tang^2 \omega} = e^2 \cos^2 \varphi; \text{ daher}$$

$$\sin \omega = \pm e \cos \varphi;$$

da ω immer spitzig seyn wird, so ist das doppelte Zeichen nur deßhalb vorhanden, daß, wenn φ stumpf ist, also $\cos \varphi$ negativ, daß dann deßungeachtet $\sin \omega$ positiv ist; daher

$$1 - e^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \omega;\; \cos \varphi = \frac{\sin \omega}{e};\; \sin \varphi = \frac{1}{e}\sqrt{e^2 - \sin^2 \omega}.$$

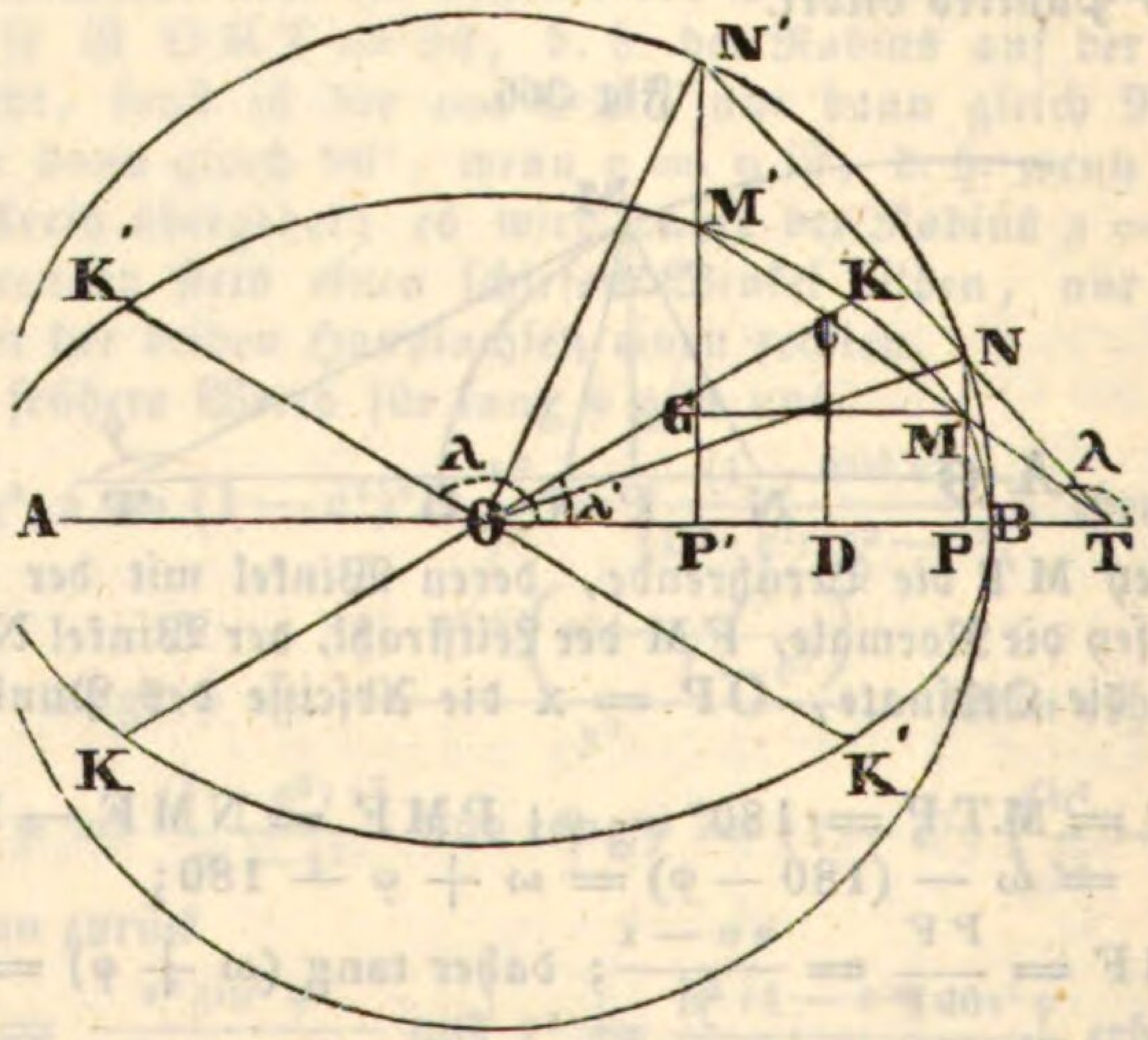
Führt man in die Werthe von x und y statt dem φ das ω ein, so hat man:

$$x = \frac{a\sqrt{e^2 - \sin^2 \omega}}{e \cos \omega};\; y = \frac{a(1 - e^2) \sin \omega}{e \cos \omega}.$$

Man sieht daraus, daß $\sin \omega$ nie größer als e werden kann. Da $\tang \theta = \frac{y}{x}$, so hat man $\tang \theta = \frac{\sqrt{e^2 - \sin^2 \omega}}{\sin \omega}$, woraus

$$\tang^2 \omega = \frac{e^2 \sin^2 \theta}{(1 - e^2)(1 - e^2 \cos^2 \theta)} = \frac{a^2 e^2 \sin^2 \theta}{b^2 (1 - e^2 \cos^2 \theta)}.$$

Fig. 367.



§. 313. Es seyen M, M' zwei Punkte der Ellipse, N und N' die zugehörigen Punkte im Kreise der größeren Halbachse, die geraden M M' und N N' schneiden sich in T. Der Winkel M T X sey $= \lambda$.

Es sey M G $\perp$ auf die Ordinaten M P und M' P', so hat man:

$$\tang \lambda = -\tang . M'MG = -\frac{M'G}{MG};\text{ nun ist:}$$

$$M'G = M'P' - MP;\; MG = OP - OP'.$$

Nennen wir die Winkel $NOT = \eta$; $N'OT = \eta'$, so hat man nach §. 310.

$MP = b \sin\eta$; $M'P' = b \sin\eta'$; $OP = a \cos\eta$; $OP' = a \cos\eta'$

$$M'G = b(\sin\eta' - \sin\eta) = 2b \sin\frac{\eta' - \eta}{2} \cos\frac{\eta' + \eta}{2}$$

$$MG = a(\cos\eta - \cos\eta') = 2a \sin\frac{\eta' - \eta}{2} \sin\frac{\eta' + \eta}{2};$$

$$\text{daher } \operatorname{tang}\lambda = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg}.\frac{\eta' + \eta}{2}.$$

Halbiren wir die Sehne MM′ in C, so hat man

$CD = \frac{1}{2}(MP + M'P')$; $OD = \frac{1}{2}(OP + OP')$; daher

$$CD = \tfrac{1}{2} b(\sin\eta' + \sin\eta) = b \sin\frac{\eta + \eta'}{2} \cos\frac{\eta - \eta'}{2}$$

$$OD = \tfrac{1}{2} a(\cos\eta' + \cos\eta) = a \cos\frac{\eta + \eta'}{2} \cos\frac{\eta - \eta'}{2}.$$

Nennt man daher den Winkel $COD = \lambda'$, so hat man

$$\operatorname{tang}\lambda' = \frac{CD}{OD}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang}\lambda' = \frac{b}{a} \operatorname{tang}\frac{\eta + \eta'}{2},$$

$$\text{woraus sich } \operatorname{tang}\lambda . \operatorname{tang} . \lambda' = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ergibt; daher}$$

$$\operatorname{tang}\lambda' = -\frac{b^2}{a^2} \operatorname{cotg}\lambda \quad (1).$$

Der Winkel λ′, d.i. der Winkel, den die Verbindungslinie des Mittelpunktes und des Halbirungspunktes der Sehne MM′ mit der großen Achse bildet, hängt, wie man aus der Gleichung (1) ersieht, wohl von λ, d. h. der Richtung der Sehne MM′, nicht aber von dem Orte der Punkte M und M′ ab; denn lassen wir auch die Punkte M und M′ stets andere Punkte der Ellipse seyn, doch so, daß MM′ stets mit der großen Achse den Winkel λ bildet, so wird doch stets λ′ denselben Werth beibehalten, d. h. der Halbirungspunkt C der Sehne MM′ wird stets in der Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt gehet, und mit der Achse den Winkel λ′ bildet. Hieraus ersieht man, daß die Halbirungspunkte aller mit MM′ gleichlaufenden Sehnen in einer durch den Mittelpunkt O gehenden OK liegen, die mit der großen Achse den Winkel λ′ macht, welcher mit dem Winkel λ, den die MM′ mit der Achse bildet, durch obige Gleichung (1) verbunden ist.

Dieselbe Gleichung (1) lehrt uns aber auch, daß, wenn die MM′ mit der Achse den Winkel λ′ bilden würden, dann die OK (in welcher die Halbirungspunkte aller mit MM′ gleichlaufenden Sehnen enthalten sind), mit der Achse den Winkel λ bilden muß, d. h. die Halbirungspunkte aller Sehnen, die mit der Achse einen λ′ bilden, werden in einer Geraden liegen, die durch den Mittelpunkt gehet, und mit der Achse den Winkel λ bilden. Ziehen wir nun durch O die K′K′ ∥ MM′, und verlängern die OC in KK, so werden also die Halbirungspunkte aller mit KK gleichlaufenden Sehnen in K′K′, und wie wir früher

sahen, die Halbirungspunkte aller mit K′K′ (oder mit MM′) gleichlaufenden Sehnen in der KK liegen. Die zwei Durchmesser KK und K′K′ haben also eine solche Beziehung gegen einander, daß ein jeder die zum andern gleichlaufenden Sehnen halbirt. Solche Durchmesser heißen **conjugirte Achsen.** Da jede zu der einen der conjugirten Achsen gleichlaufende Sehne von der andern halbirt wird, so ist begreiflich die durch den Endpunkt der einen Achse zur andern gleichlaufende gezogene Gerade eine Berührende der Ellipse. Würden wir durch K eine mit K′K′ gleichlaufende ziehen, so wäre dieß eine Berührende der Ellipse.

§. 314. Der Zusammenhang der Richtungen der beiden conjugirten Achsen ist durch die Gleichung

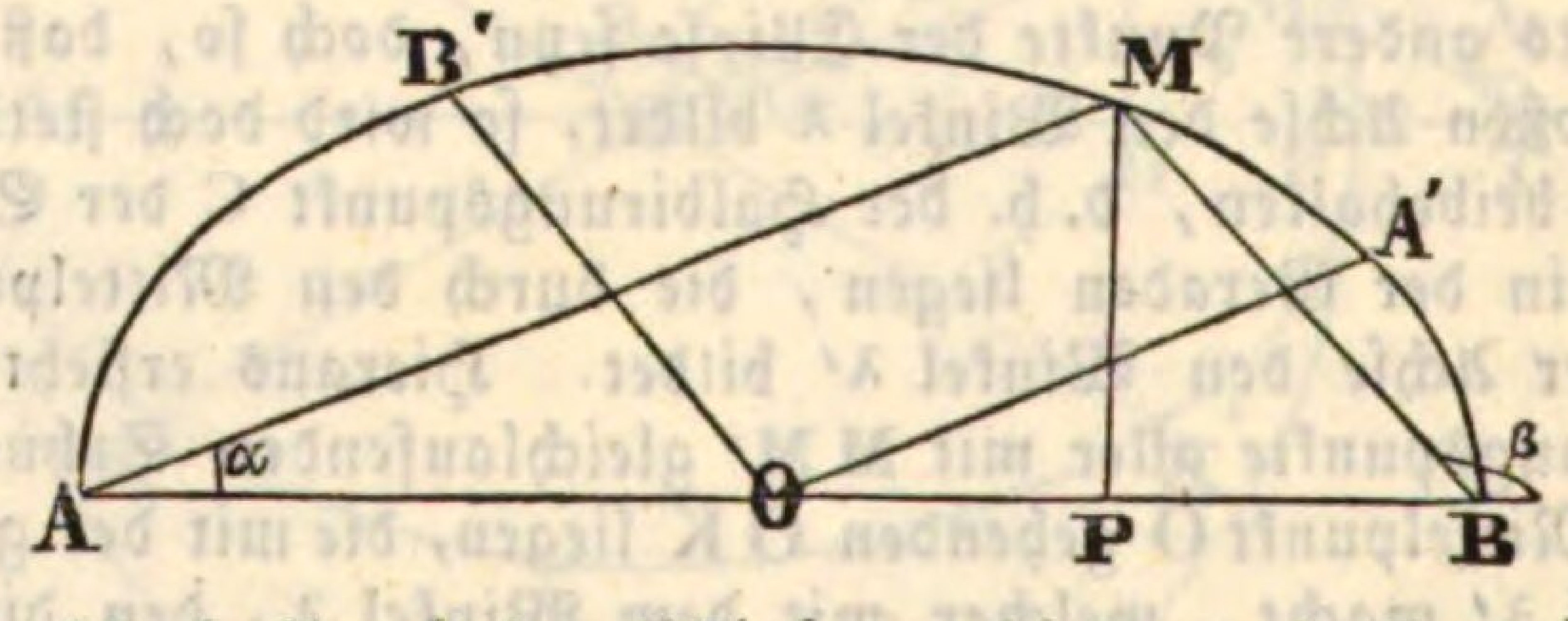
$$\text{tang}\,\lambda\ .\ \text{tang}\,\lambda' = -\frac{b^2}{a^2} = -(1-e^2)$$

gegeben. Vergleichen wir diese Gleichung mit der früher gefundenen

$$\text{tang}\,\varphi\ .\ \text{tang}\,\theta = -(1-e^2),$$

wo hier φ der Winkel der Berührenden mit der Achse, und θ der Winkel des Radius des Berührungspunktes (Verbindungslinie des Berührungspunktes mit dem Mittelpunkte) mit derselben Achse ist, so finden wir, daß es dieselbe Gleichung ist, weil immer der eine Winkel λ auch der Winkel der Berührenden mit der Achse, der andere der Winkel des Radius des Berührpunktes mit der Achse ist. Auch hier können wir auf dieselbe Art schließen, wie der Winkel $(\varphi - \theta)$ stets ein schiefer ist, nur in den vier Endpunkten der Hauptachse ein rechter, so wird auch $\lambda - \lambda'$ d. i. KOK′ stets ein schiefer seyn, sobald nicht λ oder λ' gleich 90° wird, was nun bei den zwei Hauptachsen der Fall ist.

Fig. 368.



Es sey M ein Punkt der Ellipse, verbinden wir ihn mit A und B den Endpunkten der großen Achse, und nennen $MAP = \alpha$ und $MBT = \beta$, so hat man:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{MP}{AP} = \frac{y}{a+x};\ \text{tang}\,\beta = -\frac{MP}{PB} = -\frac{y}{a-x};\ \text{daher}$$

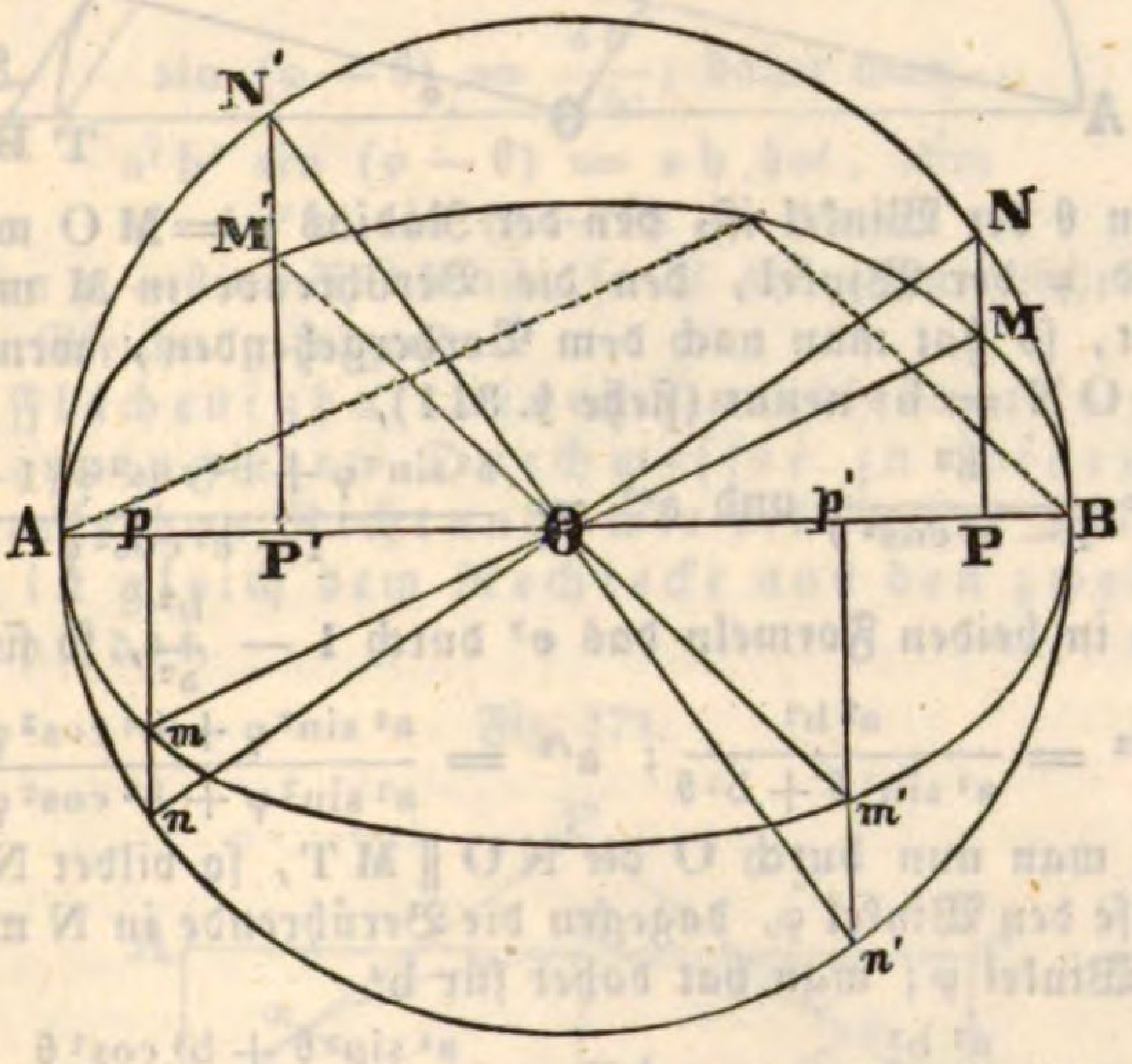
$$\text{tang}\,\alpha\ \text{tang}\,\beta = -\frac{y^2}{a^2-x^2};\ \text{daher tang a tang}\,\beta = -(1-e^2).$$

Verbinden wir also einen Punkt der Ellipse mit den Endpunkten der großen Achse, so haben die so entstehenden Sehnen (man nennt sie Supplementar-Sehnen) gerade dieselbe Beziehung zu einander rück-

sichtlich ihrer Richtung wie zwei conjugirte Durchmesser; ziehe ich also durch O mit MA und MB Gleichlaufende OA′ und OB′, so sind dieß zu einander conjugirte Halbachsen (halbe conjugirte Durchmesser).

Die den vier Endpunkten zweier conjugirter Achsen zugehörigen Punkte im Kreise der größeren Halbachse liegen immer in zwei auf einander senkrechten Durchmessern.

Fig. 369.



Sind Mm und M′m′ zwei conjugirte Durchmesser, und sind Nn N′n′ die zu Mm M′m′ zugehörigen Punkte im Kreise der größeren Halbachse; nennet man $MOP = \lambda$; $M'OP = \lambda'$; $NOP = \alpha$; $N'OP = \alpha'$, so hat man

$OP = a \cos \alpha$; $MP = b \sin \alpha$; $OP' = a \cos \alpha'$; $M'P' = b \sin \alpha'$;

$$\text{da nun } \operatorname{tang} \alpha = \frac{MP}{b} : \frac{OP}{a} = \frac{MP}{OP} \cdot \frac{a}{b} = \operatorname{tang} \lambda \cdot \frac{a}{b} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang} \alpha' = -\frac{M'P'}{OP'} \cdot \frac{a}{b} = \operatorname{tang} \lambda' \cdot \frac{a}{b} \text{ ist, so hat man:}$$

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' = \operatorname{tang} \lambda \cdot \operatorname{tang} \lambda' \cdot \frac{a^2}{b^2}; \text{ da nun}$$

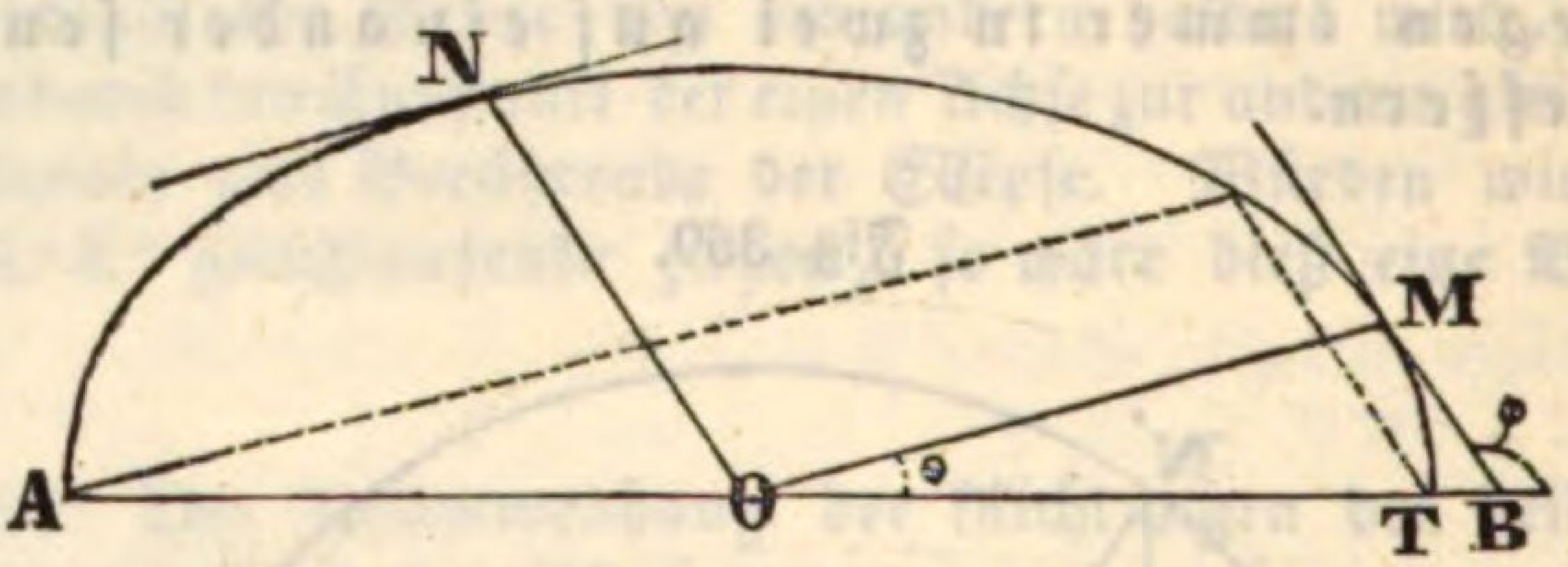
$$\operatorname{tang} \lambda \cdot \operatorname{tang} \lambda' = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ist, so hat man}$$

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' = -1, \text{ daher } \operatorname{tang} \alpha = -\operatorname{cotg} \alpha' = \operatorname{cotg} (180^\circ - \alpha')$$
$$= \operatorname{tang} (90^\circ - 180^\circ + \alpha'); \text{ daher}$$
$$\alpha = \alpha' - 90; \text{ daher } \alpha' - \alpha = 90 \text{ oder } NON' = 90^\circ.$$

Im Vorhergehenden liegt ein leichtes Mittel, wenn die eine der beiden conjugirten Achsen angegeben ist, die andere zu finden.

§. 315. Haben wir im Vorhergehenden die Richtungen der conjugirten Achsen im Auge gehabt, so wollen wir jetzt ihre Größen in Betrachtung ziehen.

Fig. 370.



Wenn θ der Winkel ist, den der Radius $\rho = MO$ mit der Achse bildet, und φ der Winkel, den die Berührende in M mit derselben Achse bildet, so hat man nach dem Vorhergehenden, wenn man OM $= a'$ und ON $= b'$ nennt (siehe §. 311),

$$a'^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta} \text{ und } a'^2 = \frac{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi (1 - e^2)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi},$$

ersetzt man in beiden Formeln das e^2 durch $1 - \frac{b^2}{a^2}$, so findet man:

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \theta}; \quad a'^2 = \frac{a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Zieht man nun durch O die NO ∥ MT, so bildet NO mit der großen Achse den Winkel φ, dagegen die Berührende in N mit derselben Achse den Winkel φ; man hat daher für b'

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}; \quad b'^2 = \frac{a^4 \sin^2 \theta + b^3 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}; \text{ daher ist}$$

$$a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 b^2 + a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + a^4 \sin^2 \varphi + b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi};$$

$$\text{daher } a'^2 + b'^2 = \frac{(a^2 + b^2) a^2 \sin^2 \varphi + (a^2 + b^2) b^2 \cos \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$$

(wo hier anstatt φ eben so gut θ stehen könnte), woraus der merkwürdige Satz:

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 \quad (1);$$

d. h. die Summe der Quadrate der beiden conjugirten Halbachsen ist gleich der Summe der Quadrate der beiden halben Hauptachsen.

Der Winkel, den beide conjugirte Halbachsen a' und b' einschließen, ist $\varphi - \theta$; da nun $\tang \varphi \tang \theta = -\frac{b^2}{a^2}$, so hat man:

$$\sin \varphi = \frac{b^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}}; \quad \cos \varphi = \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}};$$

$$\text{daher } \sin(\varphi - \theta) = \frac{a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta}{\sqrt{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}};$$

da nun $a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta = \frac{a^2 b^2}{a'^2}$; $a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta$

$$= b'^2 (a^2 \sin^2\theta + b^2 \cos^2\theta) = b'^2 \cdot \frac{a^2 b^2}{a'^2}; \text{ daher}$$

$$\sqrt{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta} = \frac{a\, b\, b'}{a'} \text{ ist, so hat man:}$$

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{a^2 b^2}{a'^2} : \frac{a\, b\, b'}{a'} = \frac{a^2 b^2}{a'^2} \cdot \frac{a'}{a\, b\, b'}, \text{ und somit}$$

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{a\, b}{a' b'}; \text{ daher man}$$

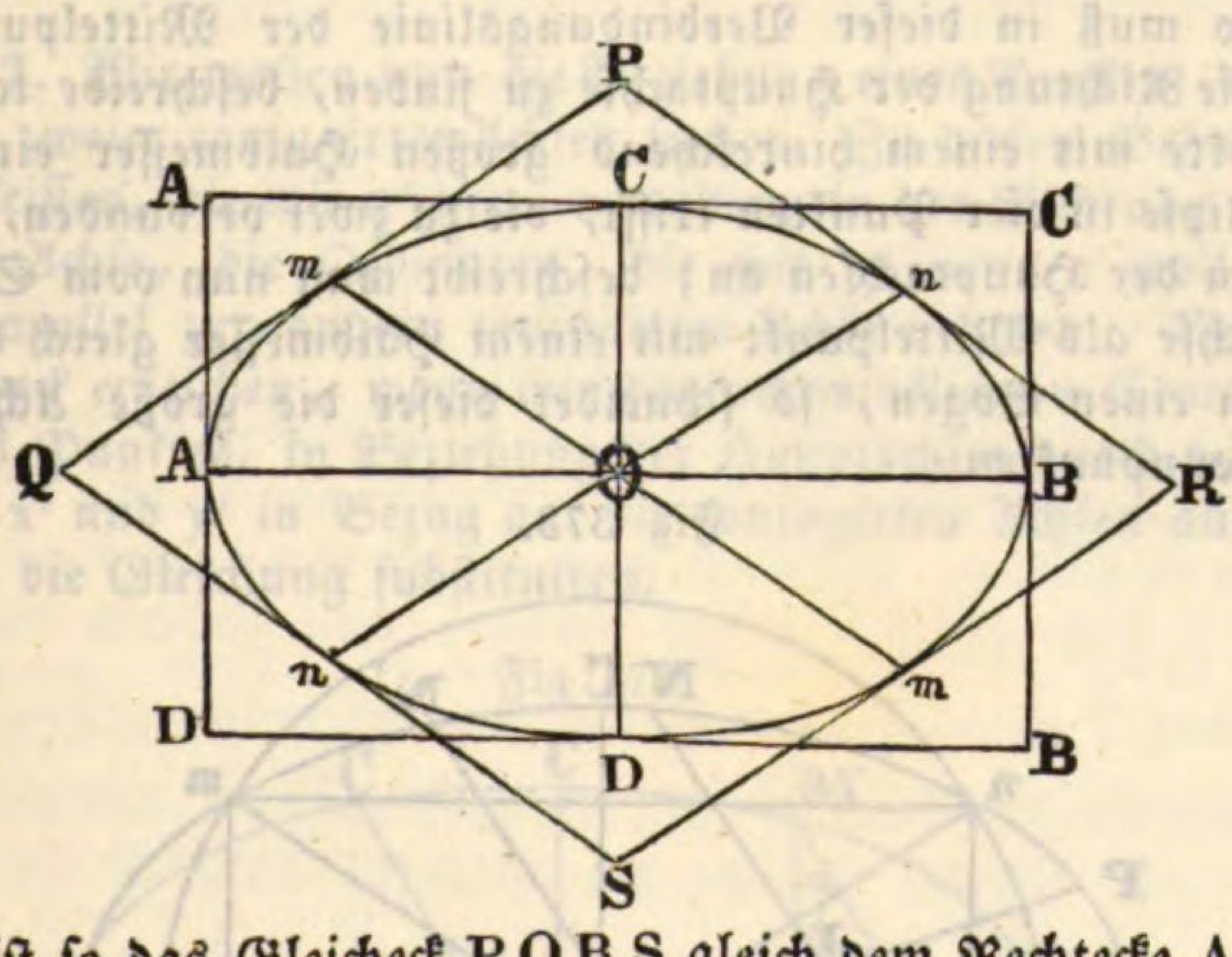
$$a' b' \sin(\varphi - \theta) = a\, b \text{ hat, oder}$$

$$4 a' b' \sin(\varphi - \theta) = 4 a b.$$

Da nun $\varphi - \theta = NOM$ ist, so ist die geometrische Bedeutung dieser letzten Gleichung folgende:

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms, welches die conjugirten Durchmesser zu seinen Seiten hat, in derselben Richtung, wie sie in der Ellipse vorkommen, ist gleich dem Rechtecke aus den zwei Hauptachsen gebildet.

Fig. 371.



Es ist so das Gleicheck PQRS gleich dem Rechtecke A′B′C′D′, woraus man den Schluß ziehen kann, daß alle einer Ellipse umschriebenen Parallelogramme denselben Flächeninhalt haben.

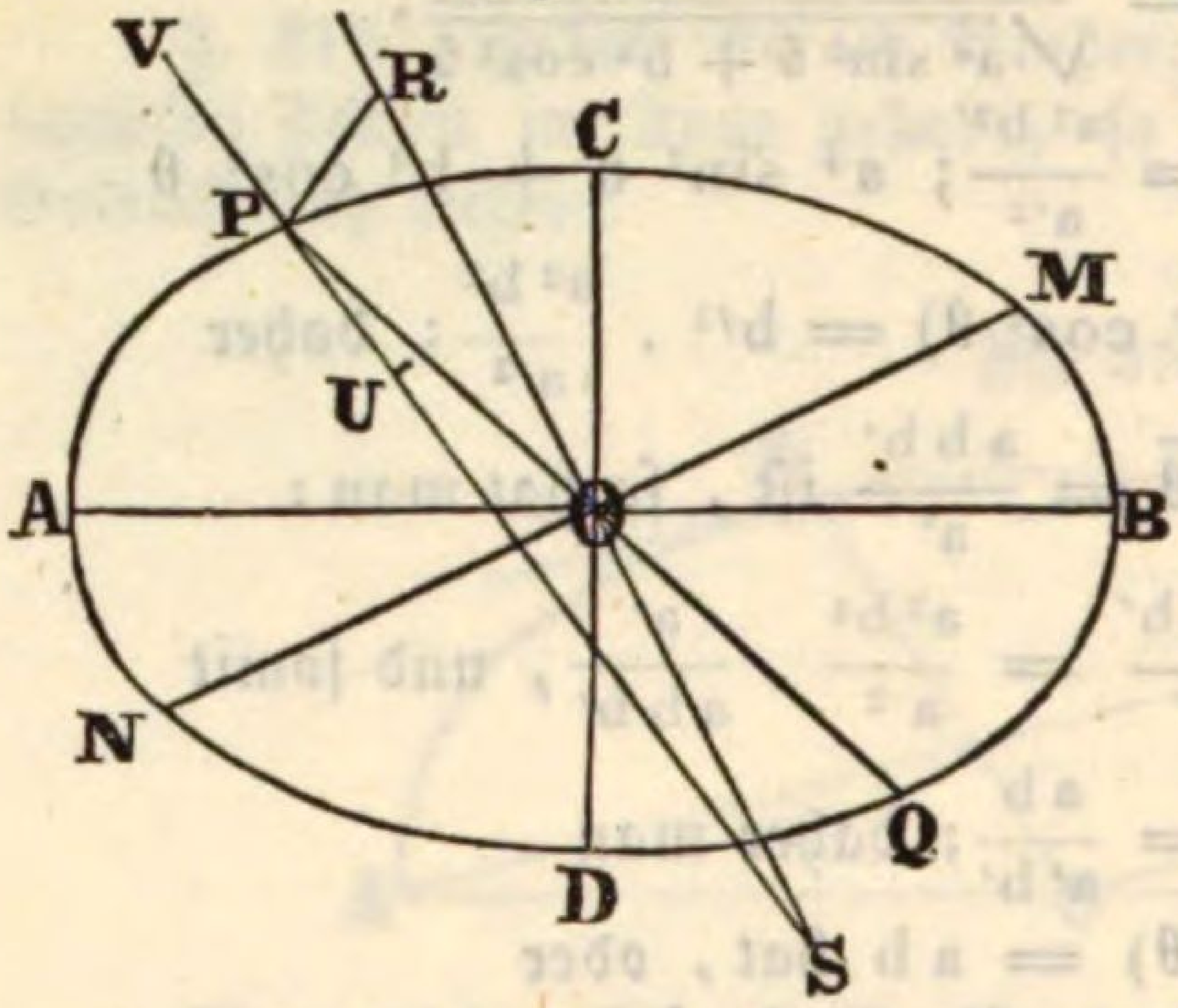
Die Gleichungen $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$,

und $a b = a' b' \sin(\varphi - \theta)$

können auch dazu dienen, aus den beiden conjugirten Achsen und ihrem Winkel die beiden Hauptachsen zu finden, man hat nämlich:

$$(a + b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2 a' b' \sin(\varphi - \theta)$$
$$(a - b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2 a' b' \sin(\varphi - \theta)$$

Fig. 372.



Sind AB und CD die Hauptachsen, MN und PQ die conjugirten Achsen; nennen wir den Winkel $\varphi - \theta = POM = \alpha$, errichten wir in O die OR senkrecht auf MO, so ist der Winkel $ROP = \alpha - 90$; schneidet man nun $RO = SO = MO = a'$ ab, so hat man

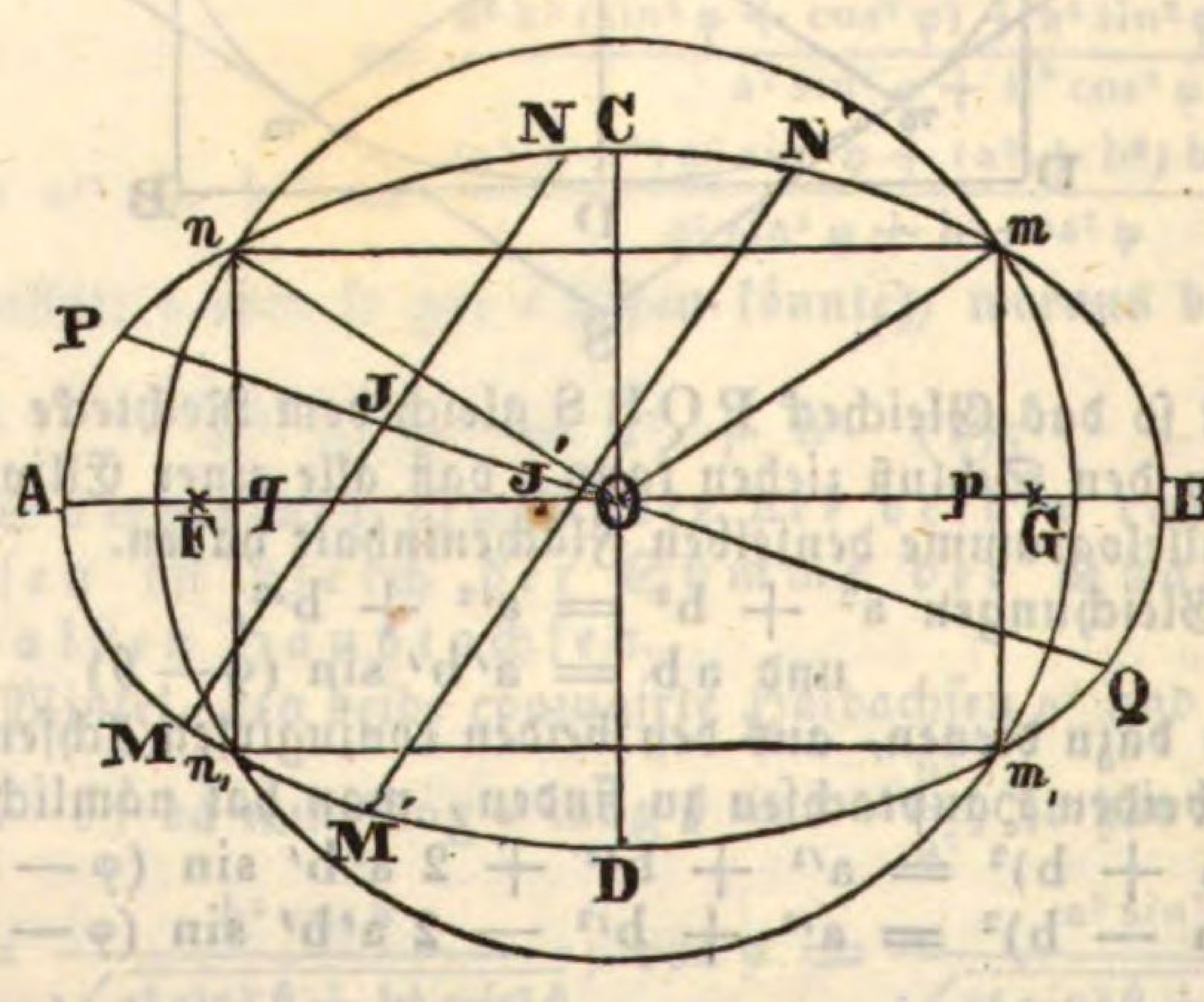
$$PR^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos(\alpha - 90)$$
$$= a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\alpha$$
$$= (a - b)^2$$

und

$$SP^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \cos(\alpha - 90^\circ)$$
$$= a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\alpha = (a + b)^2;$$ daher
$$PR = a - b, \text{ und } PS = a + b,$$
schneidet man also aus P, $PU = PV = PR$ ab, so ist dann
$$SU = 2b, \; SV = 2a.$$

§. 316. Ist uns von einer Ellipse nur der Umfang gegeben, so kann ich ihre Bestimmungsstücke auf folgende Art finden. Ich ziehe zwei oder mehrere gleichlaufende Sehnen, verbinde ihre Halbirungspunkte, so muß in dieser Verbindungslinie der Mittelpunkt liegen. Um nun die Richtung der Hauptachse zu finden, beschreibe ich aus dem Mittelpunkte mit einem hinreichend großen Halbmesser einen Kreis, der die Ellipse in vier Punkten trifft, die zu zwei verbunden, geben die Richtungen der Hauptachsen an; beschreibt man nun vom Scheitel der kleinen Achse als Mittelpunkt mit einem Halbmesser gleich der großen Halbachsen einen Bogen, so schneidet dieser die große Achse in den beiden Brennpunkten.

Fig 373.



MN und N′N′ sind die gleichlaufenden Sehnen, I und I′ ihre Halbirungspunkte, daher PQ ein Durchmesser der Ellipse, daher sein Halbirungspunkt O der Mittelpunkt; beschreibe ich nun mit dem Halbmesser mO einen Kreis, so wird die Ellipse in m, n, m′, n′ geschnitten, und mn muß zur großen Achse und mm′ zur kleinen Achse gleichlaufend seyn, ziehe ich also durch O, AB ∥ mn und CD ∥ mm′, so habe ich die zwei Hauptachsen. Daß mn ∥ AB ist, ersieht man aus der Formel

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e\cos^2\theta};$$

soll nämlich mO = nO seyn, so muß, da

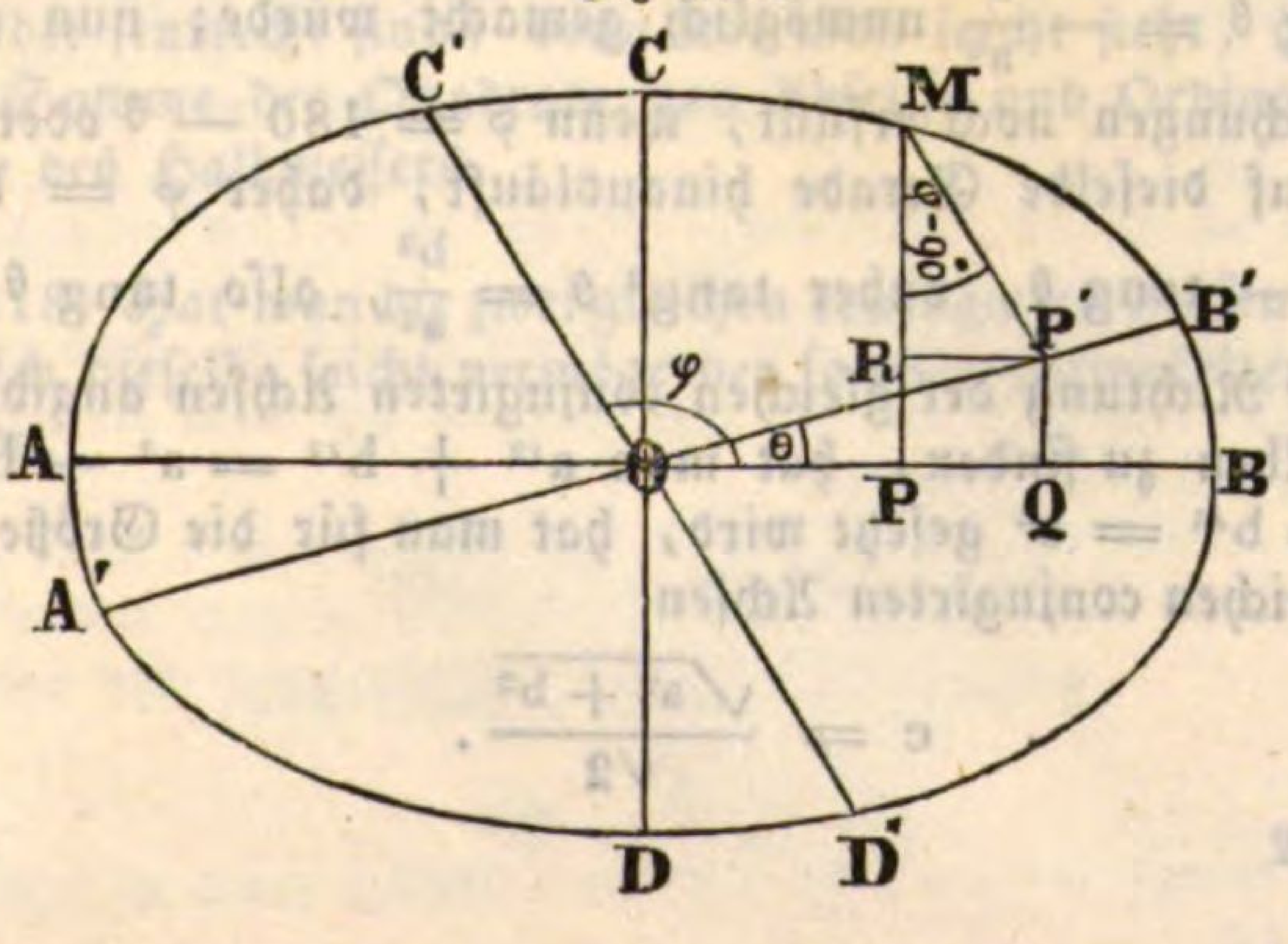
$$mO^2 = \frac{b^2}{1 - e\cos^2 . moB} \text{ und } nO^2 = \frac{b^2}{1 - e\cos^2 . noB}, \text{ auch}$$

$\cos^2 moB = \cos^2 noB$; daher entweder $\cos moB = \cos noB$ oder $\cos moB = -\cos noB$; daher $moB = 180 - noB$, d. h. in der Figur $moB = noA$, woraus die Gleichheit von nq und mp; denn denkt man sich von m und n Lothe auf AB gefällt, so müssen sie einander gleich seyn, daher mn ∥ AB.

Wie wir wissen, ist $FO = ae = \sqrt{a^2 - b^2}$; daher $FO^2 = a^2 - b^2$; da nun $CO = b$, so ist $FO^2 + CO^2 = a^2$; daher aus C mit einem Halbmesser = a die große Achse geschnitten, die Brennpunkte F und G gibt.

§. 317. Wir wollen nun die Beziehung eines Punktes der Ellipse rücksichtlich zweier conjugirter Achsen suchen. Zu diesem Behufe wollen wir die Abscissen, die wir x′ nennen wollen, in der Richtung der einen conjugirten Achse, die Ordinaten, die wir y′ nennen wollen, statt senkrecht, parallel zur andern conjugirten Achse nehmen. Wir werden unseren Zweck erreichen, wenn wir die rechtwinklichten Coordinaten x und y eines Punktes, in Beziehung der Hauptachsen durch seine schiefwinklichten x′ und y′ in Bezug auf die conjugirten Achsen ausdrücken, und dieß in die Gleichung substituiren.

Fig. 374.



Es seyen AB und CD die Hauptachsen und $x = OP$; $y = MP$ die Coordinaten des Punktes M in Bezug auf diese, und A′B′ und C′D′ zwei conjugirte Achsen, und $OP' = x'$ und $MP' = y' \parallel C'D'$ die Coordinaten in Bezug auf diese. Es sey $BOB' = \theta$ und $C'OB = \varphi$; fällt man nun von P′ das Loth P′Q auf AB und P′R auf MP, so hat man:

$$x = OP = OQ - PQ = OQ - RP'$$
$$y = MP = MR + RP = MR + P'Q.$$

Da nun $MP' \parallel C'O$ und $MP \parallel CO$, so ist $RMP' = COC' = \varphi - 90^\circ$; daher hat man, da $x' = OP'$ und $y' = MP'$ ist:

$x = x' \cos\theta + y' \cos\varphi$; $y = x' \sin\theta + y' \sin\varphi$; da nun

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ so hat man:}$$

$$x'^2 \cdot \frac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2 b^2} + 2\,x'\,y' \cdot \frac{b^2\cos^2\theta\cos\varphi + a^2\sin\theta\sin\varphi}{a^2 b^2}$$
$$+ y'^2 \cdot \frac{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}{a^2 b^2} = 1;$$

Da nun, wie aus dem Früheren bekannt,

$$OB'^2 = a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta} \text{ und } b'^2 = OC'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi};$$

ferner $\tang\varphi \,.\, \tang\theta = -\frac{b^2}{a^2}$; daher

$a^2 \sin\varphi \sin\theta + b^2 \cos\varphi \cos\theta = o$ ist, so hat man:

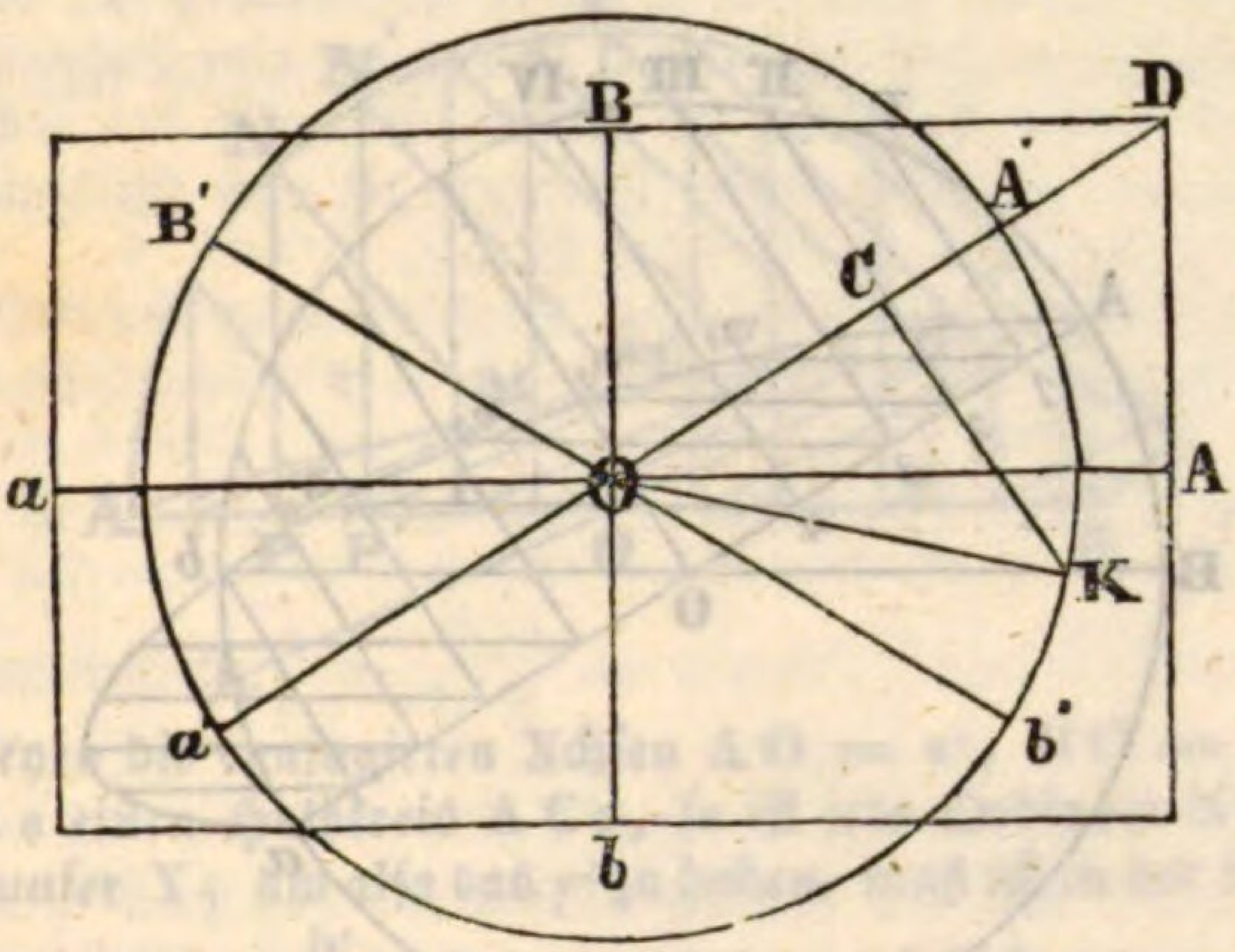
$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1.$$

Eine Gleichung, die, wie wir sehen, mit der Gleichung in Bezug auf die Hauptachsen ganz übereinstimmt; nur darf man hier nicht vergessen, daß die y′ nicht senkrecht auf die Achse der x′ sind, sondern parallel mit der andern conjugirten Achse.

Es kann nun hier die Frage entstehen, in welchem Falle sind die zwei conjugirten Halbachsen a′ und b′ einander gleich? Damit dieses sey, ist nothwendig, daß $\sin^2\theta = \sin^2\varphi$ und $\cos^2\theta = \cos^2\varphi$ sey, nur darf φ nicht gleich θ gesetzt werden, weil dadurch die Gleichung $\tang\varphi \tang\theta = -\frac{b^2}{a^2}$ unmöglich gemacht würde; nun werden die obigen Gleichungen noch erfüllt, wenn $\varphi = 180 - \theta$ oder $360 - \theta$ ist, was auf dieselbe Gerade hinausläuft, daher $\varphi = 180 - \theta$, $\tang\varphi = -\tang\theta$, daher $\tang^2\theta = \frac{b^2}{a^2}$, also $\tang\theta = \pm\frac{b}{a}$, was uns die Richtung der gleichen conjugirten Achsen angibt; um die Größe derselben zu finden, hat man $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, daher, wenn $a'^2 = b'^2 = c^2$ gesetzt wird, hat man für die Größe einer der einander gleichen conjugirten Achsen

$$c = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}.$$

Fig. 375.



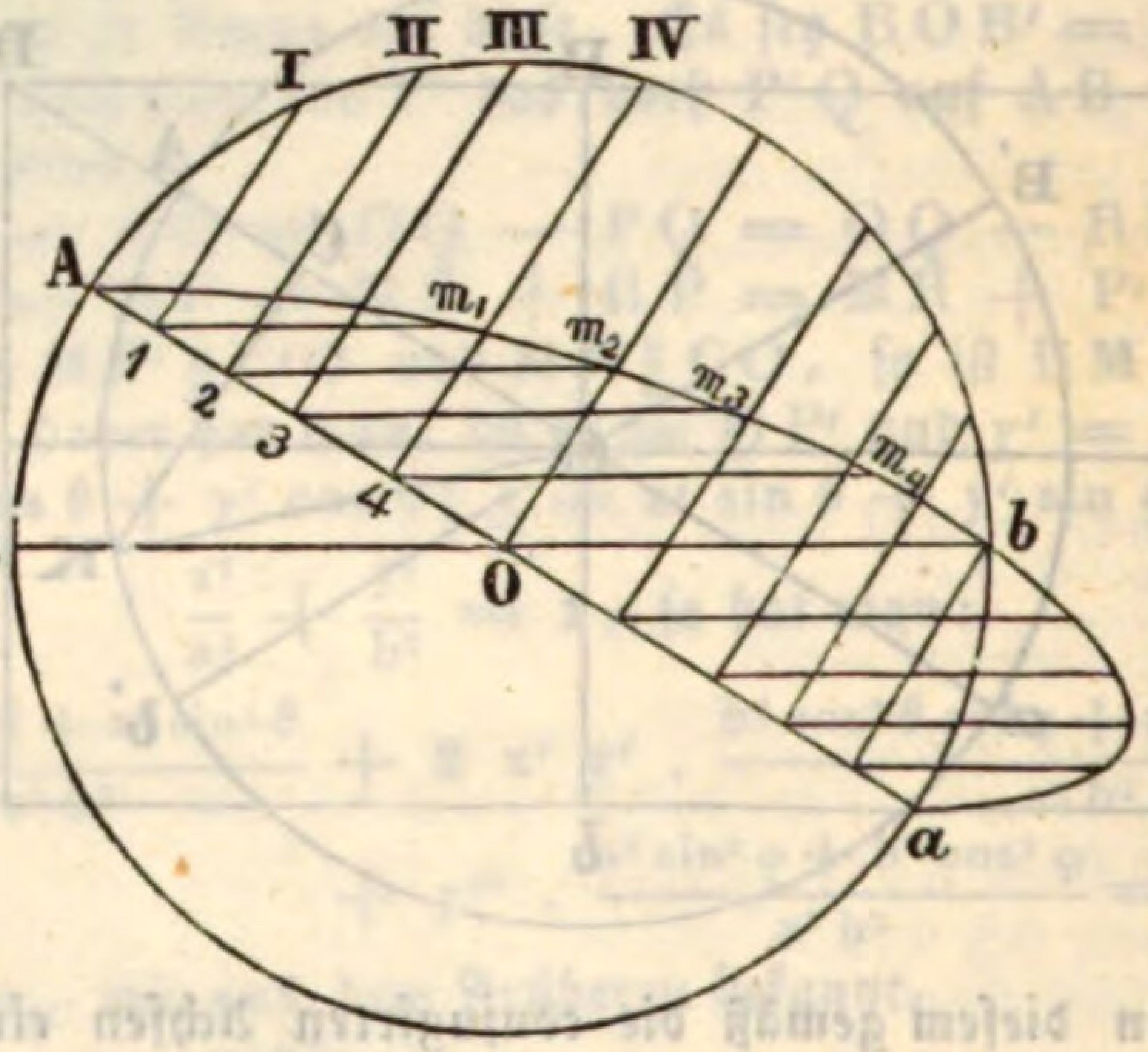
Um nun diesem gemäß die conjugirten Achsen einer Ellipse zu verzeichnen, wird man in den Endpunkten A und B der großen und kleinen Achse gleichlaufende mit diesen ziehen, wodurch das Rechteck OBDA entsteht; zieht man nun OD, so ist erstens tang $DOA = \frac{b}{a}$, also OD die Richtung der einen conjugirten Achse, dann ist $OD = \sqrt{a^2 + b^2}$, halbirt man also OD in C, errichtet ein Loth CK = OC, so ist $OK = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2}}$; beschreibe ich also aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OK einen Kreis, so schneidet er die Ellipse in den Punkten A'B'a'b', und A'a' und B'b' sind die zwei gleichen conjugirten Achsen; nennt man A'O = B'O = c, so ist die Gleichung unserer Ellipse rücksichtlich dieser gleichen conjugirten Achsen,

$$x'^2 + y'^2 = c^2,$$

eine Gleichung, welche sich auf den Kreis bezieht, wenn x' und y' auf einander senkrecht sind; denn wie man leicht sieht, ist beim Kreise stets die Summe der Quadrate von Abscisse und Ordinate gleich dem Quadrate des Halbmessers.

§ 318. Hat man die zwei gleichen conjugirten Achsen einer Ellipse, so läßt sich dieselbe leicht vermöge der so eben entwickelten Eigenschaft verzeichnen.

Fig. 376.



Da nämlich $y'^2 = c^2 - x'^2 = (c - x')(c + x')$, so ist, wenn $AO = aO = c$ ist, $m_1 1^2 = A1 \,.\, 1a$; $m_2 2^2 = A2 \,.\, 2a$ $m_3 3^2 = A3 \,.\, 3a$; u. s. w. Da nun aber im Kreise auch jedes Perpendikel vom Kreise auf den Durchmesser das geometrische Mittel zwischen den beiden Stücken desselben ist, so hat man:

$I1^2 = A1 \,.\, 1a$, $II2^2 = A2 \,.\, 2a$, $III3^2 = A3 \,.\, 3a, \ldots\ldots$

daher $I1 = m_1 1$; $II2 = m_2 2$; $III3 = m_3 3 \ldots.$

Um also die Punkte $m_1, m_2, m_3 \ldots$ der Ellipse zu finden, nehme man 1, 2, 3, 4... auf dem Durchmesser Aa willkürlich an, errichte über dem Durchmesser einen Halbkreis, errichte die Lothe 1I, 2II, 3III... durch 1, 2, 3... ziehe ich Gleichlaufende mit Bb, und schneide ab $1m_1 = I1$, $1m_2 = II2$, u. s. w.

Auf dieselbe Art läßt sich jede Ellipse mittelst was immer für zwei conjugirter Achsen verzeichnen. Sind nämlich a′ und b′ die conjugirten Achsen, also $\frac{y'^2}{b'^2} + \frac{x'^2}{a'^2} = 1$ die Gleichung der Ellipse für Coordinaten, die den conjugirten Achsen gleichlaufend sind, so hat man

$$y' = \frac{b'}{a'}\sqrt{a'^2 - x'^2} = \frac{b'}{a'}\sqrt{(a' + x')(a' - x')}.$$

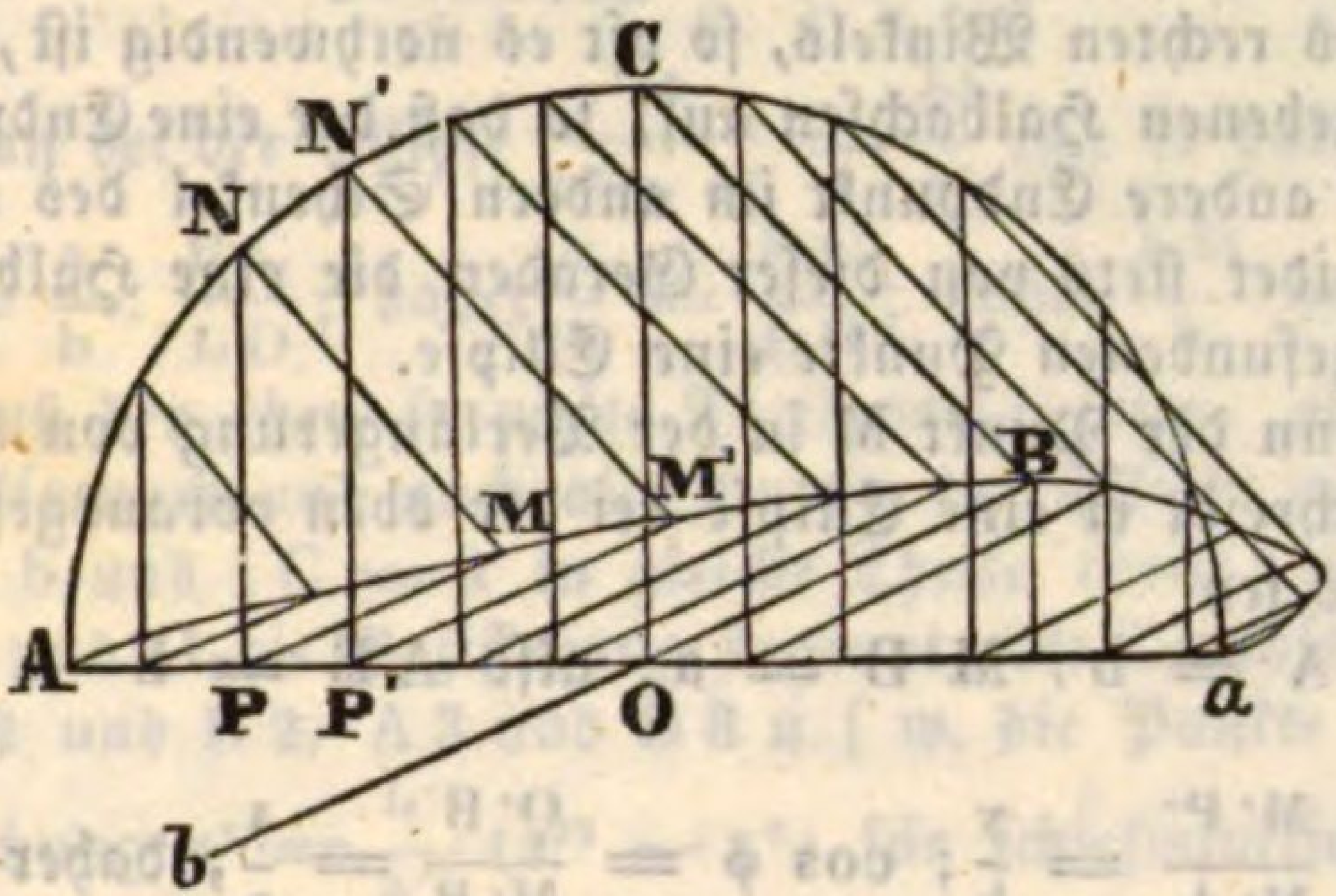
Errichtet man auf der Achse 2a′ einen Halbkreis, und nimmt Abscissen vom Mittelpunkte = x′, und nennet die dem Kreise entsprechende Ordinate Y, so hat man

$$x'^2 + Y^2 = a'^2; \text{ daher}$$

$$Y = \sqrt{a'^2 - x'^2}, \text{ daher also}$$

$$y' = \frac{b'}{a'} \,.\, Y.$$

Fig. 377.



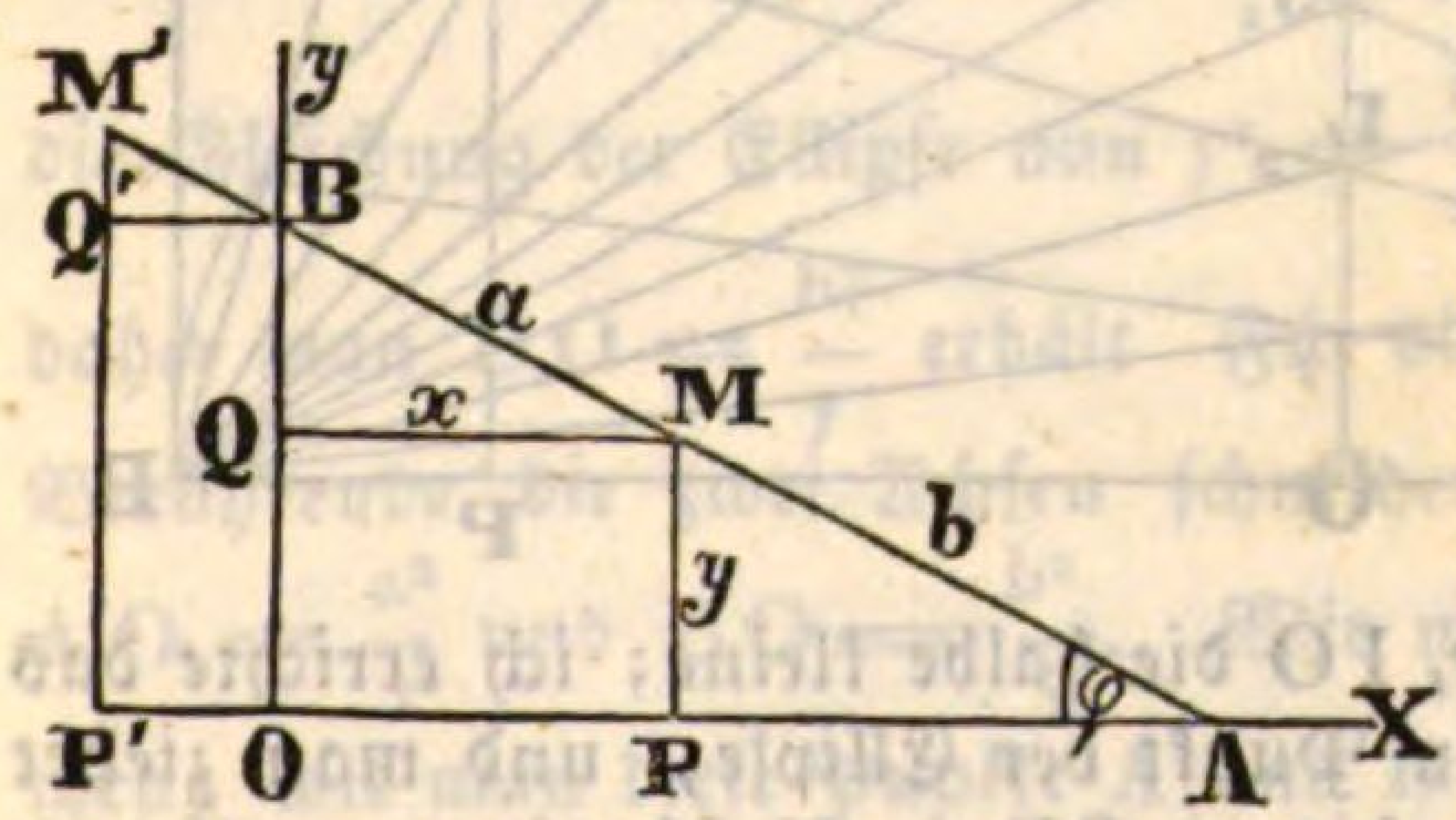
Es seyen die conjugirten Achsen AO = a', BO = b'; errichte ich über Aa einen Halbkreis ACa, so ist jede Ordinate NP, NP'... im Kreise unser Y; um also das y' zu haben, muß ich in der Richtung der OB ein Stück gleich $\frac{b'}{a'}$ Y haben; dieß erreiche ich, wenn ich C mit B verbinde, und durch N eine mit CB gleichlaufende Gerade NM ziehe, wo diese die durch P mit OB gleichlaufend gezogene Gerade PM trifft, d. h. der Punkt M ist ein Punkt der Ellipse, denn da NM ∥ CB, NP ∥ CO, PM ∥ BO, also NPM ∼ COB, so hat man:

$$PM : BO = NP : CO,\ \text{d. h. } PM : b' = Y : a',\ \text{daher}$$

$$PM = \frac{b'}{a'} . Y,\ \text{daher} = y'.$$

§. 319. Wenn sich eine Gerade AB so bewegt, daß ihre Endpunkte A und B stets auf zwei einander senkrechten Geraden bleiben, so wird ein fester Punkt in ihr eine Ellipse beschreiben.

Fig. 378.



Der Abstand des M von A sey b, von B aber a, A bleibe während der ganzen Bewegung der AB in der Geraden Ox, und B in Oy. Wir fällen die Lothe MP und MQ auf Ox und Oy; so ist OP = x, MP = y, der veränderliche Winkel der AB mit Ox sey gleich φ, so hat man:

$$\sin \varphi = \frac{y}{b};\ \cos \varphi = \frac{x}{a};$$

daher hat man, es mag der Winkel φ wie immer seyn, d. h. es mag AB wie immer liegen, sobald nur A in Ox und B in Oy ist, für die Coordinaten des Punktes M folgende Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

d. h. M liegt in einer Ellipse, wo 2a und 2b die Hauptachsen sind.

Will man auf diese Art eine Ellipse verzeichnen, so trägt man innerhalb eines rechten Winkels, so oft es nothwendig ist, die Summe der beiden gegebenen Halbachsen auf, so daß der eine Endpunkt in dem einen und der andere Endpunkt im andern Schenkel des rechten Winkels ist, schneidet stets von dieser Geraden die eine Halbachse ab, so bilden die so gefundenen Punkte eine Ellipse.

Auch wenn der Punkt M in der Verlängerung von AB, z. B. in M′ liegt, beschreibt er eine Ellipse bei der oben vorausgesetzten Bewegung; denn es sey

$$M'A = b,\ M'B = a,\ \text{also } AB = b - a,$$

so hat man:

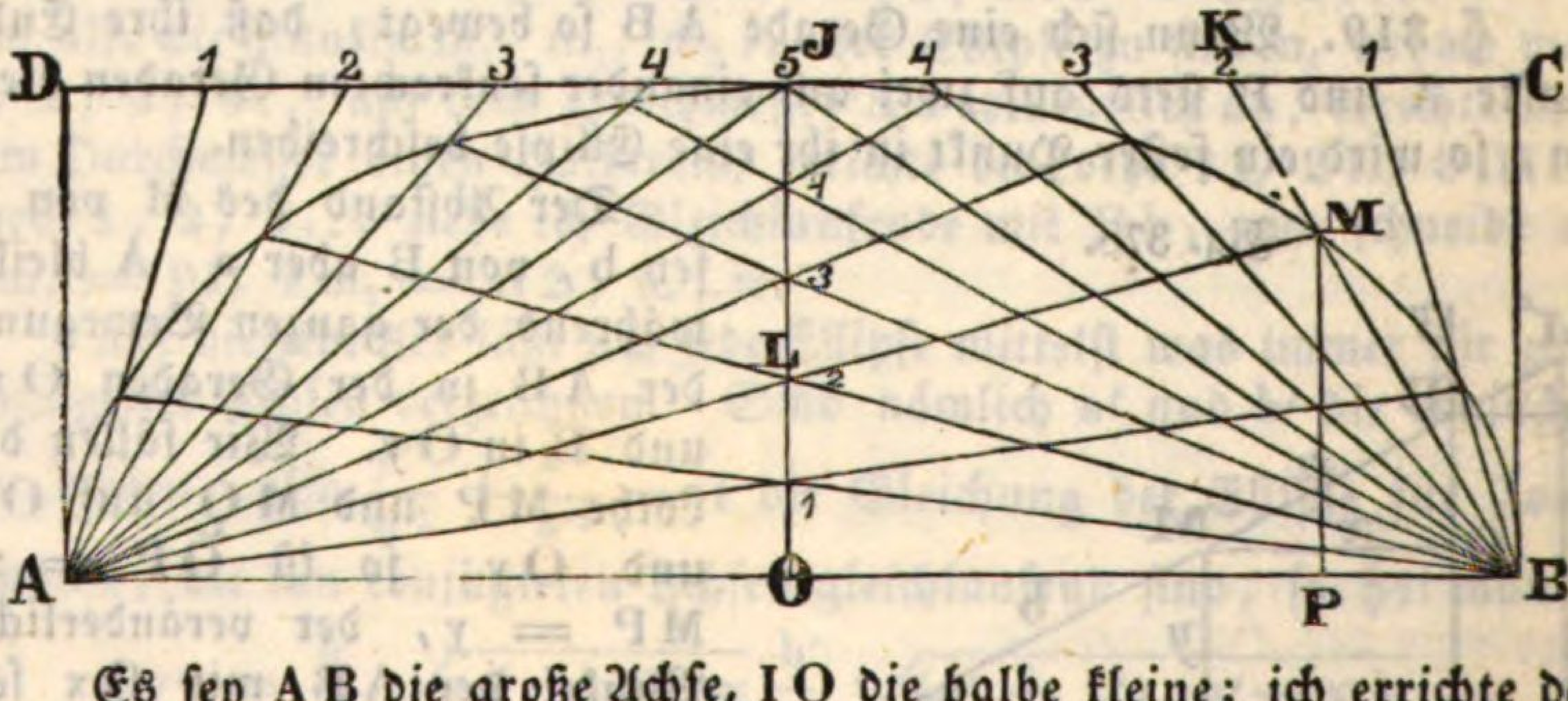
$$\sin\varphi = \frac{M'P'}{M'A} = \frac{y}{b};\ \cos\varphi = \frac{Q'B}{M'B} = \frac{x}{a};\ \text{daher wieder}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Bewegt sich also eine Stange MAB so, daß zwei ihrer Punkte, einer in der Geraden Ox, der andere in der Oy zu bleiben genöthigt sind, so beschreibt der Punkt M dann eine Ellipse. Auf diese Eigenschaft gestützt, ist eines der Instrumente, mittelst welchen man Ellipsen beschreiben kann.

§. 320 Eine andere Verzeichnungsweise der Ellipse, die sowohl für die Hauptachsen als auch die conjugirten Achsen gilt, ist folgende:

Fig. 379.



Es sey AB die große Achse, IO die halbe kleine; ich errichte das Rechteck ABCD, ist nun M ein Punkt der Ellipse, und man ziehet MA und MB, verlängert MB, bis es CD in K schneidet, während MA die IO in L schneidet, so hat man:

$$\frac{BP}{MP} = \frac{KC}{BC};\ \frac{AP}{MP} = \frac{AO}{LO},\ \text{daher}$$

$$\frac{a-x}{y} = \frac{KC}{b};\ \frac{a+x}{y} = \frac{a}{LO},$$

durch Multiplication beider Gleichungen hat man:

$$\frac{a^2 - x^2}{y^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{KC}{LO};$$

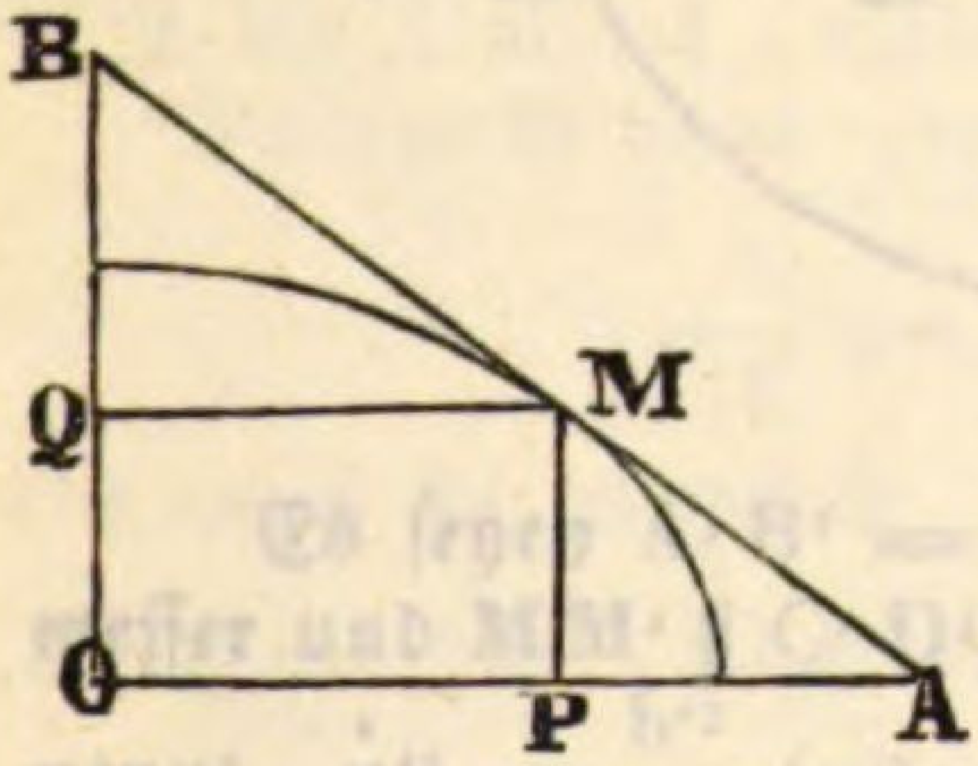
da nun bei der Ellipse $\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$ ist, so hat man:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{KC}{LO}; \text{ daher } \frac{a}{b} = \frac{KC}{LO}; \text{ daher } \frac{LO}{b} = \frac{KC}{a},$$

d. h. LO muß der eben so vielte Theil von b seyn, als KC von a; man kann also nach und nach alle Punkte der Ellipse erhalten, wenn man IO = b und IC = a in gleiche Theile theilt; es geben dann, wenn von C und O die Bezifferung beginnt, die Durchschnitte von A 1 und B 1, A 2 und B 2, A 3 und B 3 u. s. w. die Punkte der Ellipse. — Da die Gleichung $y^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x^2)$ für schiefwinklichte Coordinaten, rücksichtlich ihrer conjugirten Achsen gilt, so kann man genau auf dieselbe Art auch die Ellipse aus ihren conjugirten Achsen verzeichnen, nur wird dann ABCD kein Rechteck, sondern ein Gleicheck (Parallelogramm) seyn.

§ 321. Wir wollen nun zeigen, wie man die Ellipse mittelst ihrer Berührungslinien verzeichnen kann

Fig. 380.



Ist AB eine Berührende der Ellipse, so wissen wir, daß die Subtangente

$$AP = \frac{a^2 - x^2}{x}, \text{ daher}$$

$$OA = AP + x = \frac{a^2}{x}$$

ist; nun ersieht man, daß

$$ABM \sim AOB, \text{ daher}$$

$$BO : AO = MP : AP, \text{ daher}$$

$BO : \frac{a}{x} = y : \frac{a^2 - x^2}{x}$, woraus $BO = \frac{a^2 y}{a^2 - x^2}$, die Gleichung der Ellipse nun $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ gibt $\frac{a^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{y^2}$, daher man $BO = \frac{b^2}{y}$ erhält Für die Punkte A und B also, wo die Berührende die zwei Achsen schneidet, hat man die Bestimmungen $AO = \frac{a^2}{x}$ und $BO = \frac{b^2}{y}$. Wir wollen nun ein Verfahren aufsuchen, wie man diese Punkte A und B nach den gegebenen Achsen einer Ellipse finden kann, nennen wir der Bequemlichkeit $AO = \xi$ und $BO = \eta$, also $\xi = \frac{a^2}{x}$; $\eta = \frac{b^4}{y}$; da nun vermöge der Gleichung der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so hat man, wenn x und y durch ξ und η ausgedrückt werden,

$$\frac{a^2}{\xi^2} + \frac{b^2}{\eta^2} = 1, \text{ woraus } \frac{\eta}{b} = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}.$$

Und diese Proportion gibt uns ein Verfahren an, für ein willkürliches ξ oder A O das ihm entsprechende η = B O zu finden, so daß die Verbindungslinie B A eine Berührende der Ellipse ist, deren Halbachsen a und b sind.

Fig. 381.



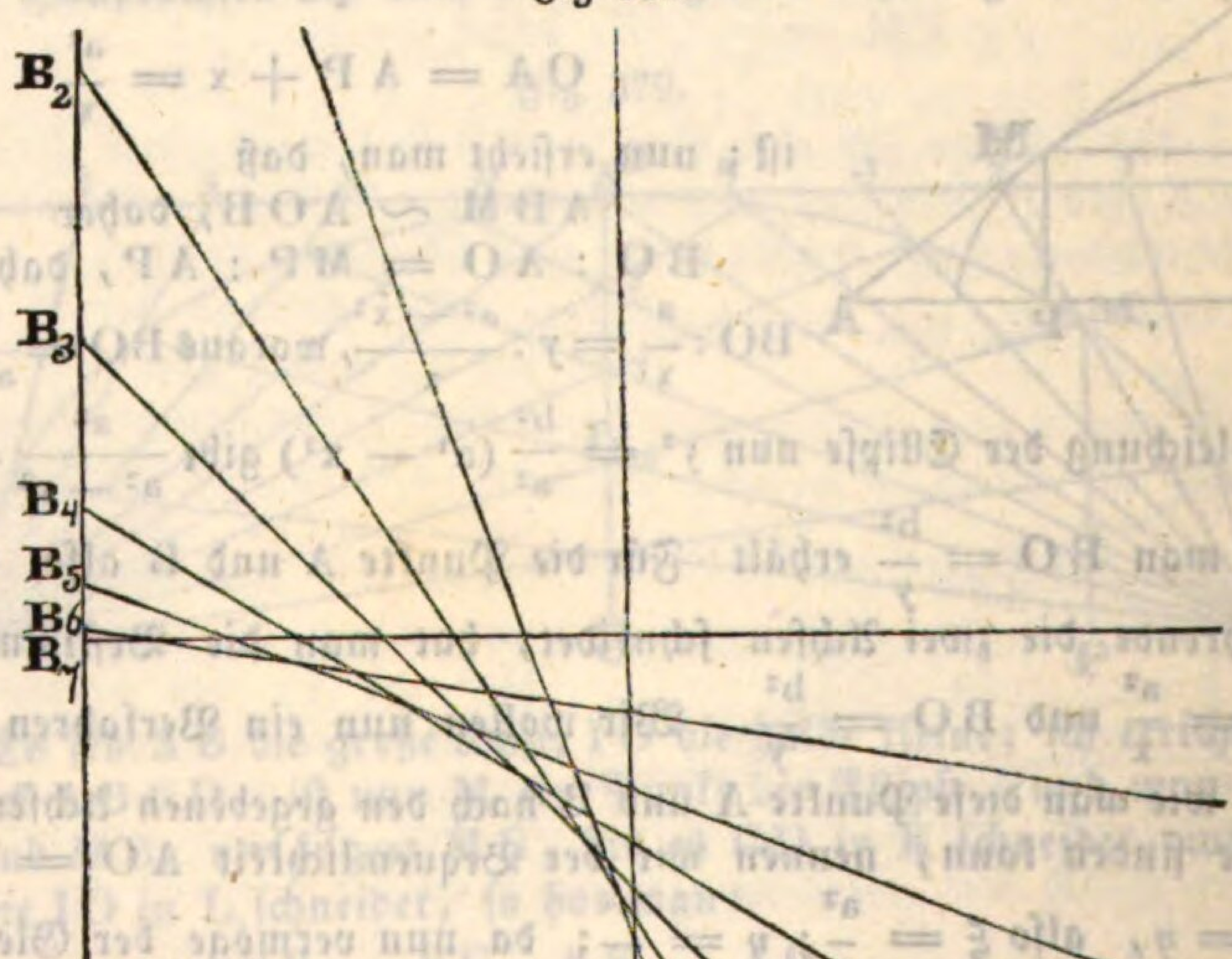
Zu diesem Behufe trage ich die größere Halbachse a nach unten O S = a, die kleinere O R = b nach oben auf, von der durch O senkrecht auf R S gezogenen Geraden schneide ich ξ = O A ab, natürlicherweise größer als a; aus dem Punkte S mit dem Halbmesser = O A beschreibt man einen Bogen, der O A in K trifft, so ist K S = ξ, daher O K = $\sqrt{\xi^2 - a^2}$; verbindet man nun R mit K, und ziehet durch A die A B ∥ K R, so hat man:

$$OB : OA = OR : OK,\ \text{d. h.}$$

$$OB : \xi = b : \sqrt{\xi^2 - a^2};$$

daher also O B = η, und somit A B wirklich eine Berührende der Ellipse. Nimmt man so eine Reihe von Werthen der O A an, bestimmt immer dazu das entsprechende B, und verbindet A mit B, so geben die auf einander folgenden Berührungslinien die Ellipse.

Fig. 382.



§. 322. So wie der Parameter der Ellipse die dritte Proportionirte zur großen und kleinen Achse derselben ist, so kann man sich auch zu den zwei conjugirten Achsen der Ellipse 2 a′ und 2 b′ eine dritte Pro-

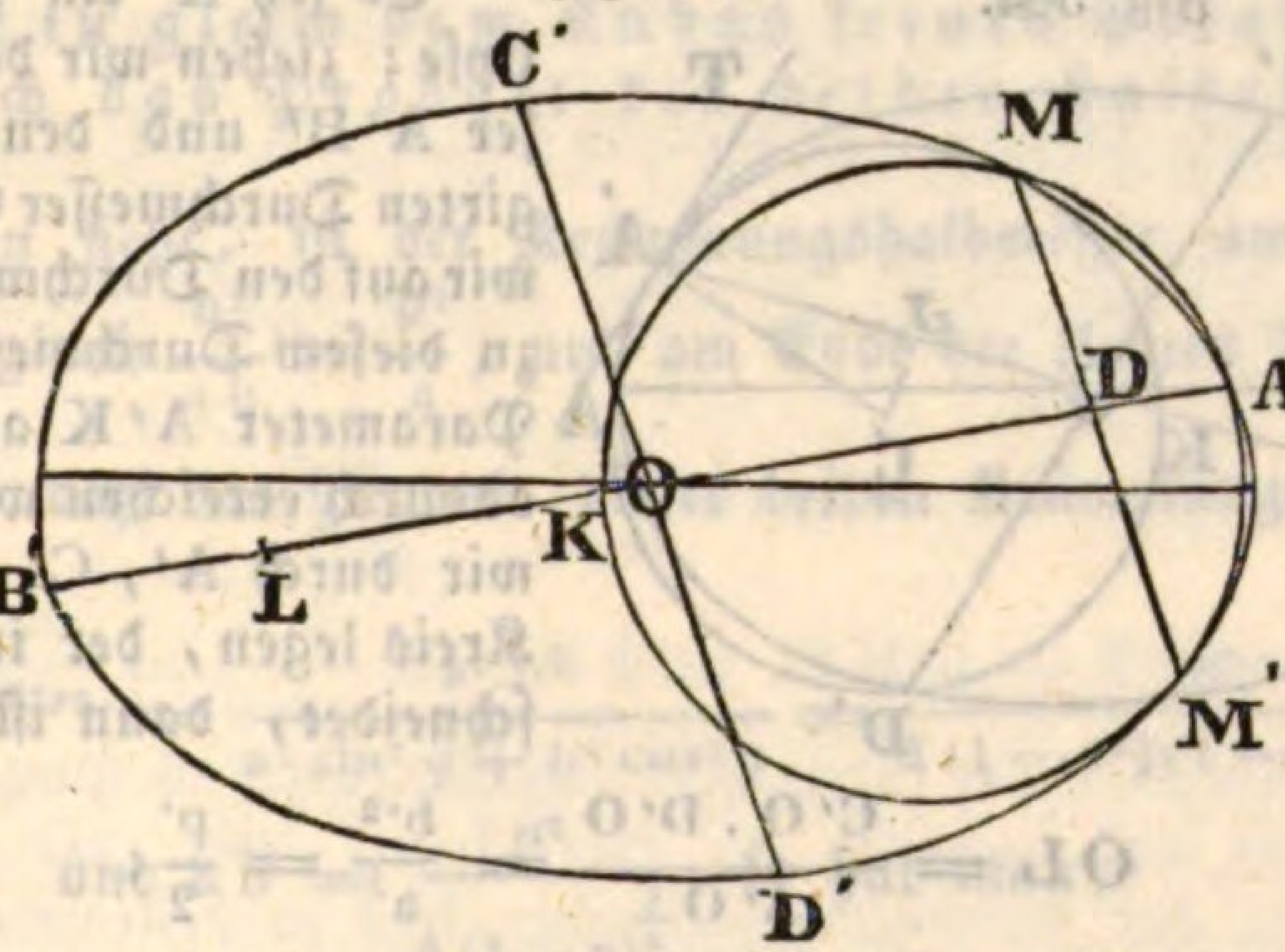
portionirte denken, und nennt diese den diesem Durchmesser zugeordneten Parameter; bezeichnen wir diesen durch p', so hat man:

$$2a' : 2b' = 2b' : p', \text{ daher } p' = \frac{2b'^2}{a'}, \text{ somit}$$

$$\frac{p'}{2} = \frac{b'^2}{a'}.$$

Wir werden nun untersuchen, wenn A′B′ ein Durchmesser der Ellipse ist, und die Sehne MM′ zu dem Durchmesser, der mit A′B′ conjugirt ist, gleichlaufend ist, und man legt durch A′M, und M′ einen Kreis, wie groß der Abstand des Punktes, wo dieser Kreis den Durchmesser A′B′ schneidet, von dem Punkte ist, wo dieser Durchmesser von der Sehne MM′ getroffen wird.

Fig. 383.



Es seyen A′B′ = 2a′ und C′D′ = 2b′ zwei conjugirte Durchmesser und MM′ ∥ C′D′, so ist, wenn man OD = x′ und MD = y′ nennt, $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(a'^2 - x'^2)$; beschreibt man nun durch A′, M und M′ einen Kreis, der A′B′ in K schneidet, so hat man MD . M′D = A′D . DK, d. h. $DK = \frac{y'^2}{a' - x'}$; daher

$$DK = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot \left(\frac{a'^2 - x'^2}{a' - x'}\right) = \frac{b'^2}{a'^2}(a' + x') \ (\dagger).$$

Setzen wir hier das x′ = o, d. h. lassen die Sehne durch den Mittelpunkt O gehen, so daß MM′ in die C′D′ übergehet; schneidet nun der Kreis, der durch A′C′ und D′ durchgehet die A′B′ in L, so gehet D in O, K in L, DK in OL über, und man hat:

$$OL = \frac{b'^2}{a'^2} \cdot a' = \frac{b^2}{a'^2} = \frac{p'}{2};$$

d. h. ziehet man durch die zwei Endpunkte eines Durchmessers, und den einen Endpunkt des dazu conjugirten Durchmessers einen Kreis, so wird der letztere so geschnitten werden, daß der Mittelpunkt des Kreises von diesem Durchschnittspunkte einen Abstand hat, der gleich ist dem halben zugeordneten Parameter; was uns ein Mittel an die

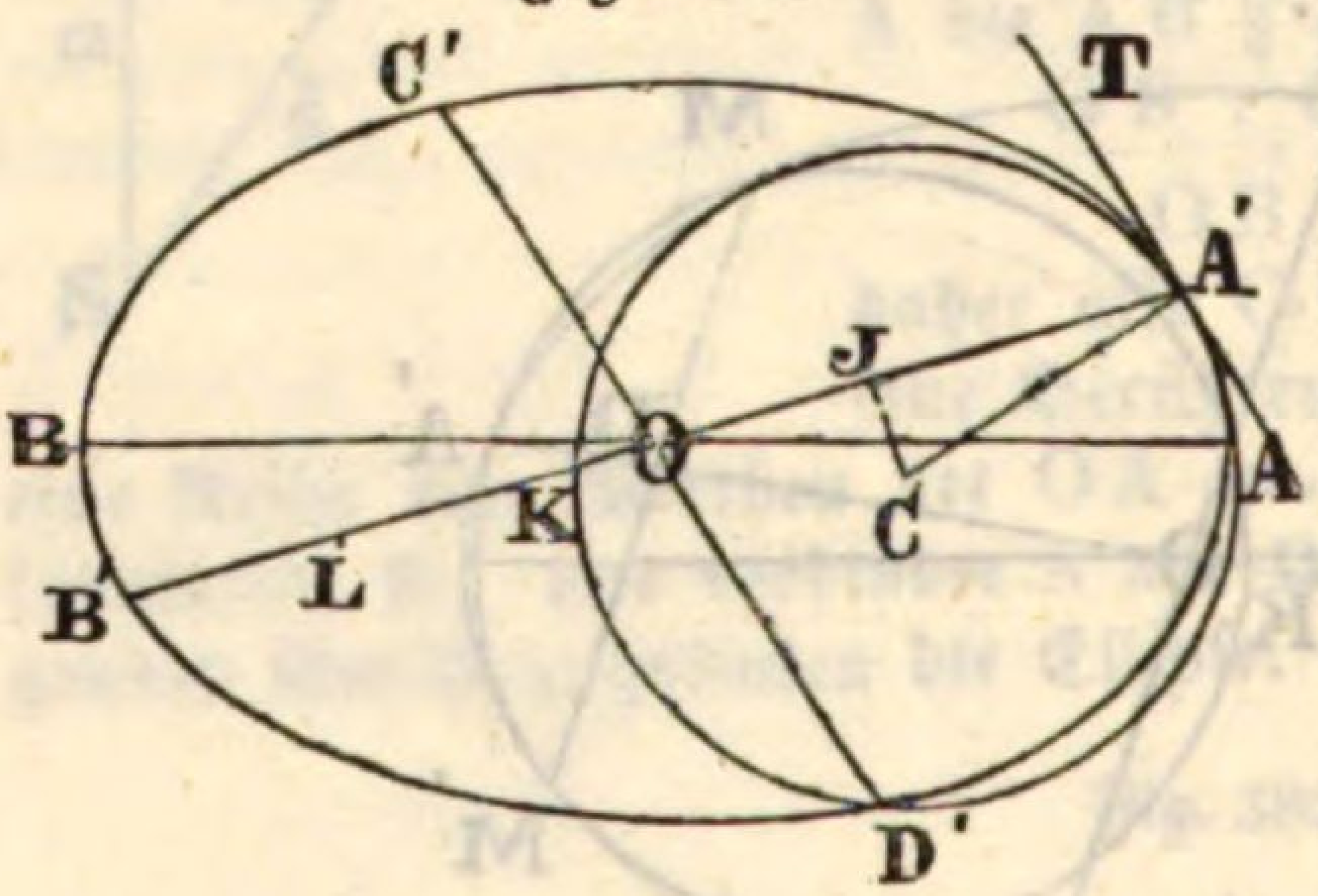
Hand gibt, denselben leicht zu verzeichnen. Je größer wir in dem obigen Ausdrucke (†) das x′ setzen, d h. je näher wir die Punkte M und M′ an A′ annehmen, desto mehr nähert sich der Ausdruck DK (der dann in A′K überzugehen anfängt) dem Ausdrucke

$$\frac{b'^2}{a'^2}(a' + a') = \frac{2b'^2}{a'} = p';$$

d. h. lege ich durch A′ und durch den nächsten Punkt der Ellipse an A′ einen Kreis, so schneidet er den Durchmesser dieses Punktes in einer Entfernung von A′ gleich dem Parameter dieses Durchmessers.

§. 323. Das gibt uns ein Hülfsmittel, den Krümmungskreis der Ellipse zu verzeichnen.

Fig. 384.



Es sey A′ ein Punkt der Ellipse; ziehen wir den Durchmesser A′B′ und den dazu conjugirten Durchmesser C′D′; tragen wir auf den Durchmesser A′B′ den zu diesem Durchmesser gehörigen Parameter A′K auf, was wir dadurch erreichen werden, wenn wir durch A′, C′ und D′ einen Kreis legen, der in L die A′B′ schneidet, dann ist

$$OL = \frac{C'O \,.\, D'O}{A'O} = \frac{b'^2}{a'} = \frac{p'}{2};$$

wenn nämlich A′O = a′; C′O = b′ ist. Schneide ich nun A′I $= OL = \frac{p'}{2}$ ab, und ist IK = IA′, so weiß ich, daß ein Kreis, der durch A′ und die zunächst liegenden Punkte gehet, durch A′ und K gehen wird, so daß A′K eine Sehne dieses Kreises seyn wird; soll nun dieser Kreis durch A′ und die nächsten Punkte gehen, und zugleich die Ellipse berühren, so muß hier der Mittelpunkt in der Normale des Punktes A′ liegen; ziehe ich daher die Normale, errichte in I ein Loth auf A′K, so ist der Durchschnittspunkt dieser beiden Geraden, d. h. C der Mittelpunkt des Krümmungskreises oder der Krümmungsmittelpunkt, und A′C = R ist der Krümmungshalbmesser. Nennen wir den Winkel C′OA′, den die beiden conjugirten Halbachsen mit einander bilden, ε, und ziehen durch den Punkt A′ die Berührende A′T, so ist OA′T = 180 — ε, und daher IA′C = 90° — (OA′T) = 90° — (180° — ε) = ε — 90°; nun hat man:

$$IA' = A'C \cos IA'C, \text{ woraus } R = \frac{AC'}{\sin \varepsilon} = \frac{p'}{2 \sin \varepsilon};$$

da nun $\frac{p'}{2} = \frac{b'^2}{a'}$, und der Winkel $\varepsilon = \varphi - \theta$, wobei wie im frühe-

ren φ der Winkel ist, den die Berührende A'T mit der großen Achse AB macht, und θ der Winkel A'OA ist, so hat man:

$$R = \frac{b'^2}{a' \sin(\varphi\ \ \theta)}.$$

Da nun dem Früheren gemäß $\sin(\varphi - \theta) = \frac{a\,b}{a'\,b'}$ ist, so hat man:

$$R = \frac{b'^3}{a\,b}.$$

Die eine conjugirte Halbachse, nämlich OA' = a', haben wir den Radius des Punktes A' genannt, die andere conjugirte Halbachse, OC' = b' wollen wir den Coradius des Punktes A' nennen, und können somit sagen:

Der Krümmungshalbmesser eines jeden Punktes der Ellipse ist gleich dem Kubus seines Coradius, dividirt durch das Produkt der beiden halben Hauptachsen.

Wie man sieht, ist der Krümmungshalbmesser am Ende der großen Achse gleich $\frac{b^3}{a\,b} = \frac{b^2}{a}$, und am Ende der kleinen Achse gleich $\frac{a^3}{a\,b} = \frac{a^2}{b}$, so daß das Produkt dieser beiden Krümmungshalbmesser gleich ab ist.

$$\text{Da nun } b'^2 = \frac{a^2\,b^2}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi} = \frac{p^2}{4(1-e^2)(1-e^2\cos^2\varphi)}$$

$$\text{und } a\,b = \frac{p^2}{4(1-e)^{\frac{3}{2}}}, \text{ so hat man:}$$

$$R = \frac{\frac{p}{2}}{(1-e^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} \text{ oder } R = \frac{a^2\,b^2}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},$$

oder wenn man statt $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ ihre Werthe durch x und y substituirt,

$$R = \frac{(a^4\,y^2 + b^4\,x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4\,b^4}.$$

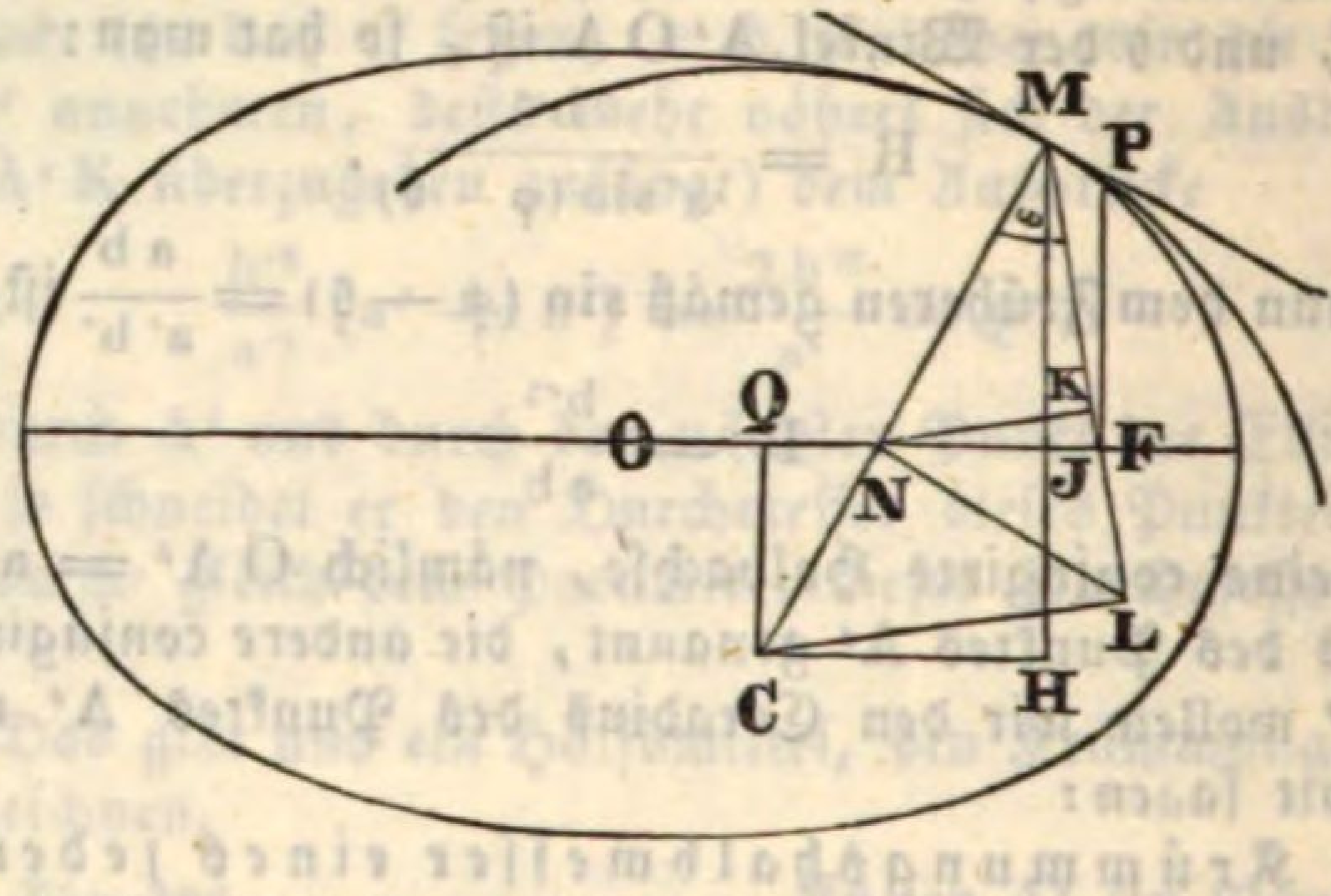
Da nun $e \cos\varphi = \sin\omega$, wo ω der Winkel ist, den der Leitstrahl dieses Punktes mit der Normale macht, so hat man:

$$R = \frac{\frac{p}{2}}{\cos^3\omega};$$

d. h. der Krümmungshalbmesser eines Punktes der Ellipse ist gleich dem halben Parameter, dividirt durch den Kubus des Cosinus des Winkels, den die Normale dieses Punktes mit dem Leitstrahle bildet.

Dieß gibt uns ein neues Mittel, den Krümmungshalbmesser eines Punktes der Ellipse zu verzeichnen.

Fig. 385.



Ich verbinde den Punkt M mit dem Brennpunkte F, ziehe die Normale MN, schneide von MF ein Stück $MK = PF = \frac{p}{2}$ ab, errichte in K die $NK \perp MF$, so ist $MN = \frac{MK}{\cos\omega}$; errichte ich wieder $NL \perp MN$, so ist

$$ML = \frac{MN}{\cos\omega} = \frac{MK}{\cos^2\omega}$$

und in L wieder $LC \perp ML$, so ist $MC = \frac{ML}{\cos\omega} = \frac{MK}{\cos^3\omega} = \frac{p}{2\cos^3\omega}$; daher ist also MC der Krümmungshalbmesser des Punktes M. Diese Figur bietet uns zugleich ein Hülfsmittel dar, die rechtwinklichten Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes zu bestimmen. Man ziehe $MH \parallel y$ und $CH \parallel x$. Die Abscisse von C, nämlich OQ, das wir ξ nennen wollen, ist gleich dem x des Punktes M, d. h. OI weniger der Projektion von MC auf die große Achse, d. i. QI, der Winkel aber, der die Richtung der Normalen MN mit der großen Achse bildet, ist gleich $\varphi - 90^\circ$, d. h. $MCH = \varphi - 90^\circ$, $QI = CH = R\cos(\varphi - 90^\circ) = +R\cos(90^\circ - \varphi) = R\sin\varphi$; daher hat man $OQ = \xi = x - R\sin\varphi$; die Ordinate QC aber ist gleich

$MH - MI = R\sin(\varphi - 90^\circ) - y = -y - R\cos\varphi$;

wegen der negativen Richtung der QC alles mit entgegengesetzten Zeichen genommen; daher $OQ = \eta = y + R\cos\varphi$; drückt man x, y und R durch a, b und φ aus, so erhält man:

$$\xi = \frac{a^2\sin^3\varphi\,(a^2 - b^2)}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}};\ \eta = \frac{b^2\cos^3\varphi\,(a^2 - b^2)}{(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

wobei wir nur bemerken wollen, daß, da η der Natur nach ein Unterschied ist, und y und R Wurzelgrößen mit doppelten Zeichen sind, wir hier diese mit entgegengesetzten Zeichen nehmen müssen, woraus

$$(a\,\xi)^{\frac{2}{3}} + (b\,\eta)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

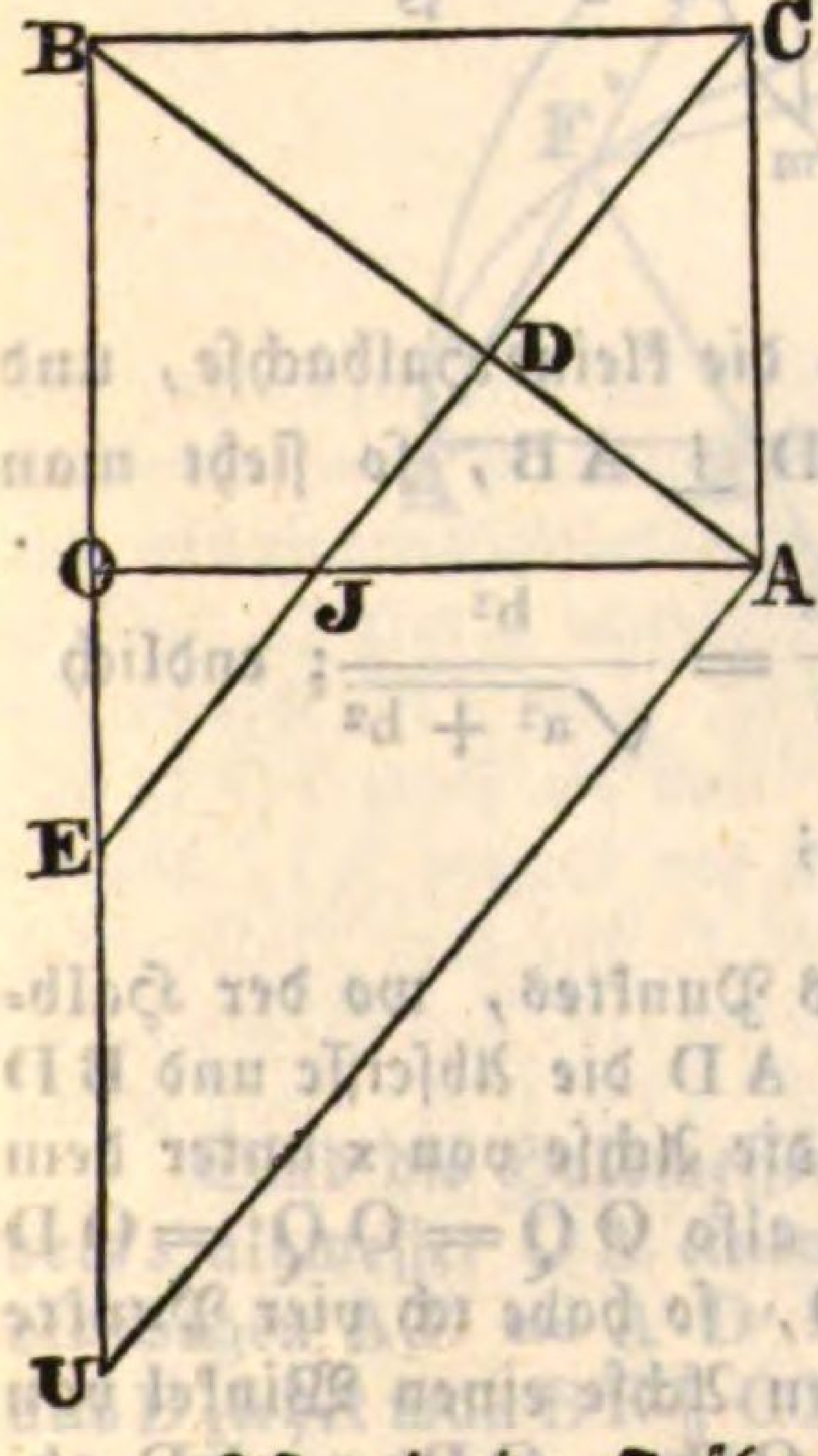
als Gleichung der Krummen, in der alle Krümmungsmittelpunkte liegen.

Diese krumme Linie, welche man die Evolute der Ellipse nennt, läßt sich entweder nach der Gleichung verzeichnen, indem man stufenweise Werthe für ξ als Abscissen annimmt, und die η die (Ordinaten) dieser Gleichung gemäß berechnet, und senkrecht auf die entsprechenden Abscissen aufträgt. Annäherungsweise läßt sich die Evolute der Ellipse auch dadurch verzeichnen, daß man zu den Punkten der gegebenen Ellipsen (diese Punkte so nahe wie möglich genommen) Berührende ziehet, und auf diese in den Berührungspunkten Lothe errichtet, so gibt die Aufeinanderfolge der Durchschnittspunkte der Lothe die Evolute. Die äußersten Punkte der Evolute, das ist die Krümmungsmittelpunkte des Scheitels der großen und eben so der kleinen Halbachse bekommt man sehr leicht aus dem Ausdrucke

$$R = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

denn für den Scheitelpunkt der kleinen Achse ist $\varphi = o$, also $R = \frac{a^2}{b}$, und für den Scheitelpunkt der großen Achse ist $\varphi = 90^\circ$, also $R = \frac{b^2}{a}$. Der Krümmungsmittelpunkt des ersten Punktes liegt in der kleinen, der des andern in der großen Achse, was uns eine leichte Verzeichnung dieser Krümmungsmittelpunkte gibt.

Fig. 386.



Es seyen $OA = a$, $OB = b$ die zwei halben Hauptachsen; ich ziehe $BC \parallel OA$, $CA \parallel OB$, und fälle $CD \perp AB$, verlängere CD, bis es in I und E die zwei Hauptachsen trifft; ziehet man nun durch A die Gerade $AU \parallel CE$, so hat man:

$BO . OA = OA : OU$, daher $OU = \frac{a^2}{b}$;

da nun $BE = OU$, so ist $BE = \frac{a^2}{b}$, daher E der Krümmungsmittelpunkt von B.

Da $OAB = ICA$, so ist $ICA \sim AOB$, daher $IA : AC = OB : OA$, also $IA = \frac{b^2}{a}$, daher I der Krümmungsmittelpunkt von A.

§. 324. Ist die Excentricität der Ellipse nicht sehr groß, so wird folgendes Verfahren zur Verzeichnung derselben einfach und hinreichend genau seyn.

Ist wie im Früheren θ der Winkel, den der Halbmesser eines Punktes der Ellipse mit der großen Achse bildet, und φ der Winkel der Berührenden desselben Punktes der Ellipse mit der großen Achse, so hatten wir die Formeln für die Coordinaten dieses Punktes:

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 \cos^2 \theta}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta};\; y^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin \theta + b^2 \cos^2 \theta};$$

$$x^2 = \frac{a^4 \sin^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi};\; y^2 = \frac{b^4 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Diese Formeln erlauben eine sehr einfache Verzeichnung für die Werthe $\theta = 45$; $\varphi = 45^\circ$.

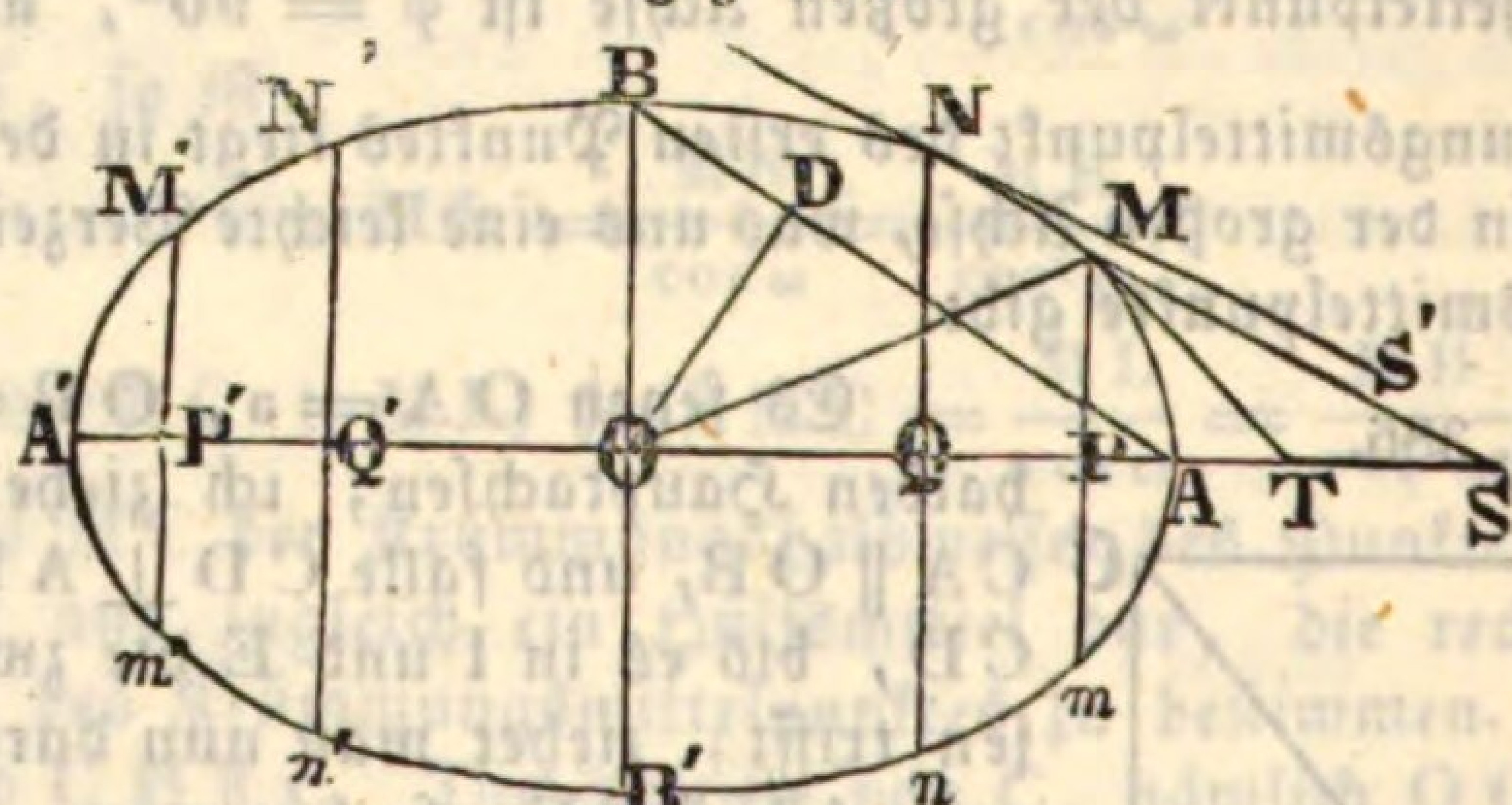
Für diejenigen Punkte, wo $\theta = 45^\circ$ ist, d. h. wo der Halbmesser dieses Punktes mit der großen Achse einen Winkel von 45° bildet, hat man:

$$x = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};\; y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Für diejenigen Punkte hingegen, wo die Berührende desselben mit der großen Achse einen Winkel von 45° bildet, hat man:

$$x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};\; y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Fig 387.



Ist $OA = a$ die große und $OB = b$ die kleine Halbachse, und ich ziehe $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$, und ziehe $OD \perp AB$, so sieht man leicht, daß

$$AD = \frac{OA^2}{AB} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}},\; BD = \frac{OB^2}{AB} = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}};\text{ endlich}$$

$$OD = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

daher gibt OD die Abscisse und Ordinate des Punktes, wo der Halbmesser 45° mit der großen Achse bildet, und AD die Abscisse und BD die Ordinate des Punktes dessen Berührende die Achse von x unter dem Winkel 45° oder 135° schneidet. Schneide ich also $OQ = OQ' = OD$ ab, und errichte in Q und Q' Lothe $= OD$, so habe ich vier Punkte $NN'nn'$, deren Durchmesser mit der großen Achse einen Winkel von 45° und 135° bilden. Schneide ich eben so $OP = OP' = AD$ ab, errichte in P und P' Lothe $= BD$, so habe ich vier Punkte $MM'mm'$ wo die Berührende mit der Achse den Winkel von 45° oder 135° bildet. Da sich noch in M und N sehr leicht die Berührenden verzeichnen lassen, in $AA'BB'$ die Berührenden senkrecht auf die Achse sind, so ist es

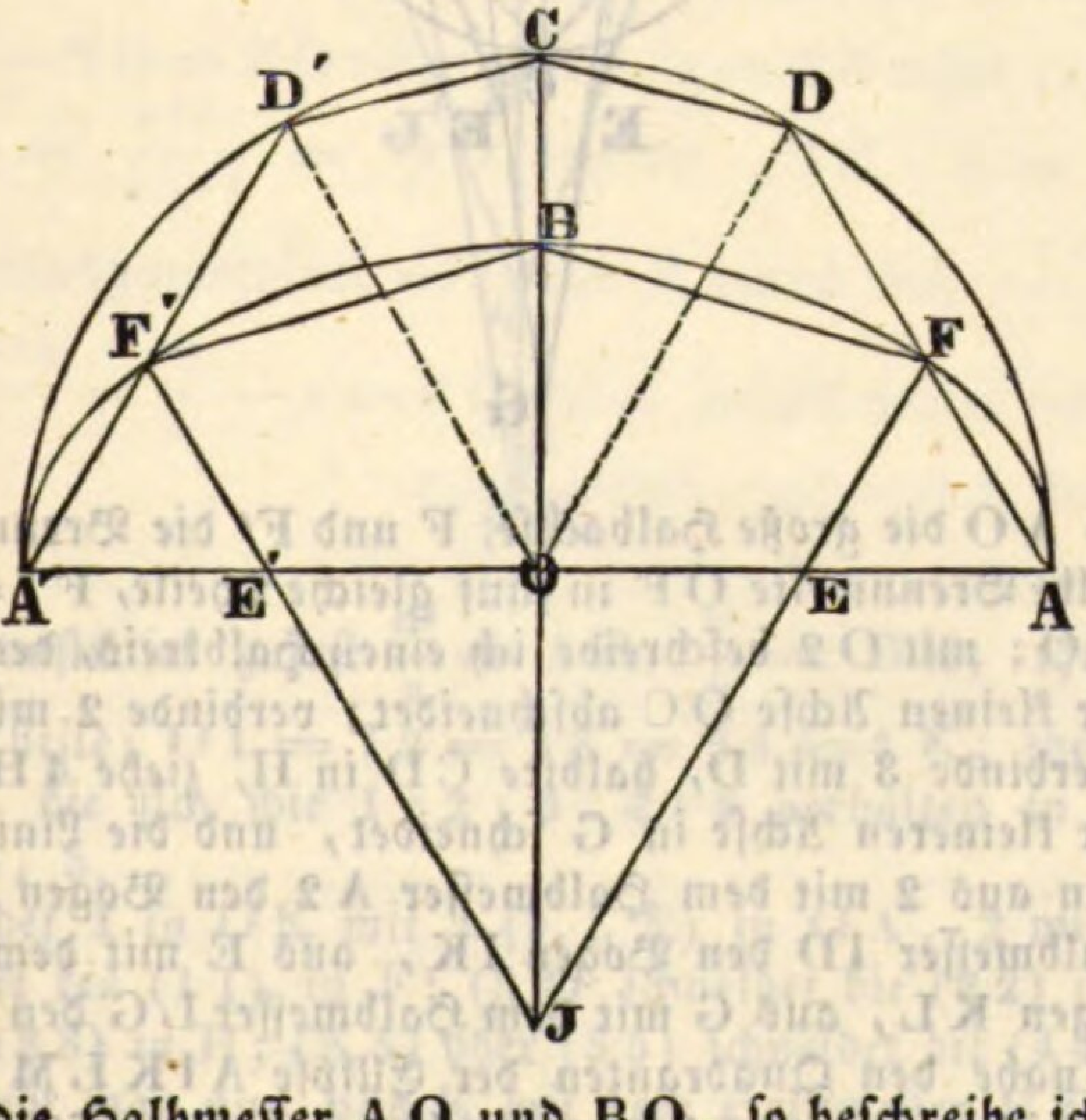
sehr leicht, diese zwölf Punkte des Umfanges der Ellipse mit freier Hand zu verbinden, und dieß möchte vielleicht die leichteste und schnellste Art der Verzeichnung der Ellipse seyn.

Um die Berührende in M zu erhalten, mache ich PT = MP, so ist MT die verlangte Berührende. Um die Berührende in N zu erhalten, bedenket man die Gleichung $\tang \varphi \,.\, \tang \theta = -\frac{b^2}{a}$, in N ist $\theta = 45$, $\tang \theta = 1$, daher tang $\varphi = -\frac{b^2}{a^2}$; nun ist $\tang MOP = \frac{MP}{OP} = \frac{b^2}{a^2}$, daher $\varphi = 180 - MOP$; ich schneide also PS = OP ab, verbinde MS, so ist der Nebenwinkel von MSO = 180 — MOP, daher MS die Richtung der Berührenden in N; ich ziehe daher NS′ ‖ MS, so ist NS die verlangte Berührende in N.

§. 325. Annäherungsweise Verzeichnungen der Ellipse sind folgende:

I.

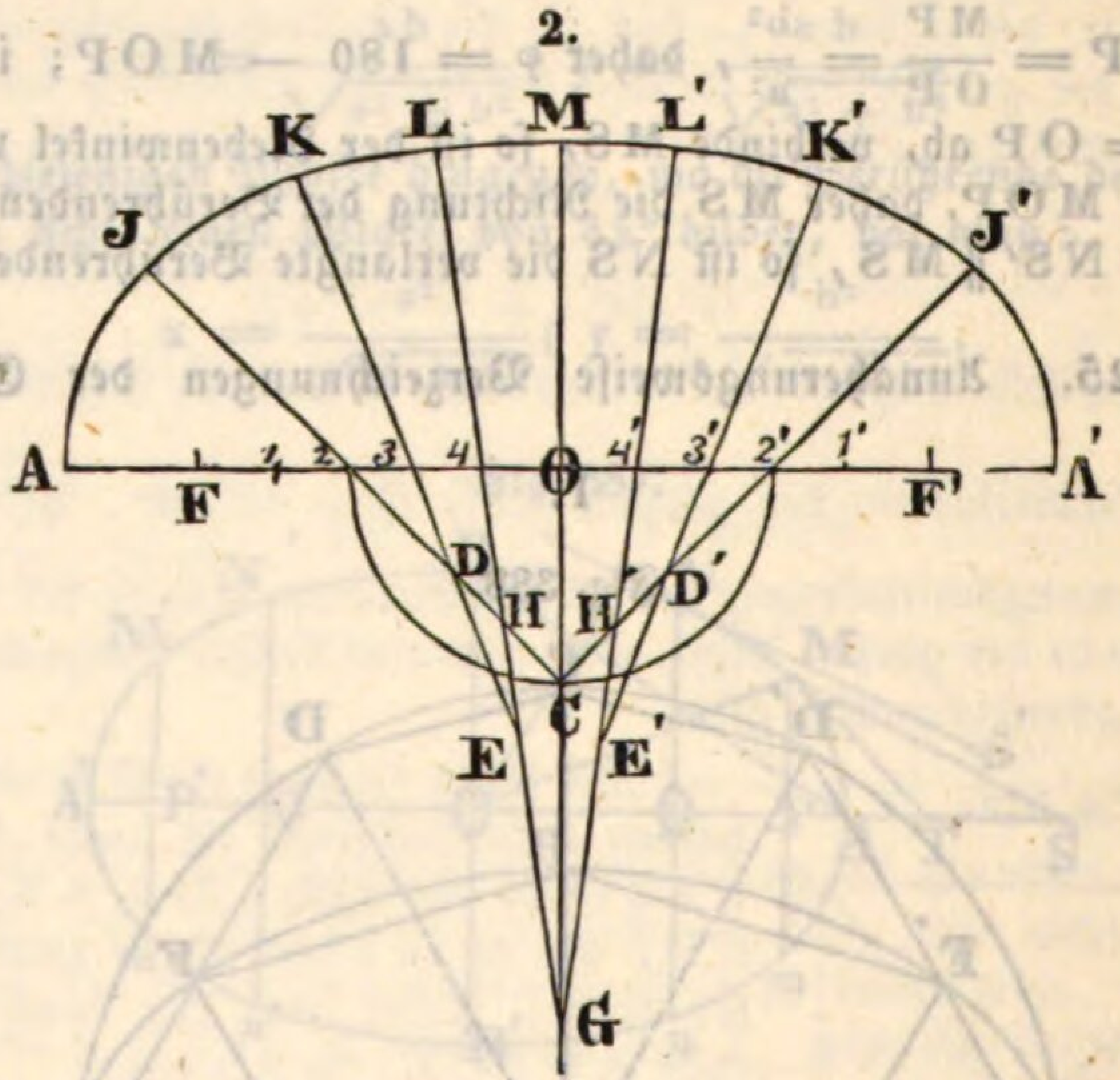
Fig. 388.



Sind die Halbmesser AO und BO, so beschreibe ich aus O mit dem Halbmesser OA einen Kreis, mache AD = A′D′ = D′D, so daß die Bögen AD = A′D′ = 60° sind, und somit CD = CD′ = 30°; aus B ziehet man BF ‖ CD und BF′ ‖ CD′, und aus F, FI ‖ DO, und dann F′I ‖ D′O. Wie man leicht findet, ist DCO = 75°, daher FBI = 75°, da EF ‖ DO, so ist FEA = 60°, daher OEI = 60°, daher BIF = 30°, daher IFB = 75°, daher BI = IF und EF und EA, also aus I mit dem Halbmesser IB ein Kreisbogen beschrieben, wird mit dem Bogen aus E mit dem Halbmesser EA beschrieben,

zusammenfließen, weil sich diese Kreise in F berühren. Es ist begreiflich, daß diese Verzeichnungsart nur dann eine der Ellipse nahe kommende krumme Linie darstellt, wenn die Excentricität gering ist. Die Abweichung von der wahren Gestalt sieht man, wenn man nach unserer Art die Punkte bestimmt, wo $\varphi = 45^\circ$ und $\theta = 45$ ist, und man bemerkt leicht, daß die Abweichung gegen den Scheitel der großen Achse stärker ist.

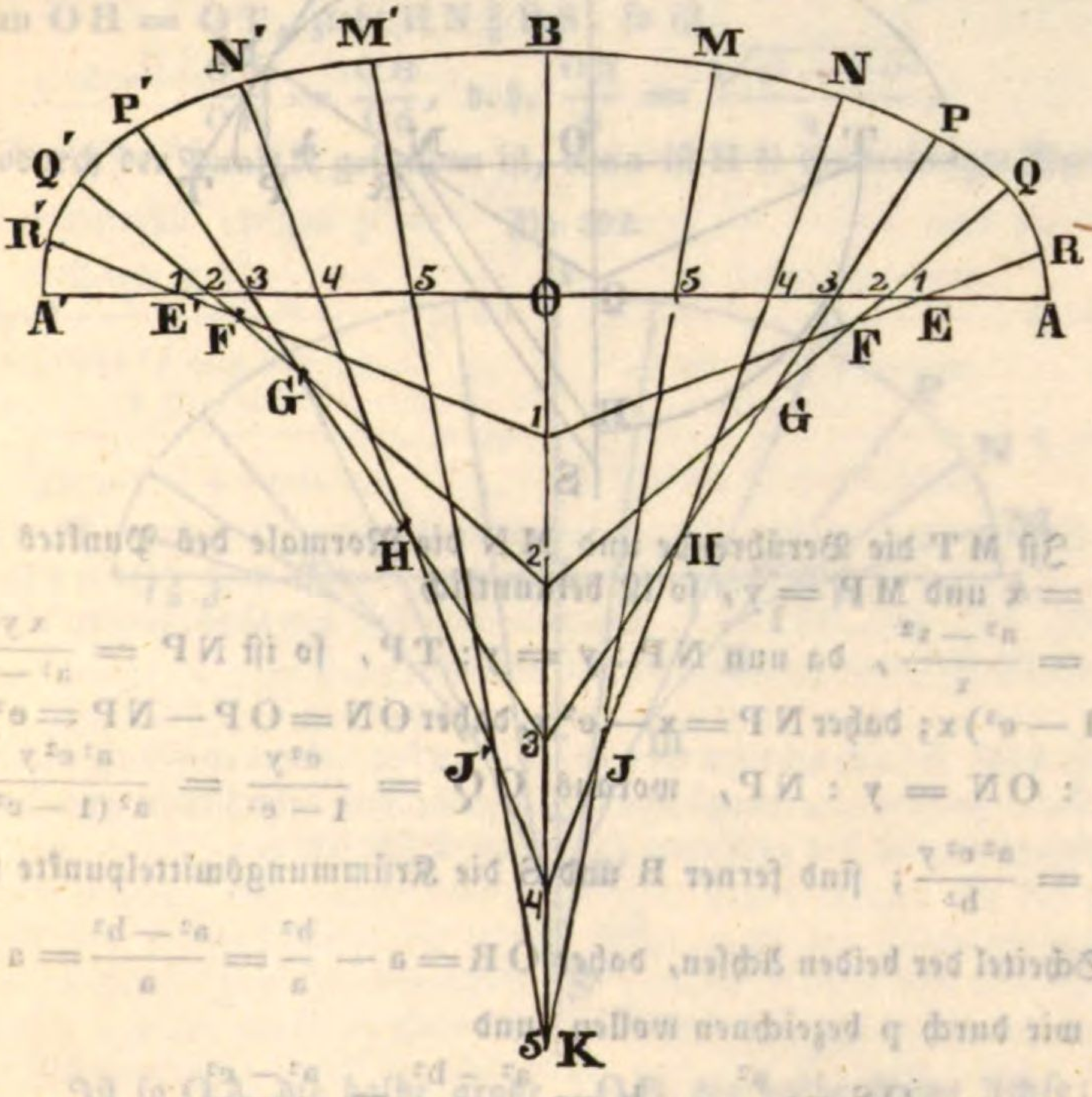
Fig. 389.



Es sey A O die große Halbachse, F und F′ die Brennpunkte; ich theile die halbe Brennweite O F in fünf gleiche Theile, F 1 = 1 2 = 2 3 = 3 4 = 4 O; mit O 2 beschreibe ich einen Halbkreis, der mir von der Richtung der kleinen Achse O C abschneidet; verbinde 2 mit C, halbire 2 C in D, verbinde 3 mit D, halbire C D in H, ziehe 4 H, welche die Richtung der kleineren Achse in G schneidet, und die Linie 3 D in E; beschreibe nun aus 2 mit dem Halbmesser A 2 den Bogen A I, aus D mit dem Halbmesser I D den Bogen I K, aus E mit dem Halbmesser K E den Bogen K L, aus G mit dem Halbmesser L G den Bogen L M, so hat man nahe den Quadranten der Ellipse A I K L M, und wenn man die Verzeichnung rings herum macht, die ganze Ellipse. Die Abweichung wird selbst bei mittleren Excentricitäten nicht zu groß seyn.

3. Perronets Construction einer Ellipse, wo $b = \frac{a}{2}$, also $e^2 = 1 - \frac{1}{4}$, d. h. $e = 0{\cdot}866$.

Fig. 390.



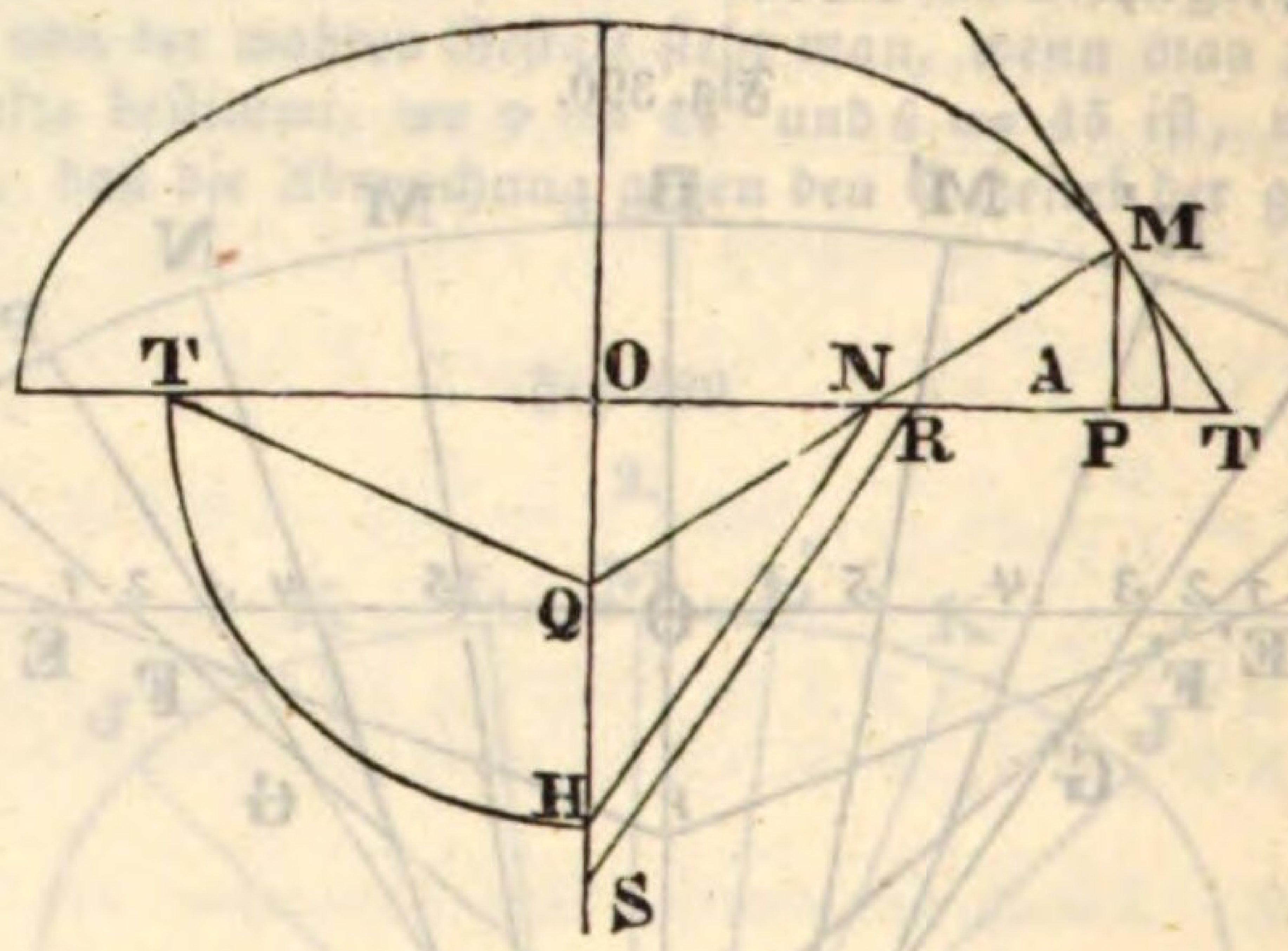
Man construirt zuerst $\frac{b^2}{a} = AE$, $\frac{a^2}{b} = BK$, theilt OK in fünf gleiche Theile: $O1 = 12 = 23 = 34 = 4K$; theilet OE in fünf Theile, die sich wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5$ verhalten in den Punkten 2, 3, 4, 5.

Verbindet 1 in OK mit 1 (d. i. E) in OA, 2 mit 2 u. s. w. (22) schneidet die (11) in F; (33) schneidet die (22) in G; (44) schneidet die (33) in H; (K5) oder (55) schneidet die (44) in I.

Beschreibt man nun aus K mit dem Halbmesser BK den Bogen BM, aus I mit dem Halbmesser MI den Bogen MN, aus H mit dem Halbmesser NH den Bogen NP, aus G mit dem Halbmesser GP den Bogen PQ, aus F mit dem Halbmesser FQ den Bogen QR, und endlich aus E mit dem Halbmesser CR den Bogen RA, so wird sich diese Verbindung von Kreisbögen sehr nahe dem elliptischen Quadrate nähern.

4. Construction mittelst der Normalen.

Fig. 391.



Ist M T die Berührende und M N die Normale des Punktes M, $OP = x$ und $MP = y$, so ist bekanntlich $PT = \frac{a^2 - x^2}{x}$, da nun $NP : y = y : TP$, so ist $NP = \frac{x y^2}{a^2 - x^2} = (1 - e^2) x$; daher $NP = x - e^2 x$, daher $ON = OP - NP = e^2 x$; $OQ : ON = y : NP$, woraus $OQ = \frac{e^2 y}{1 - e^2} = \frac{a^2 e^2 y}{a^2 (1 - e^2)}$, $OQ = \frac{a^2 e^2 y}{b^2}$; sind ferner R und S die Krümmungsmittelpunkte für die Scheitel der beiden Achsen, daher $OR = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = a e^2$, was wir durch p bezeichnen wollen, und

$$OS = \frac{a^2}{b} - b = \frac{a^2 - b^2}{b} = \frac{a^2 - e^2}{b},$$

was wir q nennen wollen, so hat man:

$$\frac{ON}{p} = \frac{x}{a} \text{ und } \frac{OQ}{q} = \frac{y}{b};$$

daher die Punkte N und Q, wo die Normale die beiden Achsen schneidet, durch folgende Gleichung verbunden:

$$\left(\frac{ON}{p}\right)^2 + \left(\frac{OQ}{q}\right)^2 = 1.$$

Ich kann also den Punkt Q willkürlich aussuchen, und durch diese Gleichung N so bestimmen, daß M N immer eine Normale unserer Ellipse ist; da nun die Durchschnittspunkte sehr naher Normalen immer mehr den Krümmungsmittelpunkt geben, so kann man die Verzeichnung der Normalen zur annäherungsweisen Verzeichnung der Ellipse verwenden.

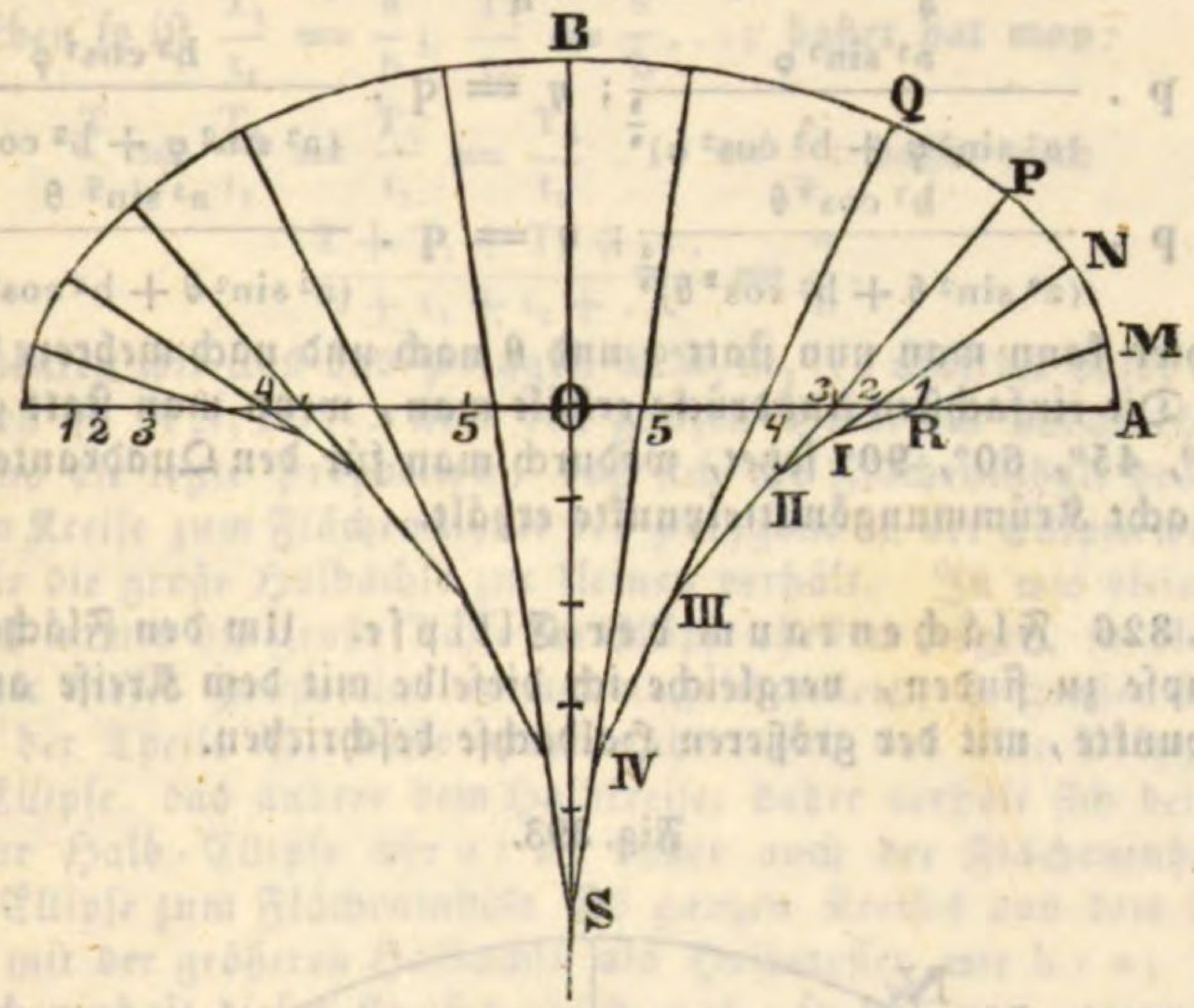
Für ein willkürliches O Q finde ich das dazu gehörende O N auf folgende Art:

Da $\frac{ON}{p} = \frac{\sqrt{q^2 - OQ^2}}{q}$, so beschreibe ich aus Q als Mittelpunkt einen Kreisbogen mit dem Halbmesser $OS = q$, der die große Achse in T schneidet, so ist dann $OT = \sqrt{q^2 - OQ^2}$; macht man nun $OH = OT$, zieht $HN \parallel RS$, so ist

$$\frac{ON}{OR} = \frac{OH}{OS}, \text{ d. h. } \frac{ON}{p} = \frac{\sqrt{q^2 - QO^2}}{q},$$

wodurch der Punkt N gefunden ist, dann ist H N die verlangte Normale.

Fig. 392.



Ist so O A die halbe große, O B die halbe kleine Achse; ist R der Krümmungsmittelpunkt von A, und S derselbe für B; theilt man O S in mehrere gleiche Theile, z. B. fünf gleiche Theile, beschreibt aus den Punkten 1, 2, 3 u. s. w. Bögen mit dem Halbmesser = O S, welche die Verlängerung von A O in 1, 2, 3 u. s. w. einschneiden; beschreibt ferners aus O mit den zuletzt gefundenen O 5, O 4, O 3 Bögen, die die O S schneiden, und zieht durch diese gefundenen Punkte Gleichlaufende mit R S, welche die O R in 1, 2, 3 u. s. w treffen, wobei der Punkt 1 sehr nahe an R trifft; verbindet nun die Punkte 1 und 1, 2 und 2 u. s. w. der Geraden O R und O S, so gibt der Durchschnitt von 1 1 und 2 2 den Punkt I, von 2 2 und 3 3 den Punkt III u. s. w. Die Normalen 1 1, 2 2, 3 3 u. s. w. ziehet man über die Gegend des Umfanges der Ellipse, und beschreibt aus R mit dem Halbmesser A R einen Kreisbogen A M bis zur nächsten Normale, aus I mit I M den Bogen M N, aus II mit II N den Bogen N P, aus III mit III P den Bogen P Q u. s. w. Bei dieser Verzeichnung ist es gut, daß 1 in O R nahe nach R fällt; der Punkt 5 links von O in der großen Achse wird durch einen an S nahe liegenden Punkt erzeugt.

5. Construction mittelst Krümmungsmittelpunkten.
Man hat die Formeln für die Coordinaten der Krümmungsmittelpunkte

$$\xi = \frac{a^2 \sin^3 \varphi (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}; \; \eta = \frac{b^2 \cos^3 \varphi (a^2 - b^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}, \text{ oder}$$

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{b^3 \cos^3 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}; \; \eta = \frac{a^2 - b^2}{b} \cdot \frac{a^3 \sin^3 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}},$$

die, wenn man $\frac{a^2 - b^2}{a} = p$ nun $\frac{a^2 - b^2}{b} = q$ nennt, übergehen in

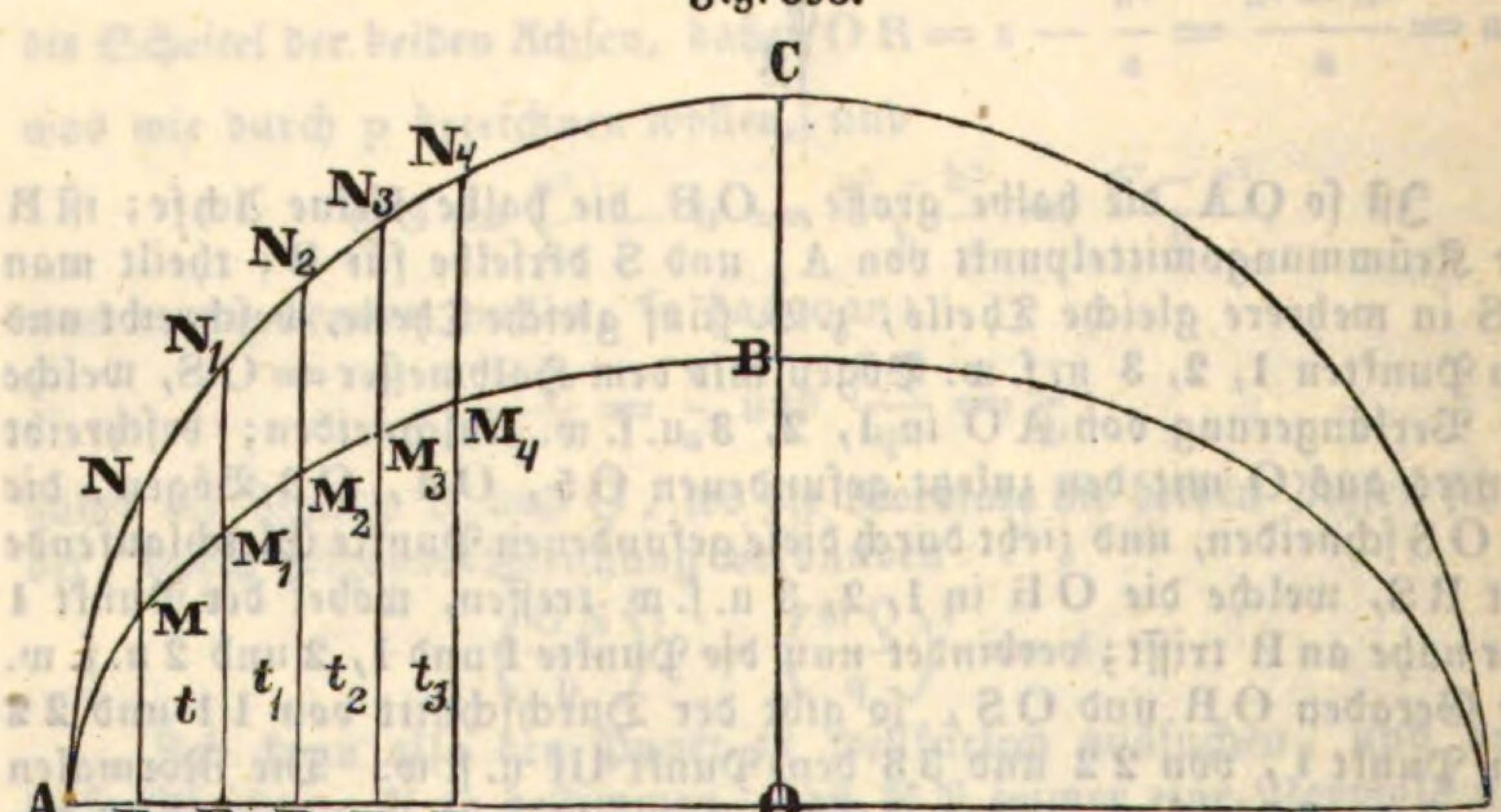
$$\xi = p \cdot \frac{a^3 \sin^3 \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}; \; \eta = q \cdot \frac{b^3 \cos^3 \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\xi = p \cdot \frac{b^3 \cos^3 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}; \; \eta = q \cdot \frac{a^3 \sin^3 \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hier kann man nun statt φ und θ nach und nach mehrere Werthe setzen. Die einfachsten Ausdrücke erhält man, wenn man statt φ und θ 0°, 30°, 45°, 60°, 90° setzet, wodurch man für den Quadranten einer Ellipse acht Krümmungsmittelpunkte erhält.

§. 326 Flächenraum der Ellipse. Um den Flächenraum der Ellipse zu finden, vergleiche ich dieselbe mit dem Kreise aus dem Mittelpunkte, mit der größeren Halbachse beschrieben.

Fig. 393.



Ist AO die halbe große Achse = a, und BO die halbe kleine Achse = b, so wollen wir uns die große Achse in mehrere gleiche Theile $AP = PP_1 = P_1 P_2$ u. s. w. getheilt denken; in den Punkten $P P_1 P_2$ u. s w. Lothe errichten, die in $M M_1 M_2 \ldots$ die Ellipse in $N N_1 N_2 \ldots$ den Kreis treffen, so hat man:

$$\frac{MP}{NP} = \frac{M_1 P_1}{N_1 P_1} = \frac{M_2 P_2}{N_2 P_2} = \ldots = \frac{b}{a}.$$

Verbindet man MM_1, $M_1 M_2$, $M_2 M_3$, ... eben so NN_1, $N_1 N_2$, ... durch gerade Linien, und nennt die dadurch entstehenden Trapeze in der Ellipse $t\ t_1 t_2 \ldots$ in dem Kreise $T\ T_1\ T_2$ u. s. w., so hat man:

$$t = \frac{MP + M_1 P_1}{2} . PP_1;\ T = \frac{NP + N_1 P_1}{2} . PP_1;\ \text{daher}$$

$$\frac{T}{t} = \frac{NP + N_1 P_1}{MP + M_1 P_1} = \frac{NP}{MP} = \frac{a}{b}.$$

Eben so ist $\frac{T_1}{t_1} = \frac{a}{b}$; $\frac{T_2}{t_2} = \frac{a}{b} \ldots$; daher hat man:

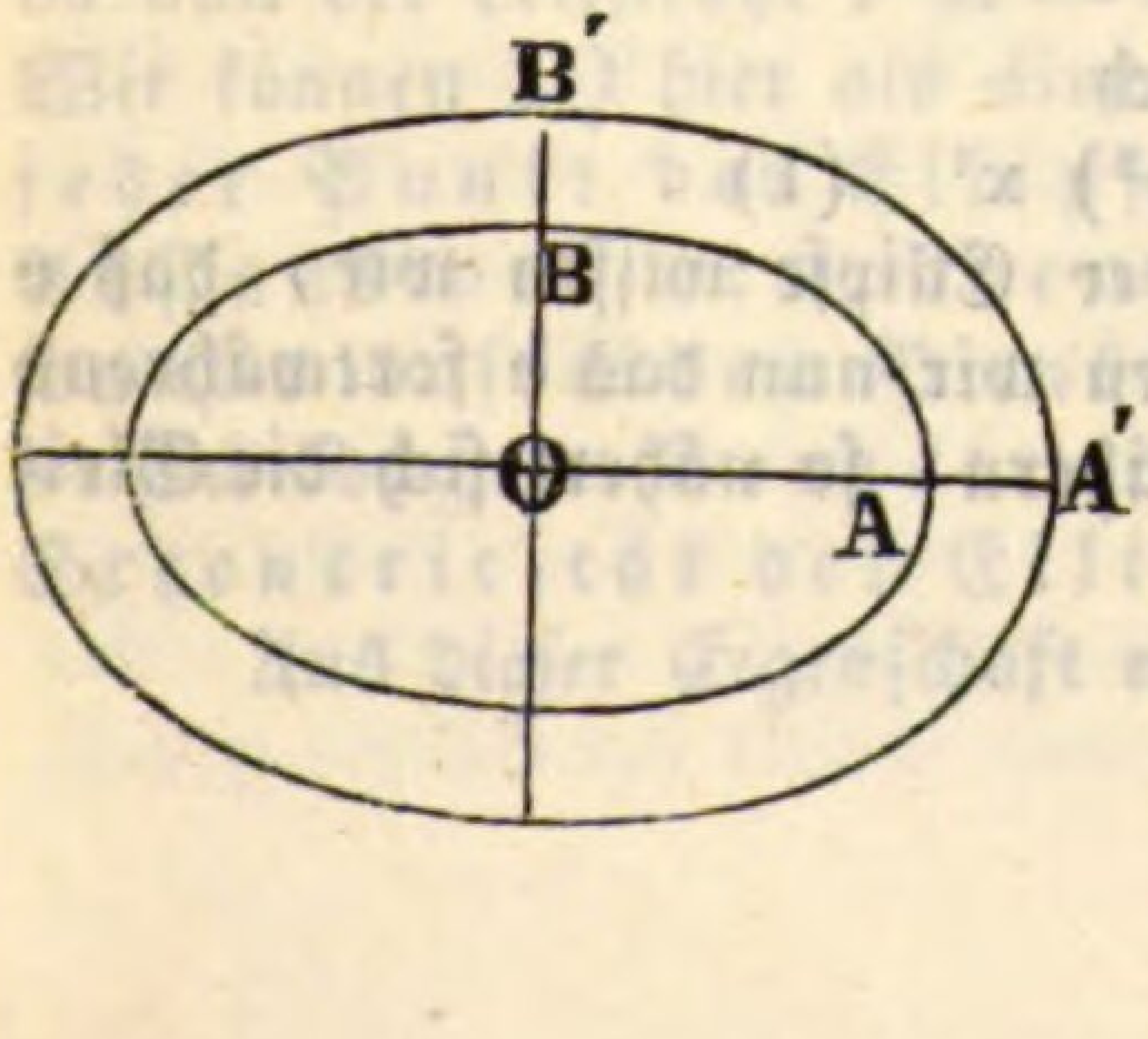
$$\frac{T}{t} = \frac{T_1}{t_1} = \frac{T_2}{t_2} = \frac{T_3}{t_3} \ldots = \frac{a}{b};\ \text{daher auch}$$

$$\frac{T + T_1 + T_2 + \ldots}{t + t_1 + t_2 + \ldots} = \frac{a}{b}.$$

Denken wir uns das Polygon $MM_1 M_2 \ldots$ über die halbe Ellipse, und eben so $NN_1 N_2 \ldots$ über den ganzen Halbkreis ausgedehnt, so lehrt uns die letzte Proportion, daß sich der Flächeninhalt des Polygons im Kreise zum Flächeninhalt des Polygons in der Ellipse wie $a : b$, d. h. wie die große Halbachse zur kleinen verhält. In wie viele Theile wir auch immer die große Achse der Ellipse theilen mögen, so bleibt die Wahrheit dieser Proportion immer ungeschmälert; je größer aber die Anzahl der Theile ist, desto mehr nähert sich das eine Polygon der Halb-Ellipse, das andere dem Halbkreise, daher verhält sich der Halbkreis zur Halb-Ellipse wie $a : b$; daher auch der Flächeninhalt der ganzen Ellipse zum Flächeninhalt des ganzen Kreises aus dem Mittelpunkte mit der größeren Halbachse als Halbmesser wie $b : a$; da nun der Flächeninhalt dieses Kreises gleich πa^2, so hat man, wenn F den Flächeninhalt der Ellipse darstellt: $F : \pi a^2 = b : a$, woraus $F = \pi ab$, d. h. der Flächeninhalt der Ellipse ist gleich dem Produkte der beiden halben Hauptachsen, multiplicirt mit der Ludolphischen Zahl π.

§. 327. (Annäherungsweise Bestimmung des Umfanges der Ellipse.) Die genaue Bestimmung des Umfanges der Ellipse übersteigt die Kräfte der Elementar-Mathematik. Zur annäherungsweisen Bestimmung desselben erlauben wir uns folgendes Verfahren vorzuschlagen:

Fig. 394.



Denken wir uns zwei concentrische Ellipsen $OA = a$; $OB = b$; $OA' = a(1 + h)$ $OB' = b(1 + h)$, so ist der Flächeninhalt $AOB = \frac{1}{4} \pi ab$; $A'OB' = \frac{1}{4} \pi ab (1 + h)^2$; daher des Ringstücks $AA'BB' = \frac{1}{4} \pi ab (2h + h^2)$; da nun $AA' = ah$; $BB' = bh$, so wird man, je kleiner als h ist, mit um so geringeren Fehler den Bogen AB,

multiplicirt mit $\frac{AA'+BB'}{2}$, d. h. $\frac{h}{2}(a+b)$ als Flächeninhalt ansehen können; daher, wenn $AB = l$ gesetzt wird, annäherungsweise folgende Gleichung für die kleinsten Werthe von h gelten kann:

$$l \cdot \frac{h}{2}(a+b) = \tfrac{1}{4}\pi a b\,(2h + h^2), \text{ woraus}$$

$$l = \frac{\pi a b\,(2+h)}{2\,(a+b)}.$$

Setzet man $h = 0$, und multiplicirt mit 4, so hat man als beiläufigen Ausdruck für den Umfang der Ellipse folgenden:

$$U = \frac{4\pi a b}{a+b};$$

d. h. der Umfang der Ellipse ist nahe dem doppelten Flächeninhalt, dividirt durch die halbe Summe der beiden halben Hauptachsen.

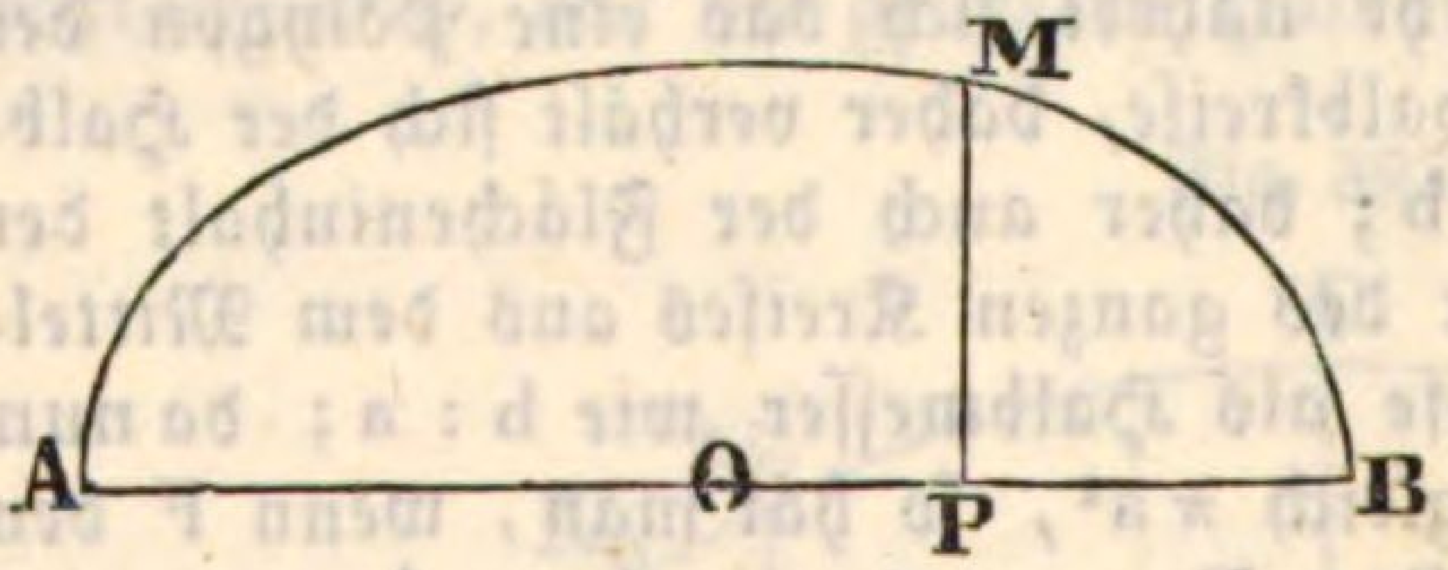
Es sey z. B. $a = 10$, $b = 9$, so hat man:

$$\text{Umfang} = 4 \cdot \frac{22}{7} \cdot \frac{90}{19} = 59{\cdot}56.$$

Begreiflich kann diese Annäherungsformel nur dann gelten, wenn die Excentricität gering ist.

§. 328. (Gleichung der Ellipse, wenn der Scheitel der großen Achse der Anfangspunkt ist.)

Fig. 395.



Ist der Mittelpunkt O der Anfangspunkt, und sind a und b die beiden Halbmesser, so ist bekanntlich die Gleichung der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nehmen wir nun den Anfangspunkt in A an, und nennen $AP = x'$, so also, daß das alte x oder $OP = x' - AO = x' - a$ ist, so hat man dann als Gleichung der Ellipse

$$\frac{(x'-a)}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

oder wenn man den Strich bei x wieder wegläßt, dabei aber nicht vergißt, daß jetzt die Abscissen von A aus gezählt werden:

$$y^2 = \frac{2\,b^2}{a}\,x - \frac{b^2}{a^2}\,x^2,$$

was, wenn man e und p einführt, durch

$$y^2 = p x - (1 - e^2)\,x^2 \quad (1)$$

ersetzt werden kann. Aus der Natur der Ellipse wissen wir, daß e nothwendig kleiner als 1 seyn muß; lassen wir nun das e fortwährend wachsen, d. h. fortwährend dem 1 sich nähern, so nähert sich die Gleichung (1) ohne Ende der folgenden:

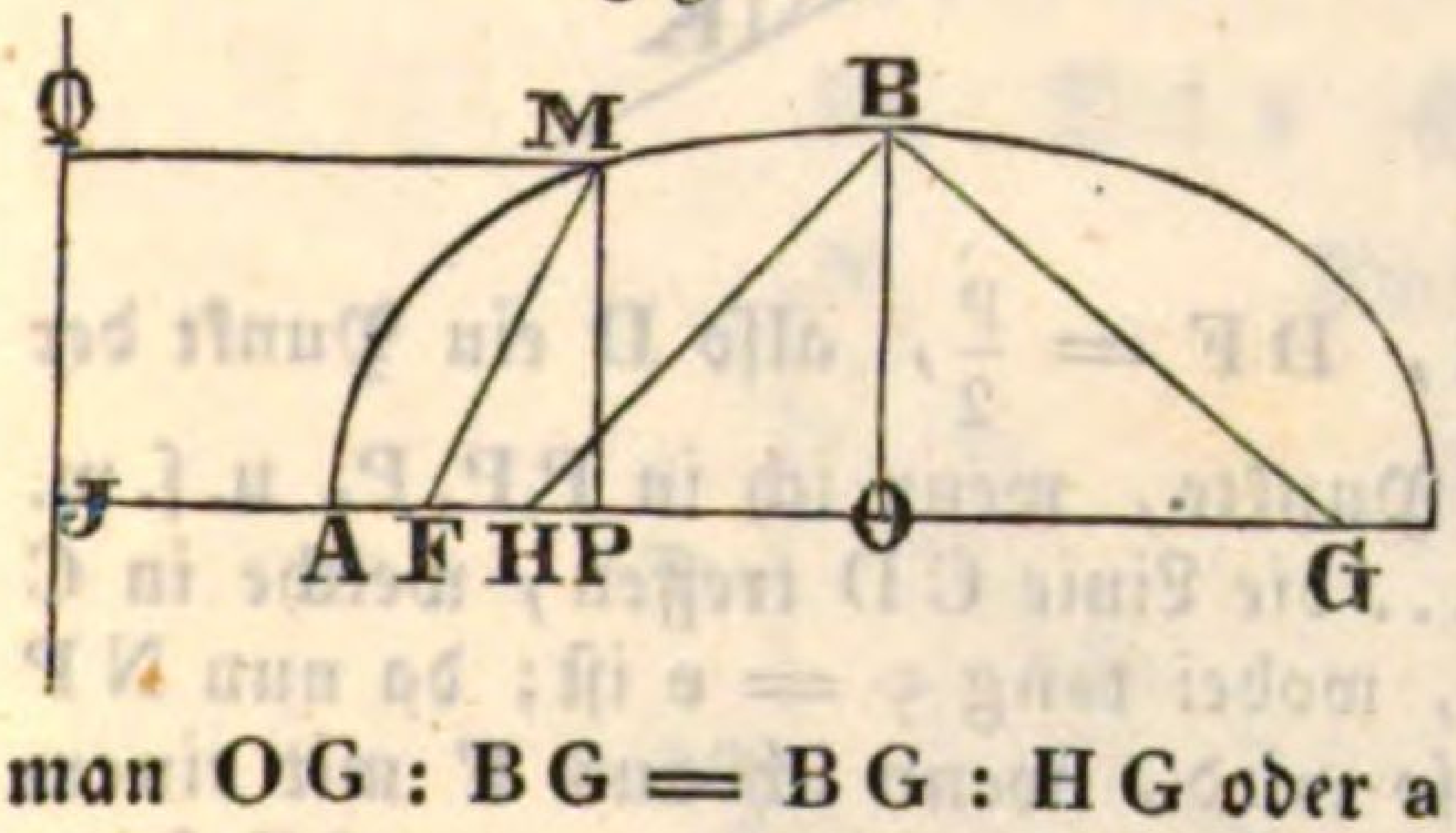
$$y^2 = p x,$$

welche, wie wir wissen, die Gleichung einer Parabel desselben Parameters ist; wir sehen daraus, wenn die Excentricität einer Ellipse fortwährend wächst, d. h. der Einheit sich immer mehr und mehr nähert, so nähert sich die Ellipse immer mehr und mehr einer Parabel. Da nun dem Früheren zu Folge

$$a = \frac{p}{2(1-e^2)};\ b = \frac{p}{2\sqrt{1-e^2}}$$

ist, so sehen wir, je mehr sich e der Einheit nähert, desto größer und größer wird das a, d. h. desto weiter rückt der Mittelpunkt der Ellipse vom Scheitel weg; die Entfernungen der beiden Brennpunkte vom Scheitel A sind $a - ae = a(1-e) = \frac{p}{2(1+e)}$ und $a + ae = a(1+e) = \frac{p}{2(1-e)}$; es wird sich also die Entfernung des einen Brennpunktes vom Scheitel immer mehr und mehr der Größe $\frac{p}{4}$ nähern, je größer e ist, während der andere Brennpunkt bis ins Unendliche fällt. Man kann sich also die Parabel als eine Ellipse vorstellen, wo der Mittelpunkt und der andere Brennpunkt in unendlicher Entfernung sind. Um die Verwandtschaft der Ellipse und Parabel noch näher zu erforschen, verzeichnen wir uns bei der Ellipse die Größe $\frac{a}{e}$, nachdem wir bereits die geometrische Bedeutung von a — e kennen.

Fig. 396.



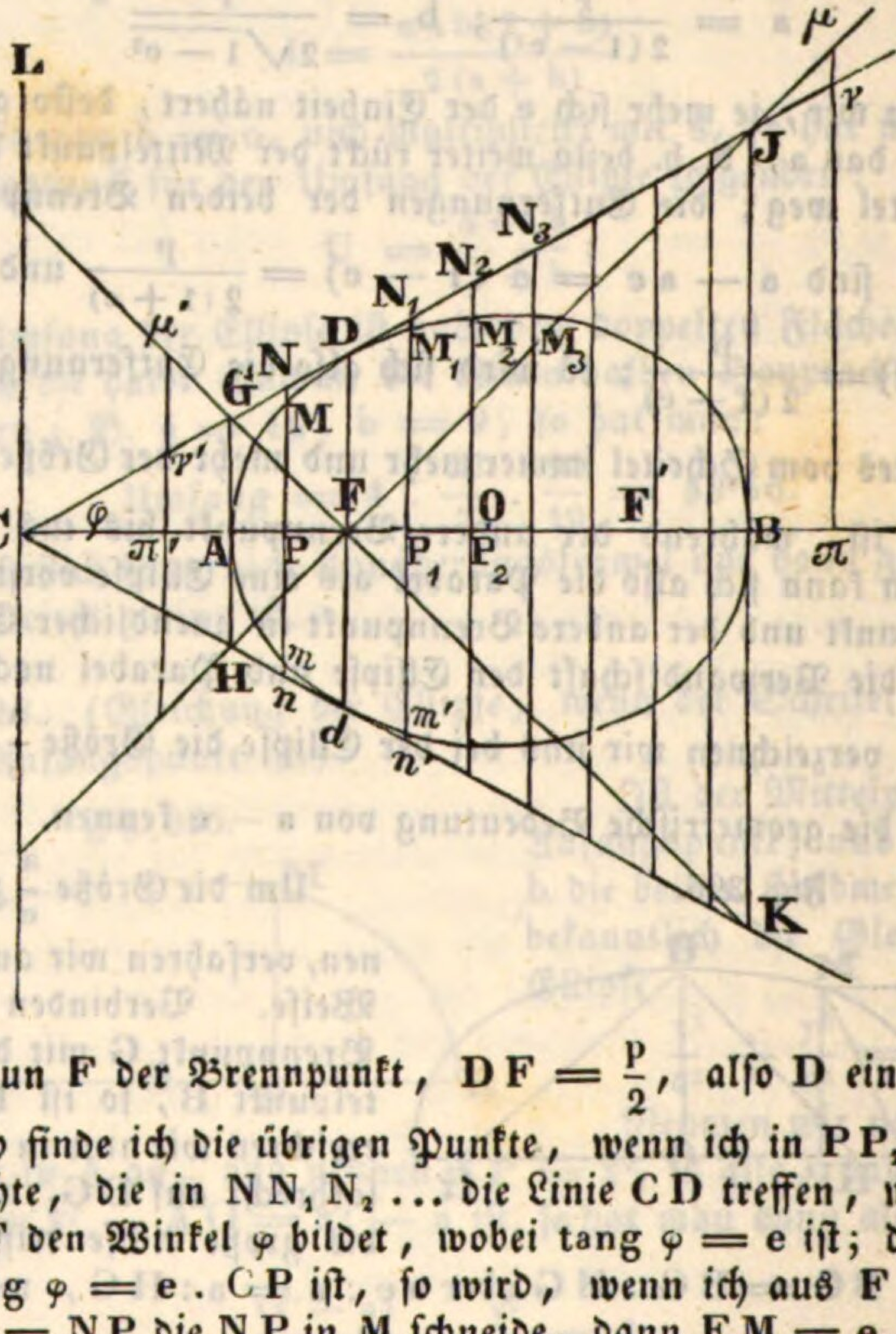
Um die Größe $\frac{a}{e}$ zu verzeichnen, verfahren wir auf folgende Weise. Verbinden wir den Brennpunkt G mit dem Scheitelpunkt B, so ist BG = a; errichten wir nun in B die BH lothrecht auf BG, bis sie in H die große Achse trifft, so hat man OG : BG = BG : HG oder ae : a = a : HG, woraus $HG = \frac{a}{e}$; macht man nun $OI = HG = \frac{a}{e}$, errichtet in I eine lothrechte QI, fällt von M ein Loth auf QI und AO, so hat man $MQ = IP = IO - OP = \frac{a}{e} - x$; daher ist $e \cdot MQ = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$; da nun der Leitstrahl FM = a — ex ist, so hat man MF = e . MQ. Wir können IQ hier als directrix oder Leitlinie betrachten und sagen: jeder Punkt der Ellipse hat die Eigenschaft, daß sein Abstand von dem einen Brennpunkte stets mit dem Abstande desselben Punktes von der Leitlinie in einem beständigen Verhältnisse stehet, dessen Quotient die Excentricität der Ellipse ist.

Aus dieser Eigenschaft ergibt sich neuerdings, daß, wenn e sich

der Einheit nähert, die Ellipse immer mehr und mehr in die Parabel übergehet.

Dieß gibt uns ein neues Mittel an die Hand, die Ellipse zu verzeichnen; es sey $e = \tan \varphi$, wo natürlich $\varphi < 45^\circ$ seyn muß.

Fig. 397.



Ist nun F der Brennpunkt, $DF = \frac{p}{2}$, also D ein Punkt der Ellipse, so finde ich die übrigen Punkte, wenn ich in $P P_1 P_2$ u. s. w. Lothe errichte, die in $N N_1 N_2 \ldots$ die Linie CD treffen, welche in C mit der CF den Winkel φ bildet, wobei $\tan \varphi = e$ ist; da nun $NP = CP \tan \varphi = e \,.\, CP$ ist, so wird, wenn ich aus F mit einem Halbmesser $= NP$ die NP in M schneide, dann $FM = e \,.\, CP$ seyn, also M ein Punkt derselben Ellipse seyn; schneide ich eben so aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmesser $= N_1 P_1,\ N_2 P_2,\ N_3 P_3, \ldots$ dieselben Linien $N_1 P_1,\ N_2,\ P_2 \ldots$ in den Punkten $M_1 M_2 M_3 \ldots$, so sind dieß alle Punkte derselben Ellipse, weil bei jedem dieser Punkte der Abstand von F $e$mal so groß ist, also von der Linie CL. Errichte ich in F die zwei Geraden IH und GK, welche mit der CF Winkel von 45° bilden, so wird das Trapez GHIK den Raum begrenzen, innerhalb welchem nur Punkte der verlangten Eigenschaft, d. h. Punkte der Ellipse vorkommen; denn nimmt man einen Punkt ν oder ν' der CD außerhalb der IG, so ist $\nu\pi < \mu\pi$, und $\nu'\pi' < \mu'\pi'$; da aber $\mu\pi = F\pi$, $\mu'\pi' = F\pi'$ ist, so ist $\nu\pi < F\pi$ und $\nu'\pi' < F\pi'$; daher wird ein Kreis aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmesser $\nu\pi$ und $\nu'\pi'$ die $\nu\pi$ und $\nu'\pi'$ nicht schneiden, und daher keinen Punkt der Ellipse geben.

Ist $e = 1$, daher $\varphi = 45^{\circ}$, so wird FI mit CD gleichlaufend, und es wird der Punkt I und folglich auch B ins Unendliche hinausrücken; daher wird sich die Ellipse der Parabel immer mehr nähern, je näher das e dem 1 kömmt

Wir sehen ferner aus der Figur, daß $AG = e \cdot AC$ und $BI = e \cdot BC$, daher $AF = e \cdot AC$; $BF = e \cdot BC$ ist, folglich $AF + BF = e(AC + BC)$, also $AB = e(AB + 2AC)$; daher $(1 - e)AB = 2e \cdot AC$.

Da nun $CF = \frac{p}{2e}$, $AF = AG = e \cdot AC$, $AC + AF = CF$, daher $AC + e \cdot AC = \frac{p}{2e}$, also $AC = \frac{p}{2e(1+e)}$, so hat man:

$$(1 - e)AB = \frac{p}{1+e}, \text{ also } AB = \frac{p}{1-e^2}, \text{ und somit}$$

$$AC + AB = \frac{p(1+e)}{2e(1-e^2)} = BC;$$

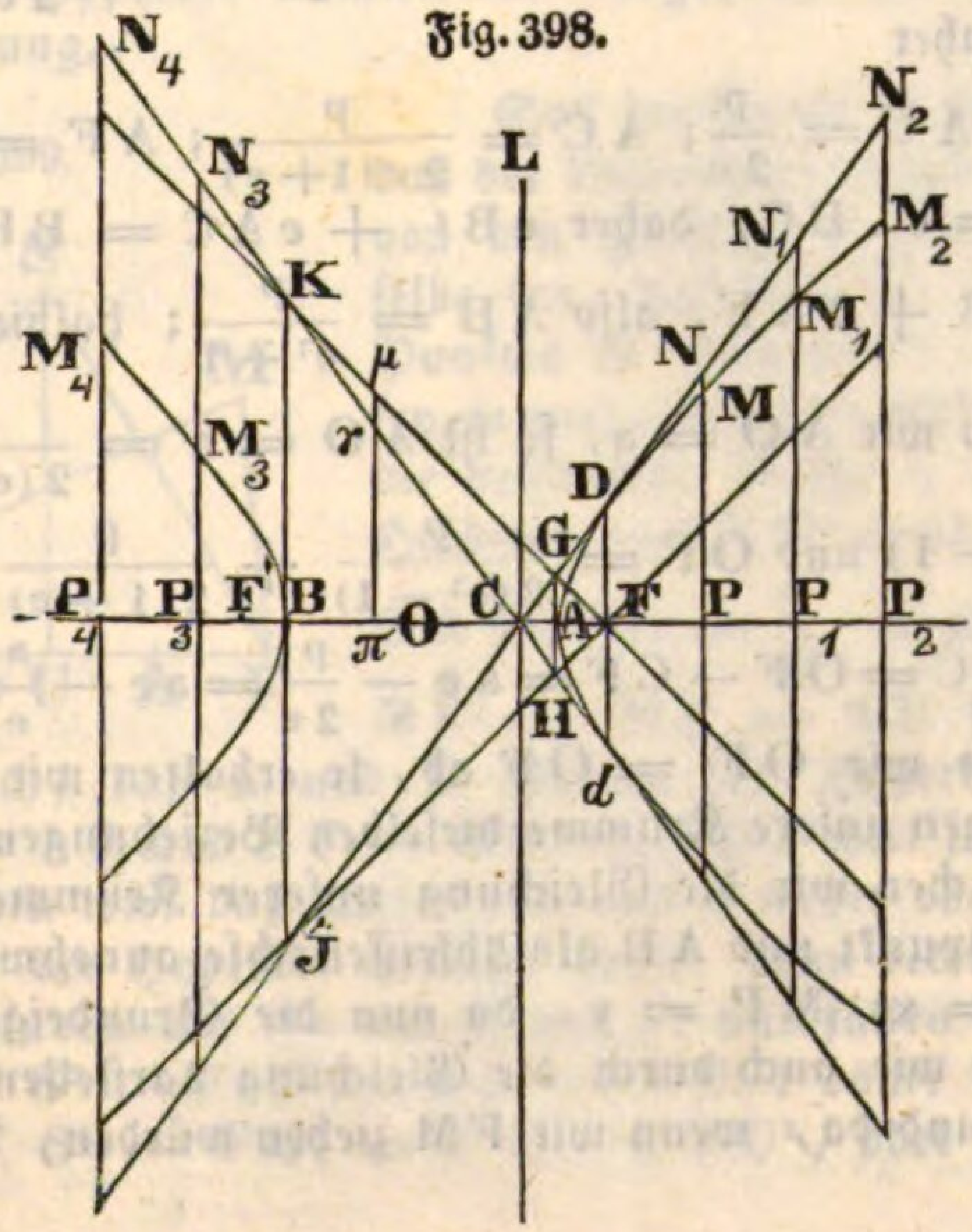
halbiren wir AB in O, so ist $AO = \frac{p}{2(1-e^2)}$; schneiden wir nun $BF' = AF$ ab, so ist daher $BF' = e \cdot AC = \frac{p}{2(1+e)}$, daher

$$CF' = CB - BF' = \frac{p(1+e)}{2e(1-e^2)} - \frac{p}{2(1+e)} = \frac{p(1+e^2)}{2e(1-e^2)}.$$

Je näher nun e an 1 heranrückt, desto größer werden CO und CF', d. h. desto weiter kommen der Mittelpunkt O und der andere Brennpunkt, d. h. desto mehr nähert sich die Ellipse der Parabel.

III. Die Hyperbel.

Fig. 398.



§. 329. Wird in unserer letzten Zeichnung das $e > 1$, d. h. $\varphi > 45^\circ$, so wird die durch F unterm Winkel von 45° gezogene Gerade FI die Gerade CD nicht oberhalb, sondern unterhalb der Abscissenachse CF treffen; dagegen wird der Durchschnitt der FK mit der CH oberhalb erfolgen. Da nun noch immer jeder Punkt der Krummen so beschaffen seyn soll, daß sein Abstand von der Leitlinie CL emal so groß seyn soll, als vom Punkte F, so bleibt die Verzeichnung der Krummen gerade so wie früher, nur mit dem Unterschiede, daß zwischen die durch G und K senkrecht auf OF gezogene Geraden KI und GH keine Punkte der krummen Linie hineinfallen können. Um nämlich die einzelnen Punkte $M M_1 M_2$ u. s. w. zu finden, weiß ich, daß $NP = eCP$; $N_1P_1 = eCP_1$; $N_2P_2 = e.CP_2$ u. s. w.; schneide ich nun aus dem Mittelpunkt F mit den Halbmessern NP, N_1P_1, N_2P_2, N_3P_3 u s. w. diese Ordinaten NP, N_1P_1, N_2P_2, N_3P_3 u. s. w., so erhalte ich die Punkte $M M_1 M_2 M_3$. Wollte man nun diese Verzeichnungsart auch innerhalb des Trapezes GHIK fortsetzen, so müßte man z. B. die Ordinate $\nu\pi$ durch einen Halbmesser $= \nu\pi$ aus F aus schneiden; da aber $\nu\pi < \mu\pi$; $\mu\pi = F\pi$, also $\nu\pi < F\pi$ ist, so wird ein Bogen aus F mit dem Halbmesser $= \nu\pi$ beschrieben, die $\nu\pi$ nicht schneiden und keinen Punkt der krummen Linie geben. Die äußersten Punkte der krummen Linie an diesem Trapeze sind A und B; dagegen, wie man leicht sieht, diese krumme Linie außerhalb dieses Trapezes beiderseits ins Unendliche sich ausstrecket. Die Formeln, die wir für CF′ und CO im vorhergehenden Paragraphe entwickelt haben, bleiben dieselben, nur werden beide negativ, da $1 - e^2$ negativ wird, daher fallen O und F′ auf die andere Seite des C.

Wir haben nämlich, wenn $DF = \frac{p}{2}$; $CF = \frac{p}{2e}$; $AF = AG = e . AC$; daher

$$AC + eAC = \frac{p}{2e};\ AC = \frac{p}{2e(1+e)};\ AF = \frac{p}{2(1+e)}$$

$BF = BK = e . BC$, daher $eBC + eAC = BF + AF$ oder $e . AB = AB + 2AF$, also $AB = \frac{p}{e^2 - 1}$; halbiren wir AB in O, und nennen wir $AO = a$, so ist $AO = a = \frac{p}{2(e^2-1)}$; daher

$$p = 2a(e^2-1) \text{ und } OF = \frac{p}{2(e^2-1)} + \frac{p}{2(1+e)} = \frac{pe}{2(e^2-1)}$$

$$= ae, \text{ und } OC = OF - CF = ae - \frac{p}{2e} = ae - \frac{a}{e}(e^2-1) = \frac{a}{e}.$$

Schneiden wir $OF' = OF$ ab, so erhalten wir einen zweiten Punkt, der gegen unsere Krumme dieselben Beziehungen hat, wie der Punkt F. Suchen wir die Gleichung unserer Krummen, wobei wir O als Anfangspunkt und AB als Abscissenachse annehmen wollen. Es ist also $OP = x$; $MP = y$, da nun die Grundeigenschaft dieser Krummen, die wir auch durch die Gleichung darstellen wollen, $FM = eCP$ ist, und da, wenn wir FM ziehen würden, $FM^2 = MP^2$

$+ FP^2 = y^2 + (OP - OF)^2 = y^2 + (x - ae)$ und $CP = OP - OC = x - \frac{a}{e}$; daher $e \cdot CP = ex - a$, so hat man als Gleichung dieser unserer neuen Kurve

$$\sqrt{y^2 + (x - ae)^2} = (ex - a), \text{ oder}$$
$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2),$$

welche ganz mit der Gleichung der Ellipse übereinstimmt. Nur der Unterschied findet hier Statt, daß $e > 1$, folglich auch $x > a$ seyn muß.

Denken wir uns nun den Punkt F' ebenfalls mit M verbunden, nennen wir $MF = r$, und $MF' = r'$, so ist

$MF'^2 = MP^2 + PF'^2 = y^2 + (OF' + OP)^2$, daher also
$r'^2 = y^2 + (ae + x)^2$, während nach dem Früheren
$r^2 = y^2 + (x - ae)^2$; substituiren wir hier beiderseits den Werth von y^2, so hat man

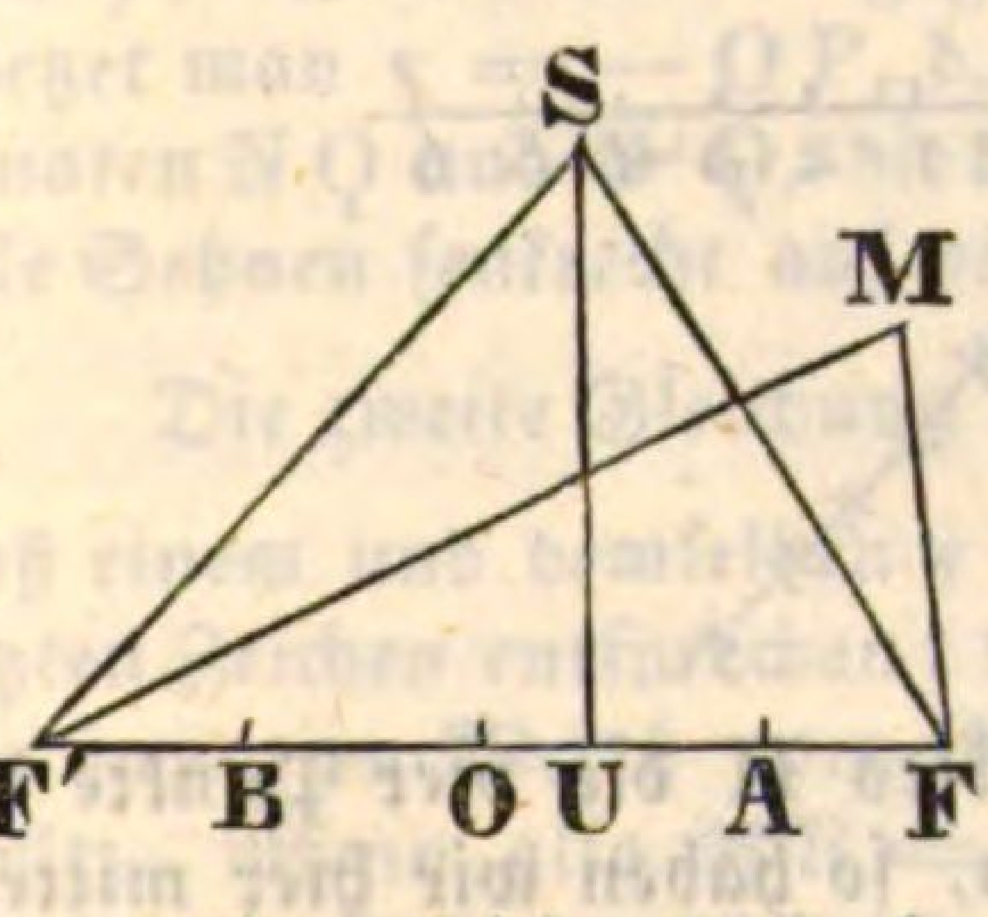
$$r^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2) + (x - ae)^2;$$
$$r'^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2) + (x + ae)^2; \text{ daher}$$
$$r^2 = (ex - a)^2;\ r'^2 = (ex + a)^2; \text{ daher}$$
$$r = ex - a;\ r' = ex + a;$$

woraus die wichtige Eigenschaft folgt: $r' - r = 2a$

Unsere krumme Linie hat also die Eigenschaft, daß stets der Unterschied der Entfernungen jedes Punktes derselben von den zwei Punkten (Brennpunkten) F und F' stets dieselbe ist, nämlich gleich AB. Man nennt diese krumme Linie die Hyperbel.

§ 330. Würden wir umgekehrt von der so eben ausgesprochenen Eigenschaft der Hyperbel unmittelbar ausgehen, so kämen wir zu derselben Gleichung.

Fig. 399.



Soll der Punkt M sich so bewegen, daß der Unterschied seiner Entfernungen von den Punkten F und F' stets derselbe sey, daß also bei jeder Lage des Punktes M stets $MF' - MF = u$ sey, so muß erstens, da $MF' - MF < FF'$ die beständige Größe $u < FF'$ seyn. Halbiren wir FF' in O, und machen $OA = OB = \frac{u}{2}$, so also, daß stets $MF' - MF = AB$ seyn wird, so sehen wir gleich, daß A und B Punkte der Hyperbel sind; denn $AF' - AF = AB$ und $BF - BF' = AB$, weil ja $AF = BF'$ ist. Ferners sehen wir, daß zwischen A und B weder ober- noch unterhalb ein Punkt der Hyperbel existiren kann; denn betrachten wir den Punkt S, verbinden wir ihn mit F und F' und fällen das Loth SU, so hat man: $F'S^2 - F'U^2 = FS^2 - FU^2$; daher
$F'S^2 - FS^2 = F'U^2 - FU^2$, oder

$$(F'S + FS)(F'S - FS) = (F'U + FU)(F'U - FU);$$

da nun $F'U + FU = FF'$, und

$$F'U - FU = (OF' + OU) - (OF - OU) = 2OU$$

ist, so hat man:

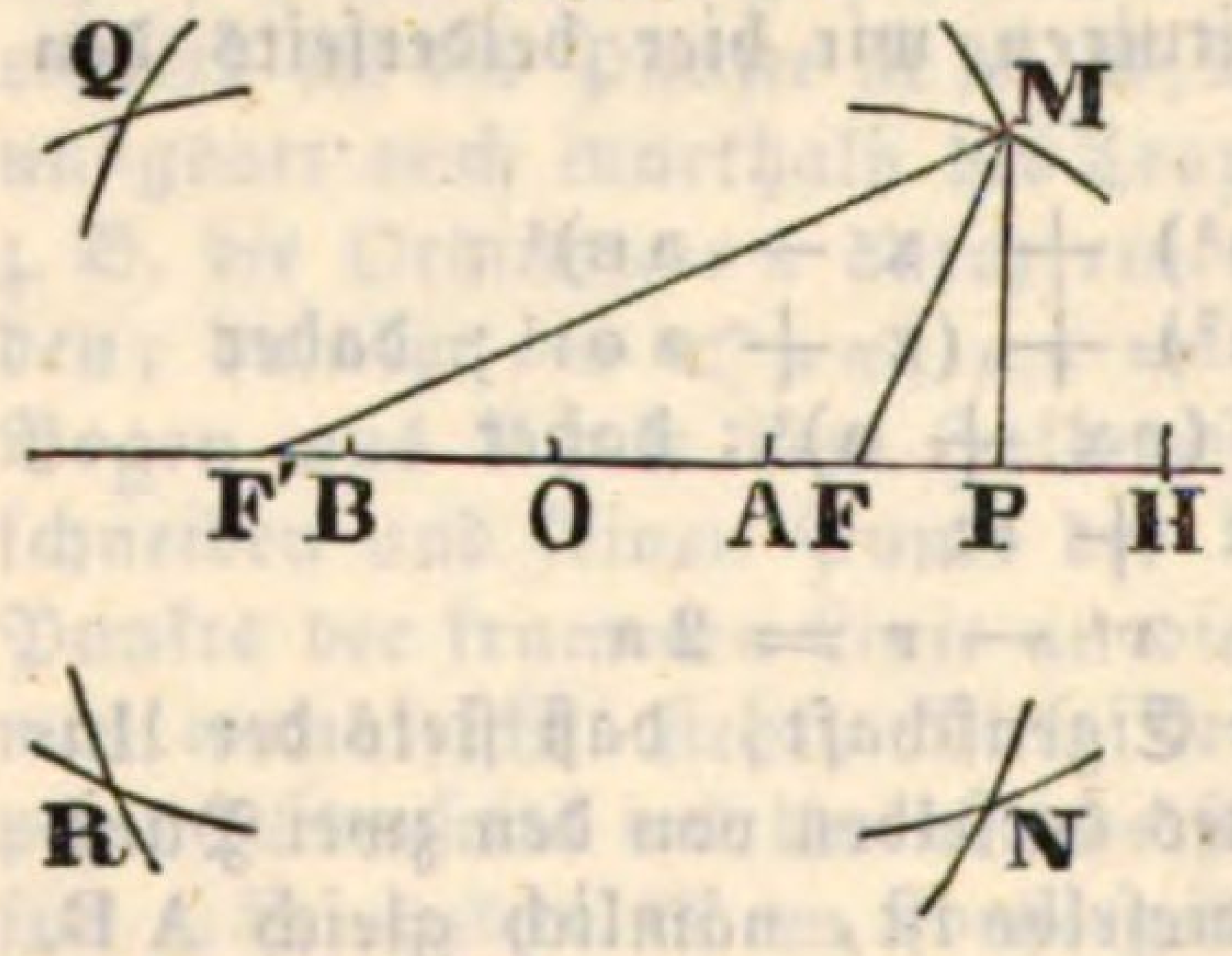
$$(F'S + FS)(F'S - FS) = FF' . 2OU;$$ da nun

$F'S + FS > FF'$ ist, so hat man durch Division $F'S - FS < 2OU$.

So lange nun U zwischen A und B ist, wird $2OU < AB$, daher $F'S - FS < AB$ seyn; daher, so lange der Fußpunkt des Lothes SU zwischen A und B ist, wird S kein Punkt der Hyperbel seyn.

Um nun einzelne Punkte der Hyperbel zu finden, nehme ich einen willkürlichen Punkt H außerhalb AB an.

Fig. 400.



Beschreibe nun aus dem Brennpunkte F' mit einem Halbmesser = BH einen Bogen MN, welchen ich mit einem Bogen aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmesser AH durchschneide in den Punkten M und N, so sind M und N Punkte der Hyperbel; denn $F'M = BH$, $FM = AH$; daher $F'M - FM = BH - AH = AB$. Man bekömmt die zwei Punkte Q und R, wenn man aus F mit BH und aus F' mit AH Kreisbögen beschreibt.

Fig. 401.



Wie wir nun hier mittelst des Punktes H die vier Punkte der Hyperbel M, N, Q und R bestimmt haben, so haben wir hier mittelst der Punkte 1, 2, 3, 4.... durch jeden vier Punkte der Hyperbel bekommen, welche, mit einander verbunden, die ganze krumme Linie zur Anschauung bringen.

§. 331. Die Gleichung der Hyperbel läßt noch eine andere Form zu, statt $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$ kann man

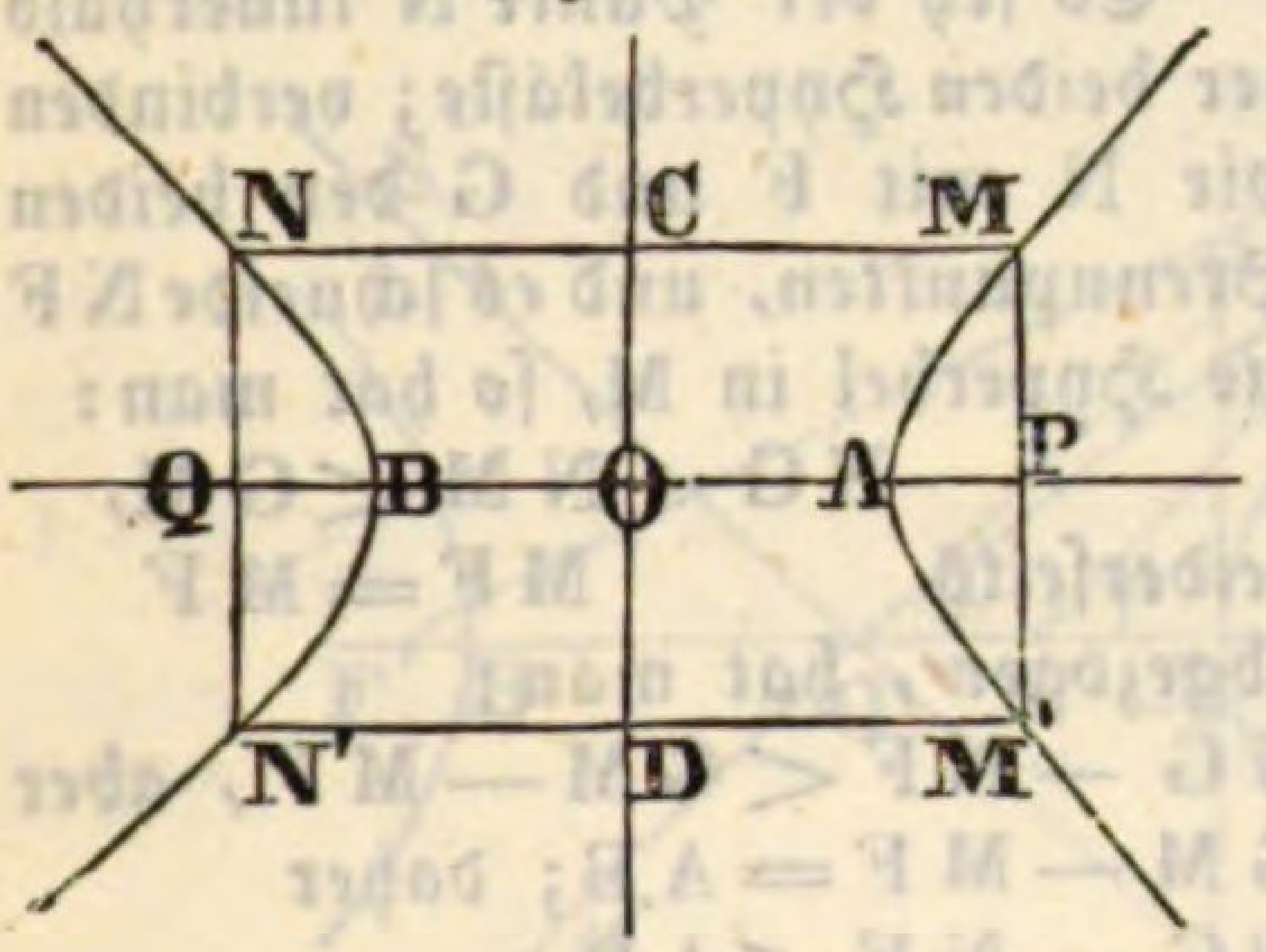
$$\frac{y^2}{e^2 - 1} = x^2 - a^2, \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1 \text{ setzen.}$$

Nennt man nun $a^2 (e^2 - 1) = b^2$, so hat man:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

als die Gleichung der Hyperbel. Wie bei der Ellipse, läßt sich auch bei der Hyperbel zeigen, daß jede durch den Anfangspunkt O durchgehende Sehne daselbst halbirt werde; daher dieser Punkt mit Recht der Mittelpunkt heißt.

Fig. 402.



Ziehet man durch O die Ordinatenachse (auf die Abscissenachse durch O gehende senkrechte Gerade), so wird jede mit der Abscissenachse gleichlaufende Gerade durch die Ordinatenachse, und jede mit der Ordinatenachse gleichlaufende durch die Abscissenachse halbiret. Die Gleichung nämlich der Hyperbel kann auch in folgende beide Formen gebracht werden:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}.$$

Die erste Gleichung lehrt uns, daß y so lange imaginär bleibt, als das $x < a$ ist, für $x = \pm a$ wird $y = o$ wodurch die zwei Scheitelpunkte A und B gegeben werden; bei A ist $x = + a$ und $y = o$, bei B, $x = - a$ und $y = o$; sobald $x > a$ ist, erhalten wir für jeden möglichen Werth von x zwei gleiche Werthe von y mit entgegengesetzten Zeicheu, d h. das eine y ist positiv, gehet nach oben, das andere y negativ, gehet nach unten.

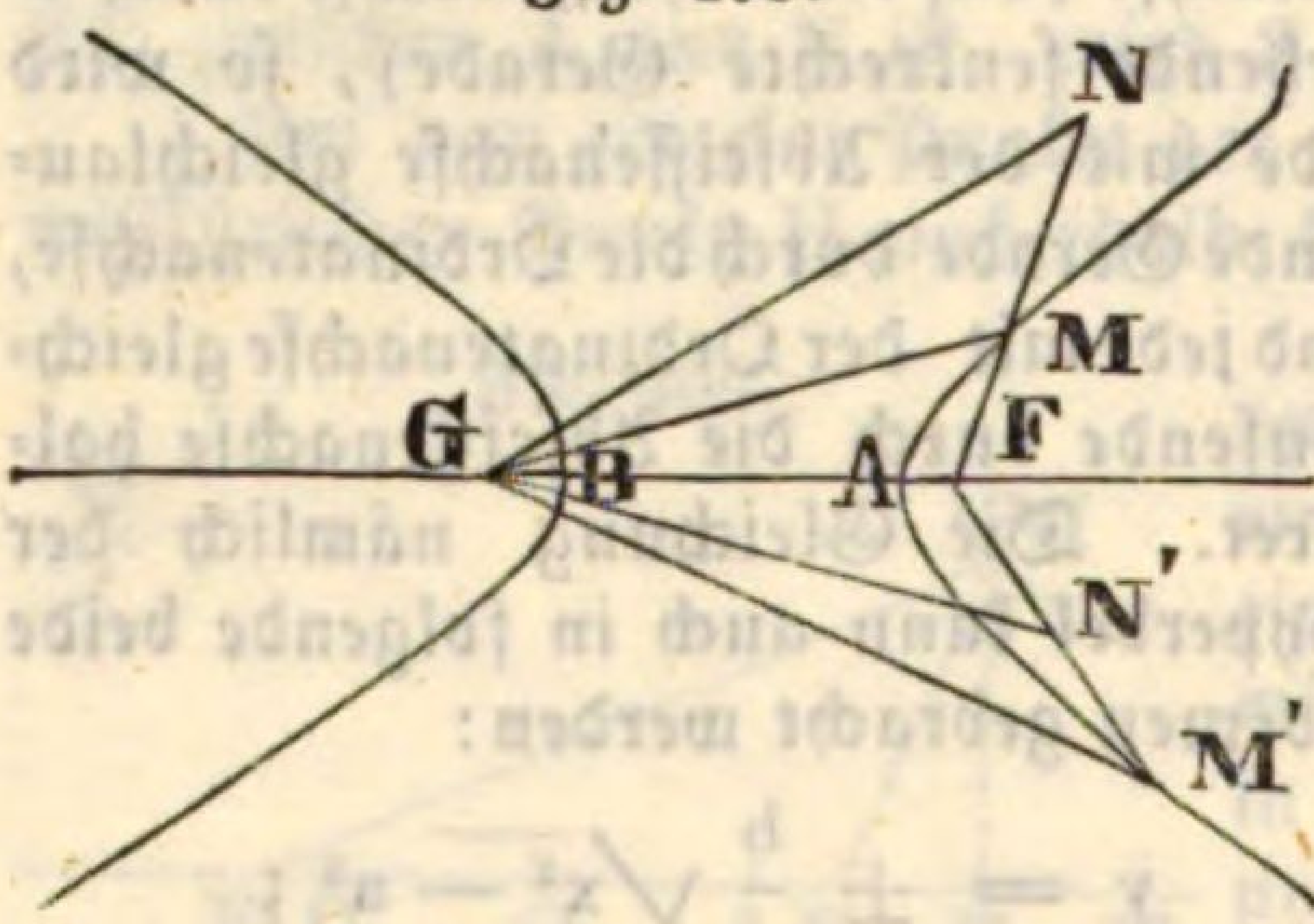
Nimmt man so $x = OP$, so bekommt man zwei gleiche Werthe von y, die wir in der Figur durch PM und PM' dargestellt haben. Setzet man $x = - OP$, d. i. gleich OQ, so erhält man für y die Ordinaten NQ und N'Q, die ebenfalls einander gleich sind. Man sieht so, alle Sehnen senkrecht auf die Abscissenachse werden durch diese halbiret.

Die zweite Gleichung hingegen $x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + y^2}$ zeigt uns, daß einem und demselben y zwei gleiche Werthe von x mit entgegengesetzten Zeichen entsprechen; man bekommt so für $y = MP$, $x = \pm OP$; der negative Werth von OP ist in der Zeichnung durch OQ dargestellt. Wenn also $MP = NQ$ ist, so muß daher $OQ = OP$ seyn. Weil nun $NQ = MP$ ist, so muß $MN \parallel PQ$ seyn, und weil PQ durch $CD \parallel MM'$ halbirt ist, so wird auch CD die Sehnen MN und M'N' halbiren.

Für $x = o$ wird $y = \pm b \sqrt{-1}$; hier bedeutet also b nicht wie bei der Ellipse eine zweite Halbachse; es hat eigentlich b keine geometrische Bedeutung. Man nennet häufig b die imaginäre Halbachse der Hyperbel.

§. 332. Jeder Punkt zwischen den beiden Hyperbelästen ist so beschaffen, daß der Unterschied seiner Entfernungen von den beiden Brennpunkten derselben kleiner ist, als die Achse der Hyperbel, und umgekehrt: für jeden Punkt außerhalb der beiden Hyperbeläste ist der Unterschied der Entfernungen von beiden Brennpunkten größer als die (reelle) Achse der Hyperbel.

Fig. 403.



Es sey der Punkt N innerhalb der beiden Hyperbeläste; verbinden wir N mit F und G den beiden Brennpunkten, und es schneide NF die Hyperbel in M, so hat man:

$$NG - NM < GM,$$

beiderseits $MF = MF$ abgezogen, hat man:

$$NG - NF < GM - MF, \text{ aber}$$
$$GM - MF = AB; \text{ daher}$$
$$NG - NF < AB.$$

Es sey N′ innerhalb des einen Astes, verbindet man N′ mit F und G, N′F verlängert schneide die Hyperbel in M′; verbindet man nun M′ mit G, so hat man:

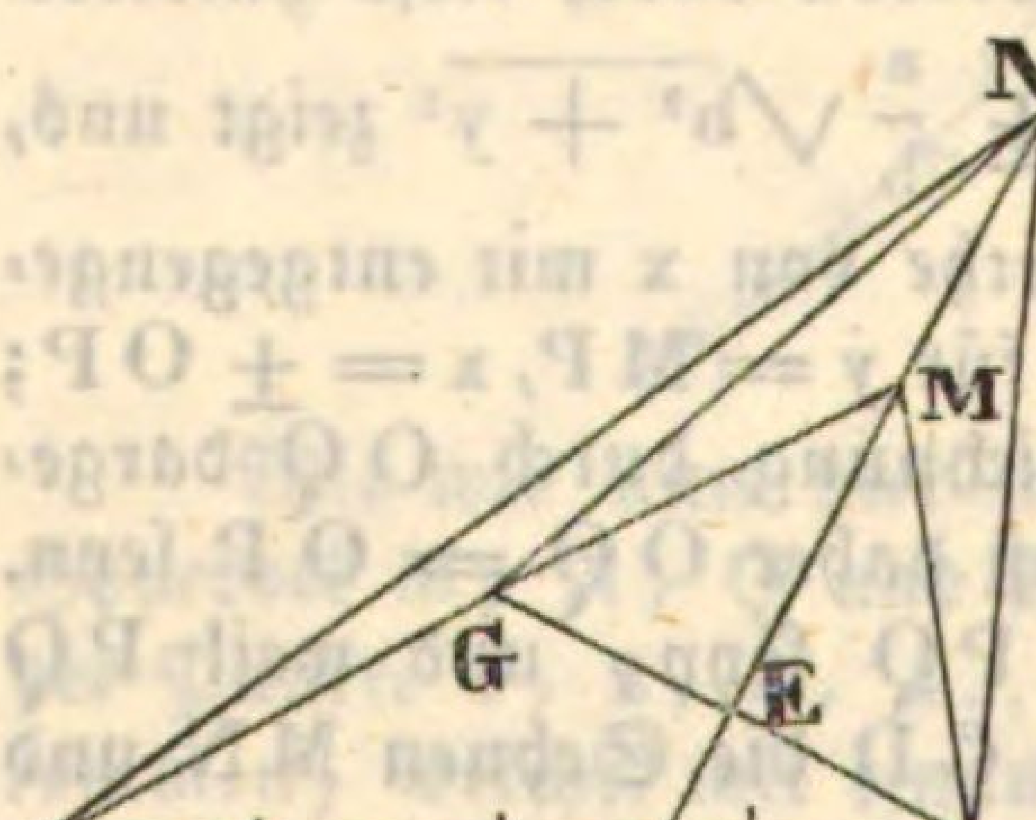
$$GM' - MN' < GN'$$
$$FN' = FN'$$
$$GM' - FM' < GN' - FN';$$

da aber $GM' - FM' = AB$ ist, so hat man:

$$GN' - FN' > AB.$$

§. 333. Das Vorhergehende bahnt uns den Weg zur Aufgabe: **in einem Punkte der Hyperbel zu derselben eine Berührungslinie zu ziehen**

Fig 404.



Es sey M ein Punkt der Hyperbel, die wir absichtlich nicht zeichnen, um nicht durch die Zeichnung dem Beweise vorzugreifen; F und F′ die Brennpunkte, A und B die Scheiteln; verbinden wir M mit F und F′, halbiren wir nun den Winkel FMF′ durch MT, so ist MT die verlangte Tangente. Denn macht man $GM = FM$, so wird die MT die GF in E halbiren, und nimmt man nun irgend einen andern Punkt der MT, z. B. N an, so wollen wir beweisen, daß er innerhalb der beiden Hyperbeläste liegt; denn leicht sieht man, daß

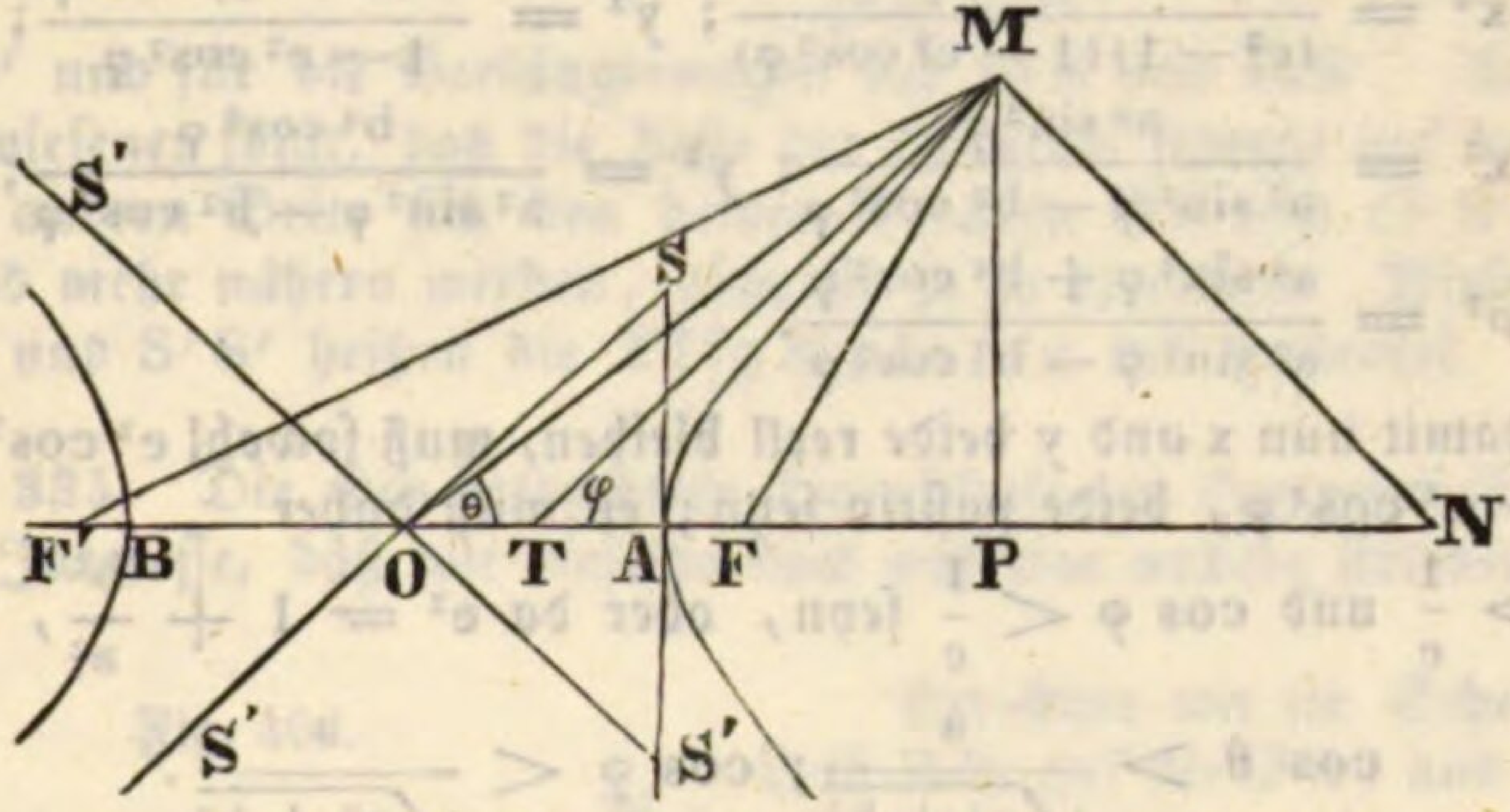
$NF = NG$, da nun $NF' - NG < FG$, d. h.

$NF' - NF < F'M - FM$ oder $NF' - NF < AB$,

so muß N so wie jeder andere Punkt außer dem Punkte M innerhalb der beiden Hyperbeläste liegen.

§. 334. Wir wollen nun die Größe des Winkels φ untersuchen, den MT mit der Achse bildet. Da in dem Dreiecke MFF' der Winkel F'MF durch MT halbiret wurde, so hat man:

Fig. 405.



$$F'T : FT = F'M : FM, \text{ d. h.}$$

$$(OF' + OT) : (OF - OT) = F'M : FM, \text{ d. h.}$$

$(ae + OT) : (ae - OT) = (ex + a) : (ex - a)$; daher

$$2ae : 2OT = 2ex : 2a; \text{ woraus}$$

$$OT = \frac{a^2}{x}, \text{ daher die Subtangente}$$

$$PT = OP - OT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x}; \text{ daher}$$

$$\tan\varphi = \frac{MP}{TP} = \frac{yx}{x^2 - a^2}; \text{ heißt nun}$$

$$MOP = \theta, \text{ so ist } \tan\theta = \frac{y}{x}; \text{ daher}$$

$\tan\varphi \cdot \tan\theta = \frac{y^2}{x^2 - a^2}$, da nun $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$ ist,

so hat man $\tan\varphi \cdot \tan\theta = e^2 - 1$, oder $\tan\varphi \cdot \tan\theta = \frac{b^2}{a^2}$;

daher $\tan\varphi = (e^2 - 1)\cot\theta$, woraus $\sin^2\varphi = \frac{b^4\cos^2\theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}$,

$$\cos^2\varphi = \frac{a^4\sin^2 . \theta}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta}, \quad \sin^2\theta = \frac{b^4\cos^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^2\varphi},$$

$$\cos^2\theta = \frac{a^4\sin^2\varphi}{a^4\sin^2\varphi + b^4\cos^4\varphi}.$$

Aus den Gleichungen $y = x\tan\theta$ und $y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2)$ erhält man:

$$x^2 = \frac{b^2\cos^2\theta}{e^2\cos^2\theta - 1}; \quad y^2 = \frac{b^2\sin^2\theta}{e^2\cos^2\theta - 1}, \text{ oder}$$

$$x^2 = \frac{a^2 b^2 \cos^2\theta}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}; \; y^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2\theta}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}.$$

Nennen wir $OM = \rho$, so hat man, da $\rho^2 = x^2 + y^2$ ist,

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2\theta - 1}, \text{ oder } \rho^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}.$$

Führet man hier statt θ den Winkel φ ein, so hat man:

$$x^2 = \frac{b^2 \sin^2\varphi}{(e^2-1)(1 - e^2 \cos^2\varphi)}; \; y^2 = \frac{b^2 (e^2-1) \cos^2\varphi}{1 - e^2 \cos^2\varphi};$$

$$x^2 = \frac{a^4 \sin^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi}; \; y^2 = \frac{b^4 \cos^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi};$$

$$\rho^2 = \frac{a^4 \sin^2\varphi + b^4 \cos^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi}.$$

Damit nun x und y beide reell bleiben, muß sowohl $e^2 \cos^2\theta - 1$, als $1 - e^2 \cos^2\varphi$, beide positiv seyn; es muß daher

$\cos\theta > \frac{1}{e}$ und $\cos\varphi < \frac{1}{e}$ seyn, oder da $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$, so muß

$$\cos\theta > \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \; \cos\varphi < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Beschreiben wir aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OF einen Kreisbogen, errichten im Scheitel A ein Loth, welches dieser Kreisbogen in S schneidet, so ist

$$AS^2 = OS^2 - OA^2 = a^2 e^2 - a^2 = a^2 (e^2 - 1) = b^2; \text{ daher}$$

$$AS = b, \; OS = \sqrt{a^2+b^2}; \; \cos SOA = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Sollen also x und y möglich bleiben, so muß stets

$$\theta < SOA \text{ und } \varphi > SOA \text{ seyn.}$$

Drücken wir aber nach den obigen Formeln θ und φ durch x aus, so hat man:

$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{e^2 x^2 - b^2} = \frac{1}{e^2 - \frac{b^2}{x^2}};$$

$$\cos^2\varphi = \frac{(e^2-1)x^2 - b^2}{(e^2-1)e^2 x^2 - b^2} = \frac{1 - \frac{b^2}{(e^2-1)x^2}}{e^2 - \frac{b^2}{(e^2-1)x^2}};$$

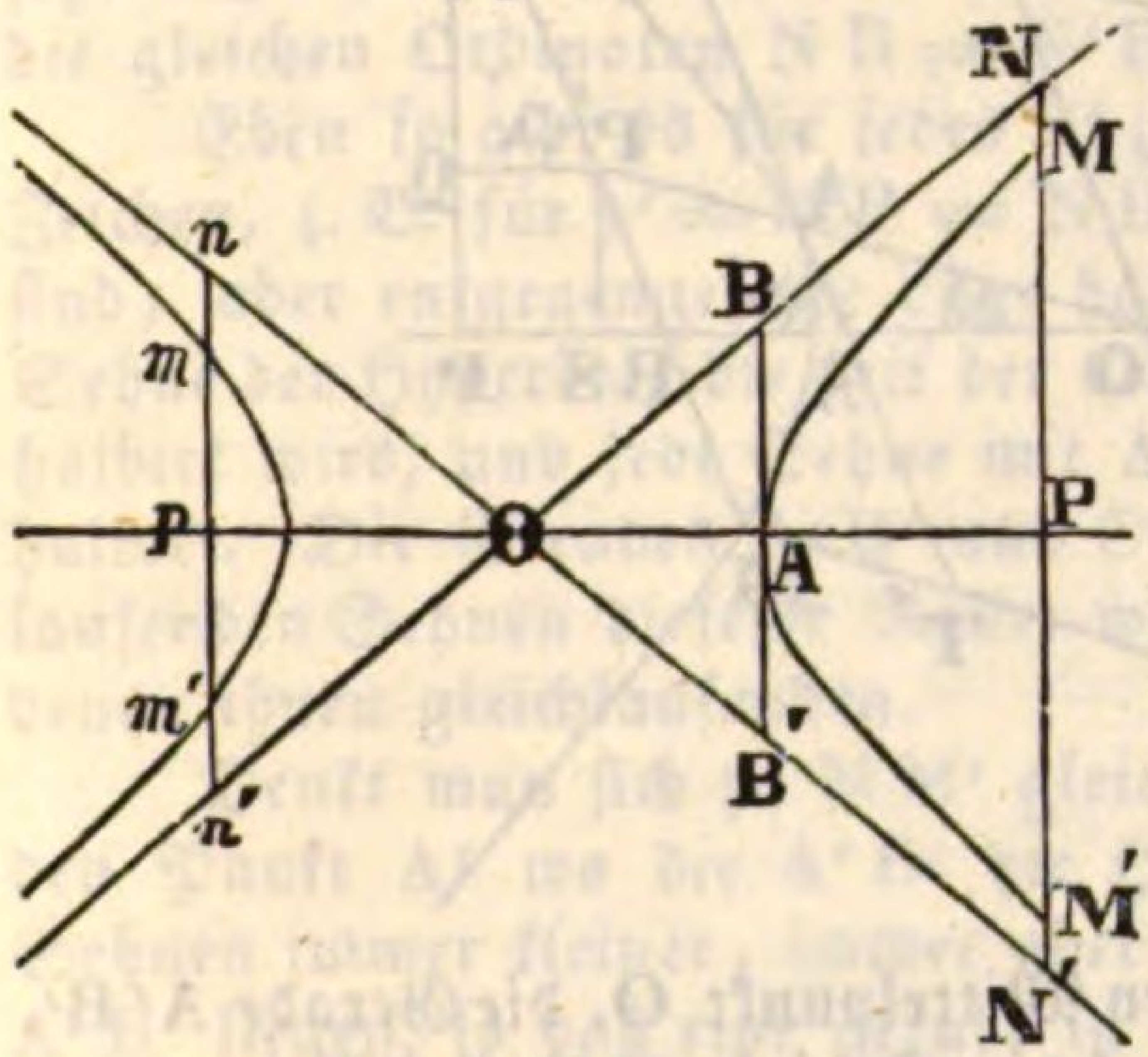
so sehen wir, je größer man x annimmt, d. h. je entfernter vom Mittelpunkte der Berührungspunkt der Hyperbel ist, desto kleiner sind die Ausdrücke $\frac{b^2}{x^2}$ und $\frac{b^2}{(e^2-1)x^2}$, und desto mehr und mehr wird sich $\cos^2\theta$ sowohl, als $\cos^2\varphi$ dem $\frac{1}{e^2}$ nähern, d. h. mit Rücksicht auf unsere Figur, je weiter M in der Hyperbel hinausrückt, desto mehr wird sich sowohl die Berührende MT, als der Radius OM der Geraden OS nähern, ohne sie je zu erreichen, so weit auch M angenommen wird. Die

Gerade OS ist also die Grenze, der sich alle Berührenden desto mehr nähern, je weiter der Berührungspunkt angenommen wird, und zugleich unter derselben Bedingung die Grenze aller Radien.

Da wir es hier nur mit dem Quadrate von $\cos\varphi$ und $\cos\theta$, und x und y zu thun haben, so gelten dieselben Folgerungen für $-\varphi$ und $-\theta$, für $180-\varphi$ und $180-\theta$, und da, wenn die AS um $AS' = AS$ verlängert wird, auch $\cos SAO = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, so gilt dasselbe auch für OS' und für die Verlängerungen der OS und OS'. Aus dem hier Bewiesenen folgt, daß die Aeste der Hyperbel sowohl auf der einen als der andern Seite sich den beiden Geraden OS und O'S' immer mehr und mehr nähern werden, ohne sie je zu erreichen. Diese Geraden SS und S'S' heißen die Assymptoten der Hyperbel.

§. 335. Die eben betrachtete Eigenschaft der Hyperbel ist von so großem Interesse, daß wir dieselbe noch auf eine andere Art betrachten wollen.

Fig. 406.



Errichten wir im Scheitel ein Loth BB' auf die OA, und machen wir $AB = AB' = b$, verbinden O mit B und B', und verlängern beide Gerade über den Mittelpunkt hinaus, so wollen wir nachweisen, daß beide Aeste der Hyperbeln sich diesen zwei Geraden immer mehr und mehr nähern werden, je weiter wir vom Mittelpunkte weggehen, ohne sie aber je zu erreichen.

Nehmen wir einen Punkt M der Hyperbel, fällen wir die Ordinate MP, und verlängern dieselbe, bis sie die BO in N trifft, so hat man nach der Gleichung der Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{OP^2}{OA^2} - \frac{MP^2}{AB^2} = 1; \text{ da aber}$$

$$\frac{NP}{AB} = \frac{OP}{OA}; \text{ daher } \frac{NP^2}{AB^2} = \frac{OP^2}{AO^2} \text{ ist, so hat man}$$

$$\frac{NP^2}{AB^2} - \frac{MP^2}{AB^2} = 1; \text{ daher}$$

$$NP^2 - MP^2 = AB^2, \text{ folglich}$$

$$(NP - MP)(NP + MP) = AB^2; \text{ daher}$$

$$NP - MP = \frac{AB^2}{NP + MP}, \text{ d. h.}$$

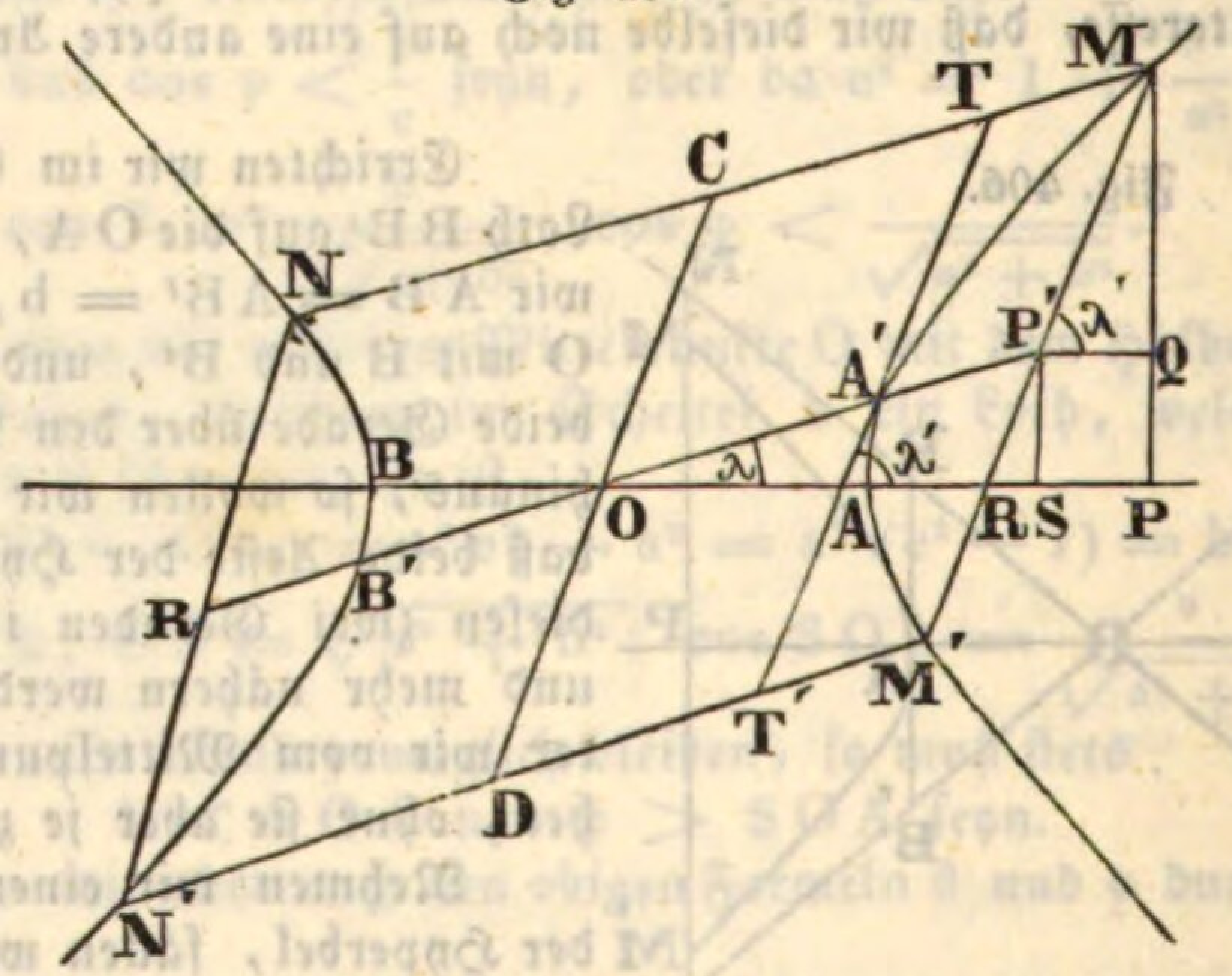
$$MN = \frac{AB^2}{NP + MP}.$$

Je weiter nun der Punkt M hinausgedacht wird, desto größer wird sowohl MP als NP, desto größer daher ihre Summe MP + NP, daher desto kleiner der Werth des letzten Bruches, daher desto kleiner der Abstand MN; so weit aber auch M ist so wird doch der Werth dieses Bruches nie gleich Null, daher M nie mit N, die Hyperbel nie mit OB zusammentreffen.

Was wir hier bei M und N betrachtet haben, das läßt sich mit derselben Schlußfolgerung bei M′ und N′, m und n, m′ und n′ u. s. w. behaupten; daher OB und OB′ Assymptoten der Hyperbel.

§. 336 So wie wir bei der Ellipse die Stellung zweier schiefwinklichten Coordinatenachsen ausfindig machten, wo in der Gleichung bloß die Quadrate der schiefen Coordinaten vorkommen, so wollen wir ein Aehnliches bei der Hyperbel versuchen.

Fig. 407.



Denken wir uns daher durch den Mittelpunkt O, die Gerade A′B′, und durch den Punkt M der Hyperbel die Schiefe MP′ ∥ CD gezogen, und es sey A′B′ die Achse der x′ und CD die der y′, so daß OP′ = x′ und MP′ = y′ ist; es mache ferner M′P′ mit der Achse AB den Winkel λ′, während A′B′ mit derselben AB den Winkel λ bilde. Fällen wir nun von P′ das Loth P′Q auf MP und P′S auf AB, so hat man, wenn MP senkrecht auf AB ist:

$$x = OP = OS + SP = OS + P'Q = x' \cos\lambda + y' \cos\lambda',$$
$$y = MP = QP + MQ = P'S + MQ = x' \sin\lambda + y' \sin\lambda'.$$

Da nun nach dem Vorhergehenden $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist, so hat man:

$$\frac{(x' \cos\lambda + y' \cos\lambda')^2}{a^2} - \frac{(x' \sin\lambda + y' \sin\lambda')^2}{b^2} = 1, \text{ oder}$$

$$\frac{(b^2 \cos^2\lambda - a \sin^2\lambda)\, x'^2}{a^2 b^2} + 2\left(\frac{b^2 \cos\lambda \cos\lambda' - a^2 \sin\lambda \sin\lambda'}{a^2 b^2}\right) x' y'$$
$$- \frac{(a \sin^2\lambda' - b^2 \cos^2\lambda')}{a^2 b^2}\, y'^2 = 1.$$

Da die Winkel λ und λ' von unserer Wahl abhängen, so können wir diese zwei Winkel so aussuchen, daß

$$b^2 \cos\lambda \cos\lambda' - a^2 \sin\lambda \sin\lambda' = 0 \text{ ist}$$

$$\text{d. h. } \tan\lambda \tan\lambda' = \frac{b^2}{a^2} \ (1).$$

Nennt man nun der Kürze halber

$$\frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\lambda - a^2 \sin^2\lambda} = a'^2 ; \ \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\lambda' - b^2 \cos^2\lambda'} = b'^2$$

so hat die Hyperbel rücksichtlich der schiefen nach der Bedingung (1) ausgesuchten Coordinatenachsen A′B′ und CD folgende einfache Gleichung:

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 1 \ (2)$$

die mit der Gleichung für die rechtwinklichten Achsen ganz gleiche Gestalt hat. Aus der Gleichung (2) folgt:

$$y' = \pm \frac{b'}{a'} \sqrt{x'^2 - a'^2} ; \ x' = \pm \frac{a'}{b'} \sqrt{y'^2 + b'^2}.$$

Wir sehen also jedes x' z. B. OP gibt zwei gleiche y' mit entgegengesetzten Zeichen, d. h. MP′ = M′P′, und eben so für die Abscisse OR die gleichen Ordinaten NR = N′R.

Eben so gibt es für jedes y' zwei gleiche x' mit entgegengesetzten Zeichen, z. B. für y' = MP = NR hat man OP und OR die gleich sind, aber entgegengesetzte Lage haben. Daraus sehen wir, daß jede Sehne der Hyperbel, die mit der CD gleichlaufend ist, durch die A′B′ halbirt wird, und jede Sehne mit A′B′ gleichlaufend, wird durch CD halbirt. Die Geraden A′B′ und CD spielen also zu den ihnen gleichlaufenden Sehnen dieselbe Rolle, wie die Hauptachsen der Hyperbel zu denen ihnen gleichlaufenden.

Denkt man sich zu MM′ gleichlaufende Gerade immer näher an den Punkt A′ wo die A′B′ die Hyperbel schneidet, so werden diese Sehnen immer kleiner, immer aber wird ihr Halbirungspunkt in der A′B′ liegen, so daß eine gerade in A′ gleichlaufend mit MM′ eine berührende der Hyperbel wird, wir sehen also somit der Winkel λ' ist derselbe, den wir früher durch φ, und λ der, den wir früher durch θ ausgedrückt haben, und die in (1) ausgedrückte Bedingung ist die bekannte Gleichung $\tan\varphi \tan\theta = \frac{b^2}{a^2}$, und wir sehen daher Sehnen der Hyperbel die gleichlaufend sind zu einer berührenden, werden durch Gerade halbirt, die gleichlaufend sind zum Radius des Berührungspunktes. Auch hier heißen a' und b' die conjugirten Achsen, wobei hier ebenfalls nur die erstere reell ist, für dieselben hat man folgende Gleichung

$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta} ; \ b'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\varphi - b^2 \cos^2\varphi}.$$

Führt man hier nach der Bedingung $\tan\varphi \tan\theta = \frac{b^2}{a^2}$ statt φ den Winkel θ ein in dem Werthe für b'^2, so hat man:

$$b'^2 = \frac{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}.$$

daher $a'^2 - b'^2 = \dfrac{a^2 b^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) - a^4 \sin^2\theta - b^4 \cos^2\theta}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}$

$$= \frac{a^2 (b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta) - b^2 (b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta)}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}$$

somit $a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2$.

Hier hat a' seine geometrische Bedeutung, es ist nämlich $OA, = OB' = a'$, b' spielt eine ähnliche Rolle wie die imaginäre Halbachse b bei den rechtwinklichten Coordinaten.

Den Winkel $O A' A = \lambda' - \lambda = \varphi - \theta$ wollen wir nun durch a, b, a', b' bestimmen. Wir haben

$\sin(\varphi - \theta) = \sin\varphi \cos\theta - \cos\varphi . \sin\theta$; drücken wir hier φ durch θ aus, so hat man:

$$\sin(\varphi - \theta) = \frac{b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta}{\sqrt{a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta}}.$$

Nun ist vermöge der so eben entwickelten Gleichungen

$$b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta = \frac{a^2 b^2}{a'^2};$$

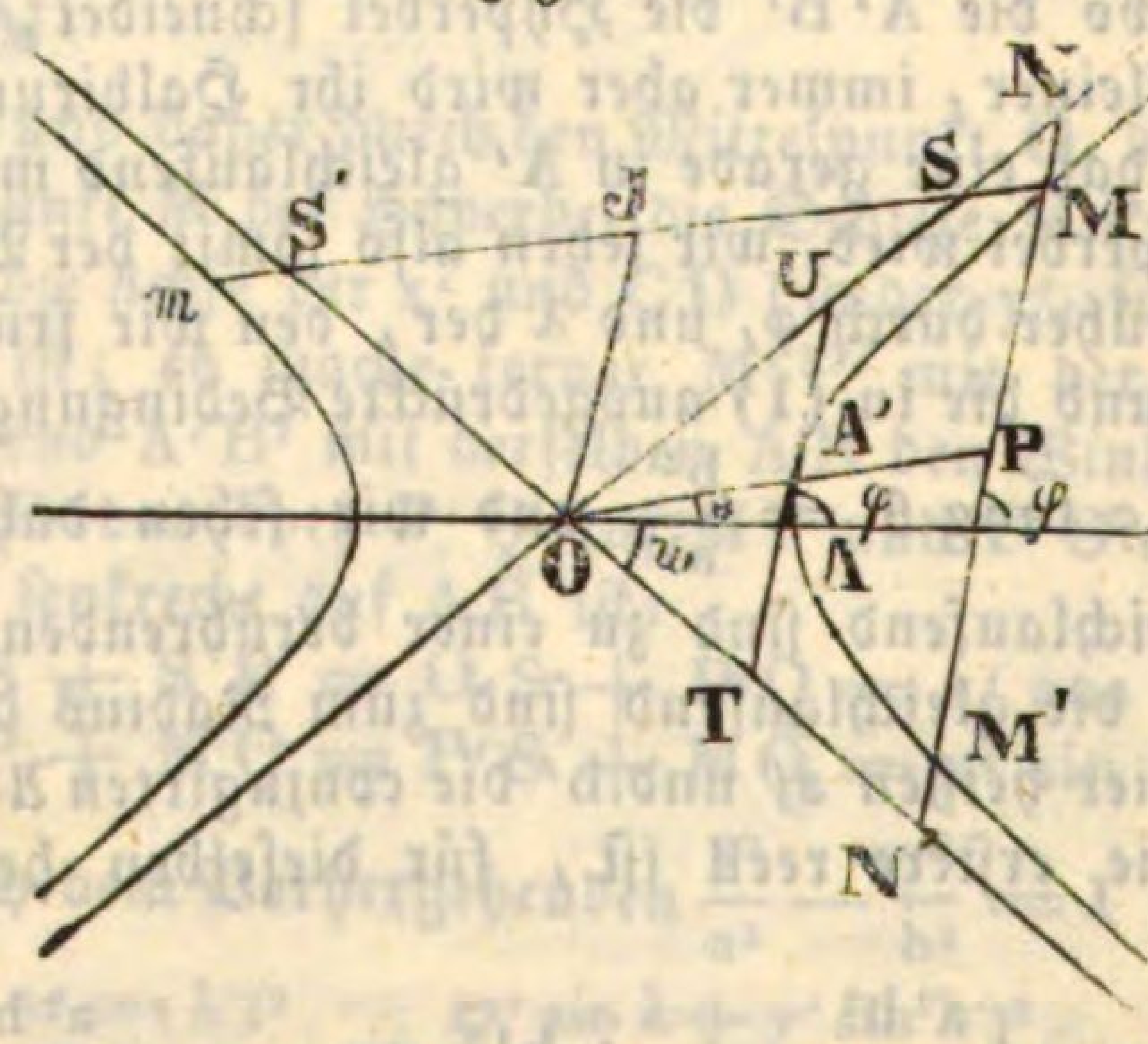
$$a^4 \sin^2\theta + b^4 \cos^2\theta = b'^2 (b^2 \cos^2\theta - a^2 \sin^2\theta) = \frac{a^2 b^2 b'^2}{a'^2};$$

daher $\sin(\varphi - \theta) = \dfrac{a^2 b^2}{a'^2} \cdot \dfrac{a'}{a b b'} = \dfrac{a b}{a' b'}$,

daher $a' b' \sin(\varphi - \theta) = a b$.

§. 337. Wir wollen nun die geometrische Bedeutung von b' und der so eben entwickelten Gleichung suchen. Zu diesem Behufe wollen wir uns durch den Mittelpunkt die zwei Assymptoten legen.

Fig. 408.



Ich ziehe die OA', welche mit der Achse OA den Winkel θ bilde; um nun durch A' eine Berührende zur Hyperbel zu ziehen, ziehe ich irgend eine Sehne $Mm \parallel OA'$, halbire Mm in I, verbinde I mit O, und ziehe durch A' die UT gleichlaufend mit IO, denn alle mit IO

gleichlaufenden Sehnen, z. B. MM′ werden durch OA′ halbirt, z. B. MM′ in P, im Punkte A′ fallen die beiden Hälften einer Sehne zusammen, daher wird UT eine Berührende der Hyperbel sein: nennt man den Winkel der UT mit AO nun φ, so wissen wir, daß

$$\tang \varphi \,.\, \tang \theta = \frac{b^2}{a^2};$$

die Sehne MM′ schneide die beiden Assymptoten in N und N′. Man hat nun

$$\frac{PN}{OP} = \frac{\sin . NOP}{\sin . ONP}; \quad \frac{PN}{OP} = \frac{\sin N'OP}{\sin ON'P};$$

nun ist $NOP = \omega - \theta$ wenn man den Winkel $NOA = N'OA = \omega$ nennet

$ONP = \varphi - \omega$, $N'OP = \omega + \theta$; $ON'P = 180 - (\varphi + \omega)$, daher

$$\frac{PN}{OP} = \frac{\sin(\omega - \theta)}{\sin(\varphi - \omega)}; \quad \frac{PN'}{OP} = \frac{\sin(\omega + \theta)}{\sin(\omega + \varphi)}.$$

Nun ist $\cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; $\sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\sin(\omega - \theta) = \frac{b \cos \theta - a \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin(\varphi - \omega) = \frac{a \sin \varphi - b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + b}}$$

$$\sin(\omega + \theta) = \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin(\omega + \varphi) = \frac{a \sin \varphi + b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{PN}{OP} = \frac{b \cos \theta - a \sin \theta}{a \sin \varphi - b \cos \varphi}; \quad \frac{PN}{OP} = \frac{b \cos \theta + a \sin \theta}{a \sin \varphi + b \cos \varphi} \quad (1).$$

Setzen wir hier statt $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ ihre Werthe durch θ ausgedrückt, so erhält man:

$$\frac{PN}{OP} = \frac{(b \cos \theta - a \sin \theta) . \sqrt{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}}{a b^2 \cos \theta - a^2 b \sin \theta} = \frac{\sqrt{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}}{a b}$$

$$\frac{PN'}{OP} = \frac{(b \cos \theta + a \sin \theta) . \sqrt{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}}{a b^2 \cos \theta + a^2 b \sin \theta} = \frac{\sqrt{a^4 \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta}}{a b}$$

daher $\frac{PN}{OP} = \frac{PN'}{OP}$ daher also $PN = PN'$.

Da die Richtung der Sehne MM′ eine willkürliche ist, so wird als wenn die Richtung der Gerade NN′ was immer für eine ist, $PN = PN'$ und da dem früheren zu Folge $PM = PM'$ ist, so wird somit $MN = M'N'$ sein, d. h.: **Wenn man bei der Hyperbel eine Gerade in was immer für eine Richtung ziehet, so werden die Stücke derselben zwischen den Assymptoten und der Hyperbel einander gleich seyn.** Schiebt man NN′ fortwährend gleichlaufend mit sich selbst gegen O, so kömmt NN′ auch in die Lage UT und hier muß dem Vorhergehenden zu Folge $A'U = A'T$. **Zieht man zur Hyperbel eine Berührende, so wird das Stück der Berührenden zwischen den Assymptoten im Berührungspunkte halbirt.**

Ganz auf dieselbe Art läßt sich zeigen, daß auch $MS = mS'$ sey, denn $IS'O = POT = \omega + \theta$, $IOS' = OTA' = 180 - (\omega + \varphi)$, $IOS =$

$OUA' = \varphi - \omega$, $ISO = NOP = \omega - \theta$, woraus $\frac{IS}{OI} = \frac{\sin(\varphi - \omega)}{\sin(\omega - \theta)}$;
$\frac{IS'}{IO} = \frac{\sin(\omega + \varphi)}{\sin(\omega + \theta)}$, daher vermöge des so eben Entwickelten $\frac{IS}{OI} = \frac{IS'}{IO}$
und $IS = IS'$, und da $Im = IM$, so hat man $mS' = SM$. Durch die Multiplikation der Gleichungen (1) erhält man:

$\frac{PN^2}{OP^2} = \frac{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}$; da $\frac{PN^2}{OP^2} = \frac{A'U^2}{A'O^2}$, so hat man

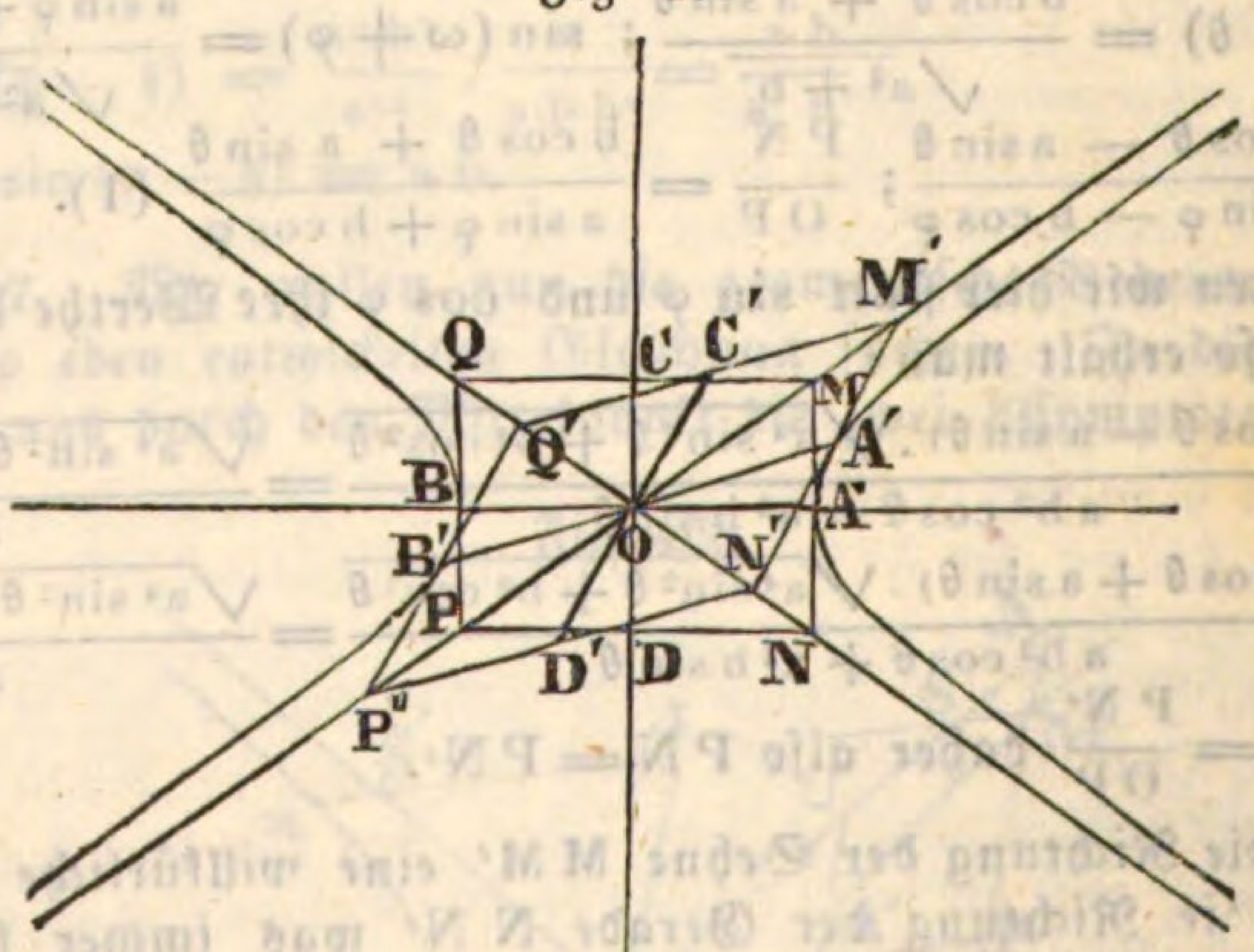
$$\frac{A'U^2}{a'^2} = \frac{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}, \text{ woraus}$$

$$A'U^2 = \frac{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \theta - a^2 \sin^2 \theta},$$

daher $A'U^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}$, daher also $A'U^2 = b'^2$.

Das $b' = UA' = A'T$ können wir also als die zu $a' = OA'$ conjugirte Halbachse ansehen. Wir sehen also, daß die conjugirten Halbachsen a' und b' zu den Assymptoten SN und $S'N'$ in ähnlicher Beziehung stehen, wie die Hauptachsen a und b.

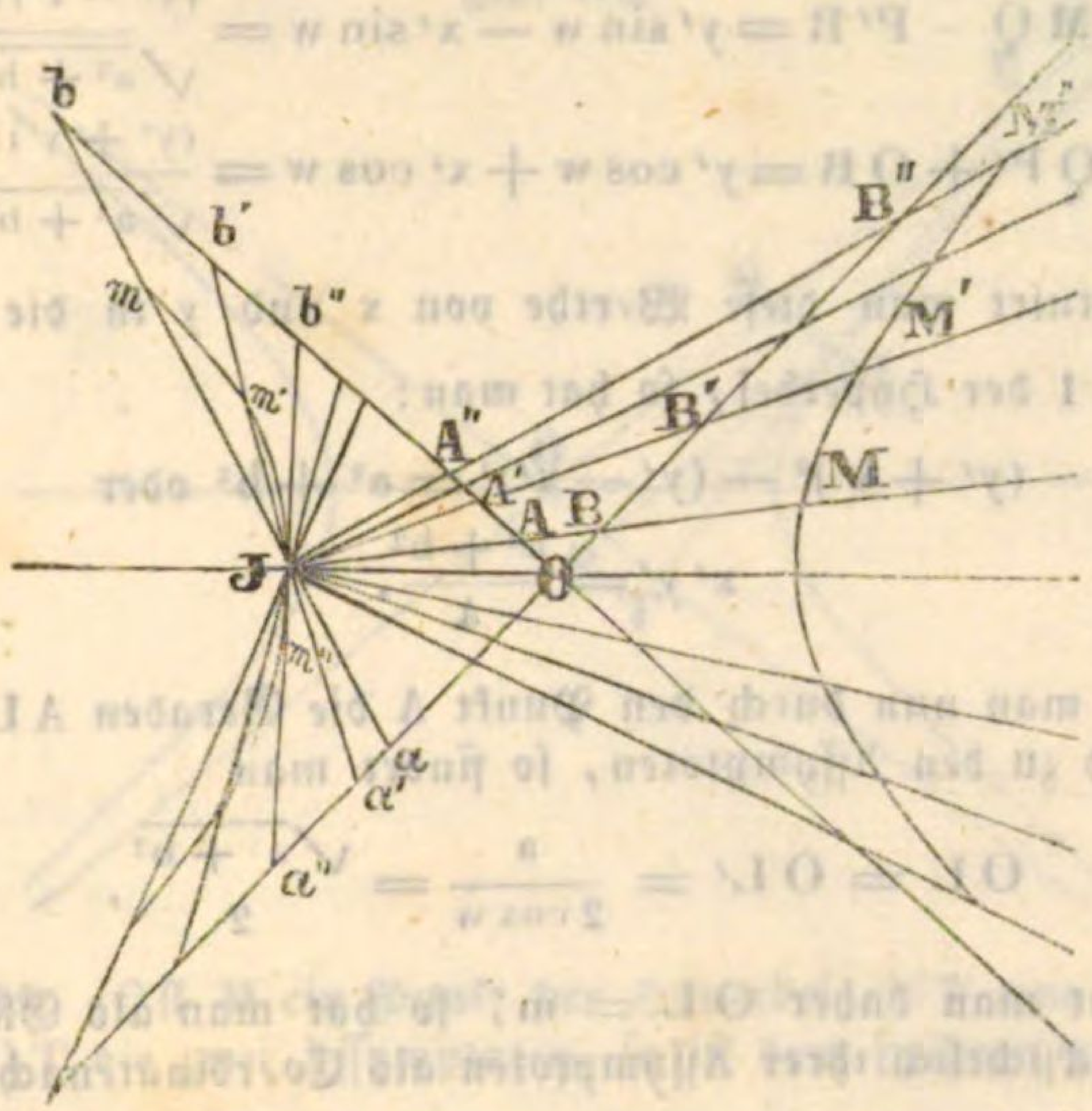
Fig. 409.



Die früher bewiesene Gleichung $ab = a'b' \sin(\varphi - \theta)$ können wir nun auch geometrisch deuten, denn ist $OA' = a'$; $OC' = b'$, so ist $C'OA' = \varphi - \theta$, daher das Gleicheck $A'OC'M' = a'b' \sin(\varphi - \theta)$. Errichtet man also das Rechteck $MNPQ$ mittelst der Hauptachse AB und CD, und das Schiefeck $M'N'P'Q'$ mittelst der conjugirten Achsen $A'B'$ und $C'D'$, so hat man $MNPQ = M'N'P'Q'$.

Die in diesem Paragraphe erwiesene Eigenschaft der Hyperbel gibt ein leichtes Hülfsmittel ab, wenn ein Punkt der Hyperbel und die zwei Assymptoten gegeben sind, die Hyperbel selbst zu verzeichnen. Es sei zu diesem Behufe

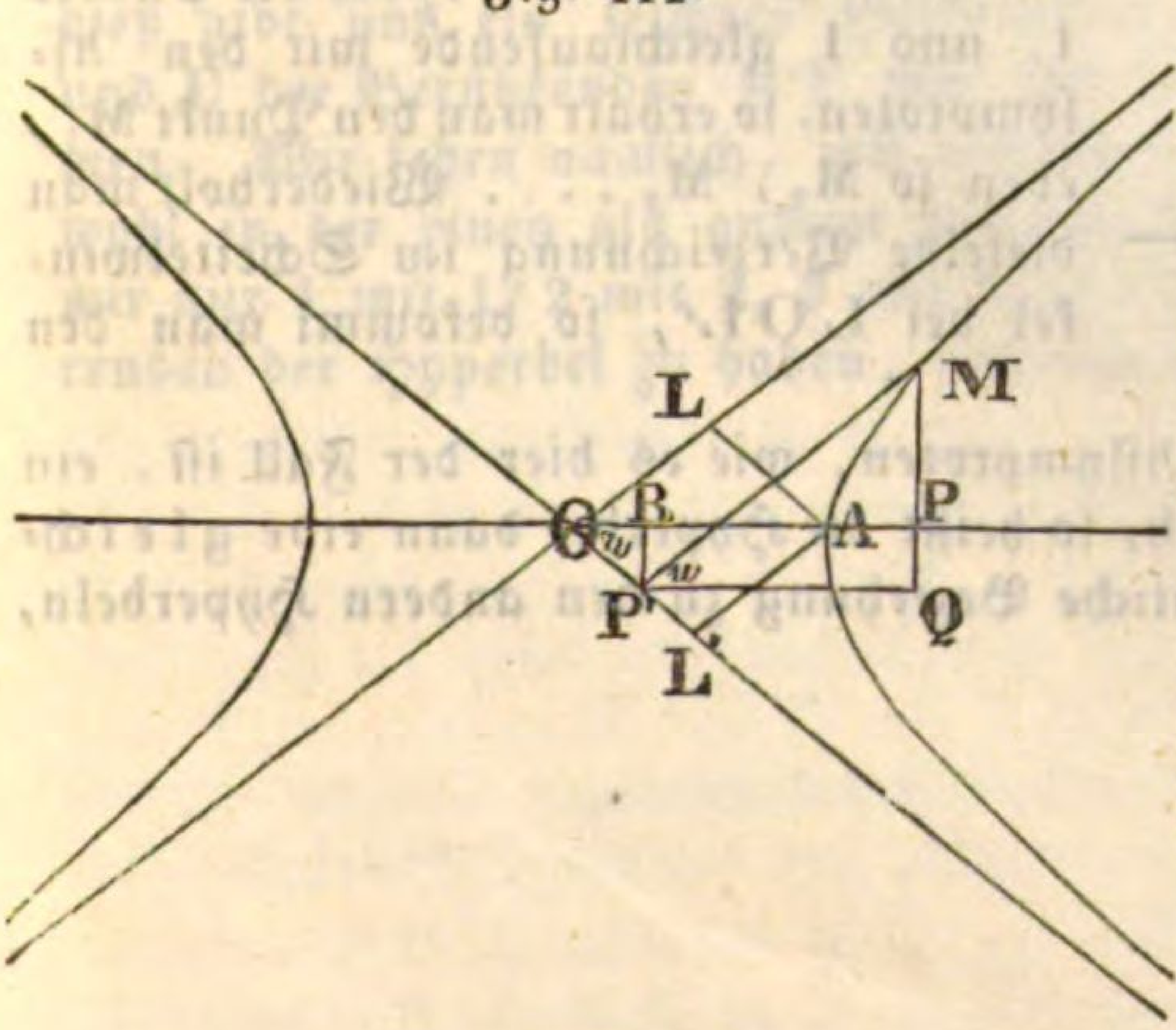
Fig. 410.



I ein Punkt der Hyperbel, O A und O B die beiden Assymptoten, ich ziehe durch I eine willkürliche Gerade I B, welche die nähere Assymptote in A, die entferntere in B schneidet, ich mache I A = B M, so ist M ein Punkt des andern Hyperbelastes, mache ich eben so I A′ = B′M′, I A″ = B″M″ u. s. w., so sind M′, M″ — Punkte der Hyperbel, mache ich eben so I a = b m, I a′ = b′ m′ u. s. w., so sind auch m, m′, m″ ... Punkte der Hyperbel.

§. 338. Wir wollen nun die zwei Assymptoten als Coordinatenachsen wählen.

Fig. 411.



Es sei nun M ein Punkt der Hyperbel, A eine ihrer Scheitel, O L und O L, ihre Assymptoten, $x = OP$ und $y = MP$ die rechtwinklichten Coordinaten des Punktes M rücksichtlich der Hauptachsen, $MP' = y' \parallel OL$ und $OP' = x'$ rücksichtlich der Assymptoten als Coordinatenachsen. Man fällt $P'Q \perp MP$ und $P'R \perp OP$, so ist

$$MP'Q = \omega = LOR$$
$$= L'OR,$$

daher hat man:

$$y = MP = MQ - P'R = y' \sin w - x' \sin w = \frac{(y'-x')b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$x = OP = QP' + OR = y' \cos w + x' \cos w = \frac{(y'+x')a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Substituirt man diese Werthe von x und y in die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ der Hyperbel, so hat man:

$$(y'+x')^2 - (y'-x')^2 = a^2 + b^2 \text{ oder}$$

$$x'y' = \frac{a^2+b^2}{4}.$$

Ziehet man nun durch den Punkt A die Geraden AL und AL' gleichlaufend zu den Assymptoten, so findet man

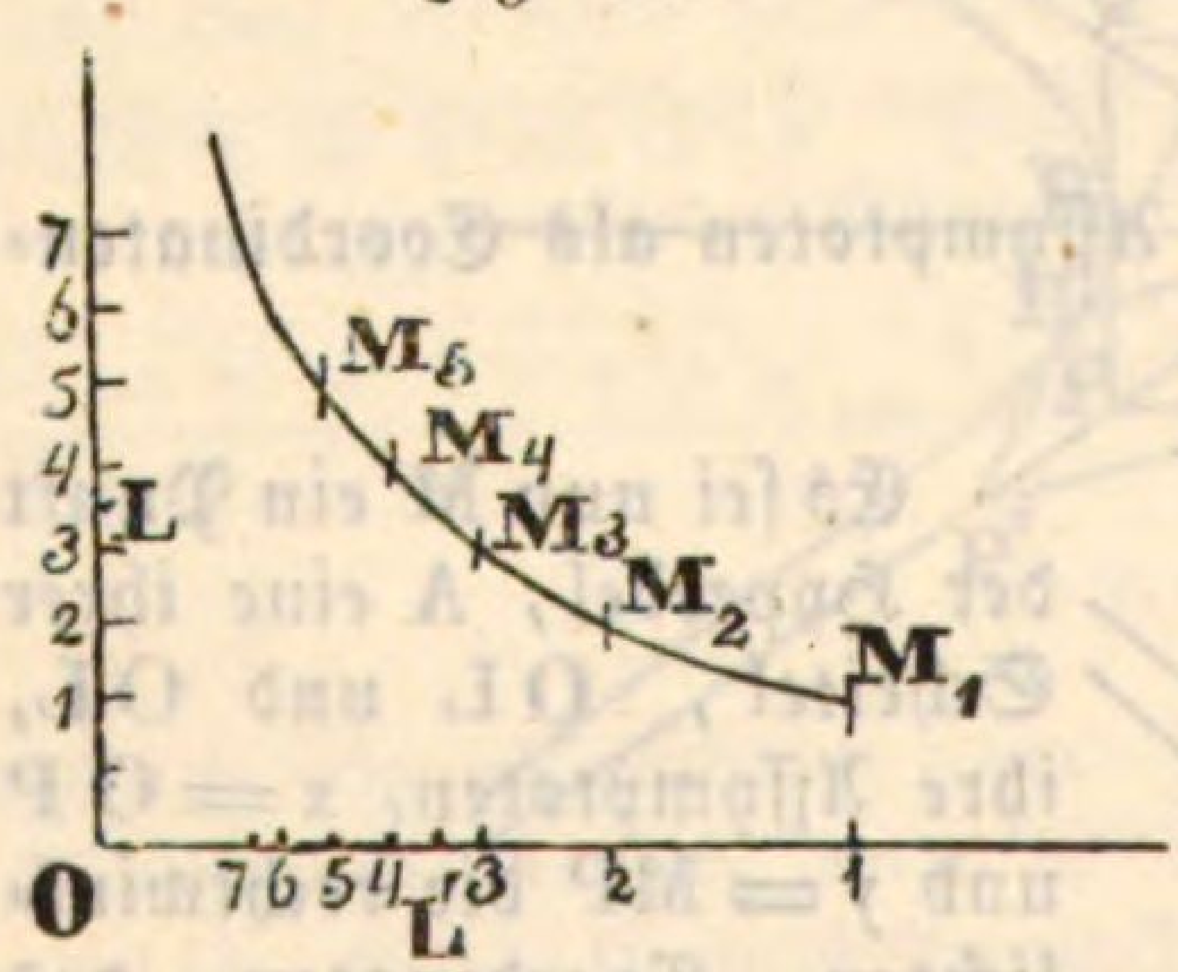
$$OL = OL' = \frac{a}{2\cos w} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}.$$

Nimmt man daher OL = m, so hat man als Gleichung der Hyperbel rücksichtlich ihrer Assymptoten als Coordinatenachsen:

$$x'y' = m^2.$$

Aus dieser Gleichung folgt: $x' : m = m : y'$, und dieß gibt uns ein neues Hülfsmittel, sobald die Assymptoten und m gegeben sind (was jederzeit Statt findet, wenn a und b bekannt sind), die Hyperbel zu verzeichnen.

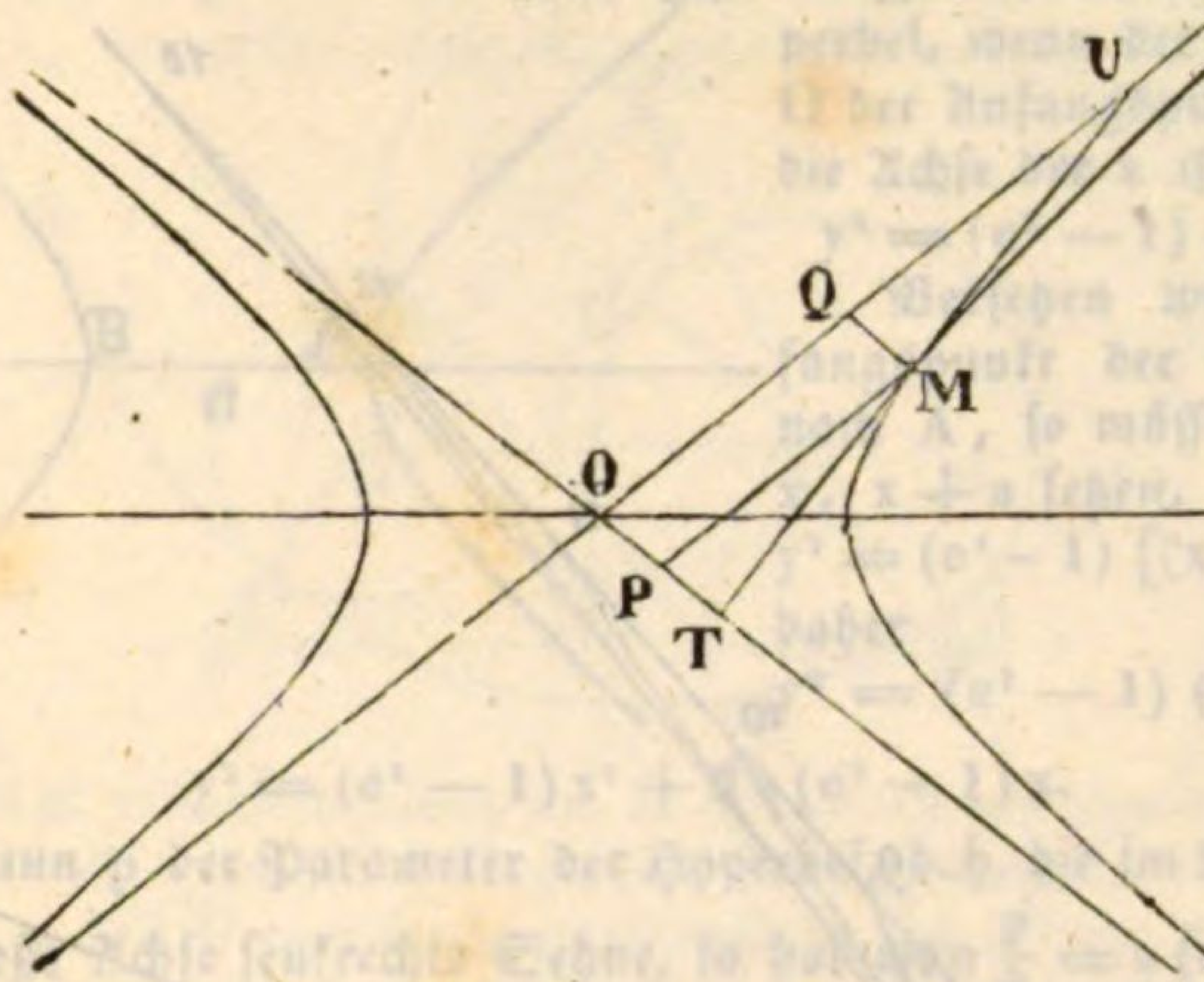
Fig. 412.



Nehmen wir auf der Assymptote OL willkürlich die Punkte 1, 2, 3 . . an; ich ziehe nun durch L eine gleichlaufende mit L'1, L'2, L'3, . . . so erhalte ich die Punkte 1, 2, 3, . . . auf der OL'; ziehet man nun durch die Punkte 1. und 1 gleichlaufende mit den Assymptoten, so erhält man den Punkt M_1, eben so M_2, M_3 . . . Wiederholt man dieselbe Verzeichnung im Scheitelwinkel bei LOL', so bekommt man den andern Ast der Hyperbel.

Ist der Winkel der Assymptoten, wie es hier der Fall ist, ein rechter Winkel, d. h. ist a = b, so heißt die Hyperbel dann eine gleichseitige, und hat eine ähnliche Beziehung zu den andern Hyperbeln, wie der Kreis zur Ellipse.

Fig. 413.



§. 339. Ist M ein Punkt der Hyperbel, UT eine Berührende, OU und OT die zwei Assymptoten, so ist dem frühern gemäß

$$MT = TU;$$

ziehet man nun MQ $\parallel$ OT und MP $\parallel$ OU, wobei $OP = x'$, $MP = y'$ ist, so hat man

$$\frac{UT}{MT} = \frac{OT}{PT} = \frac{OU}{PM}.$$

Da nun $UT = 2MT$, so ist

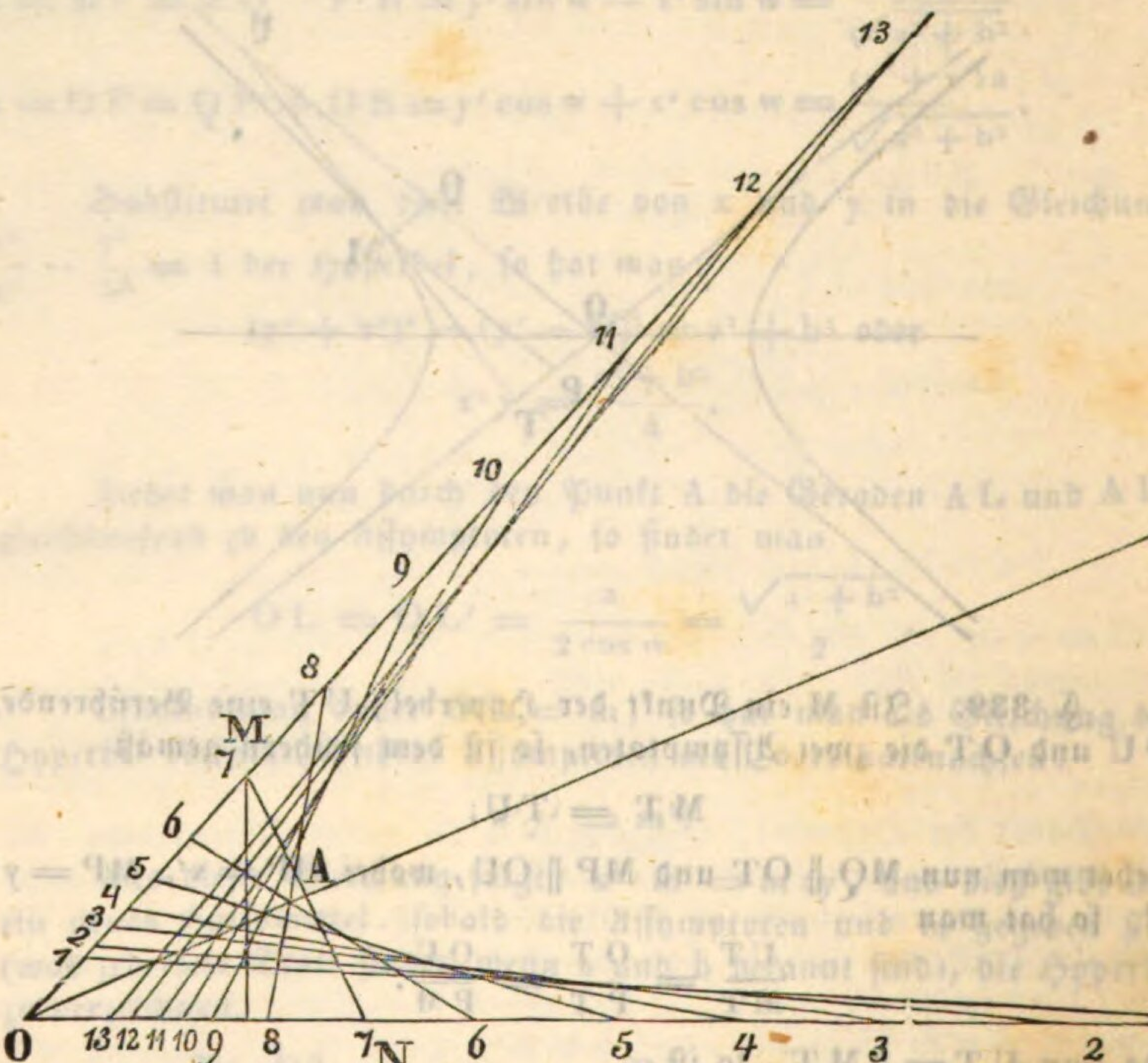
$$OT = 2x', \quad OU = 2y';$$

da nun dem Vorhergehenden zu Folge $x' : m = m : y'$ so hat man

$$2x' : 2m = 2m : 2y' \quad \text{oder} \quad OT : 2m = 2m : OU;$$

dieß gibt uns ein leichtes Hülfsmittel, die Durchschnittspunkte T und U der Berührenden UT mit den beiden Assymptoten zu bestimmen. Wir sehen nämlich, wie wir oben die Punkte 1, 2, 3 .... sowohl in der einen als andern Assymptote bestimmt haben, so dürfen wir nur 1 mit 1, 2 mit 2, 3 mit 3, u. s. w. verbinden, um die Berührenden der Hyperbel zu haben, und dadurch dieselbe zu verzeichnen.

Fig. 414.



Sind nämlich O M und O N die Assymptoten, halbiren wir den Winkel derselben durch O A, wo also O A die Richtung der Hauptachse ist; ist nun $OA = a$, und ist $MA = NA$ senkrecht auf O A, so ist

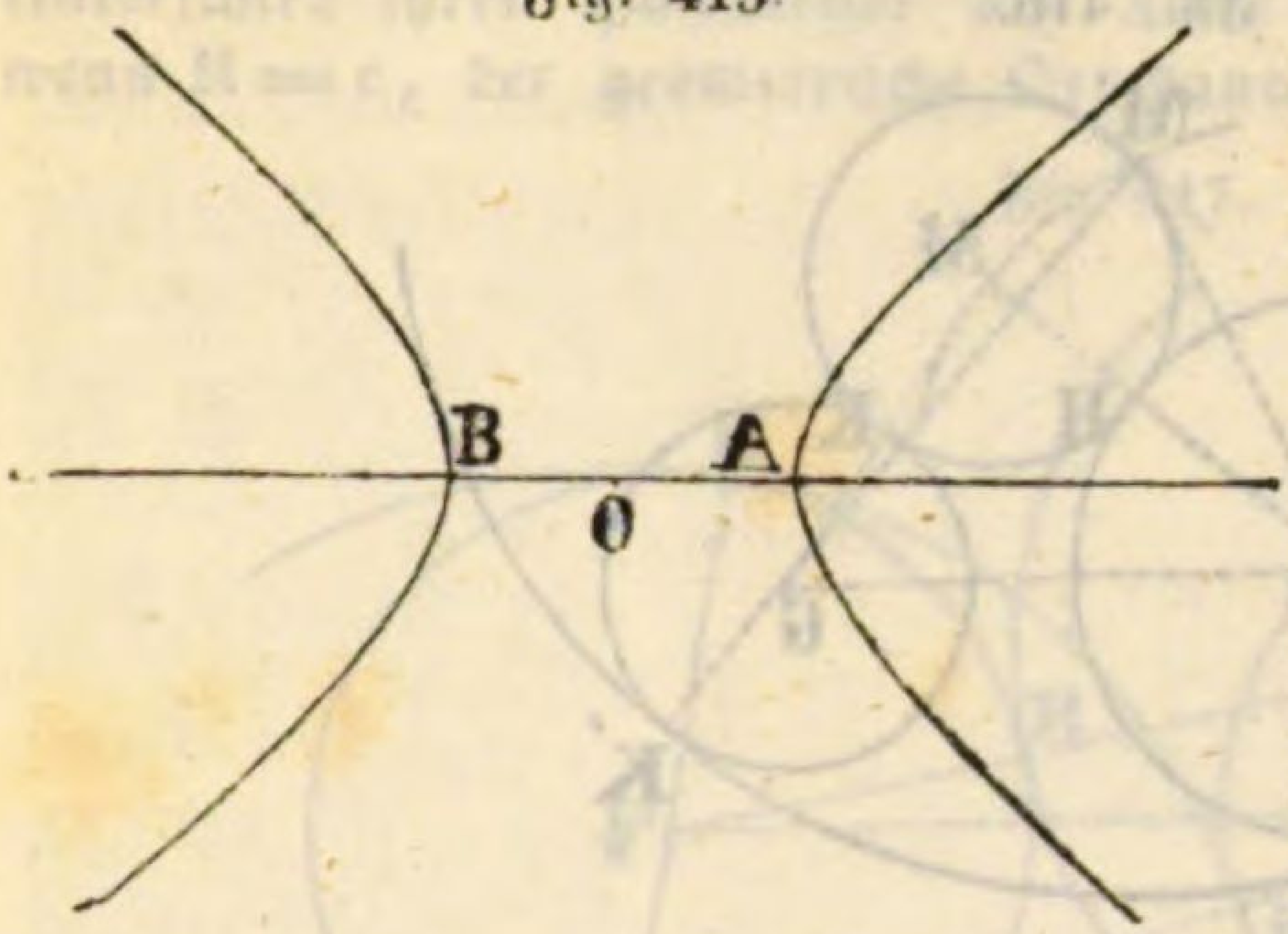
$$AM = AN = b \text{ und folglich}$$

$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\,m.$$

Nimmt man also einen Punkt (1) auf der O M und sucht zu den drei Größen O1 in O M, O M, und O N die vierte Proportionirte O1 in der O N, so werden die Punkte (1) und (1) mit einander verbunden eine Berührende der Hyperbel geben. Ich werde nämlich 1 in der O M mit N verbinden, und durch M zu dieser eine gleichlaufende ziehen, wo diese die O N schneidet ist der Punkt (1) in O N. Eben so findet man 2, 3, 4... in der O N. Werden diese Berührenden nahe an einander gezogen, so erzeugt ihre Aufeinanderfolge die Hyperbel.

§. 340. Zum Schlusse unserer Untersuchungen über die Hyperbel wollen wir die Gleichung entwickeln, von der ein Scheitel der Anfangspunkt der Coordinaten ist.

Fig. 415



Für die Gleichung der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt O der Anfangspunkt und AB die Achse der x ist, hat man:

$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 - a^2).$$

Versetzen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach A, so müssen wir statt x, x + a setzen, und haben

$$y^2 = (e^2 - 1)[(x + a)^2 - a^2]$$

daher

$$y^2 = (e^2 - 1)(x^2 + 2ax),$$

$$y^2 = (e^2 - 1)x^2 + 2a(e^2 - 1)x.$$

Ist nun p der Parameter der Hyperbel, d. h. die im Brennpunkte auf die große Achse senkrechte Sehne, so hat man $\frac{p}{2} = a(e^2 - 1)$ also $p = 2a(e^2 - 1)$ woraus

$$y^2 = px - (1 - e^2)x^2$$

sich ergibt. Man sieht daher, diese letzte Gleichung ist eine ganz allgemeine Gleichung, die für Ellipse, Parabel und Hyperbel gilt.

§. 341. Als eine Anwendung des Vorhergehenden wollen wir eine Reihe von Aufgaben in Betrachtung ziehen, die uns schon früher beschäftigt haben.

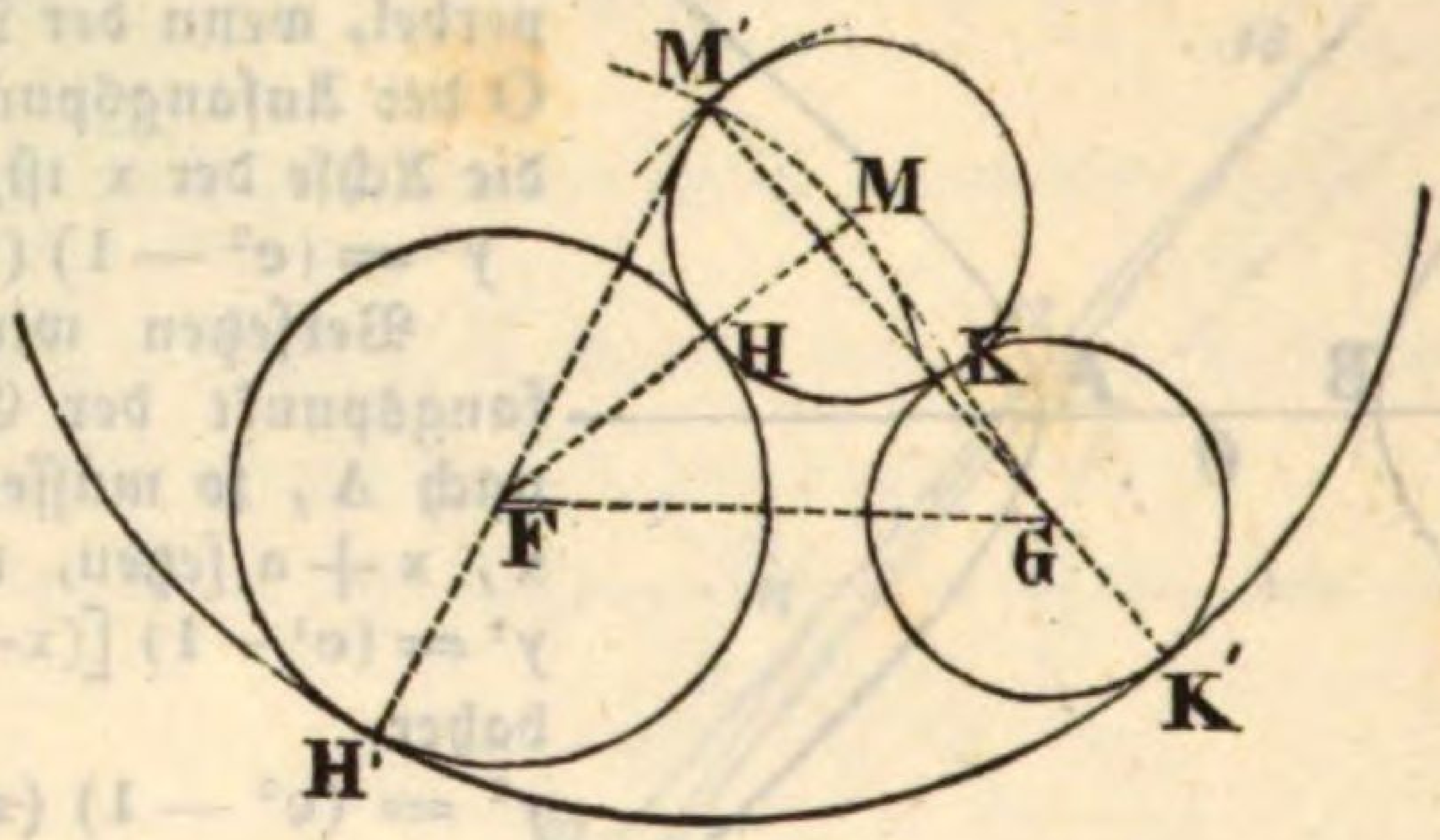
Es seien zwei Kreise mit den Mittelpunkten F und G und den Halbmessern FH und GK gegeben, und man verlangt die Verzeichnung eines Kreises, der beide gegebene Kreise berührt, so sind hier vier Fälle möglich: 1) die beiden gegebenen Kreise werden von außen oder 2) beide von innen berührt oder 3) der erste von außen, der zweite von innen, oder endlich 4) der zweite von außen und der dritte von innen. Nennen wir den Halbmesser des ersten gegebenen Kreises R, den zweiten r, den Abstand ihrer Mittelpunkte d, und es sei ρ der Halbmesser des zu suchenden Kreises, so hat man, da bei der Berührung zweier Kreise die Mittelpunkte mit dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte stets in einer geraden Linie liegen müssen, für obige vier Fälle, folgende vier Dreiecke:

1) wo zwei Seiten $R + \rho$ und $r + \rho$, 2) wo zwei Seiten $\rho - R$, $\rho - r$, 3) $\rho + R$, $\rho - r$, 4) $\rho - R$ und $\rho + r$ sind, die dritte Seite ist immer d.

Um die ersten zwei Dreiecke zu verzeichnen, beschreibt man aus den Mittelpunkten F und G mit Halbmessern, die gleich $R + \rho$ und $r + \rho$ (wobei ρ vollkommen willkürlich bleibt), Kreisbögen, die sich in M schneiden, so ist

$FM = FH + MH = R + \rho$, daher da $FH = R$, $MH = \rho$,
$MG = GK + MK = r + \rho$, daher da $GK = r$, $MK = \rho$.

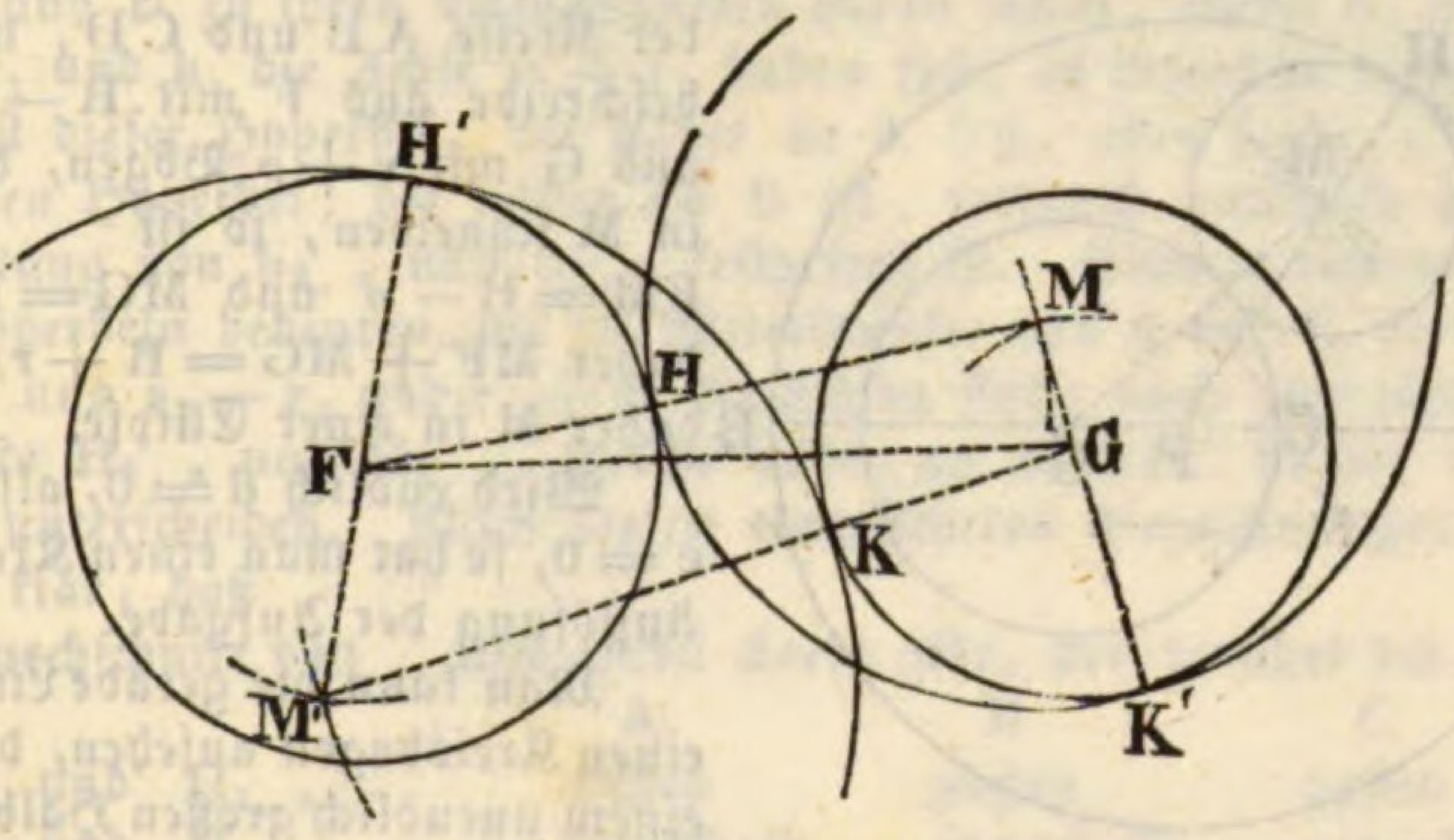
Fig. 416.



Es wird also ein Kreis aus M mit dem Halbmesser MH beschrieben, die beide gegebenen Kreise außerhalb berühren. Beschreiben wir eben so aus F und G mit Halbmessern gleich $\rho - R$ und $\rho - r$, wobei ρ ebenfalls willkürlich ist, zwei Kreisbögen, die sich in M' schneiden, so ist: $M'F = \rho - R$, $M'H' = \rho$; $M'G = \rho - r$, $M'K' = \rho$; daher wird der Kreis aus dem Mittelpunkte M' mit dem Halbmesser M'H' beschrieben, beide Kreise innerhalb berühren. Da in beiden Fällen ρ willkürlich bleibt, so werden also unzählige Kreismittelpunkte dieselbe Aufgabe erfüllen, wie hier M und M', und alle diese Punkte werden in ununterbrochener Aufeinanderfolge liegen, weil wir ρ durch alle möglichen Zwischenstufen fortwährend wachsen und abnehmen lassen können. Es frägt sich nun, in was für einer krummen Linie liegen diese Mittelpunkte Wenn irgend ein Punkt M der Aufgabe Genüge leistet, so muß $FM = R + \rho$ und $GM = r + \rho$, daher stets $FM - GM = R - r$ seyn; da nun $R - \rho$ eine gegebene bestimmte Größe ist, so wird also, wie auch M liegt, stets $FM - GM$ eine bestimmte Größe seyn, sofern nur M der gegebenen Forderung genügt; man sieht daher, daß M in der Hyperbel liegt, wo $R - r$ die reelle Achse ist, und F und G die beiden Brennpunkte sind. Aber eben so ist $FM' = \rho - R$, $GM' = \rho - r$, daher $GM' - FM' = R - \rho$, daher auch M' in derselben Hyperbel liegt, nur in dem andern Aste der Hyperbel. Denkt man sich also aus den beiden Mittelpunkten als Brennpunkten eine Hyperbel beschrieben, deren Achse $R - r$ ist, so wird der Ast, der näher ist zum Mittelpunkte des kleineren Kreises die Mittelpunkte enthalten aller Kreise, die die beiden gegebenen Brennpunkte von außen berühren, der andere Ast wird die Mittelpunkte enthalten aller Kreise, die die beiden gegebenen Brennpunkte innerhalb berühren. Wenn nun einer Aufgabe nicht bloß eine oder mehrere Punkte genügen, sondern eine stätige Folge von Punkten, die in einer geraden oder krummen Linie liegen, so heißt diese Gerade oder Krumme der **geometrische Ort** dieser Aufgabe. Man kann also sagen, der geometrische Ort der Mittelpunkte der Kreise, die beide gegebenen, entweder beide außerhalb oder beide innerhalb berühren, ist eine Hyperbel, welche die gegebenen Kreismittelpunkte als Brennpunkte, und den

Unterschied ihrer Halbmesser als Achse hat. Man sieht leicht, daß wenn $R = r$, der geometrische Ort dann eine gerade Linie wird.

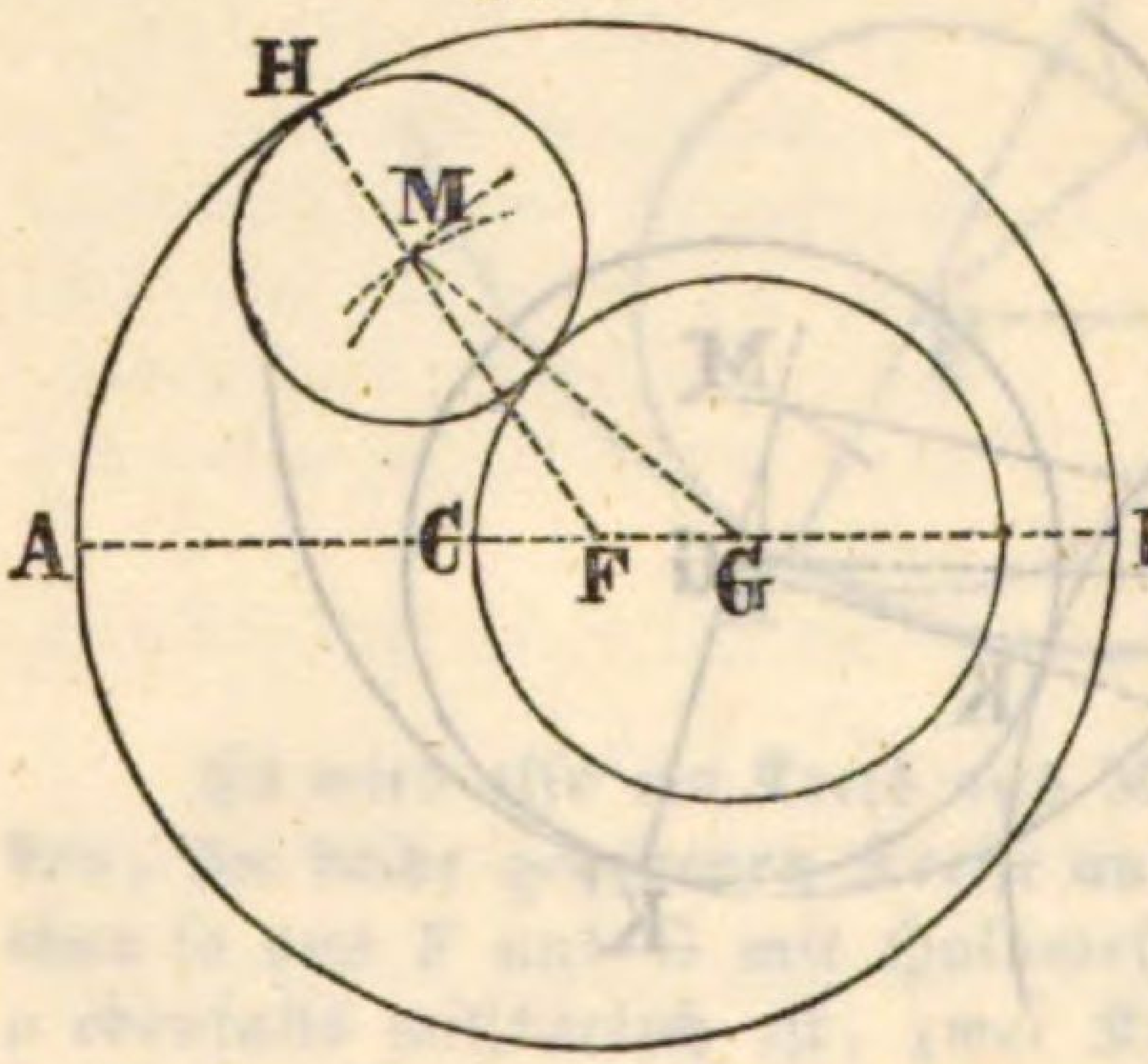
Fig. 417.



Beschreibt man nun aus dem Mittelpunkte F mit dem Halbmesser $\rho + R$ und aus G mit dem Halbmesser $\rho - r$ zwei Kreisbögen, die sich in M schneiden, so ist $FM = FH + HM = R + \rho$, daher $HM = \rho$; $MG = MK' - GK' = \rho - r$, daher $MK' = \rho$, daher ein Kreis aus dem Mittelpunkte M mit dem Halbmesser HM beschrieben den einen Kreis in H außerhalb, den andern in K′ innerhalb berührt. Eben so Kreisbögen aus F mit $\rho - R$ und aus G mit $\rho + r$ beschrieben schneiden sich in M′, und ein Kreis aus M′ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser M′H′ berührt in H′ den einen Kreis innerhalb, in K den andern außerhalb. Da hier $FM - MG = R + r$ und $M'G - M'F = R + r$ ist, so liegen alle Punkte von der Eigenschaft des Punktes M in dem einen, alle Punkte der Eigenschaft vou M′ im andern Aste einer Hyperbel, deren Brennpunkte F und G sind, und wo $R + r$ die reelle Achse ist. Lassen wir den einen der beiden Halbmesser, z. B. r, immer kleiner und kleiner, ja selbst gleich Null werden, so bleiben noch immer die beiden Hyperbeln zur Auflösung der Aufgabe, nur hat man für $r = 0$ eine Hyperbel, deren Achse $= R$ ist, daher ist die Hyperbel ebenfalls der geometrische Ort aller Mittelpunkte von Kreisen, die durch einen gegebenen Punkt durchgehen, und einen gegebenen Kreis berühren. Die Excentricitäten der beiden Hyperbeln sind $\frac{d}{R - r}$ und $\frac{d}{R + r}$, wo d die Entfernung der beiden Mittelpunkte ist; sollen beide Kreise, beide von außen oder beide von innen zugleich berührt werden, so kann nicht der eine Kreis ganz innerhalb des andern treten, d. h. d kann nicht kleiner werden als $R - r$; für $d = R - r$ wird zwar $e = 1$, allein da die Achse $d = R - r$ nicht unendlich groß ist, so hat man doch keine Parabel, sondern eine gerade Linie als Auflösung. Für den zweiten Theil unserer Aufgabe, wo $R + r$ die Achse ist, steht kein Hinderniß entgegen, daß nicht $d < R + r$ werden könnte, d. h. beide

Kreise sich schneiden und endlich innerhalb einander fallen; ist aber $\frac{d}{R+r} < 1$ oder $e < 1$, dann genügt statt der Hyperbel die Ellipse.

Fig. 418.

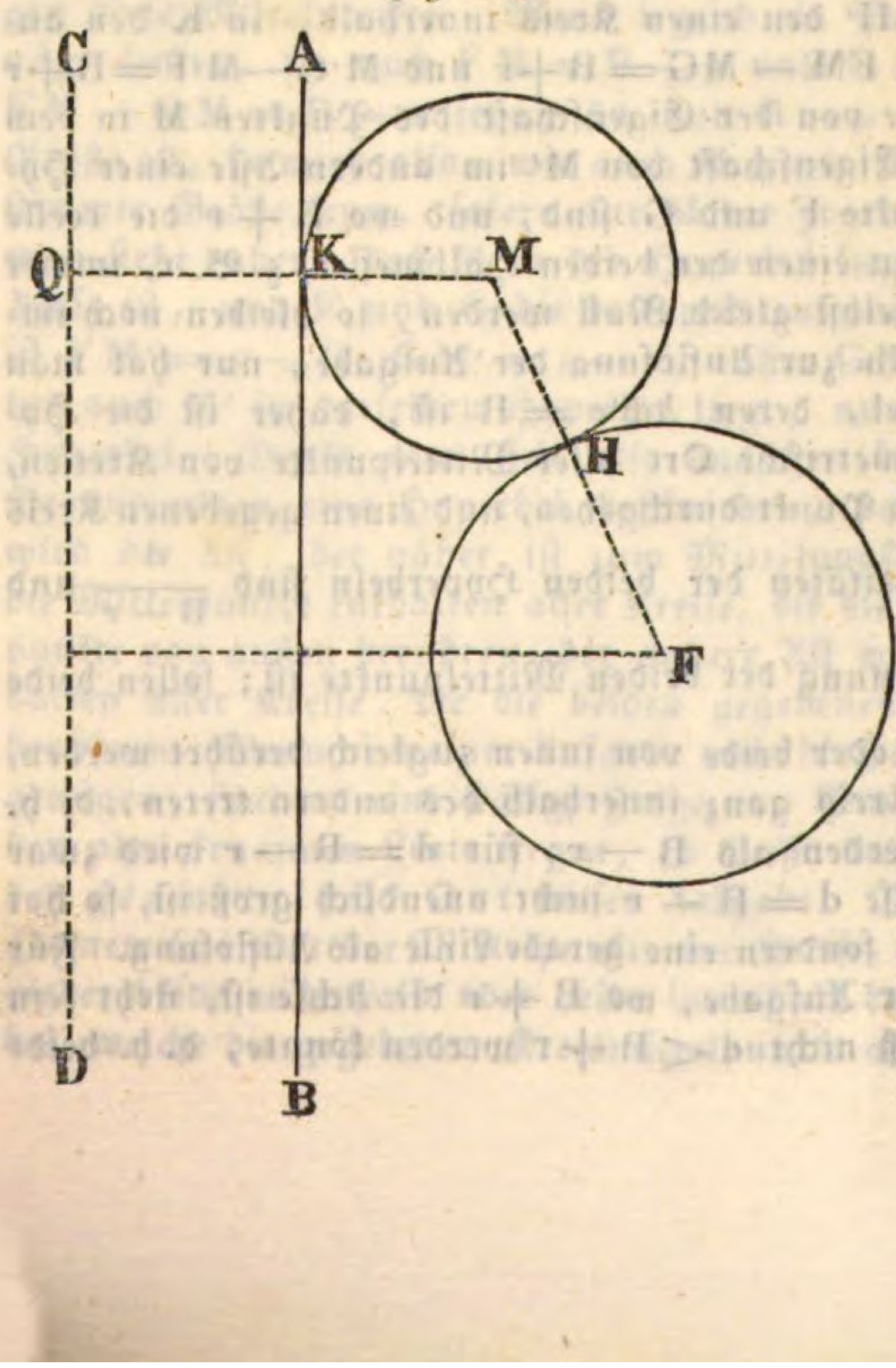


Sind F und G die Mittelpunkte der Kreise A B und C D, und ich beschreibe aus F mit $R - \rho$ und aus G mit $r + \rho$ Bögen, die sich in M schneiden, so ist $FM = R - \rho$ und $MG = r + \rho$, daher $MF + MG = R + r$, daher M in einer Ellipse.

Wird endlich $d = 0$, also auch $e = 0$, so hat man einen Kreis zur Auflösung der Aufgabe.

Man kann die gerade Linie als einen Kreisbogen ansehen, der mit einem unendlich großen Halbmesser beschrieben ist. Gehet nun einer der Kreise in eine gerade Linie über, z. B. der aus dem Mittelpunkte G, so wird $r = \infty$, daher auch natürlich $d = \infty$ wird; dann geht aber $\frac{d}{R-r}$ und $\frac{d}{R+r}$ in die Einheit über, d. h. man hat dann statt Hyperbel und Ellipse die Parabel d. h. die Mittelpunkte der Kreise, die einen gegebenen Kreis und ein gegebene Gerade berühren, liegen in einer Parabel; was sich auf anderem Wege leicht nachweisen läßt.

Fig. 419.



Soll nämlich der Kreis aus M den Kreis aus F in H und die Gerade AB in K berühren, so wird, wenn $QK = HF$ gemacht, und durch Q die CD ‖ AB gezogen wird, sicher $QM = MF$ seyn, also M in einer Parabel liegen, wo F der Brennpunkt und CD die Leitlinie ist. Aehnlich ist die Auflösung, wenn der suchende Kreis den gegebenen innerhalb berühren soll.

Nach diesen einleitenden Untersuchungen können wir zur Hauptaufgabe übergehen: Einen Kreis zu finden, der

drei gegebene Kreise berühren soll. Nennen wir die drei Kreise A, B und C, ihre Halbmesser $r_1\, r_2\, r_3$, und zwar so, daß $r_1 < r_2 < r_3$ sey. Denken wir uns nun zwei Hyperbel h_1 und h_2, die die Mittelpunkte der A und B zu ihren Brennpunkten haben sollen, wobei h_1 die Achse $r_2 - r_1$ und h_2 die Achse $r_2 + r_1$ haben soll; es bezeichne ferner $h_{1,\,a}$ den Ast dieser Hyperbel, der näher an A sey, eben so $h_{1,\,b}$ den Ast derselben Hyperbel, der näher an B ist, wodurch natürlich auch die Bedeutung von $h_{2,\,a}$ und $h_{2,\,b}$ festgesetzt ist. Eben so sollen H_1 und H_2 Hyperbeln bedeuten, wo die Mittelpunkte von A und C die Brennpunkte und $r_3 - r_2$ und $r_3 + r_2$ die Achsen sind; auch hier wollen wir die Aeste $H_{1,\,a}$ und $H_{1,\,c}$, welche näher an A und C liegen, von einander unterscheiden. Nach diesen eingeführten Bezeichnungen ergibt es sich klar, daß

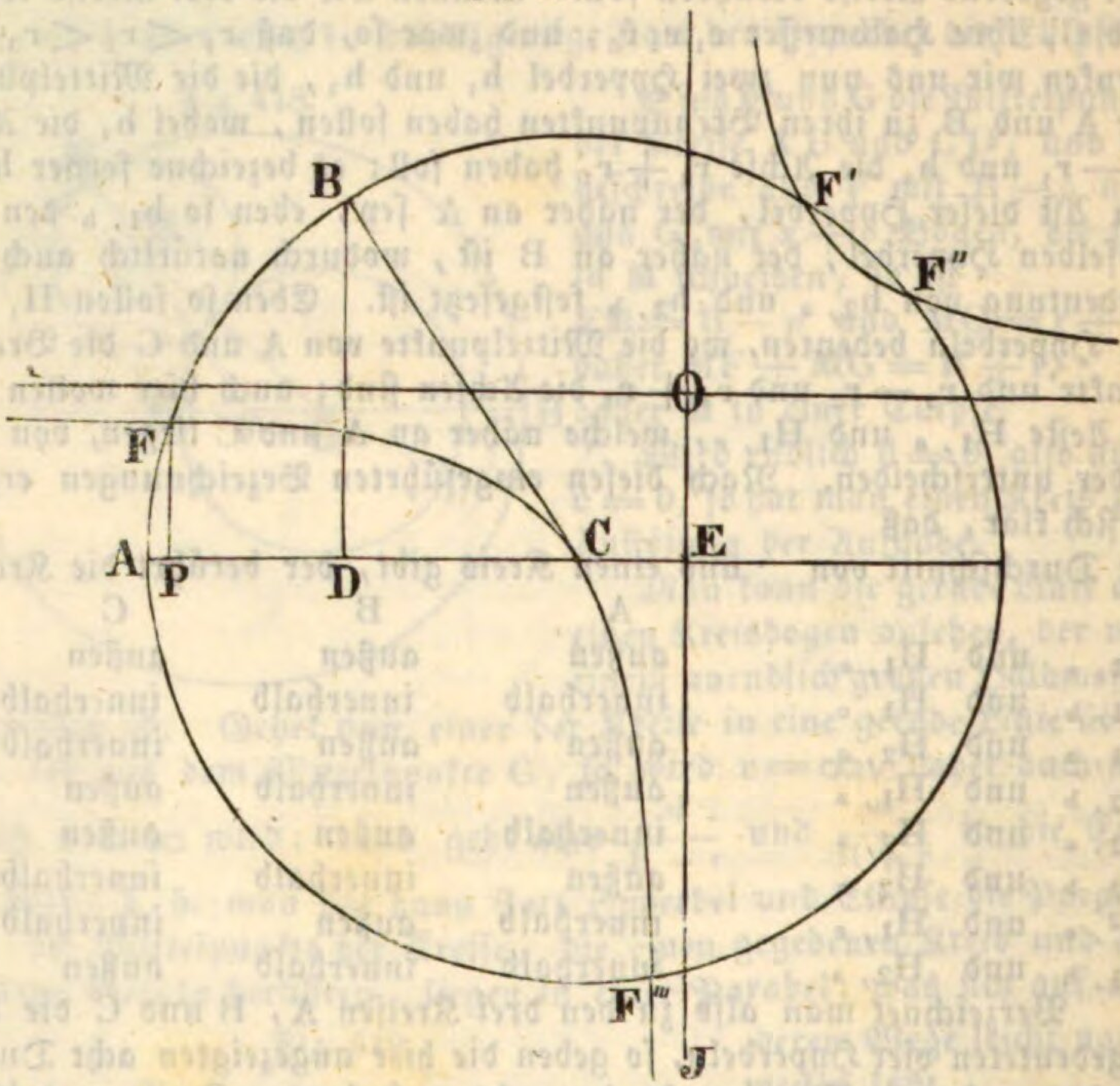
der Durchschnitt von	uns einen Kreis gibt, der berührt die Kreise: A	B	C
$h_{1,\,a}$ und $H_{1,\,a}$	außen	außen	außen
$h_{1,\,b}$ und $H_{1,\,c}$	innerhalb	innerhalb	innerhalb
$h_{1,\,a}$ und $H_{2,\,c}$	außen	außen	innerhalb
$h_{2,\,b}$ und $H_{1,\,a}$	außen	innerhalb	außen
$h_{2,\,a}$ und $H_{2,\,a}$	innerhalb	außen	außen
$h_{2\ b}$ und $H_{2,\,c}$	außen	innerhalb	innerhalb
$h_{2',\,a}$ und $H_{1,\,c}$	innerhalb	außen	innerhalb
$h_{1,\,b}$ und $H_{2,\,a}$	innerhalb	innerhalb	außen

Verzeichnet man also zu den drei Kreisen A, B und C die hier angedeuteten vier Hyperbeln, so geben die hier angezeigten acht Durchschnittspunkte die Mittelpunkte der acht zu suchenden Kreise, und lösen daher diese Aufgabe vollkommen auf.

Könnte man Hyperbeln mit derselben Leichtigkeit verzeichnen, wie Kreise, so wäre die hier gegebene Auflösung die leichteste dieser so schönen Aufgabe. Die alten griechischen Geometer nannten solche Auflösungen mittelst krummen Linien, wie die hier gegebenen, mechanische Auflösungen, hingegen Auflösungen bloß mittelst Zirkel und Lineal, wie wir sie hier in diesem Buche von derselben Aufgabe gegeben haben, geometrische Auflösungen.

§. 342. Es ist leicht begreiflich, daß nicht alle Aufgaben der Geometrie bloß mittelst Zirkel und Lineal gelöset werden können, d. h. eine geometrische Auflösung zulassen. Eine solche Aufgabe, welche keine geometrische Auflösung zuläßt, ist die: einen gegebenen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

Fig 420.



Es sey der Winkel $ACB = \alpha$; denken wir aus C mit AC einen Kreis beschrieben, so handelt es sich darum, den Punkt F im Kreisbogen AB so zu bestimmen, daß $AF = \frac{1}{3} AB$ ist.

Es sey $BD \perp AC$, $CD = a$, $BD = b$; es sey C der Anfangspunkt der Coordinaten, AC die Achse der x, $CP = x$, $FP = y$; es sey $CB = r$, so ist

$$a = r \cos \alpha, \quad b = r \sin \alpha, \quad x = r \cos \frac{\alpha}{3}, \quad y = r \sin \frac{\alpha}{3}.$$

Schaffen wir nun aus diesen vier Gleichungen r und α weg, so haben wir nur die Beziehnungen zwischen x, y, a und b, d. h. bekommen die Bestimmung der Lage des Punktes F rücksichtlich des Punktes B; zu diesem Behufe haben wir

$$x = r \cos \frac{\alpha}{3} = r \cos \left(\alpha - \frac{2\alpha}{3}\right) = r \cos \alpha \cos \frac{2\alpha}{3} + r \sin \alpha \sin \frac{2\alpha}{3},$$

$$y = r \sin \frac{\alpha}{3} = r \sin \left(\alpha - \frac{2\alpha}{3}\right) = r \sin \alpha \cos \frac{2\alpha}{3} - r \cos \alpha \sin \frac{2\alpha}{3}.$$

Multipliciren wir die erste dieser Gleichungen mit $r \sin \alpha$, die zweite mit $r \cos \alpha$, und subtrahirt sie von einander, so hat man

$$x r \sin \alpha - y r \cos \alpha = r^2 \sin \frac{2\alpha}{3}$$

$$bx - ay = 2r^2 . \sin\frac{\alpha}{3} . \cos\frac{\alpha}{3},$$

$$bx - ay = 2xy,$$

das ist die Gleichung einer krummen Linie, die unsern Kreis in F so schneidet, daß $AF = \frac{1}{3} AB$ ist; nun wollen wir untersuchen, was das für eine krumme Linie ist.

Nehmen wir O als einen Anfangspunkt an, wobei $CE = \frac{a}{2}$ und $OE = \frac{b}{2}$ ist, so hat man, wenn x' und y' die neuen Coordinaten rücksichtlich des Anfangspunktes O bedeuten:

$$x = x' - \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2} + y',$$

daher die neue Gleichung unserer Krummen

$$b\left(x' - \frac{a}{2}\right) - a\left(\frac{b}{2} + y'\right) = 2\left(x' - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + y'\right)$$

$$\text{oder} \quad x y' = \frac{ab}{4}.$$

Unsere Krumme ist also eine Hyperbel, wo die Coordinatenachsen OI und OK ihre Assymptoten sind.

Die Coordinaten der Punkte der Krummen, deren Gleichung rücksichtlich des Anfangspunktes C $bx - ay = 2xy$ ist, und die zugleich der Gleichung des Kreises rücksichtlich desselben Anfangspunktes, nämlich $r^2 + y^2 = a^2 + b^2$, Genüge leisten, geben die Durchschnittspunkte beider Krummen. Da nun $b = r \sin \alpha$, $a = r \cos \alpha$ ist, so gibt die eine Gleichung

$$y = \frac{r x \sin \alpha}{2x + r \cos \alpha} \quad (1);$$

dieß in die zweite Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ substituirt, gibt

$$x^2 + \frac{r^2 x^2 \sin^2 \alpha}{(2x + r \cos \alpha)^2} = r^2,$$

welche Gleichung geordnet uns gibt

$$4x^4 + 4r \cos \alpha . x^3 + r^2 x^2 - r^2 (2x + r \cos \alpha)^2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{oder} \quad 4x^3 (x + r \cos \alpha) - r^2 (x + r \cos \alpha)(3x + r \cos \alpha) = 0$$

$$\text{oder} \quad (4x^3 - 3r^2 x - r^3 \cos \alpha)(x + r \cos \alpha) = 0,$$

daher, wie man sieht, $x + r \cos \alpha = 0$, d. h. $x = - r \cos \alpha$ eine Auflösung unserer Gleichung (2) ist; $x = - r \cos \alpha$ in (1) substituirt, gibt $y = r \sin \alpha$; da also hier $x = r \cos (180^\circ - \alpha)$, $y = r \sin (180^\circ - \alpha)$, so schneidet also unsere Hyperbel den Kreis in einem Punkte, dessen Halbmesser mit AC einen Winkel von $180^\circ - \varphi$ bildet

Um die übrigen Auflösungen zu finden, hat man:

$$4x^3 - 3r^2 x - r^3 \cos \alpha = 0 \quad (3).$$

Da, wie wir wissen, $x = r \cos\frac{\alpha}{3}$, $y = r \sin\frac{\alpha}{3}$ eine Auflösung von (2), also auch von (3) ist, so muß $x = r\cos\frac{\alpha}{3}$ die Gleichung (3) wirklich auf Null reduciren, was auch in der That der Fall ist, denn

$$4 r^3 \cos^3\frac{\alpha}{3} - 3 r^3 \cos\frac{\alpha}{3} - r^3 \cos\alpha = 0 \quad (4),$$

weil, wie man sich leicht überzeugt, $\cos\alpha = 4\cos^3\frac{\alpha}{3} - 3\cos\frac{\alpha}{3}$ ist [da nämlich

$$\begin{aligned}\cos 3x &= \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x \\ &= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - 2\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x \\ &= \cos^3 x - 3(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x].\end{aligned}$$

Dividirt man nun den Ausdruck in (3) durch $x - r\cos\frac{\alpha}{3}$, so erhält man:

$$(4x^3 - 3r^2 x - r^3\cos\alpha) : \left(x - r\cos\frac{\alpha}{3}\right)$$
$$= 4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2,$$

daher

$$(4x^3 - 3r^2 x - r^3\cos\alpha)$$
$$= \left[4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2\right]\left(x - r\cos\frac{\alpha}{3}\right),$$

folglich geschieht der Gleichung (3), also auch der Gleichung (2) Genüge, wenn man Werthe für x sucht, die

$$4x^2 + 4rx\cos\frac{\alpha}{3} + \left(4\cos^2\frac{\alpha}{3} - 3\right)r^2 = 0$$

machen; diese Gleichung aber gibt uns

$$x = -\frac{r}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{3} \pm \sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{3}\right) \text{ oder}$$

$$x = r\left(-\frac{1}{2}\,.\,\cos\frac{\alpha}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\sin\frac{\alpha}{3}\right);$$

da aber

$$-\tfrac{1}{2} = \cos 120^\circ = \cos 240^\circ,\quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^\circ,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 240^\circ$$

ist, so hat man:

$$x = r\left(\cos 120^\circ \cos\frac{\alpha}{3} - \sin 120^\circ \sin\frac{\alpha}{3}\right) = r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 120^\circ\right),$$

$$x = r\left(\cos 240^\circ \cos\frac{\alpha}{3} - \sin 240^\circ \sin\frac{\alpha}{3}\right) = r\cos\left(\frac{\alpha}{3} + 240^\circ\right).$$

Man hat daher außer $x = - r \cos \alpha$ folgende drei Auflösungen:

$$x = r \cos \frac{\alpha}{3}, \quad x = r \cos \left(\frac{\alpha + 360}{3}\right), \quad x = r \cos \left(\frac{\alpha + 2.360}{3}\right),$$

denen vermöge $x^2 + y^2 = r^2$

$$y = r \sin \frac{\alpha}{3}, \quad y = r \sin \left(\frac{\alpha + 360}{3}\right), \quad y = r \sin \left(\frac{\alpha + 2.360}{3}\right)$$

entsprechen. Der Durchschnitt der untersuchten Hyperbel gibt also nicht nur den dritten Theil des gegebenen Winkels α, sondern auch den dritten Theil von $\alpha + 360$, $\alpha + 2.360$, was auch ganz in der Ordnung ist, denn wenn ich einen Winkel α betrachte, so kann dieser Winkel entstanden seyn, wenn sich der eine Schenkel um einen Bogen α, oder auch um den Bogen $\alpha + 360^\circ$, $\alpha + 2.360^\circ$, $\alpha + 3.360^\circ$ u. s. w. gedreht hat. Alle diese Winkel unterscheiden sich gar nicht von einander, aber ihre dritten Theile geben drei verschiedene Winkel, nämlich

$$\frac{\alpha}{3}, \quad \frac{\alpha}{3} + 120^\circ, \quad \frac{\alpha}{3} + 240^\circ \quad (5).$$

Durch die Division durch 3 bei den übrigen Winkeln $\alpha + 3.360$, $\alpha + 4.360$, $\alpha + 5.360 \ldots$ komme ich immer wieder auf die drei Winkel in (5) zurück, denn:

$$\frac{\alpha + 3.360^\circ}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^\circ = \frac{\alpha}{3},$$

$$\frac{\alpha + 4.360^\circ}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^\circ + 120^\circ = \frac{\alpha}{3} + 120^\circ,$$

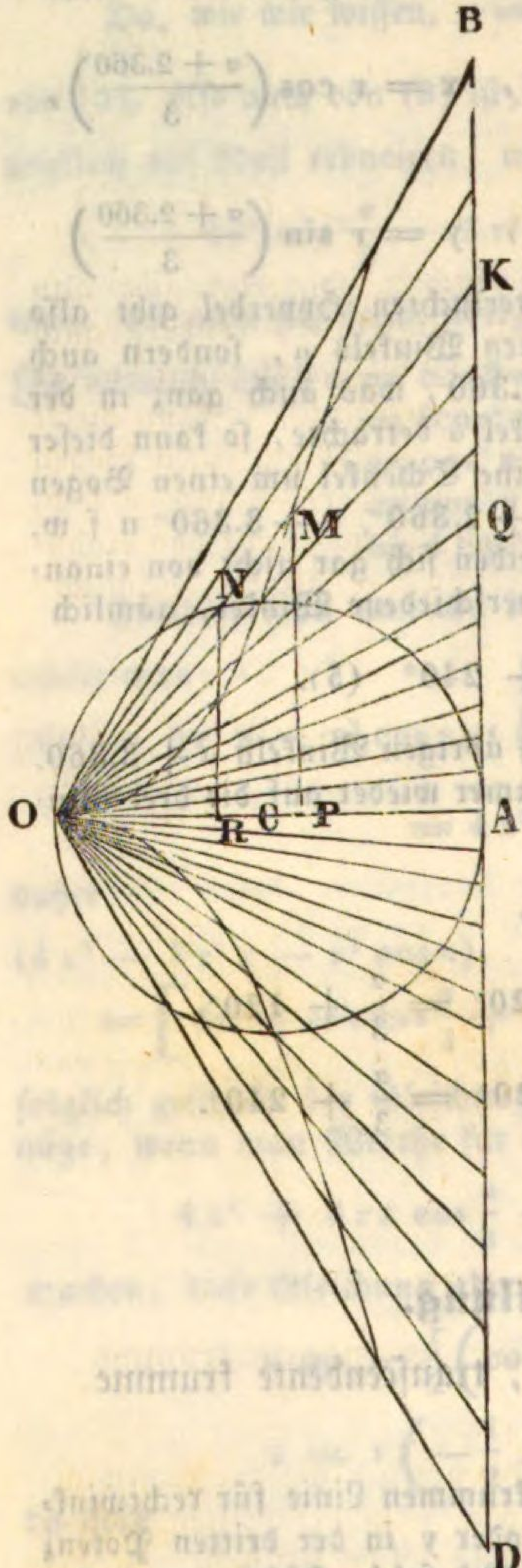
$$\frac{\alpha + 5.360^\circ}{3} = \frac{\alpha}{3} + 360^\circ + 420^\circ = \frac{\alpha}{3} + 240^\circ.$$

Zweite Abtheilung.

Krumme Linien höherer Ordnung, transcendente krumme Linien.

§. 343. Ist die Gleichung einer krummen Linie für rechtwinklichte Coordinaten von der Art, daß x oder y in der dritten Potenz erscheint und in keiner höhern, so heißt eine solche Krumme von der dritten Ordnung.

Fig. 421



Eine solche krumme Linie ist die Cissoide. Es sey ein Kreis auf dem Mittelpunkte C und mit dem Durchmesser OA, BD eine Berührende dieses Kreises, zieht man nun durch O irgend eine gerade OK, welche die BD in K und den Kreis in N schneidet, schneidet man nun von OK oder O aus ein Stück $OM = NK$ ab, so ist M ein Punkt der Cissoide, und es lassen sich auf diese Art unzählige Punkte die'er krummen Linie bestimmen; suchen wir nun ihre Gleichung, es sei O der Anfangspunkt, OA die Achse des x, somit $OP = x$; $MP = y$ wie $MP \perp OA$; es sei ferner $MQ \perp BD$, $NR \perp OA$; so ist, wie man leicht sieht, da $OM = NK$, also $ON = MK$ ist, auch $MQ = OR$, daher $AP = OR$; nennt man nun a den Durchmesser des Kreises, so ist $OR = AP = a - x$, und $AR = OP = x$. Da nun $NR^2 = OR \,.\, RA = x\,(a - x)$ ist, und da ferner

$$\frac{MP}{OP} = \frac{NR}{OR} \text{ also } \frac{MP^2}{OP^2} = \frac{NR^2}{OR^2}$$

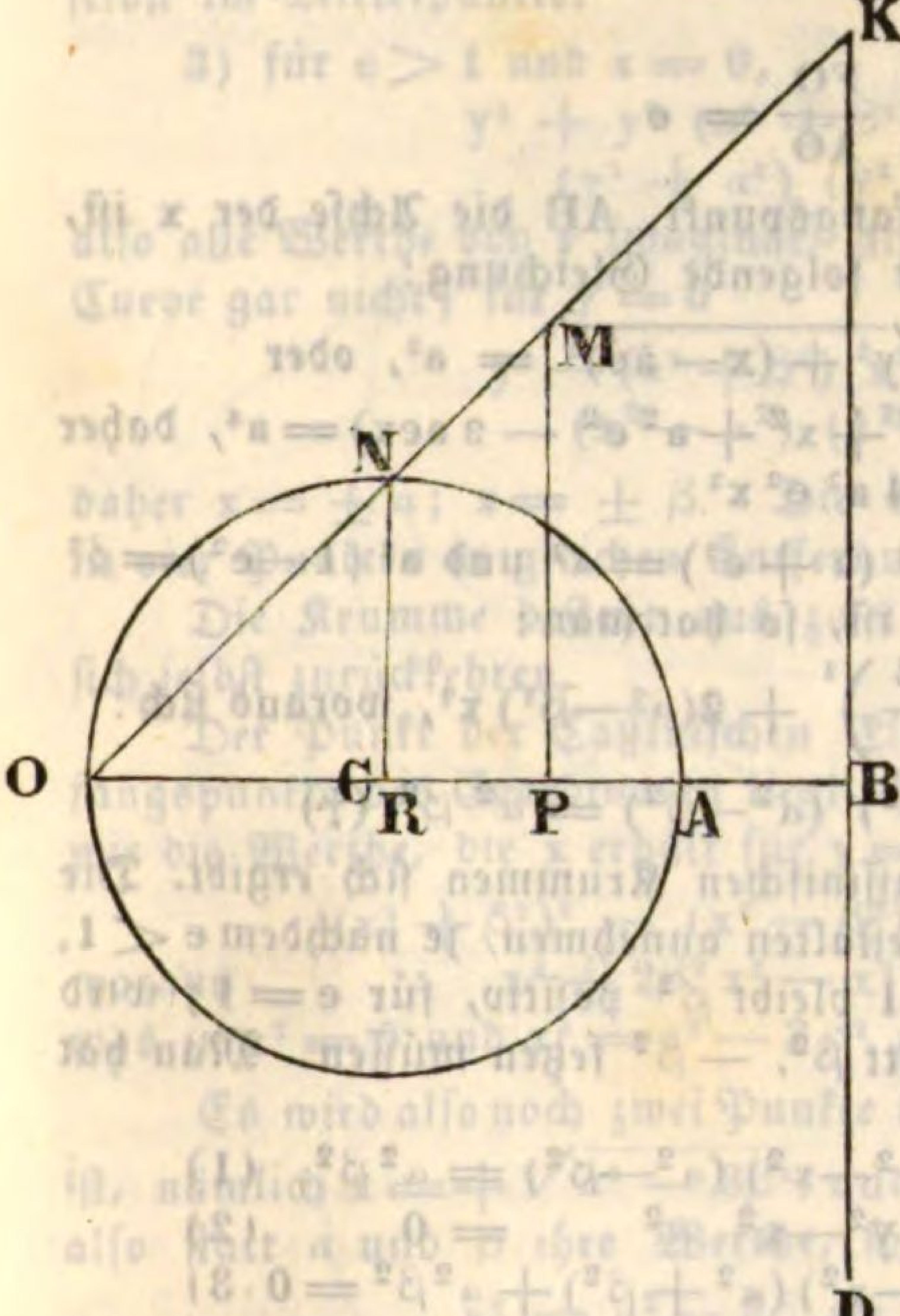
ist, so hat man

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x\,(a - x)}{(a - x)^2} \text{ oder } \frac{y^2}{x^2} = \frac{x}{a - x} \text{ daher}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}$$

als Gleichung der Cissoide, welche uns lehrt, daß man für jeden Werth von x zwei gleiche Werthe von y mit entgegengesetzten Zeichen erhält, daß die Krumme ober- und unterhalb OA ganz symetrisch ist. Je größer x ist, desto größer ist der Zähler und desto kleiner zugleich der Nenner des Bruches, welchem y gleich ist, desto größer wird also y; für $x = a$ wird $y = \infty$; für $x > a$ y imaginär. Es wird sich also diese krumme der geraden BD ohne Ende nähern, ohne sie zu erreichen.

Fig. 422.



Ist die BD nicht eine Berührende des Kreises, und man verfährt auf dieselbe Art, wie früher, so hat man, wenn $OA = a$; $OB = d$ ist, $NR^2 = OR \, . \, RA$; $OR = PB = OB - OP = d - x$, und $RA = OA - OR = a - d + x$, daher

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{(a - d + x)(d - x)}{(d - x)^2}$$

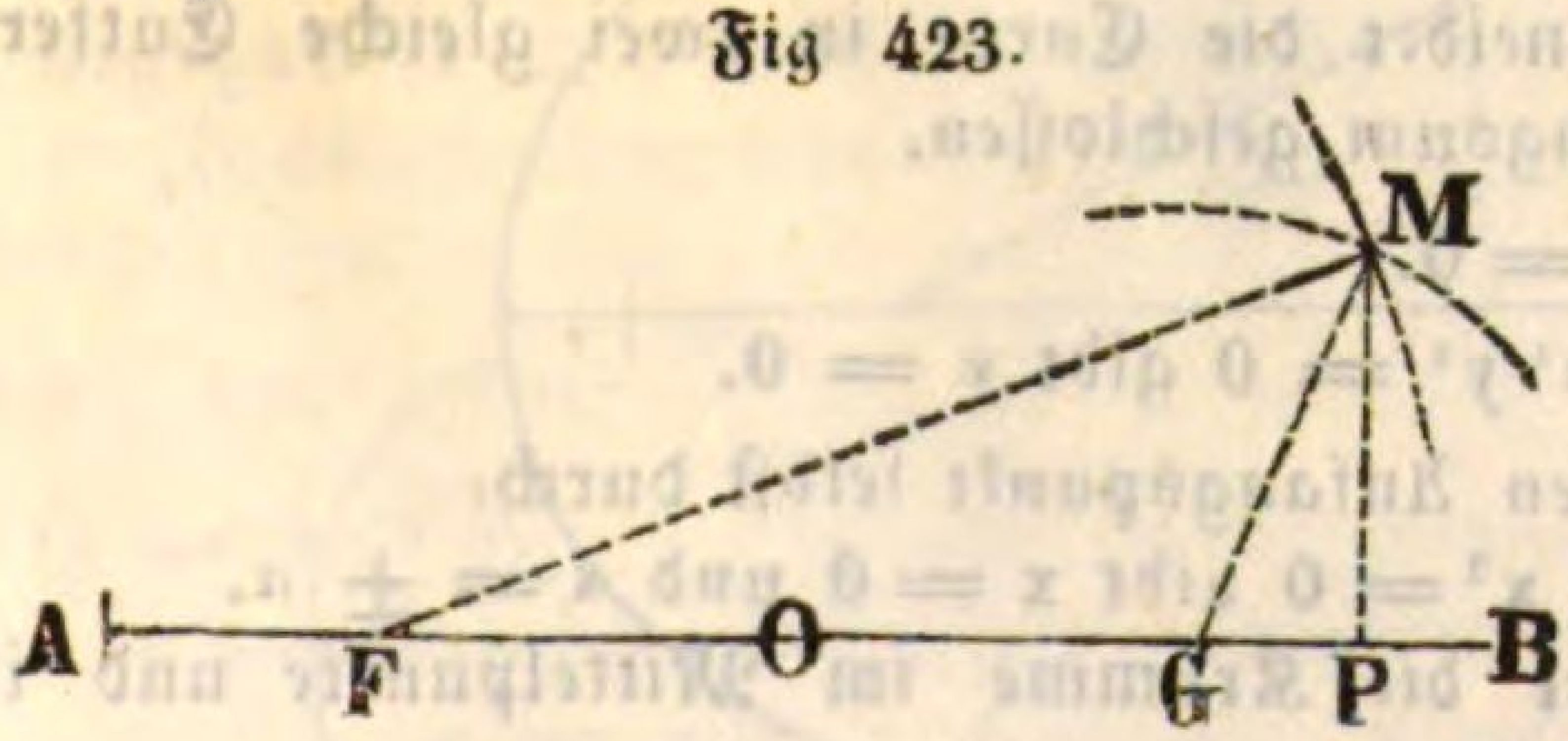
daher $y^2 = \dfrac{x^2 (a - d + x)}{d - x}$

Wieder eine Linie der dritten Ordnung, welche die verlängerte Cissoide heißt wenn $d > a$, die verkürzte, wenn $d < a$ ist. Im ersten Falle hat man eine Schleife um den Punkt O, im zweiten liegt der Punkt O außerhalb der Krummen; wir überlassen unsern Lesern das Vergnügen, diese beiden zu verzeichnen, und fügen nur noch die Bemerkung hinzu, daß man auf diese Weise verschiedene Krumme zur Entstehung bringen kann, man braucht nur, statt die Leitlinie BD gerade anzunehmen, irgend eine Krumme dafür zu wählen, ja man kann die Allgemeinheit noch weiter treiben, und statt des hier zu Grunde gelegten Kreises eine andere Krumme annehmen. Unsere Leser mögen daraus ersehen, welch eine Fülle von geometrischen Untersuchungen sich hieraus ergeben kann.

§. 344. Eine manchmal in Anwendung kommende Gattung von krummen Linien der vierten Ordnung sind die sogenannten **Cassinischen** Krummen, nach ihrem ersten Bearbeiter so genannt.

Cassinische Curven nennt man diejenigen, wo das Produkt die Entfernungen jedes Punktes vor zwei gegebenen Punkten stets dasselbe ist.

Fig 423.



Es seien F und G die zwei gegebenen Punkte, M ein Punkt der Krummen, so ist die Forderung, der er Genüge leisten soll, um stets in einer Cassinischen Curve zu bleiben:

$$FM \, . \, MG = a^2,$$

wo a^2 und folglich a eine gegebene Größe sei; es sei O der Halbirungspunkt von FG, und es werde $AO = BO = a$ aufgetragen; nennt man nun

$$\frac{FG}{AB} = \frac{FO}{AO} = e$$

so hat man, wenn O der Anfangspunkt. AB die Achse der x ist, MP $\perp$ AB für unsere Krumme folgende Gleichung:

$$\sqrt{y^2 + (x + ae)^2} \cdot \sqrt{y^2 + (x - ae)^2} = a^2, \text{ oder}$$
$$(y^2 + x^2 + a^2e^2 + 2aex)(y^2 + x^2 + a^2e^2 - 2aex) = a^4, \text{ daher}$$
$$(y^2 + x^2 + a^2e^2)^2 = a^4 + 4a^2e^2x^2$$

führt man hier die Hülfsgrößen $a^2(1 + e^2) = \alpha^2$ und $a^2(1 - e^2) = \beta^2$ ein, wo dann $2a^2e^2 = \alpha^2 - \beta^2$ ist, so hat man:

$$\left(y^2 + x^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 + \beta}{2}\right)^2 + 2(\alpha^2 - \beta^2)x^2, \text{ woraus sich:}$$
$$(y^2 + x^2)^2 + (y^2 - x^2)(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^2\beta^2 \quad (\dagger)$$

als allgemeine Gleichung der Cassinischen Krummen sich ergibt. Die Gleichung † wird verschiedene Gestalten annehmen, je nachdem $e < 1$, $e = 1$ $e > 1$ ist, denn für $e < 1$ bleibt β^2 positiv, für $e = 1$; wird $\beta = 0$ für $e > 1$, wird man statt β^2, $-\beta^2$ setzen müssen. Man hat so für

$$e < 1; \; (y^2 + x^2)^2 + (y^2 - x^2)(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^2\beta^2 \quad (1)$$
$$e = 1; \; (y^2 + x^2)^2 + (y^2 - x^2)\alpha^2 \quad = 0 \quad (2)$$
$$e > 1; \; (y^2 + x^2) + (y^2 - x^2)(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad (3)$$

dieß gibt 3 verschiedene Krumme, (1) wollen wir die Cassinische Ellipse nennen, (2) heißt die Lemniscate, (3) wollen wir die Cassinische Hyperbel nennen.

Um diese Linien besser kennen zu lernen, suchen wir die Durchschnittspunkte derselben mit den zwei Coordinatenachsen.

1) für $e < 1$ und $x = 0$ hat man

$$y^4 + (\alpha^2 - \beta^2)y^2 - \alpha^2\beta^2 = 0,$$
$$\text{d. h. } (y^2 + \alpha^2)(y^2 - \beta^2) = 0, \text{ daher } y = \pm \beta,$$

d. h. die Ordinatenachse schneidet die Cassinische Ellipse oben und unten in gleicher Entfernung vom Mittelpunkte 0. Für $y = 0$

$$x^4 + (\beta^2 - \alpha^2)x^2 - \alpha^2\beta^2 = 0$$
$$(x^2 + \beta^2)(x^2 - \alpha^2) = 0, \text{ daher } x = \pm \alpha.$$

Auch die Abscissenachse schneidet die Curve in zwei gleiche Entfernungen. Die Curve ist ringsum geschlossen.

2) für $e = 1$ und $x = 0$.

$$y^4 + \alpha^2 y^2 = 0 \text{ gibt } y = 0.$$

Die Krumme geht durch den Anfangspunkt selbst durch.

für $y = 0$; $x^4 - \alpha^2 x^2 = 0$ gibt $x = 0$ und $x = \pm \alpha$.

Die Abscissenachse schneidet die Krumme im Mittelpunkte und in

gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte. Die Krumme schneidet sich selbst im Mittelpunkte.

3) für $e > 1$ und $x = 0$,

$$y^4 + y^2 (\alpha^2 + \beta^2) + \alpha^2 \beta^2 = 0.$$
$$(y^2 + \alpha^2)(y^2 + \beta^2) = 0$$

also alle Werthe von y imaginär, also schneidet die Ordinatenachse die Curve gar nicht; für $y = 0$

$$y^4 - (\alpha^2 + \beta^2) x^2 + \alpha^2 \beta^2 = 0,$$
$$(x^2 - \alpha^2)(x^2 - \beta^2) = 0,$$

daher $x = \pm \alpha$; $x = \pm \beta$. Die Abscissenachse schneidet die Curve in vier Punkten in gleichen Entfernungen vom Mittelpunkte.

Die Krumme besteht aus zwei getrennten Theilen, die beide in sich selbst zurückkehren.

Der Punkt der Cassinischen Ellipse, der gerade über dem Anfangspunkte des Coordinaten liegt, hat $x = 0$; $y = \beta$. Untersuchen wir die Werthe, die x erhält für $y = \beta$, so hat man:

$$(x^2 + \beta^2)^2 - (x^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2) = \alpha^2 \beta^2,$$

woraus $$x^4 + 2\beta^2 x^2 - x^2 (\alpha^2 - \beta^2) = 0,$$

was in $x^2 = 0$ und $x^2 = \alpha^2 - 3\beta^2$ zerfällt.

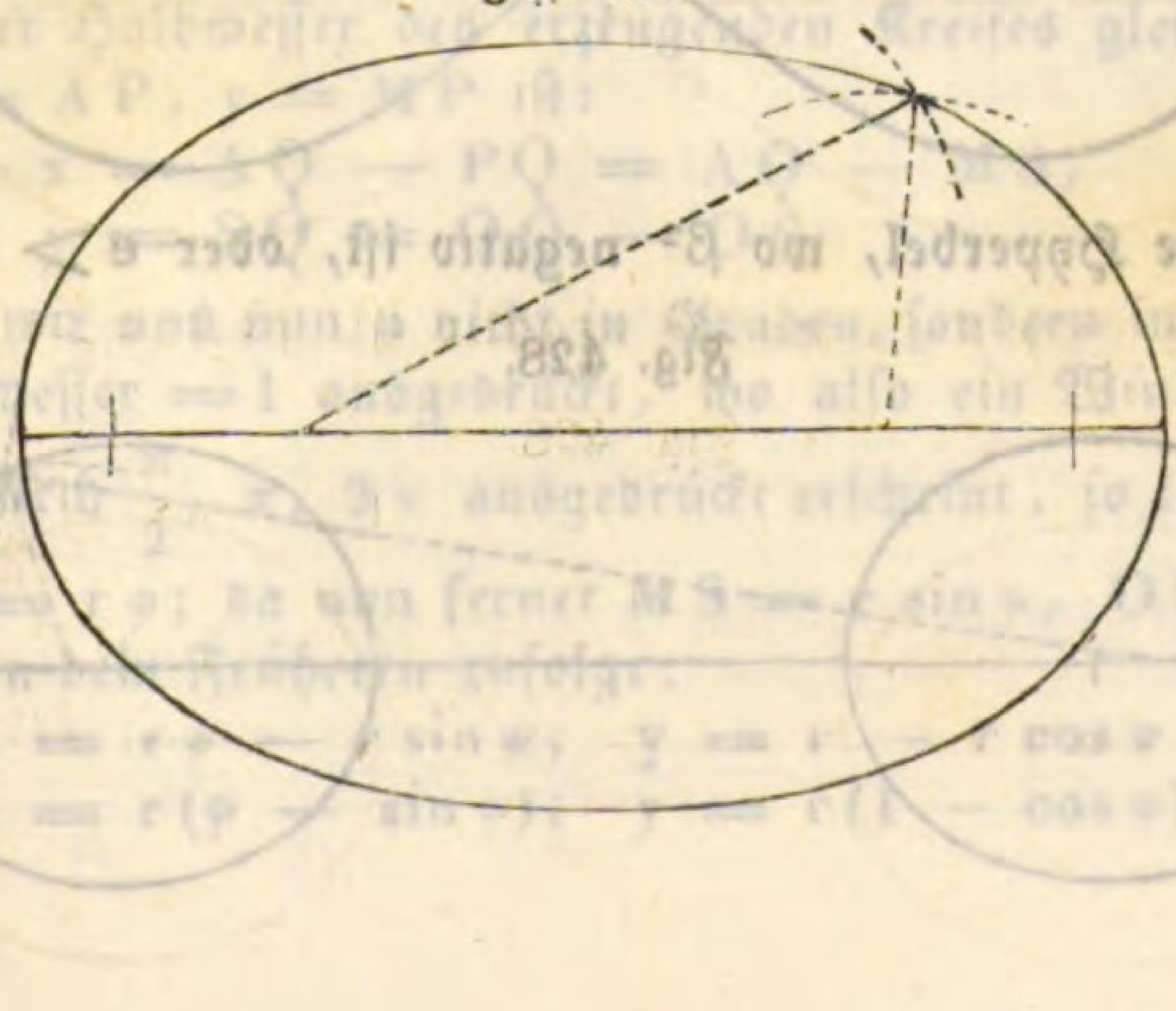
Es wird also noch zwei Punkte in der Krummen geben, wo $y = \beta$ ist, nämlich $x = + \sqrt{\alpha^2 - 3\beta^2}$, und $x = - \sqrt{\alpha^2 - 3\beta^2}$. Setzt man also statt α und β ihre Werthe, so hat man

$$x^2 = \alpha^2 - 3\beta^2 = 2 a^2 (2 e^2 - 1).$$

Eine Gerade im Abstande $= \beta$ von der Abscissenachse wird also die Krumme nicht bloß im Punkte, wo $x = 0$, sondern auch in dem Punkte, wo $x = \pm a \sqrt{2 (2 e^2 - 1)}$ ist, schneiden, und nur dann in einem Punkte, wenn $2 e^2 - 1$ negativ, daher $e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, daher kann die Cassinische Ellipse drei verschiedene Gestalten haben, nämlich:

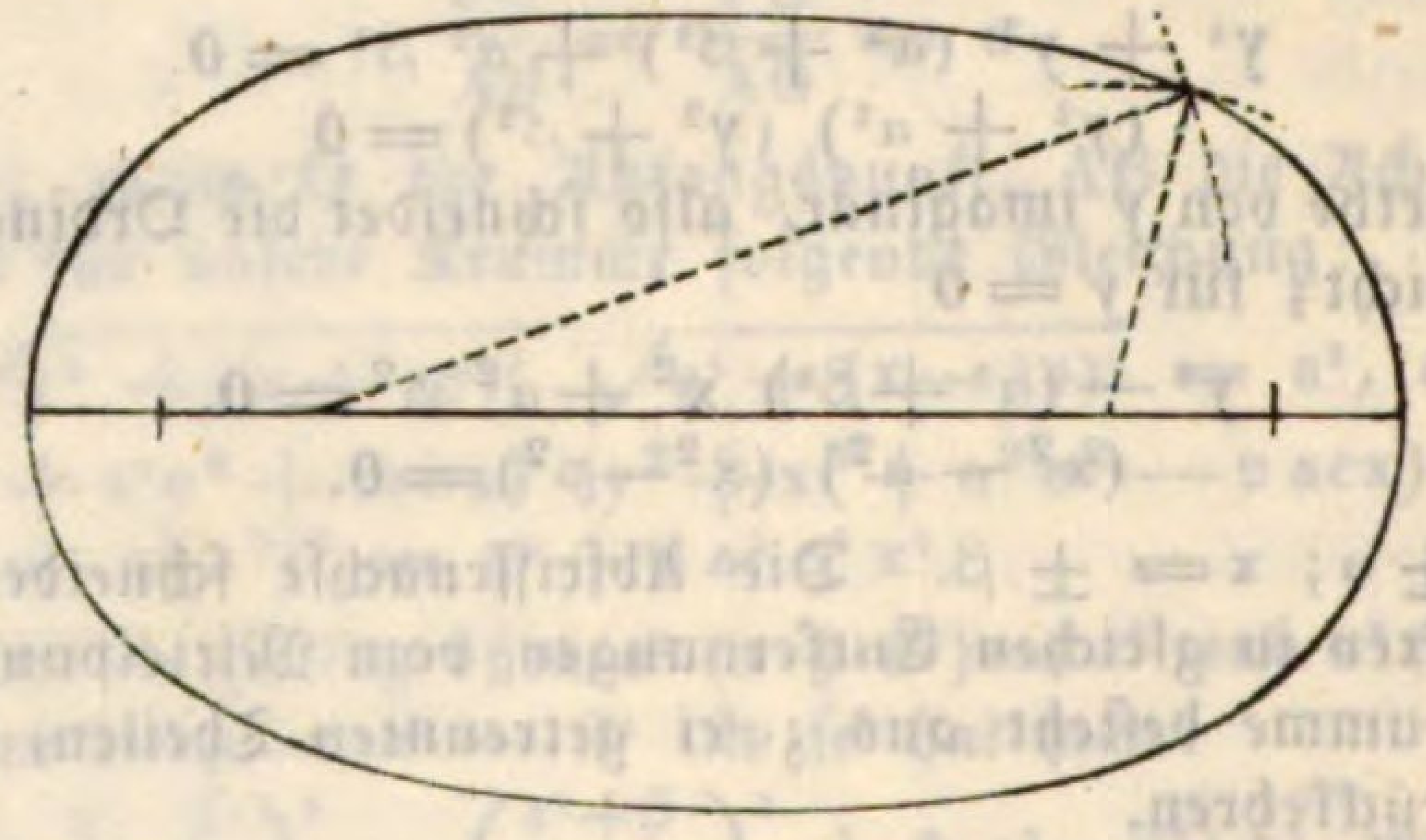
1) $e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ oder $\alpha < \beta \sqrt{3}$

Fig. 424.



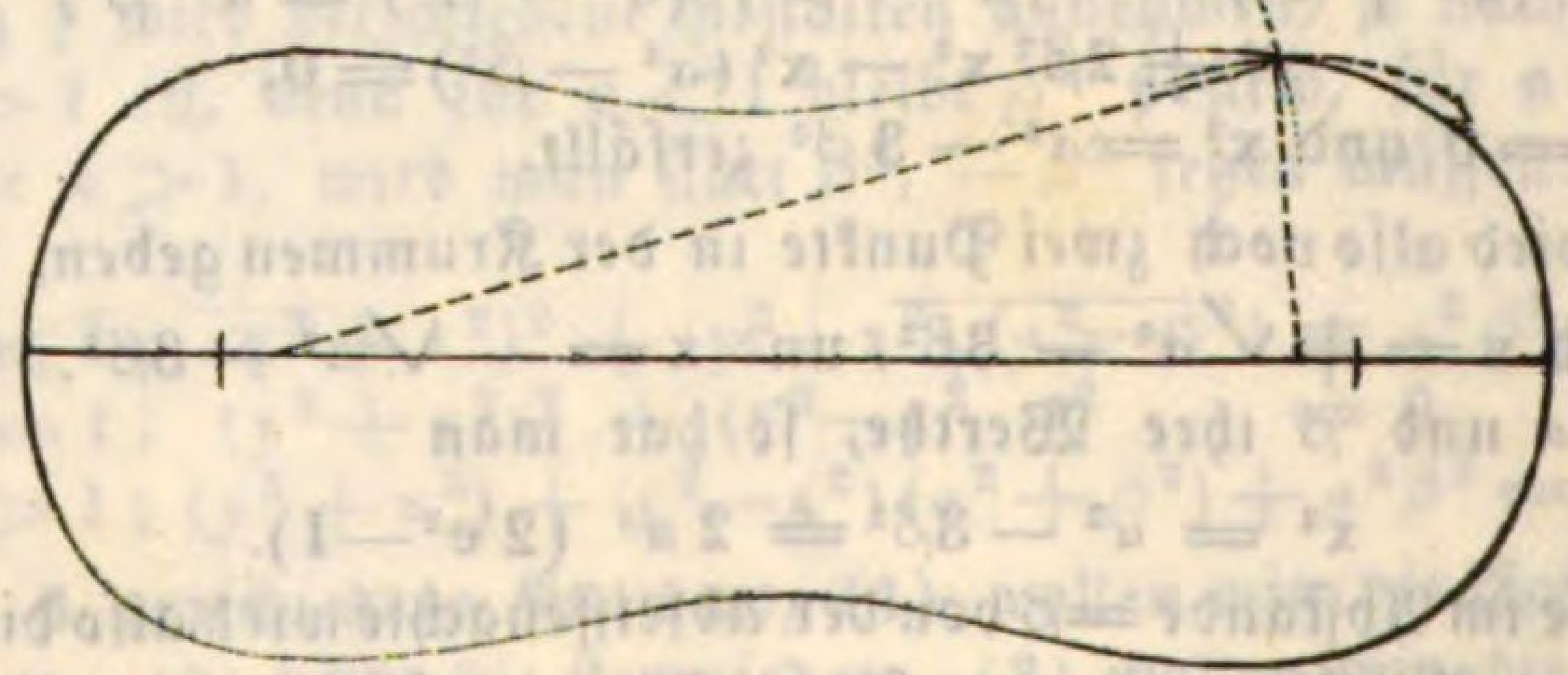
2) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha = \beta\sqrt{3}$

Fig. 425.



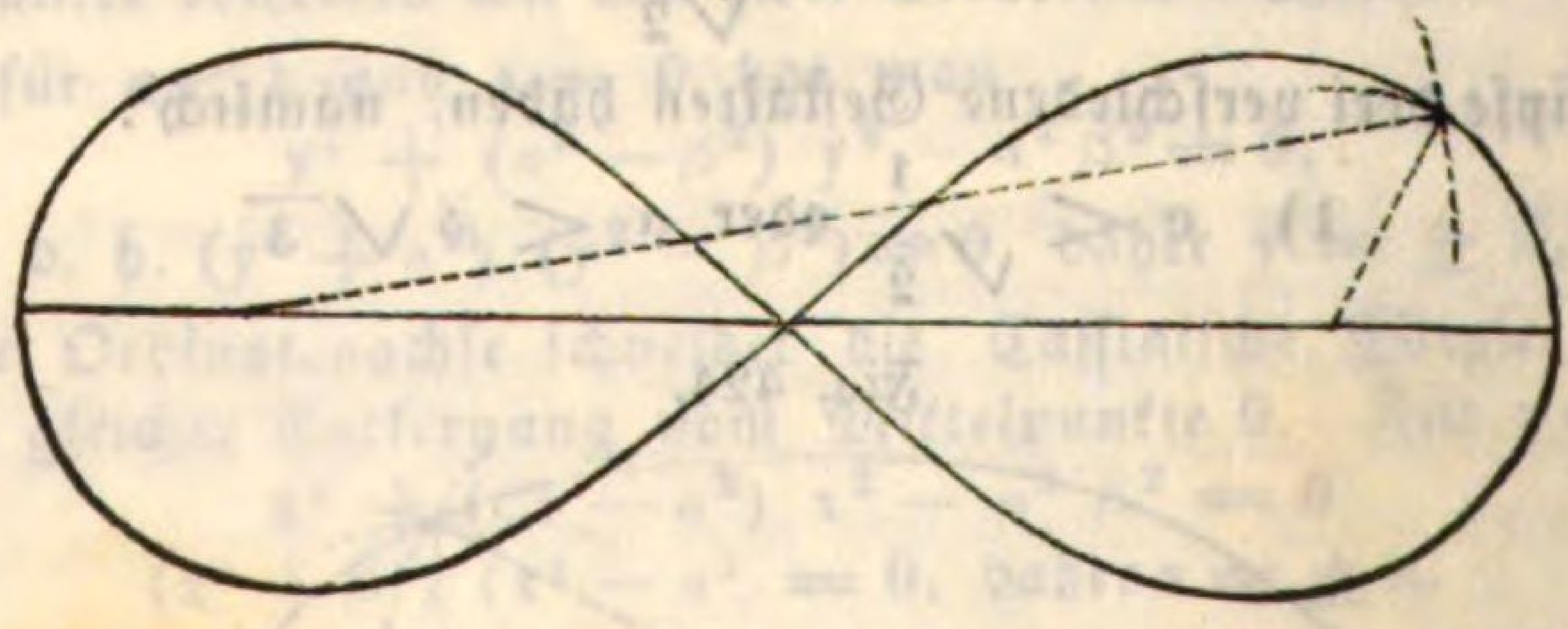
3) $e > \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\alpha > \beta\sqrt{3}$

Fig. 426.



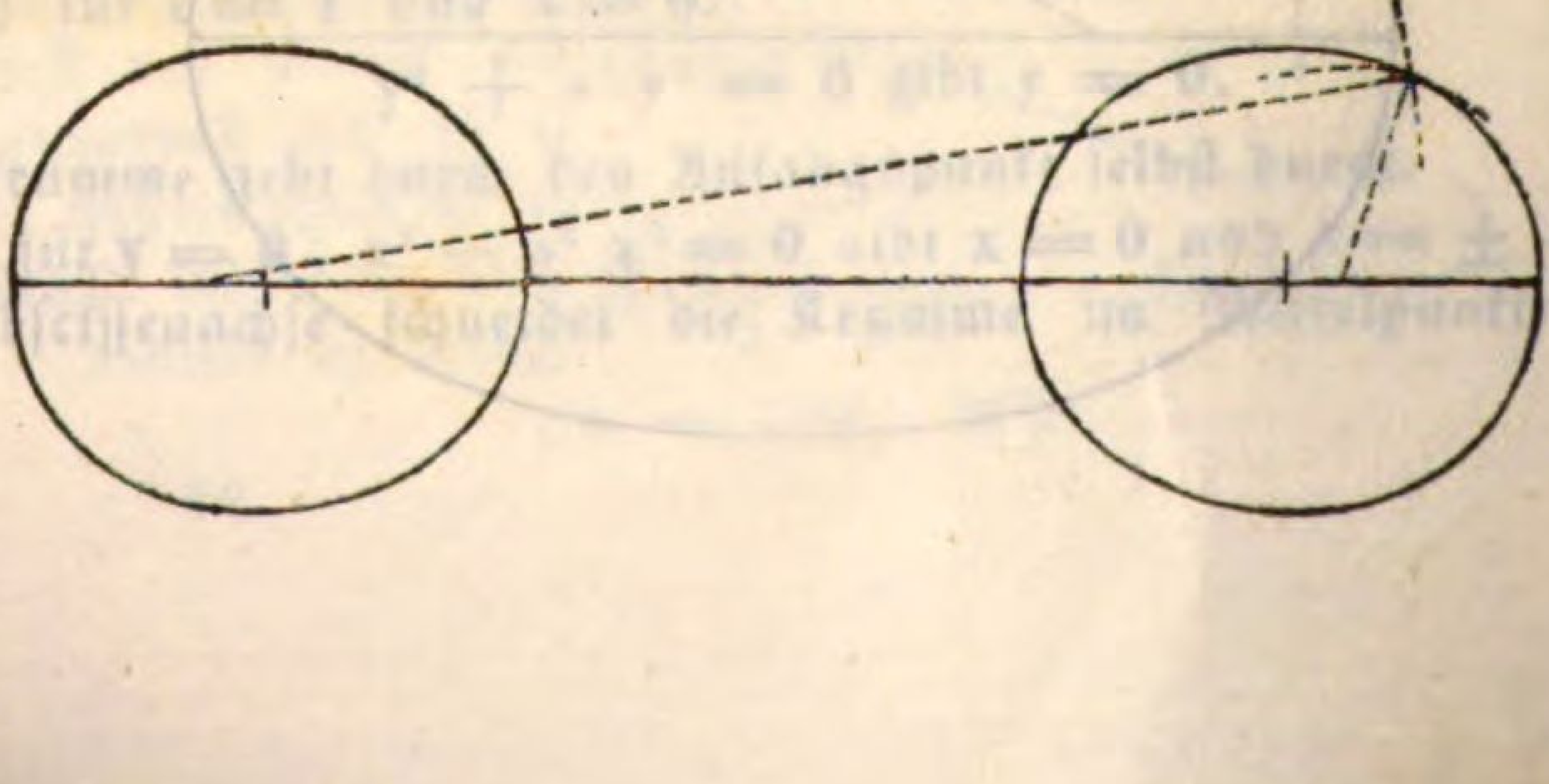
Die Lemniscate oder Schleifenlinie, wo $e = 1$ und $\beta = 0$, hat folgende Gestalt:

Fig. 427.



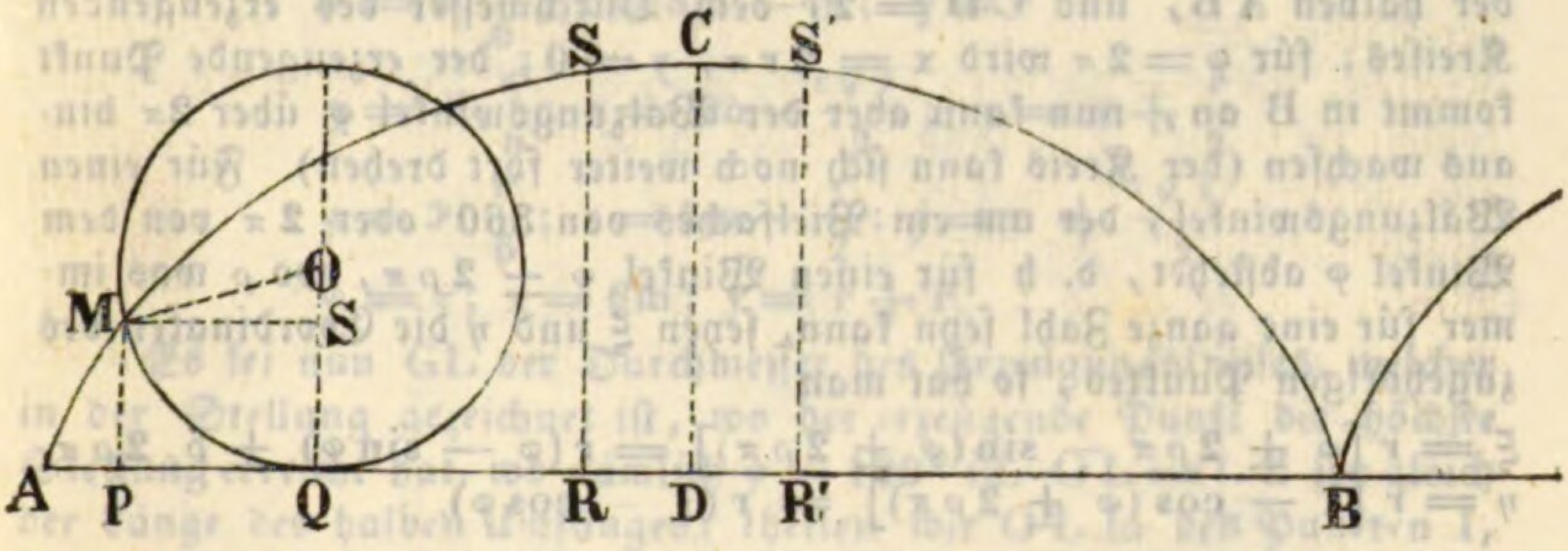
Die Cassinische Hyperbel, wo β^2 negativ ist, oder $e > 1$, dagegen

Fig. 428.



§. 345. **Cycloide oder Radlinie** ist die krumme Linie die ein Punkt eines Kreisumfanges beschreibt, während der Kreis sich auf einer geraden fortwälzt.

Fig. 429.



Es sey MOQ eine der Lagen des erzeugenden Kreises, daß, wenn man den Kreis zurück gegen A wälzt, daß dann der Punkt M das Stück AM der krummen Linie beschreibt; wälzt man den Kreis vorwärts, so wird der Punkt M des Kreisumfanges nach einer Umwälzung des Kreises die krumme Linie ACB beschreiben; nach der zweiten, dritten u. s. w. Umwälzung wird immer ein Bogen wie ACB wiederholt, woraus sich zeigt, daß die Cycloide aus unendlich vielen solchen Bogen wie AB besteht. Man sieht, daß die Grundeigenschaft dieser krummen Linie darin besteht, daß das abgewickelte Stück MQ des Kreises gleich ist dem Stücke AQ der geraden Linie, auf welcher sich der Kreis abwickelt; es wird daraus begreiflich, daß die AB gleich ist dem ganzen Umfange des Kreises aus dem Mittelpunkte O und dem Halbmesser OQ.

Um nun die Gleichung dieser Krummen zu finden, nehmen wir A als Anfangspunkt und AB als Achse der x an, nennen den Winkel MOQ, den der bewegliche Halbmesser MO (der den jeweiligen Mittelpunkt O des beweglichen Kreises mit dem erzeugenden Punkte M verbindet) mit OQ (Halbmesser, der die AB berührt) verbindet, den **Wälzungswinkel**, und bezeichnen wir ihn durch φ, so sieht sich leicht ein, daß in A, $\varphi = 0$, in C, $\varphi = 180^\circ$, in B, $\varphi = 360^\circ$ ist; es sey nun der Halbmesser des erzeugenden Kreises gleich r, so hat man, da $x = AP$, $y = MP$ ist:

$$x = AQ - PQ = AQ - MS,$$
$$y = SQ = OQ - OS.$$

Denken wir uns nun φ nicht in Graden, sondern in Bogenlänge für den Halbmesser $= 1$ ausgedrückt, wo also ein Winkel von 90°, 180°, 360° durch $\frac{\pi}{2}$, π, 2π ausgedrückt erscheint, so ist der Bogen $MQ = AQ = r\varphi$; da nun ferner $MS = r \sin\varphi$, $OS = r \cos\varphi$ ist, so hat man dem Früheren zufolge:

$$x = r\varphi - r\sin\varphi; \quad y = r - r\cos\varphi \quad \text{oder}$$
$$x = r(\varphi - \sin\varphi); \quad y = r(1 - \cos\varphi) \quad (\dagger),$$

wodurch also die Coordinaten jedes einzelnen Punktes der Cycloide durch den jeweiligen Wälzungswinkel ausgedrückt sind. Wenn der beschreibende Punkt in C ankommt, hat sich die halbe Peripherie abgewickelt, es ist dann $\varphi = \pi$, daher $x = r\pi$, $y = 2r$, d. h. AD gleich der halben AB, und $CD = 2r$ dem Durchmesser des erzeugenden Kreises; für $\varphi = 2\pi$ wird $x = 2r\pi$, $y = 0$; der erzeugende Punkt kommt in B an, nun kann aber der Wälzungswinkel φ über 2π hinaus wachsen (der Kreis kann sich noch weiter fort drehen). Für einen Wälzungswinkel, der um ein Vielfaches von 360° oder 2π von dem Winkel φ absteht, d. h für einen Winkel $\varphi \pm 2\rho\pi$, wo ρ was immer für eine ganze Zahl seyn kann, seyen ξ und η die Coordinaten des zugehörigen Punktes, so hat man

$$\xi = r[\varphi \pm 2\rho\pi - \sin(\varphi \pm 2\rho\pi)] = r(\varphi - \sin\varphi) \pm \rho . 2\rho\pi,$$
$$\eta = r[1 - \cos(\varphi \pm 2\rho\pi)] = r(1 - \cos\varphi).$$

Man sieht daher, daß $\xi = x \pm \rho . AB$ und $\eta = y$ ist, d. h. die Ordinate ist für andere Punkte eben so groß, die Abscisse um ein Vielfaches des Umfanges oder des Stückes AB unterschieden. Würde man also durch jeden Punkt unserer Cycloide Gleichlaufende mit AB ziehen, und von diesem Punkte nach vorwärts und rückwärts die Länge von AB, 1, 2, 3 . . . u. s. w. mal auftragen, so bekommt man die Punkte der übrigen Bögen der Cycloide, und alle diese Bögen sind unter einander identisch. Aber auch die zwei Bogenstücke ACD und OCD sind mit einander deckend gleich; denn setzt man in den Formeln (†) statt φ solche Werthe für den Wälzungswinkel, wo der eine gerade so viel über π ist, als der andere unter π, z. B. der eine $\pi - \alpha$, der andere $\pi + \alpha$, und nennen wir die zugehörigen Werthe der x und y: x_1 y_1 x_2 y_2, so hat man:

$$x_1 = r(\pi - \alpha - \sin\alpha); \quad y_1 = r(1 - \cos\alpha)$$
$$x_2 = r(\pi + \alpha + \sin\alpha); \quad y_2 = r(1 - \cos\alpha), \text{ daher}$$
$$x_2 - AD = AD - x_1, \text{ daher}$$
$$x_2 + x_1 = 2r\pi = 2AD; \quad y_2 - y_1 = 0, \text{ und folglich}$$
$$y_2 = y_1$$

Ist so in unserer Figur $x_1 = AR$, $x_2 = AR'$; $y_1 = SR$, $y_2 = S'R'$, so sieht man, daß, wenn $r\alpha = DR = DR'$, dann auch $SR = S'R'$ ist, und umgekehrt.

Die Gleichungen (†) lassen sich auch zur Verzeichnung der Cycloide benützen, nehmen wir nach einander für φ die Werthe von 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180° an, d. h. setzen wir $\varphi = \frac{\pi}{6}, 2 . \frac{\pi}{6}, 3 . \frac{\pi}{6}, 4 . \frac{\pi}{6}, 5 . \frac{\pi}{6}, \pi$, so erhält man, wenn m der 12te Theil des Umfanges des erzeugenden Kreises, d. i. $\frac{1}{12}$ AB ist,

$$\varphi = \frac{\pi}{6};\ x = m - \frac{r}{2};\ y = r - \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = 2 . \frac{\pi}{6};\ x = 2m - \frac{r\sqrt{3}}{2};\ y = r - \frac{r}{2}$$

$$\varphi = 3 . \frac{\pi}{6};\ x = 3m - r;\ y = r$$

$$\varphi = 4 . \frac{\pi}{6};\ x = 4m - \frac{r\sqrt{3}}{2};\ y = r + \frac{r}{2}$$

$$\varphi = 5 . \frac{\pi}{6};\ x = 5m - \frac{r}{2};\ y = r + \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \pi;\ x = 6m;\ y = r + r.$$

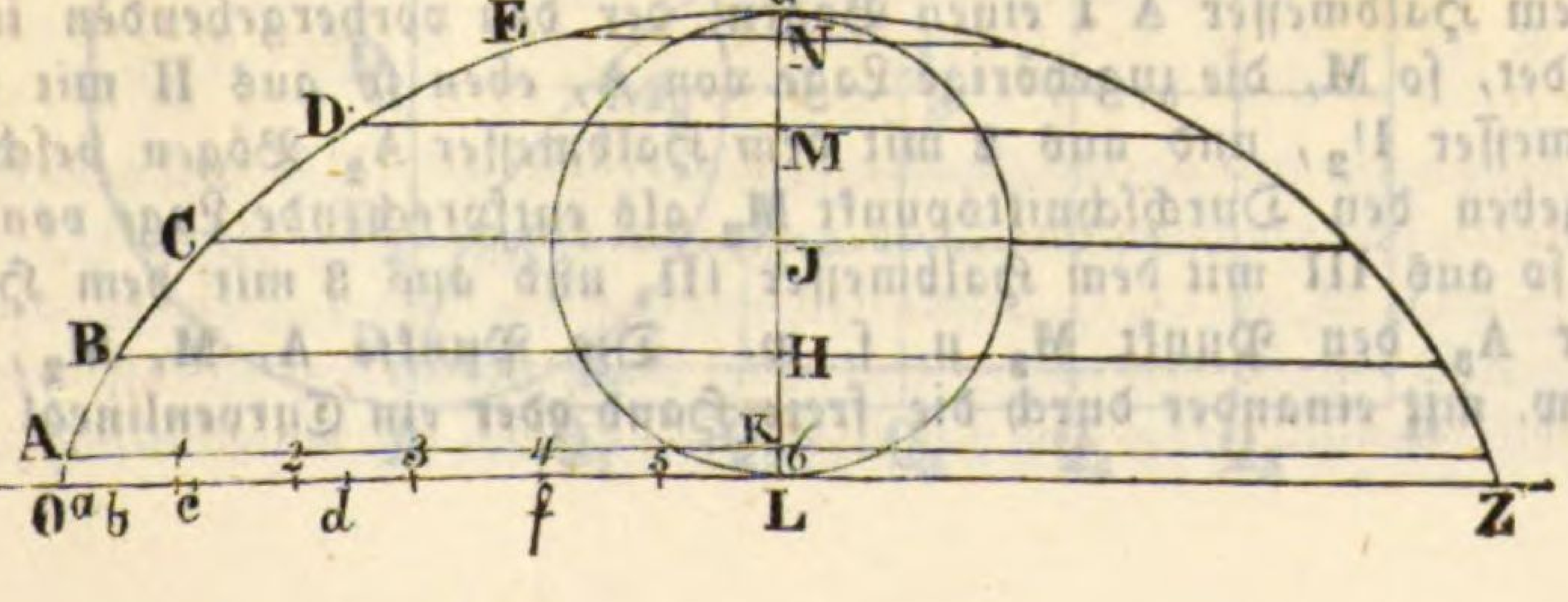
Es sei nun GL der Durchmesser des Erzeugungskreises, welcher in der Stellung gezeichnet ist, wo der erzeugende Punkt die höchste Stellung erreicht hat, wo nämlich $\varphi = 180^0$ ist. O L = L Z sey gleich der Länge des halben Umfanges; theilen wir O L in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 in sechs gleiche Theile, theilen wir eben so den halben Umfang des Erzeugungskreises in sechs gleiche Theile, und ziehen durch die Theilungspunkte des Kreises gleichlaufende mit O Z, welche den Durchmesser GL in den Punkten N, M, I, H, K treffen so sieht man leicht, daß

$$KL = r - \frac{r\sqrt{3}}{2},\ HL = r - \frac{r}{2};\ JL = r,\ ML = r + \frac{r}{2}\ NL = r + \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

ist, da nun $01 = m$, $02 = 2.m$ $03 = 3.m$ u. s. w. ist, und wenn man $a1 = HJ = \frac{r}{2}$ von 01 abschneidet, so ist $0a = m - \frac{r}{2}$ schneidet man eben so von 20, $2b = JK = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ ab, so ist $Ob = 2m - \frac{r\sqrt{3}}{2}$; von 3O abgeschnitten $3c = IL = r$, hat man $Oc = 3m - r$; von 4 O abgeschnitten $4d = IK = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, hat man $Od = 4m - \frac{r\sqrt{3}}{2}$; von 5 O abgeschnitten $5f = IH = \frac{r}{2}$, hat man $OF = 5m - \frac{r}{2}$.

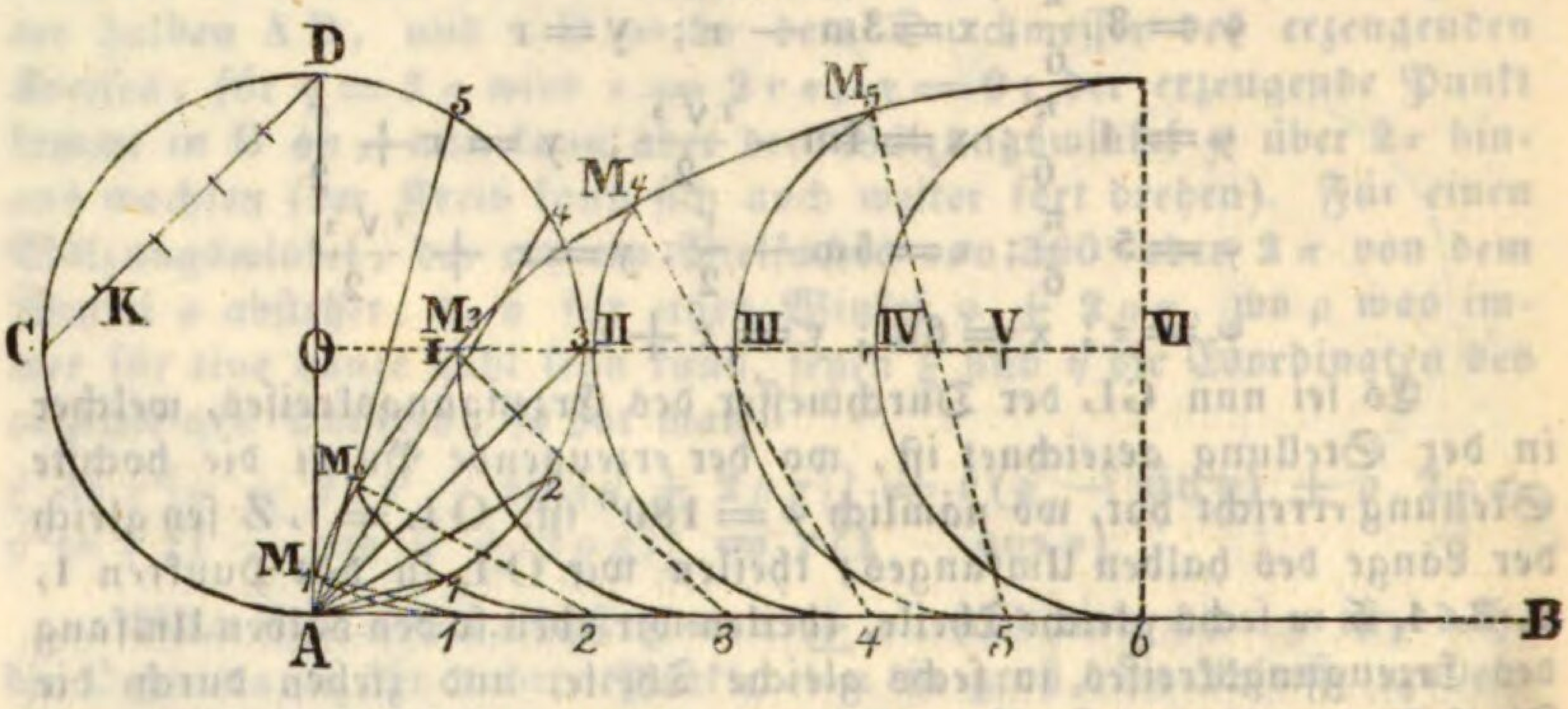
Zieht man nun durch die Punkte a, b, c, d, f gleichlaufende mit G L, so gibt der Durchschnittspunkt von A a und A K den Punkt A, eben so Bb und BH den Punkt B u. s. w. Verbindet man die Punkte O, A, B, D, D, F, G durch die freie Hand, so hat man den halben Cycloidalbogen OG, die andere Hälfte kann man ganz auf dieselbe Art erhalten.

Fig. 430



§. 346. Eine andere bequemere Verzeichnung der Cycloide geht aus der Natur ihrer Entstehung hervor.

Fig. 431.

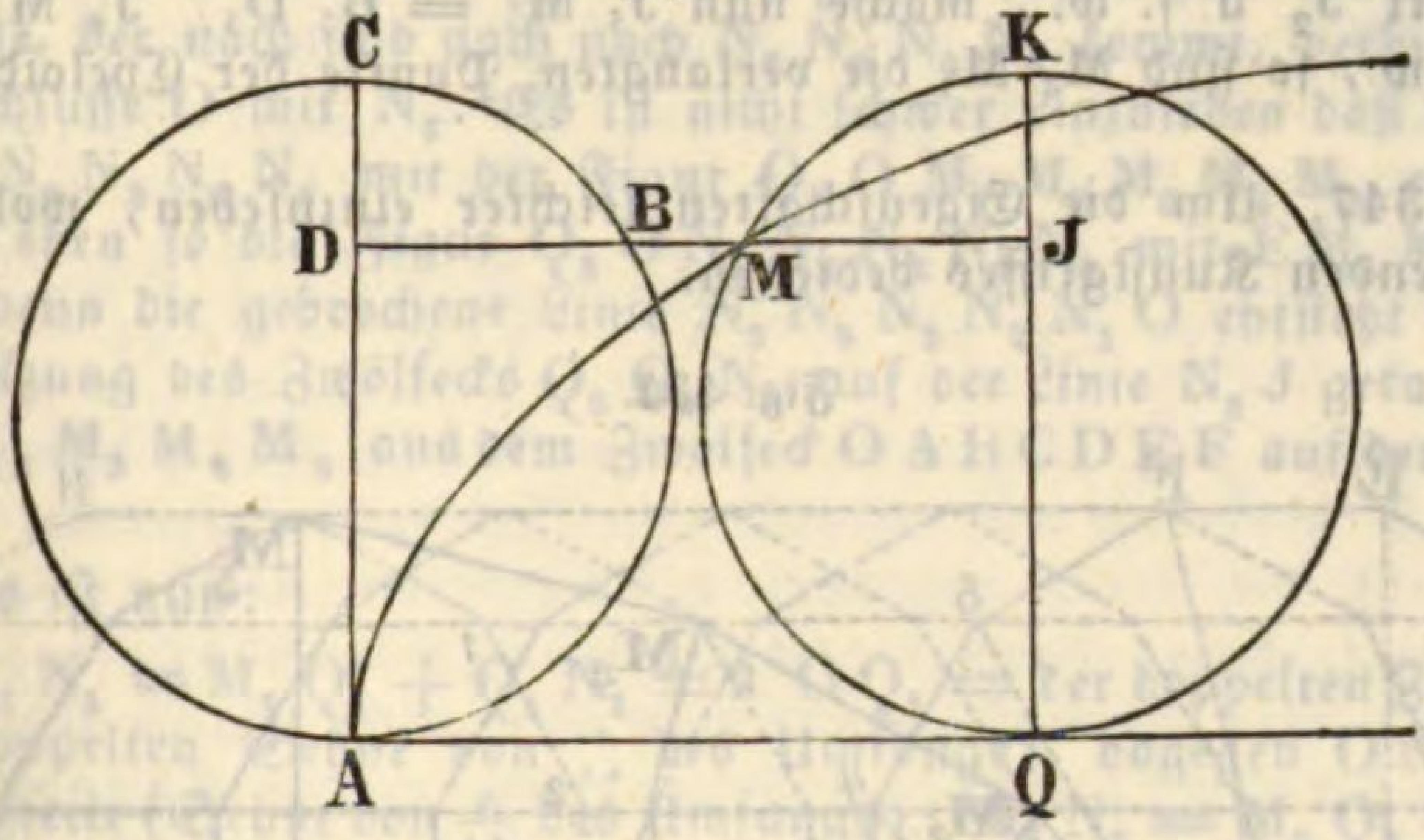


Der erzeugende Kreis habe zuerst seinen Mittelpunkt in O, ich theile die Sehne des Quadranten CD in fünf gleiche Theile, und trage AB = 3 AD + CK auf, so ist AB sehr nahe dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich. Es sey A 6 die Hälfte von AB, so also, daß A 6 gleich dem halben Umfange AD gleich ist; ich theile nun den halben Umfang AD und A 6 in sechs gleiche Theile, die Theilpunkte bezeichne ich beiderseits mit 1, 2, 3, 4, 5, 6, so ist begreiflich, daß bei der Wälzung des Kreises die gleichbezifferten Punkte auf einander kommen; errichtet man in 1, 2, 3 u. s. w. Lothe, welche die durch O mit AB gleichlaufend gezogenen Grade in I II, III u. s. f. schneidet, so sind I, II, III ... die Lagen, die der Mittelpunkt O nach einander einnimmt, während die gleichbezifferten Punkte des Kreises und der geraden AB auf einander treffen, es handelt sich nur darum, wo bei jeder dieser Lagen der erzeugende Punkt M sich befindet, dazu dienen uns nun die Entfernungen des Punktes A von den fraglichen Punkten 1, 2, 3... und dem Mittelpunkte O. Um also die Lage des Punktes A zu finden, wenn 1 des Halbkreises auf 1 der AB bei der Wälzung des Kreises kommt, berücksichtige ich, daß A in derselben Entfernung von 1, welcher gleich A, und in derselben Entfernung von O gleich OA bleibt, ich beschreibe also auch I als Mittelpunkte dem nunmehrigen Orte des O mit dem Halbmesser OA einen Kreisbogen, der in 1 die AB berührt, und eben so aus 1 mit dem Halbmesser A 1 einen Bogen, der den vorhergehenden in M schneidet, so M, die zugehörige Lage von A, eben so aus II mit dem Halbmesser 1_2, und aus 2 mit dem Halbmesser A_2 Bögen beschrieben geben den Durchschnittspunkt M_2 als entsprechende Lage von A; eben so aus III mit dem Halbmesser III_3 und aus 3 mit dem Halbmesser A_3 den Punkt M_3 u. s. w. Die Punkte A, M, M_2, M_3 u. s. w. mit einander durch die freie Hand oder ein Curvenlineal ver-

bunden geben die Cycloide. Wenn man die Theilung des Halbkreises statt in sechs in mehr Theile vornimmt, und sonst auf dieselbe Art verfährt, so kann man mehr Punkte der Cycloide bestimmen, was aber wohl nur selten nothwendig sein möchte.

Zweite Verzeichnungsart der Cycloide.

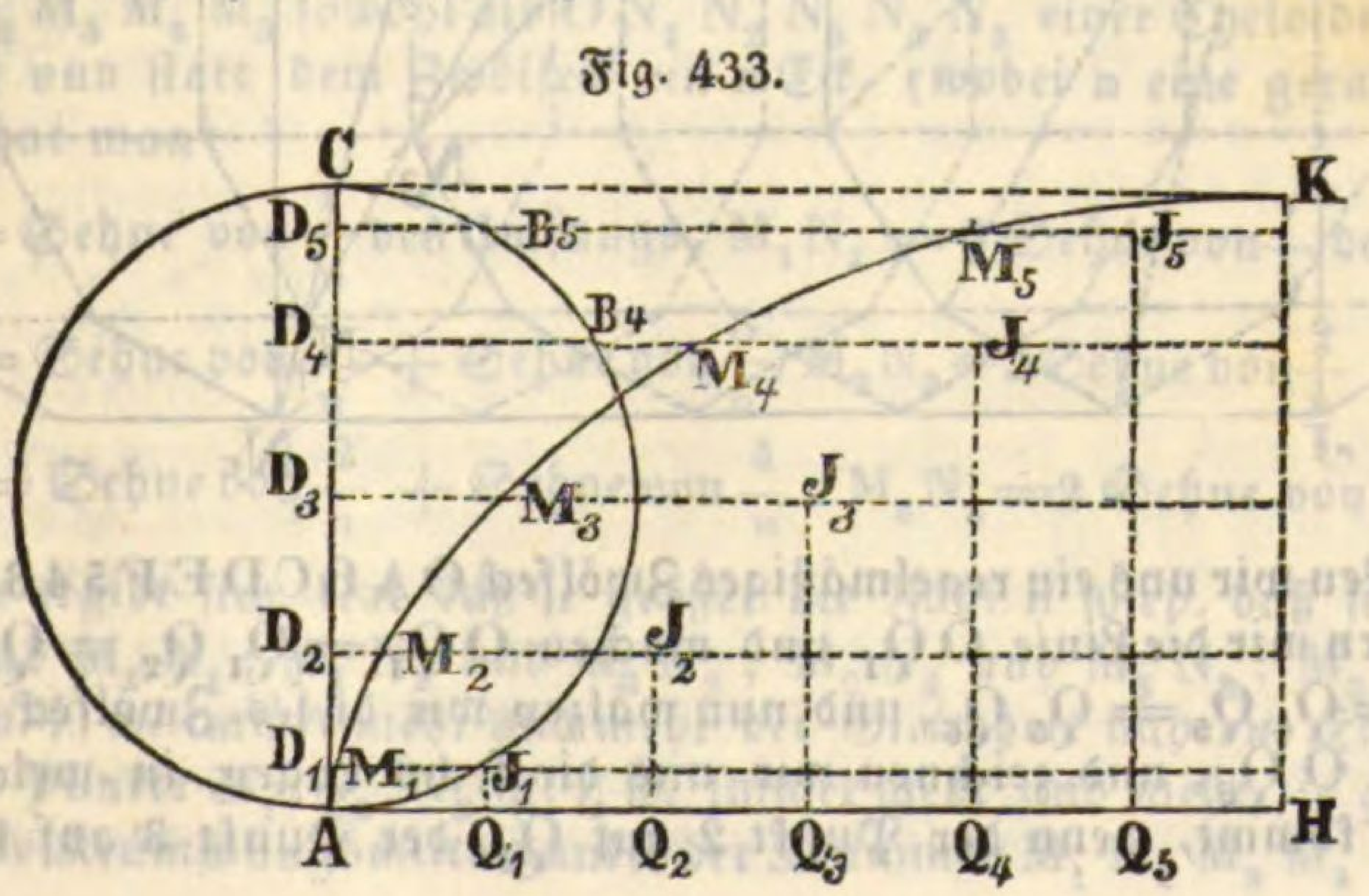
Fig. 432



Ist die Lage des Berührungspunktes Q des Erzeugungskreises gegeben, so helfen uns die folgenden Betrachtungen zur Auffindung der Lage des erzeugenden Punktes M. Ist die anfängliche Lage des Erzeugungskreises A B C, und die des erzeugenden Punktes A, so muß, wenn der Punkt A, später durch Umwälzung des Kreises nach M kommt, der Bogen M Q gleich dem Stücke A Q seyn; zieht man nun durch M die D I mit A Q gleichlaufend, die den Kreis A B C in B schneidet, so muß der Bogen A B = M Q seyn und B D = M I. Wie man sieht, ist Q der Punkt, wo B hinkommt, wenn A den Punkt M erreicht.

Ziehe also durch B eine gleichlaufende mit A Q (wobei Bogen A B = A Q ist), welche das Loth in Q im Punkte J trifft, und mache M I = B D, so habe ich den Punkt M.

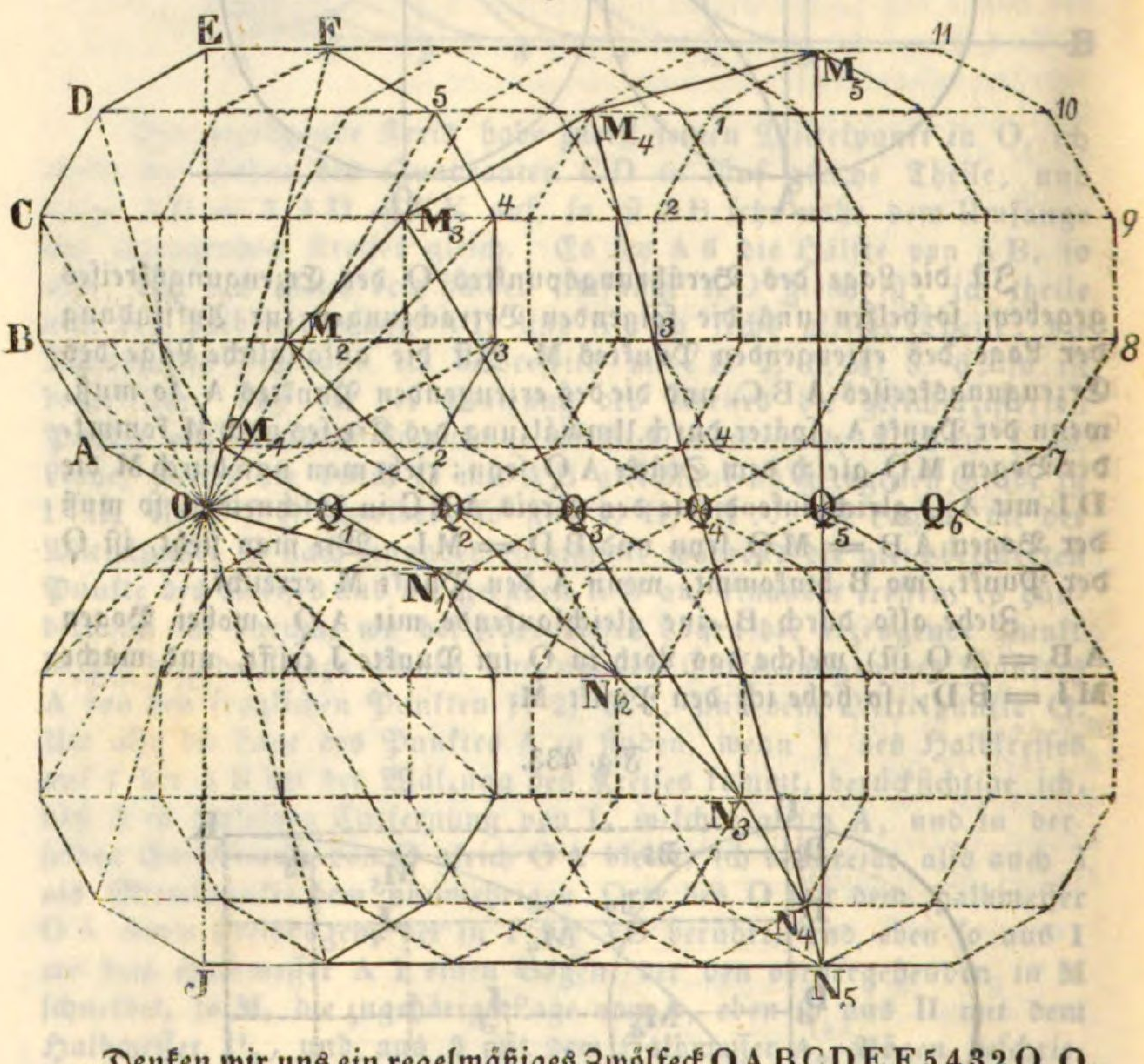
Fig. 433.



Um also mehrere Punkte der Cycloide zu verzeichnen, theile ich mir den Halbkreis A C in mehre, z. B. sechs gleiche Theile, die ich mit B bezeichne, mache A H dem halben Umfange des erzeugenden Kreises gleich, theile A H in eben so viele gleiche Theile, hier in 6 die ich mit Q bezeichne, ziehe durch B eine gleichlaufende mit A Q, errichte in die verschieden mit Q bezeichneten Punkte Lothe, wo B_5 D_5 und das Loth in Q_5 sich schneidet, ist der Punkt J_5, wo B_2 D_2 das Loth von Q_2 trifft, der Punkt J_2 u. s. w., mache nun J_5 $M_5 = B_5$ D_5: J_4 $M_4 = B_4$ D_4 u. s w., so sind M_4 M_5 die verlangten Punkte der Cycloide

§. 347. Um die Eigenschaften leichter einzusehen, wollen wir uns folgenden Kunstgriffes bedienen.

Fig. 434.



Denken wir uns ein regelmäßiges Zwölfeck O A B C D E F 5 4 3 2 Q_1 O, verlängern wir die Linie O Q_1 und machen O Q_1 = Q_1 Q_2 = Q_2 Q_3 = Q_3 Q_4 = Q_4 Q_5 = Q_5 Q_6, und nun walzen wir dieses Zwölfeck auf der Geraden O Q_6, und zeichnen wir uns die sechs Lagen, in welche das Zwölfeck kömmt, wenn der Punkt 2 auf Q_2, der Punkt 3 auf Q_3, der

Punkt 4 auf Q_4 u. s. w. kömmt, d. h. wenn das Zwölfeck immer um eine Seite weiter gewälzt wurde, fassen wir dabei die Orte ins Auge, die der Punkt O einnimmt; nach der ersten Wälzung kömmt O nach M_1, nach der zweiten nach M_2, dann nach M_3, M_4, M_5, verbinden wir diese Orte durch die geraden $O\,M_1$, $M_1\,M_2$, $M_2\,M_3$ u. s. w., so entsteht die gebrochene Linie $O\,M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5$, zeichnen wir unterhalb $O\,Q$ ein congruentes Zwölfeck $O\,Q_1\,N_1\,J$, und wälzen wir dasselbe ganz auf gleiche Weise auf der geraden $J\,N_5$, wir fassen hier den Punkt N_1 ins Auge, der nach und nach nach $N_2\,N_3\,N_4\,N_5$ kommt, verbinden wir zum Schlusse O mit N_1. Es ist nicht schwer einzusehen daß die Figur $J\,O\,N_1\,N_2\,N_3\,N_4\,N_5$ mit der Figur $Q_5\,O\,M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5$ congruent ist, und eben so die Figur $Q_5\,O\,N_1\,N_2\,N_3\,N_4\,N_5$ mit $E\,M_5\,M_4\,M_3\,M_2\,M_1\,O$; denn die gebrochene Linie $N_5\,N_4\,N_3\,N_2\,N_1\,O$ entsteht aus der Rückwälzung des Zwölfecks $Q_5\,Q_6\,N_5$ auf der Linie $N_5\,J$ gerade so wie $O\,M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5$ aus dem Zwölfeck O A B C D E F auf der geraden $O\,Q_6$.

Es ist nun:

$M_1\,N_1 = M_1\,Q_1 + Q_1\,N_1 = 2.\,O\,Q_1 =$ der doppelten Zwölfecksseite (doppelten Sehne von $\frac{1}{12}$ des Umfangs), dagegen $O\,N_1 =$ der Sechseckseite (Sehne von $\frac{2}{12}$ des Umfangs). $M_2\,N_2 = M_2\,Q_2 + Q_2\,N_2$ = der doppelten Sechseckseite, $M_1\,N_2 = M_1\,Q_1 + Q_1\,N_2 =$ der Zwölfeckseite mehr Sehne von $\frac{3}{12}$ des Umfanges. $M_3\,N_3 = M_3\,Q_3 + Q_3\,N_3 = 2\,M_3\,Q_3 =$ doppelter Sehne von $\frac{3}{12}$ des Umfanges, $M_2\,N_3 = M_2\,Q_2 + Q_2\,N_3 =$ Sehne von $\frac{2}{12}$ + Sehne von $\frac{4}{12}$. $M_4\,N_4 = M_4\,Q_4 + Q_4\,N_4 = 2\,M_4\,Q_4 =$ doppelten Sehne von $\frac{4}{12}$, $M_3\,N_4 = M_3\,Q_3 + Q_3\,N_4 =$ Sehne von $\frac{3}{12}$ mehr Sehne von $\frac{5}{12}$ des Umfangs. $M_5\,N_5 = M_5\,Q_5 + Q_5\,N_5 = 2\,M_5\,Q_5 =$ doppelter Sehne von $\frac{5}{12}$, $M_4\,N_5 = M_4\,Q_4 + Q_4\,N_5 =$ Sehne von $\frac{4}{12}$ + Sehne von $\frac{6}{12}$ des Umfanges.

Diese Betrachtungen können wir eben so gut auf ein 24 Eck, 48 Eck, 96 Eck, 192 Eck u. s. w. anwenden, wenn wir so die Anzahl der Seiten des Polygons fort und fortwährend verdoppeln, so nähert sich dasselbe ohne Ende einem Kreise, dann nähert sich die gebrochene Linie $O\,M_1\,M_2\,M_3\,M_4\,M_5$ sowohl als $O\,N_1\,N_2\,N_3\,N_4\,N_5$ einer Cycloide, denken wir uns nun statt dem Zwölfeck ein n Eck, (wobei n eine gerade Zahl sei) so hat man:

$O\,N_1 =$ Sehne von $\frac{1}{n}$ des Umfangs, $M_1\,N_1 = 2$ Sehne von $\frac{1}{n}$ des Umf.,

$M_1\,N_2 =$ Sehne von $\frac{1}{n}$ + Sehne von $\frac{3}{n}$, $M_2\,N_2 = 2$ Sehne von $\frac{2}{n}$ » »

$M_2\,N_3 =$ Sehne von $\frac{2}{n}$ + Sehne von $\frac{4}{n}$, $M_3\,N_3 = 2$ Sehne von $\frac{3}{n}$ usw.

Es ergibt sich, klar daß je größer die Zahl n wird, daß sich dann $O\,N_1$ und $M_1\,N_1$; $M_1\,N_2$ und $M_2\,N_2$; $M_2\,N_3$ und $M_3\,N_3$; $M_3\,N_4$ und $M_4\,N_4$ u. s. w. immer mehr und mehr der Gleichheit nahern. Es werden also die Punkte N_1, N_2, N_3 u. s. w. immer mehr und mehr, je größer n wird, die Krümmungsmittelpunkte der Krummen $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ werden.

Es werden so $ON_1 = M_1 N_1$; $M_1 N_2 = M_3 N_3$: $M_2 N_3 = M_3 N_3$ u. s. w. immer mehr die Krümmungshalbmesser der Curve $OM_1 M_2 M_3$ und zugleich die Berührenden der Curve $ON_1 N_2 N_3 N_4$. . seyn. Für $n = \infty$, d. h. für die Cycloide wird alles dieses ganz strenge gelten. Man sieht also die Krümmungsmittelpunkte der Cycloide $OM_1 M_2 M_3$... liegen wieder in einer mit der früher congruenten Cycloide, die Normalen der einen sind die Berührenden der andern, legt man einen beugsamen unausdehnbaren Faden an den Umfang der Cycloide $ON_1 N_2 N_3 N_4 N_5$, und wickelt diesen Faden ab, so beschreibt der Endpunkt O die Cycloide $OM_1 M_2 M_3 M_4 M_5$... Es ist daher $ON_1 N_2 N_3$... die Evolute von $OM_1 M_2 M_3$... d. h. die **Evolute der Cycloide ist wieder ein mit dieser congruente Cycloide** Da ferner $M_1 N_1 = 2 M_1 Q_1$. $M_2 N_2 = 2 M_2 Q_2$; $M_3 Q_3 = 2 M_3 Q_3$ u. s. w. ist, so ist der **Krümmungshalbmesser jedes Punktes doppelt so groß als die zugehörige Normale.** Gehet das Polygon in einen Kreis über, so wird, wenn M_1 die Lage des erzeugenden Punktes ist, dann Q_1 der Berührungspunkt des wälzenden Kreises mit der geraden OQ_5 seyn, daher **wird die Lage des erzeugenden Punktes mit dem Punkte wo der wälzende Kreis in diesem Augenblicke die Grundlinie der Cycloide berührt, jederzeit die Normale dieses Punktes geben.**

(**Flächeninhalt der Cycloide.**) Das Dreieck $OQ_1 N_1$ ist mit OAB congruent, denn OQ_1, $N_1 Q_1$, AO, AB sind alle Sehnen von ein $\frac{1}{12}$ des dem Zwölfeck umschriebenen Kreises. eben so sind BO und ON_1 Sehnen von $\frac{2}{12}$; eben so sind die Dreiecke $Q_1 N_2 Q_2$ und BOC, die Dreiecke $Q_2 N_3 Q_3 \equiv COD$: $Q_3 N_4 Q_4 = DOE$; $Q_4 N_5 Q_5 = EOF$ daher die Figur $ON_1 N_2 N_3 N_4 N_5 Q_5$ gleich dem halben regelmäßigen Vielecke OABCDEFO. Das Rechteck $OJN_5 Q_5$ ist gleich $OQ_5 . OJ$; das regelmäßige Zwölfeck selbst ist gleich dem Umfange desselben multiplicirt mit dem halben Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, oder dem halben Umfang multiplicirt mit dem Halbmesser, daher ist das regelmäßige Polygon gleich $OQ_6 . \frac{1}{2} OJ$. Je größer die Anzahl der Seiten, und je kleiner zugleich eine derselben wird, desto kleiner wird $Q_5 . Q_6$. desto geringer der Unterschied zwischen OQ_5 und OQ_6, also auch zwischen $\frac{1}{2} OI . OQ_5$ und $\frac{1}{2} OI . OQ_6$. Daher wird das Rechteck $OIQ_5 N_5$ immer mehr gleich seyn dem doppelten Vielecke, je mehr als Seiten sind; daher die Summe $ON_1 N_2 N_3 N_4 N_5 IO = \frac{3}{2}$ des Vieleckes, desto mehr als Seiten sind. Da diese Betrachtungen gelten, das regelmäßige Vieleck mag noch so viel Seiten haben, so gelten sie auch für den Kreis; daher ist der halbe Raum zwischen der Cycloide und der Grundlinie gleich $\frac{3}{2}$ so groß als der Flächeninhalt des Erzeugunskreises, daher **der ganze cycloidalische Raum gleich 3 mal so groß als der Flächeninhalt des Erzeugungskreises.** Der Raum aber zwischen dem halben absteigenden und halben aufsteigenden Aste der Cycloide und einer sie in dem höchsten Punkte berührenden Geraden ist gleich dem Erzeugungskreise selbst.

(Berechnung der Länge der Cycloide.) Betrachten wir wieder unsere vorhergehende Figur, und bezeichnen wir der Kürze halber die Sehne von $\frac{1}{12}$ durch a_1 die Sehne von $\frac{2}{12}$ durch a_2; die Sehne von $\frac{3}{12}$ durch a_3 u. s. f. so hat man:

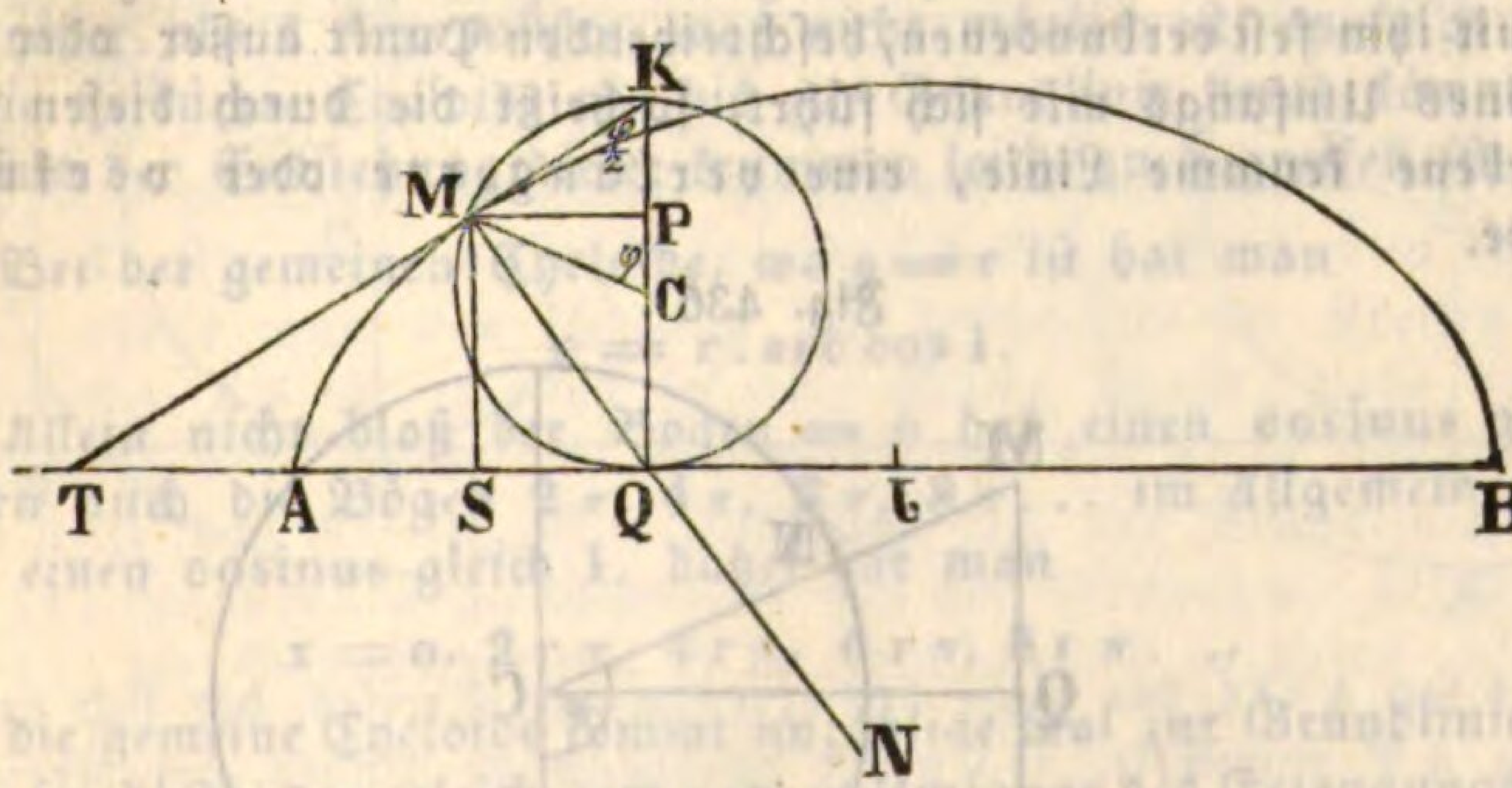
$$ON_1 = a_2$$
$$N_1 N_2 = Q_1 N_2 - Q_1 N_1 = a_3 - a_1$$
$$N_2 N_3 = Q_2 N_3 - Q_2 N_2 = a_4 - a_2$$
$$N_3 N_4 = Q_3 N_4 - Q_3 N_3 = a_5 - a_3$$
$$N_4 N_5 = Q_4 N_5 - Q_4 N_4 = a_6 - a_4$$

daher:

$$ON_1 + N_1 N_2 + N_2 N_3 + N_3 N_4 + N_4 N_5 = a_5 + a_6 - a_1$$
$$= OE + OF - AO,$$

d. h. die Länge der gebrochenen Linie $ON_1 N_2 N_3 N_4 N_5$ ist gleich dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises OE mehr dem Durchmesser des umschriebenen Kreises OF weniger der Seite des Vielecks AO. Da diese Betrachtungen für regelmäßige Vielecke von wie immer großer Anzahl von Seiten gelten, da die Durchmesser des um- und eingeschriebenen Kreises einander immer mehr gleich werden, und die Seite eines regelmäßigen Vielecks bei wachsenden Anzahl der Seiten immer kleiner wird, so hat man für die Länge des halben Cycloidalbogens den doppelten Durchmesser, daher für die Länge des ganzen Cycloidalbogens den vierfachen Durchmesser oder achtfachen Halbmesser des Erzeugungskreises.

Fig. 435.



§. 348. Ist AMB eine Cycloide, KMQ die Lage des erzeugenden Kreises die zu dem Punkte M gehört, Q der Punkt wo der Kreis KMQ die Grundlinie AB der Cycloide berührt, so ist MQ die Normale des Punktes M; zieht man nun den Durchmesser KCQ und die Gerade MK, so ist der Winkel KMQ ein rechter, daher die Gerade MK eine berührende der Cycloide im Punkte M, durch welche Betrachtung uns das Mittel an die Hand gegeben ist, zu jedem Punkte

der Cycloide eine Berührende zu ziehen. Macht man $MQ = QN$, so ist dann N der Krümmungsmittelpunkt für M.

Die Subtangente $TS = y \tang \frac{\varphi}{2}$, die Subnormale $SQ = r \sin \varphi$

$$\text{Tangente } TM = \frac{y}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{r(1 - \cos \varphi)}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{2 r \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{Normale } MQ = 2 r \sin \frac{\varphi}{2}$$

Wenn man aus den Gleichungen $x = r(\varphi - \sin \varphi)$ und $y = r(1 - \cos \varphi)$ des φ hinausschafft, so erhält man zuerst $\cos \varphi = 1 - \frac{y}{r}$, daher φ ein Bogen (arcus) ist, dessen cosinus gleich $1 - \frac{y}{r}$ ist, was man durch $\varphi = \text{arc} \cos \left(1 - \frac{y}{r}\right)$ ausdrückt;

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2\right]} = \frac{1}{r} \sqrt{2 r y - y^2}$$

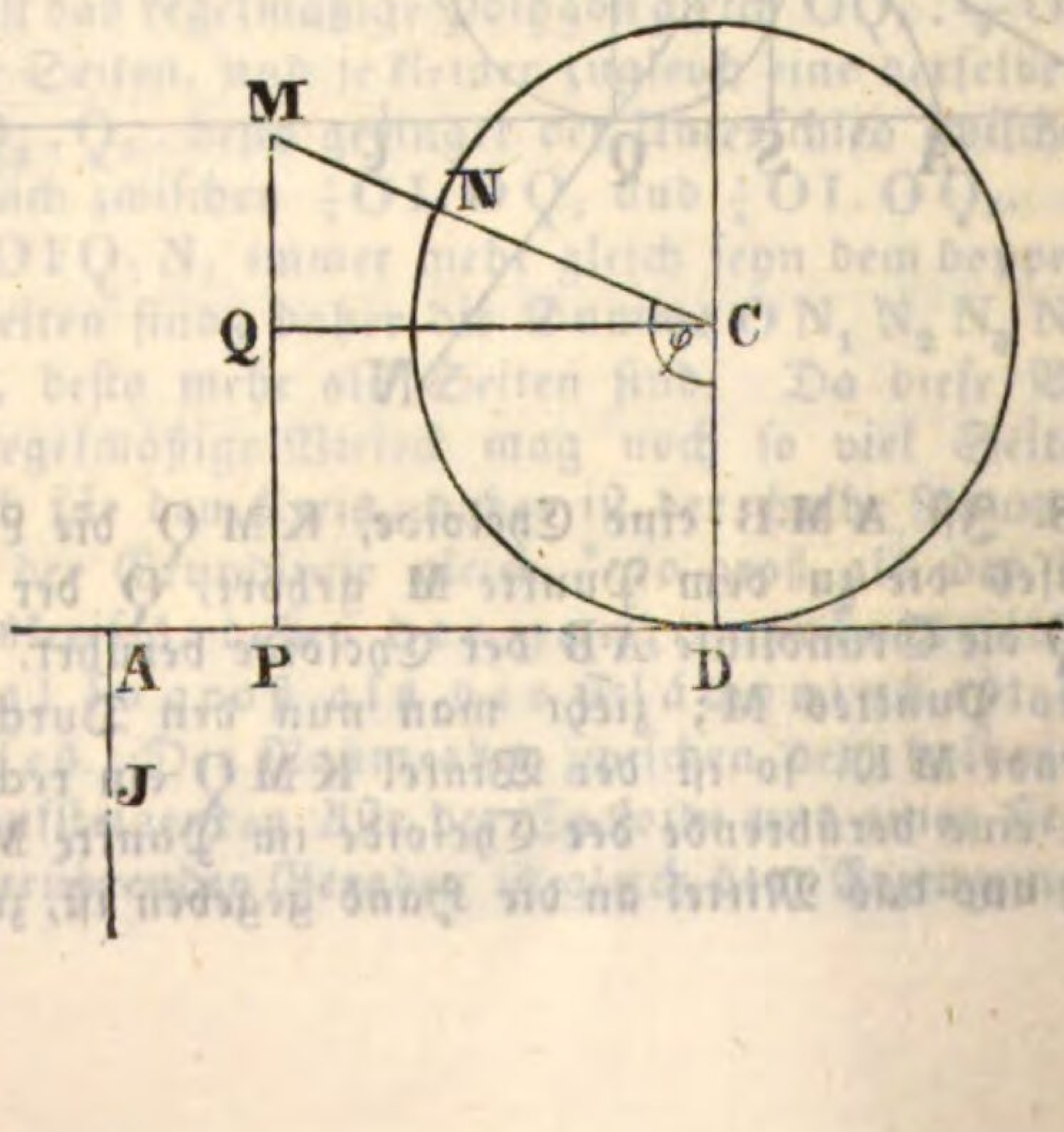
daher $r \sin \varphi = \sqrt{2 r y - y^2}$ ist, und man hat somit:

$$x = \text{arc} \cos \left(1 - \frac{y}{r}\right) - \sqrt{2 r y \quad y^2}$$

als Gleichung der Cycloide hat; für den aufsteigenden Ast ist die Wurzelgröße negativ, für den absteigenden positiv zu nehmen.

§. 349. Wenn der auf der geraden Linie sich abwälzende Kreis einen mit ihm fest verbundenen, beschreibenden Punkt außer- oder innerhalb seines Umfangs mit sich führt, so heißt die durch diesen Punkt beschriebene krumme Linie, eine **verlängerte** oder **verkürzte** Cycloide.

Fig. 436



Es sey CND der beschreibende Kreis in einer seiner Lagen, der beschreibende Punkt M sey unveränderlich mit diesem Kreise verbunden, so daß die Gerade MC stets mit NC jede Drehung mitmache, A sey die anfängliche Lage von N, und J die anfängliche Lage von M, so muß natürlich AD = ND seyn. Nennen wir den Wälzungswinkel NCD $= \varphi$, fällen von M ein Loth MP auf die Grundlinie AD, so ist, wenn A als Anfangspunkt der Coordinaten betrachtet wird, $x = AP$, $y = MP$. Es sey nun $CN = r$, $CM = a$, so ist $CQ = a \sin\varphi$, $MQ = -a\cos\varphi$; $AD = r\varphi$ daher

$$x = r\varphi - a\sin\varphi;\ y = r - a\cos\varphi$$

welche Gleichungen, in die der gemeinen Cykloide, die wir früher betrachtet haben, übergehen, sobald $a = r$ gesetzt wird. Ist wie hier in der Figur $a > r$, so beschreibt der Punkt M die verlängerte; ist aber $a < r$, so beschreibt er die verkürzte Cykloide. Schafft man den Wälzungswinkel φ hinaus, so hat man

$$x = r \operatorname{arc\,cos}\frac{r-y}{a} - \sqrt{a^2 - (r-y)^2}$$

als Gleichung der verlängerten, gemeinen und verkürzten Cycloide, je nachdem $a > r$, $a = r$, $a < r$ angenommen wird. Sucht man die Werthe von x, für welche $y = o$ ist, d. h. wo die Krumme die Grundlinie trifft, so hat man:

$$x = r \operatorname{arc\,cos}\frac{r}{a} - \sqrt{a^2 - r^2}$$

Man sieht, ist $a < r$, so wird der Werth für x imaginär, denn dann wird $a^2 - r^2$ negativ, und $\operatorname{arc\,cos}\frac{r}{a}$ wird ein Bogen, dessen cosinus größer als 1 seyn müßte, was nicht möglich ist, es folgt daraus daß die verkürzte Cycloide nie bis zur Grundlinie herab kömmt, was auch aus der Entstehung dieser krummen leicht zu begreifen ist.

Bei der gemeinen Cycloide, wo $a = r$ ist hat man

$$x = r \cdot \operatorname{arc\,cos} 1.$$

Allein nicht bloß der Bogen $= o$ hat einen cosinus gleich 1, sondern auch die Bögen 2π, 4π, 6π, 8π ... im Allgemeinen $2m\pi$ haben einen cosinus gleich 1, daher hat man

$$x = o,\ 2r\pi,\ 4r\pi,\ 6r\pi,\ 8r\pi\ \ldots,$$

d. h. die gemeine Cycloide kömmt unzählige mal zur Grundlinie zurück immer in Abständen gleich dem ganzen Umfange des Erzeugungskreises.

Bei der verlängerten Cycloide hat man:

$$x = r \operatorname{arc\,cos}\frac{r}{a} \pm \sqrt{a^2 - r^2}$$

Wir mußten hier $\pm$ vor das Wurzelzeichen setzen, wegen der Doppeldeutigkeit dieses Ausdrucks; der Ausdruck $\operatorname{arc.\,cos}\frac{r}{a}$ zeigt eben-

falls unendlich viele Bögen an, denn ist z. B. $\text{arc.}\cos\frac{r}{a} = \omega$, also $\cos\omega = \frac{r}{a}$, so ist auch $\cos(\omega + 2\pi) = \frac{r}{a}$; $\cos(\omega + 4\pi) = \frac{r}{a}$ $\cos(\omega + 6\pi) = \frac{r}{a}$ u. s. w., daher nicht bloß $\omega = \text{arc}\cos\frac{r}{a}$, sondern auch

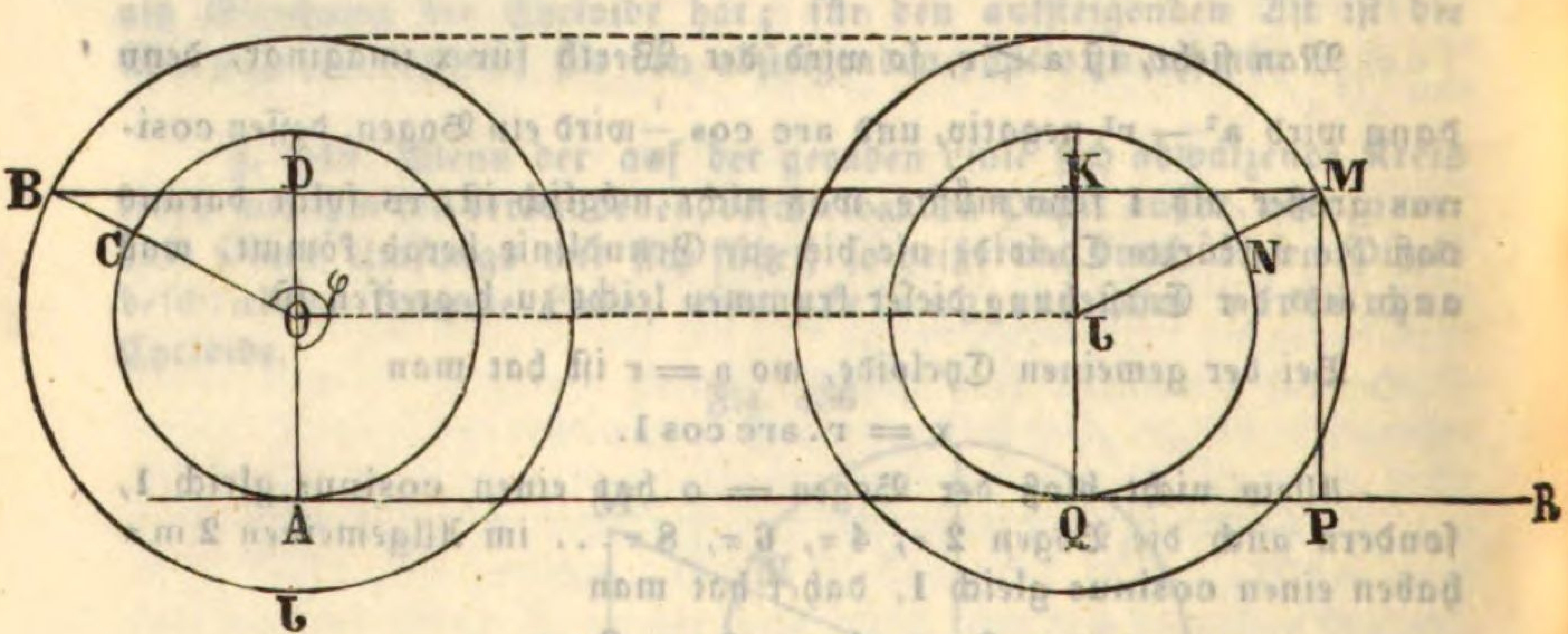
$\omega + 2\pi = \text{arc.}\cos\frac{r}{a}$, $\omega + 4\pi = \text{arc.}\cos\frac{r}{a}$, $\omega + 6\pi = \text{arc.}\cos\frac{r}{a}$, daher hat man, wenn ω der kleinste Bogen ist, dessen cosinus gleich $\frac{r}{a}$ ist:

$$x = r\omega - \sqrt{r^2 - a^2};\ r\omega + \sqrt{r^2 - a^2};\ r\omega + 2r\pi - \sqrt{r^2 - a^2}$$
$$r\omega + 2r\pi + \sqrt{r^2 - a^2};\ r\omega + 4r\pi - \sqrt{r^2 - a^2}$$
$$r\omega + 4r\pi + \sqrt{r^2 - a^2} \text{ u. s. w.},$$

d. h. die verlängerte Cycloide schneidet unzählige Male immer doppelt die Grundlinie.

§. 350. Die Gleichungen $x = r\varphi - a\sin\varphi$, $y = r - a\cos\varphi$ geben uns ein Mittel zur Verzeichnung der verlängerten und verkürzten Cycloide

Fig. 437.



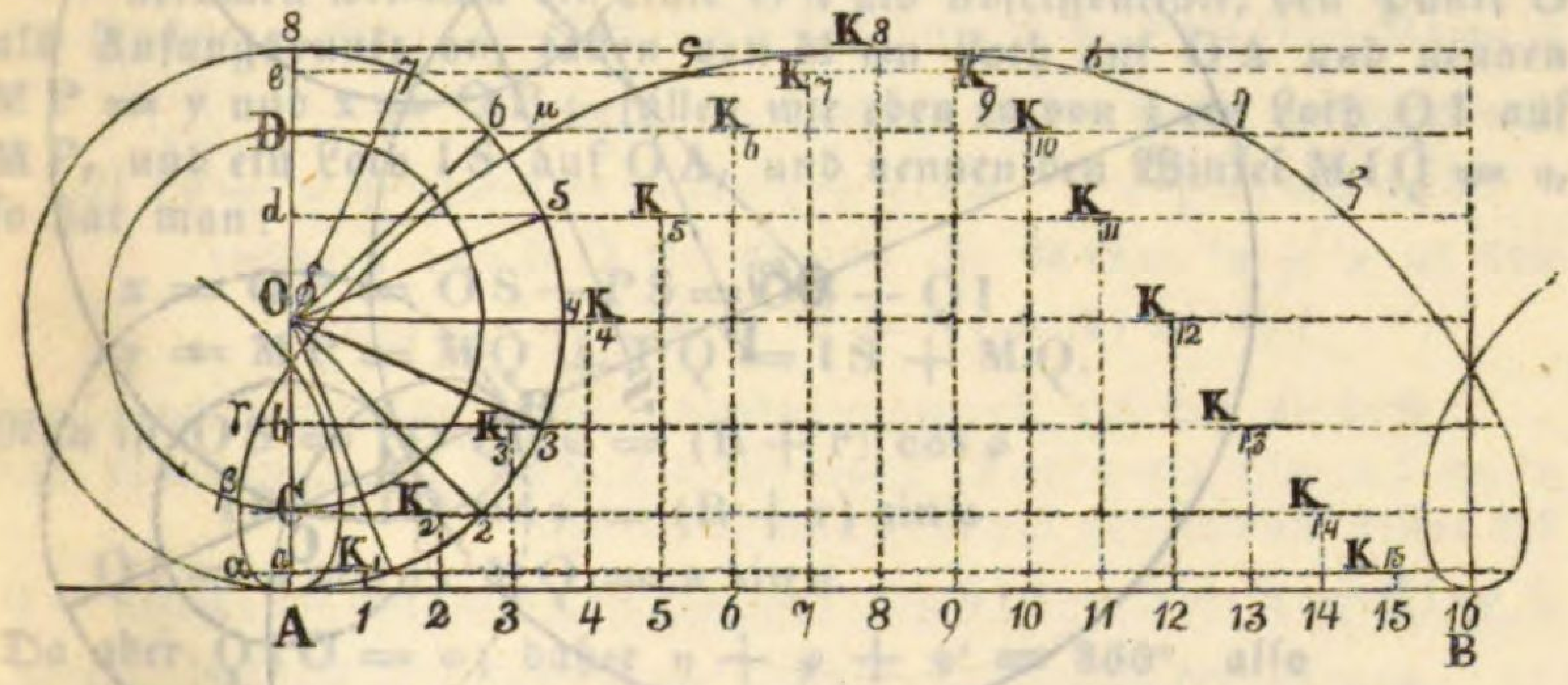
Es sey A O C die Lage des erzeugenden Kreises, der sich auf der Geraden A P abwickelt, B sey der beschreibende Punkt, der Kreis aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser O B, der Kreis O B I sey der beschreibende Kreis, welcher mit dem erzeugenden fest verbunden gedacht wird. Es sey nun der erzeugende Kreis bei der Fortwälzung bis Q gekommen, so daß seine Lage durch J N Q in der Figur bezeichnet ist, der Bogen A C (der länger als der Halbkreis) ist gleich der Länge A Q, nennen wir daher den erhabenen Winkel A O C $= \varphi$ (wo φ wie hier immer die Länge des Bogens für den Halbmesser $= 1$ bedeutet), so ist der Bogen A C $= r\varphi$, daher A Q $= r\varphi$; fällt man von B ein

Loth BD auf AO, so hat man, wenn wieder BO = a, CO = r ist, BD = — a sin φ, OD = — a cos φ; verlängere ich nun die BD, bis sie die IQ in K und den beschreibenden Kreis in M trifft. IM schneidet den Erzeugungskreis in N, so sind die Bögen AC = NQ, und daher

$$KM = BD = -a \sin\varphi \text{ und } KI = OD = -a \cos\varphi;$$

daher, wenn MP ⊥ AQ; AP = rφ — a sin φ; MP = r — a cos φ, daher M ein Punkt der gesuchten Cycloide. Wir bemerken noch, daß der Bogen BI (größer als 180°) des beschreibenden Kreises zum ganzen Umfange sich gerade so verhält, wie das Stück AQ zu AR, wenn AR dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich ist.

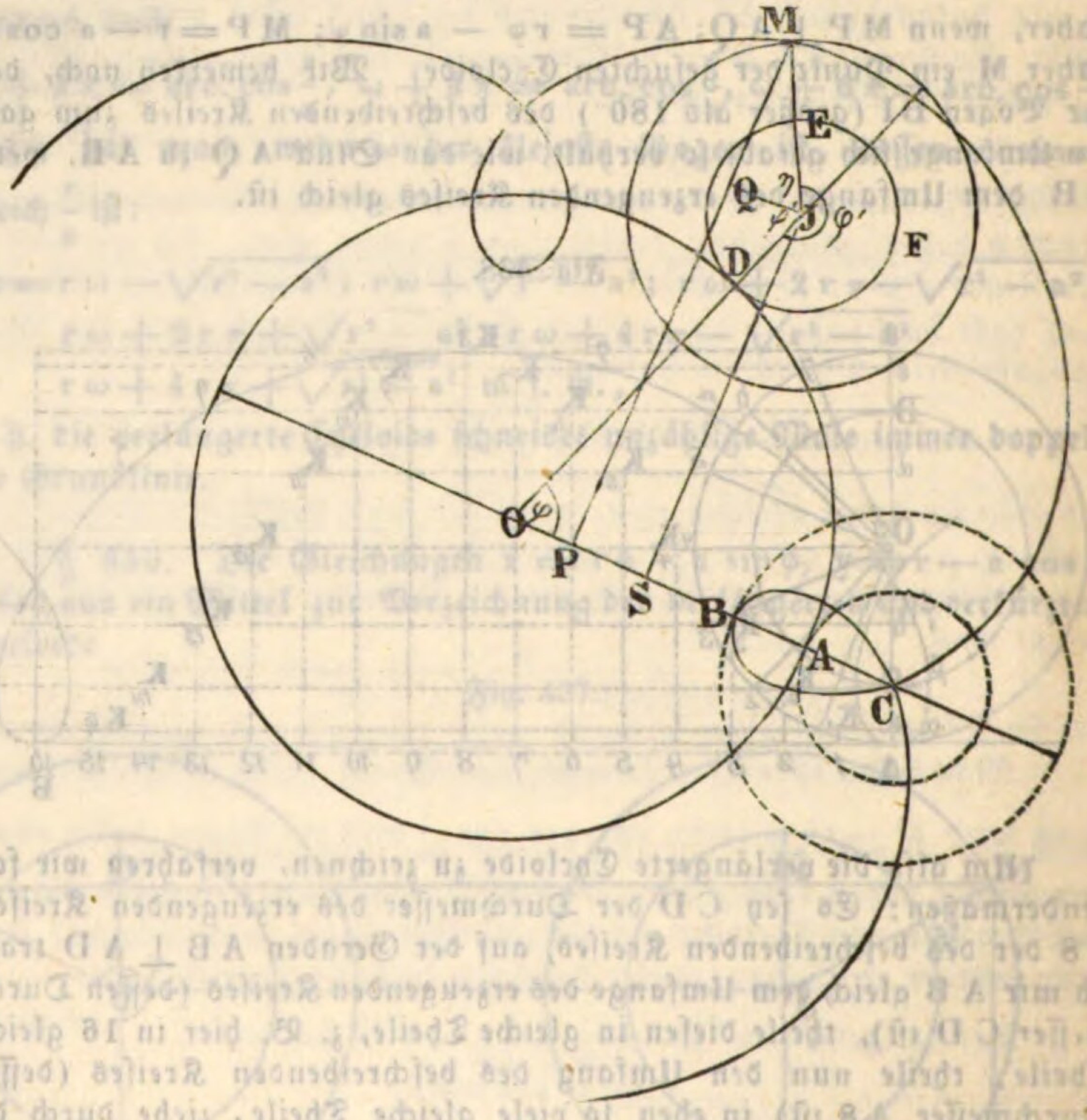
Fig. 438.



Um also die verlängerte Cycloide zu zeichnen, verfahren wir folgendermaßen: Es sey CD der Durchmesser des erzeugenden Kreises, A 8 der des beschreibenden Kreises, auf der Geraden AB ⊥ AD trage ich mir AB gleich dem Umfange des erzeugenden Kreises (dessen Durchmesser CD ist), theile diesen in gleiche Theile, z. B. hier in 16 gleiche Theile, theile nun den Umfang des beschreibenden Kreises (dessen Durchmesser A 8 ist) in eben so viele gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte der Grundlinie Gleichlaufende mit AD und durch die Theilpunkte des Kreises Gleichlaufende mit der Grundlinie, wo die durch (1) des Kreises gleichlaufend mit der Grundlinie gezogene, die durch (1) der Grundlinie mit AD gleichlaufend gezogene zusammentrifft in K, das ist der Punkt, der in unserer vorhergehenden Figur mit K bezeichnet wurde; mache ich nun a 1 = α K, so ist α ein Punkt der verlängerten Cycloide; eben so gibt der Durchschnitt von den Geraden C2 und K_1,2 den Punkt K_2, der Durchschnitt von b 3 und K_2,3 den Punkt K_3 u. s. w. Macht man nun C 2 = $K_2\beta$, b 3 = $K_3\gamma$, O 4 = $K_4\delta$ u. s. w., so sind α, β, γ, δ . . Punkte der verlängerten Cycloide. Kommt man in den absteigenden Ast, so wird K_9 b = e 7 auf die entgegengesetzte Seite aufgetragen.

Ganz auf ähnliche Weise wird die verkürzte Cycloide gezeichnet, indem man den Umfang des beschreibenden Kreises und die Grundlinie, die gleich ist dem Umfange des erzeugenden Kreises in gleich viele Theile theilet und verfährt wie früher.

Fig. 438 a).



§. 351. Geschieht die Abwälzung des Kreises statt auf einer geraden Linie auf einem andern Kreise, so entstehen diejenigen krummen Linien, die man Epicycloiden nennt. Es sey der Kreis aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser OA der Grundkreis, auf dessen Umfang sich der Kreis aus dem Mittelpunkte C mit dem Halbmesser AC abwalzt (der erzeugende Kreis); mit diesem letztern ist in fester Verbindung der Kreis aus demselben Mittelpunkte C mit dem Halbmesser CB (der beschreibende Kreis). Wie sich nun der zweite Kreis auf dem ersten abwälzt, beschreibt der Punkt B auf dem dritten Kreise die hier verzeichnete krumme Linie. Es sey M ein Punkt derselben, I die zugehörige Lage des beweglichen Mittelpunktes, D der Punkt, wo der erzeugende und der Grundkreis sich

berühren, so muß der Bogen AD des Grundkreises, auf dem sich der erzeugende Kreis abgewickelt hat, gerade so groß seyn, als der Bogen DFE des Erzeugungskreises, weil dieß der Theil des Erzeugungskreises ist, der sich abgewickelt hat, wenn der beschreibende Punkt von B nach M kommt, wo dann A nach E kommt. Es heiße der Halbmesser des Grundkreises $OA = OD = R$, der des Erzeugungskreises $AC = DI = EI = r$, des beschreibenden $CB = MJ = a$. Es sey ferner der Wälzungswinkel im Grundkreise $AOD = \varphi$ (wieder in Bogenlänge für den Halbmesser $= 1$), der Wälzungswinkel im erzeugenden Kreise (hier der erhabene Winkel) $EID = \varphi'$, so ist der Bogen $AD = R\varphi$ und der Bogen $ED = r\varphi'$ (hier ist $ED > 180°$); der Grundeigenschaft unserer krummen Linie zu Folge muß $R\varphi = r\varphi'$ seyn.

Nehmen wir nun die Linie OA als Abscissenlinie, den Punkt O als Anfangspunkt an, fällen von M ein Loth auf OA und nennen $MP = y$ und $x = OP$; fällen wir eben so von I ein Loth QI auf MP, und ein Loth IS auf OA, und nennen den Winkel $MIQ = \eta$, so hat man:

$$x = OP = OS - PS = OS - QI$$
$$y = MP = MQ + PQ = IS + MQ.$$

Nun ist $OS = IO \cos\varphi = (R + r) \cos\varphi$

$$IS = IO \sin\varphi = (R + r) \sin\varphi$$
$$QI = a \cos\eta\,;\ MQ = a \sin\eta.$$

Da aber $QIO = \varphi$; daher $\eta + \varphi + \varphi' = 360°$, also

$$\eta = 360 - \varphi - \varphi' = -(\varphi + \varphi')$$

ist, so hat man:

$$QI = a \cos(\varphi + \varphi')\,;\ MQ = - a \sin(\varphi + \varphi'),\ \text{daher:}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos\varphi - a \cos(\varphi + \varphi') \\ y &= (R + r) \sin\varphi - a \sin(\varphi + \varphi') \end{aligned}\right\},\ \text{wozu } R\varphi = r\varphi' \text{ kommt.}$$

Ist nun $a > r$, so hat man eine verlängerte Epicycloide; ist $a = r$ eine gemeine Epicycloide, so ist $a < r$ eine verkürzte Epicycloide.

Betrachten wir die gemeine Epicycloide, wo wir also:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos\varphi - r \cos(\varphi + \varphi') \\ y &= (R + r) \sin\varphi - r \sin(\varphi + \varphi') \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

haben, und wo φ und φ' durch die Gleichung $R\varphi = r\varphi'$ (2) verbunden sind, daher wir diese Gleichungen auch so schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} x &= (R + r) \cos\varphi - r \cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)\varphi \\ y &= (R + r) \sin\varphi - r \sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)\varphi \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

wobei wir nur den Wälzungswinkel des Grundkreises behalten haben, oder

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\frac{r}{R}\varphi' - r\cos\left(\frac{r}{R}+1\right)\varphi' \\ y &= (R+r)\sin\frac{r}{R}\varphi' - r\sin\left(\frac{r}{R}+1\right)\varphi' \end{aligned}\right\} (4),$$

wo wir nur den Wälzungswinkel des Erzeugungskreises behalten haben. Es wird für uns bequemer seyn, die beiden Gleichungen (1) und (2) von einander getrennt zu behalten. Wollten wir die Gleichung der Krummen in x und y haben, so müßte man aus den Gleichungen (3) das φ, oder aus den Gleichungen (4) das φ' eliminiren, was im Allgemeinen nicht ausführbar ist.

Quadriren wir die Gleichungen in (1), so hat man:

$$x^2 = (R+r)^2\cos^2\varphi + r^2\cos^2(\varphi+\varphi') - 2(R+r)\,r\cos\varphi\,\cos(\varphi+\varphi')$$
$$y^2 = (R+r)^2\sin^2\varphi + r^2\sin^2(\varphi+\varphi') - 2(R+r)\,r\sin\varphi\,\sin(\varphi+\varphi').$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen gibt uns, da

$\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi')\quad\sin(\varphi+\varphi')\sin\varphi = \cos(\varphi+\varphi'-\varphi)$ ist,

und da $x^2+y^2 = OM^2$ ist, und da wir $OM = \rho$ nennen:

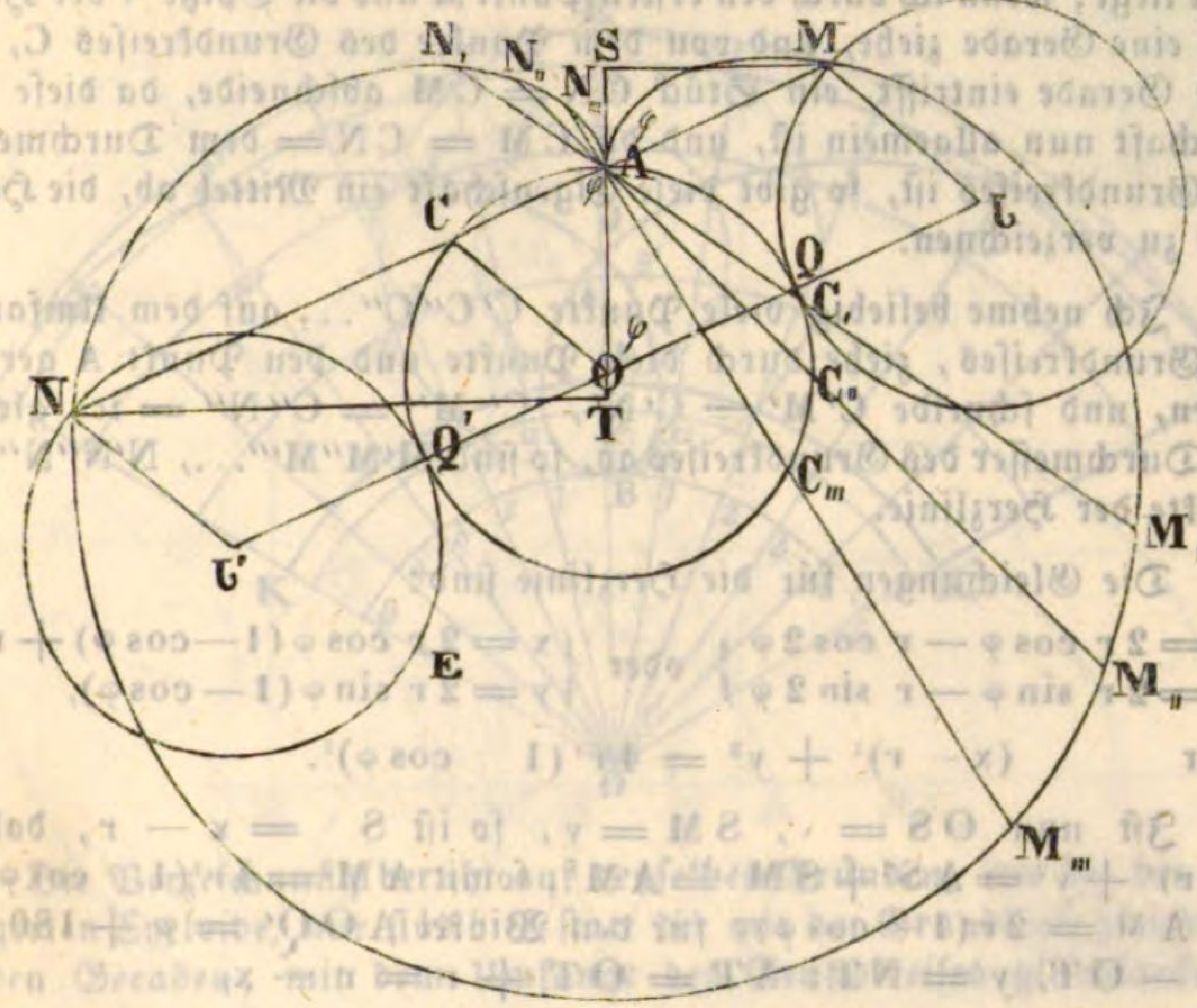
$$\rho^2 = (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)\,r\cos\varphi'.$$

Sobald sich der Erzeugungskreis einmal abgewälzt hat, wird $\varphi' = 2\pi$, also $\cos\varphi' = 1$, daher für den Punkt der Epicycloide nach der ersten Abwälzung des Erzeugungskreises:

$\rho^2 = (R+r)^2 + r^2 - 2(R+r)\,r = [(R+r)-r]^2 = R^2$, also $\rho = R$.

Aus der Gleichung $r\varphi' = R\varphi$ folgt, da $\varphi' = 2\pi$ ist, nach der ersten Abwälzung, daß dann $\varphi = \frac{r}{R}.2\pi$ ist; da sich nun nach der ersten Abwälzung das ganze Spiel auf dieselbe Art wiederholt, so wird die Epicycloide aus so vielen solchen Theilen (Epicyklen) bestehen, als wie oft der Bogen $R.\frac{r}{R}.2\pi$ im Umfange $2R\pi$ des Grundkreises enthalten ist, d. h. so vielmal, als die Zahl $\frac{R}{r}$ anzeigt. Sobald das Verhältniß $\frac{R}{r}$ durch ganze oder gebrochene Zahlen angebbar ist, wird die Krumme zuletzt in sich selbst zurückkehren und eine geschlossene seyn; ist aber $\frac{R}{r}$ eine irrationale Zahl, so wird die Krumme nie in sich selbst zurückkehren, und wird eine transcendente Krumme seyn.

Fig 439.



§. 352. Haben der erzeugende und der Grundkreis gleiche Halbmesser, so heißt die dadurch entstehende Epicycloide die Herzlinie (Cardiode). Es sey A der Punkt wo die Wälzung beginnt; nachdem vom Grundkreise A Q, vom Wälzungskreise M Q abgewickelt ist, kam der beschreibende Punkt von A nach M, so muß, weil beide Kreise gleich sind, der Bogen M Q = A Q seyn, und ist I die entsprechende Lage des Mittelpunktes des erzeugenden Kreises, so muß A O Q = M I Q seyn; da nun A O = M I, so läßt sich leicht zeigen, daß A M gleichlaufend mit O I ist; O Q schneide verlängert den Grundkreis in Q'. Sucht man nun die Lage des beschreibenden Punktes zu finden, wenn der erzeugende Kreis den Grundkreis in Q' berührt, bedenke man, daß dann vom Grundkreise der Bogen A Q' > 180° abgewickelt wurde, daher wir auch vom Umfange des Erzeugungskreises einen Bogen = A Q', der größer als der Halbkreis ist, abschneiden müssen, was wir dadurch erreichen, wenn wir die Gerade C M verlängern, bis sie den Kreis in N schneidet, welches der verlangte Punkt ist. Denn da der Bogen N E Q' = Bogen A Q Q' ist, so muß auch der Bogen N Q' gleich seyn dem Bogen A Q', folglich auch die Winkel N I'Q' = A O Q', folglich A N gleichlaufend I' O, also I I' eine gerade Linie ist. Da die Bögen A Q' und A Q, oder die ihnen gleichen N Q' und M Q sich zum Halbkreise ergänzen, so muß N I' Q' + M I Q = 180°, also N I' ∥ M I. Da M N ∥ I I', so sind die Bögen C Q' = A Q also C O Q' = M I Q, daher C O ∥ M I, woraus folgt, daß C M = C N seyn. Für jeden Punkt der Herzlinie finde ich also

einen zweiten Punkt derselben Krummen, der mit ihm in einer geraden Linie liegt; wenn ich durch den ersten Punkt M und die Spitze A der Herzlinie eine Gerade ziehe, und von dem Punkte des Grundkreises C, wo diese Gerade eintrifft, ein Stück CN = CM abschneide, da diese Eigenschaft nun allgemein ist, und da CM = CN = dem Durchmesser des Grundkreises ist, so gibt diese Eigenschaft ein Mittel ab, die Herzlinie zu verzeichnen.

Ich nehme beliebig viele Punkte C′C″C‴... auf dem Umfange des Grundkreises, ziehe durch diese Punkte und den Punkt A gerade Linien, und schneide C′M′ = C′N′, C″M″ = C″N″ = ꝛc. gleich dem Durchmesser des Grundkreises ab, so sind M′M″M‴..., N′N″N‴... Punkte der Herzlinie.

Die Gleichungen für die Herzlinie sind:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi \\ y = 2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} x = 2r\cos\varphi(1-\cos\varphi) + r \\ y = 2r\sin\varphi(1-\cos\varphi), \end{array}\right.$$

daher $(x - r)^2 + y^2 = 4r^2(1 \quad \cos\varphi)^2$.

Ist nun $OS = x$, $SM = y$, so ist $SA = x - r$, daher $(x-r)^2 + y^2 = AS^2 + SM^2 = AM^2$; somit $AM^2 = 4r^2(1 \quad \cos\varphi)^2$, also $AM = 2r(1 - \cos\varphi)$; für den Winkel $AOQ' = \varphi + 180$ ist $x = -OT$, $y = NT$; $AT = OT + r = r - x$,

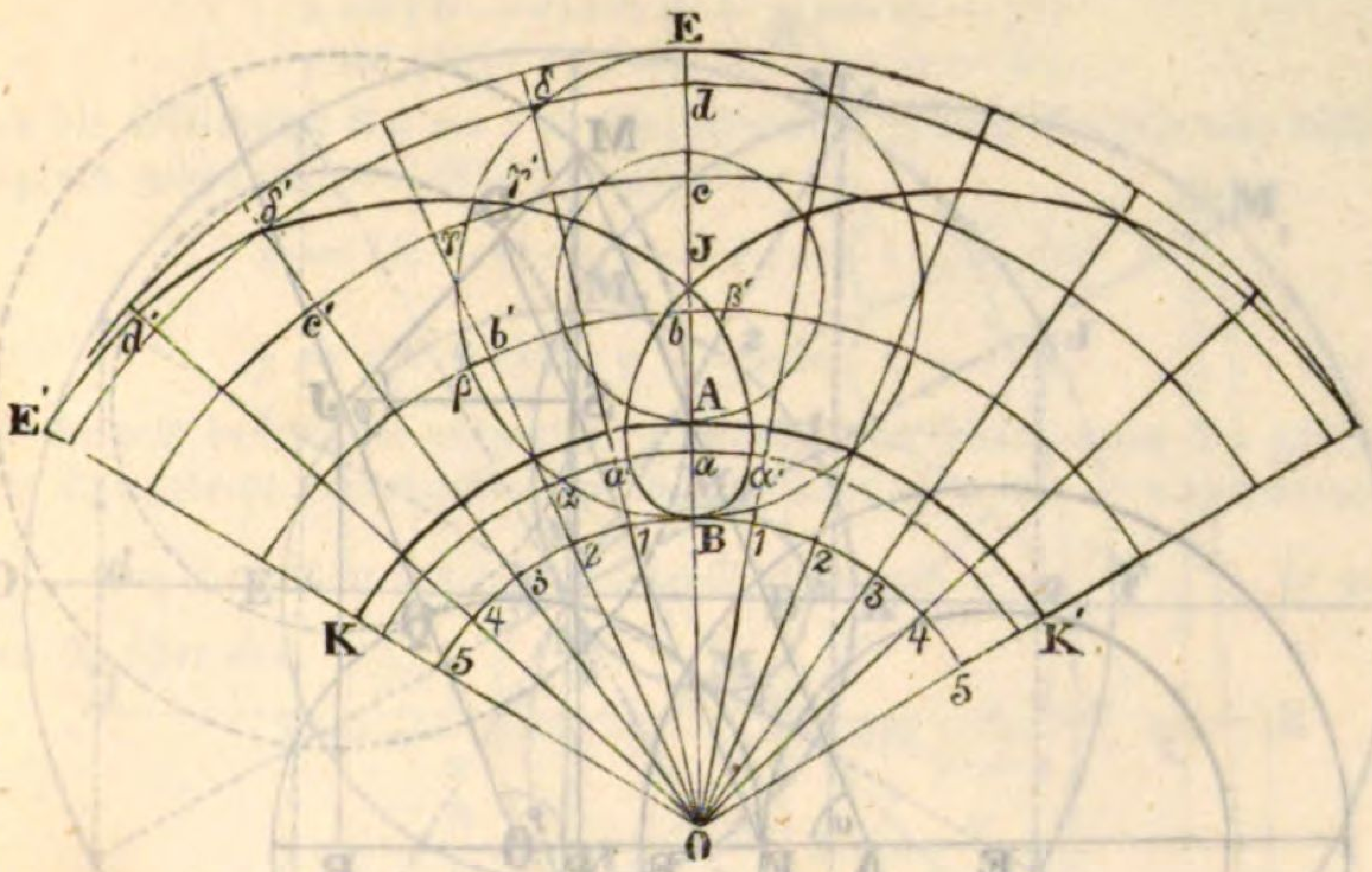
$$\text{wo } x = 2r\cos(\varphi+180) - r\cos 2(\varphi+180) = -2r\cos\varphi - r\cos 2\varphi$$
$$= -2r\cos\varphi(1+\cos\varphi) + r$$
$$y = 2r\sin(\varphi+180) \quad r\sin 2(\varphi+180 = -2r\sin\varphi - r\sin 2\varphi$$
$$= -2r\sin\varphi(1+\cos\varphi),$$

daher $AN^2 = AT^2 + NT^2 = 4r^2(1+\cos\varphi)^2$, daher $AN = 2r(1+\cos\varphi)$.

Da also $AM = 2r - 2r\cos\varphi$; $AN = 2r + 2r\cos\varphi$ ist, und $AC = 2r\cos\varphi$, so hat man $AM = 2r - AC$, $AN = 2r + AC$, oder $AM + AC = AN - AC$, d. h. $CM = CN$ wie früher.

Um eine Epicycloide im Allgemeinen zu zeichnen, verfahren wir folgendermaßen: Es sey OA der Halbmesser des Grundkreises, AI der des erzeugenden, und IB der des beschreibenden Kreises; es sey AK ein Bogen des Grundkreises, der dem halben Umfange des erzeugenden Kreises gleich sey. Ich theile nun diesen Bogen und den halben Umfang des beschreibenden Kreises in gleich viele Theile, z. B. hier in 5 Theile in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 und α, β, γ, δ, ε; aus O beschreibe ich Bögen mit den Halbmessern $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$..., und ziehe durch O die Halbmesser O_1, O_2, O_3...; wo diese Bögen den Durchmesser BE des Erzeugungskreises schneiden, nenne ich a, b, c, d; wo der Bogen $a\alpha$ die O_1 schneidet, heiße der Punkt a′; wo $b\beta$ die O_2 schneidet, b′; wo $c\gamma$ die O_3 schneidet, c′; wo $d\delta$ die O_4 schneidet, d′. Man macht nun $a'\alpha' = a\alpha$, $b'\beta' = b\beta$, $c'\gamma' = c\gamma$ u. s. w., so sind B, α', β', γ', δ', E′ Punkte der verlangten Epicycloide.

Fig. 440



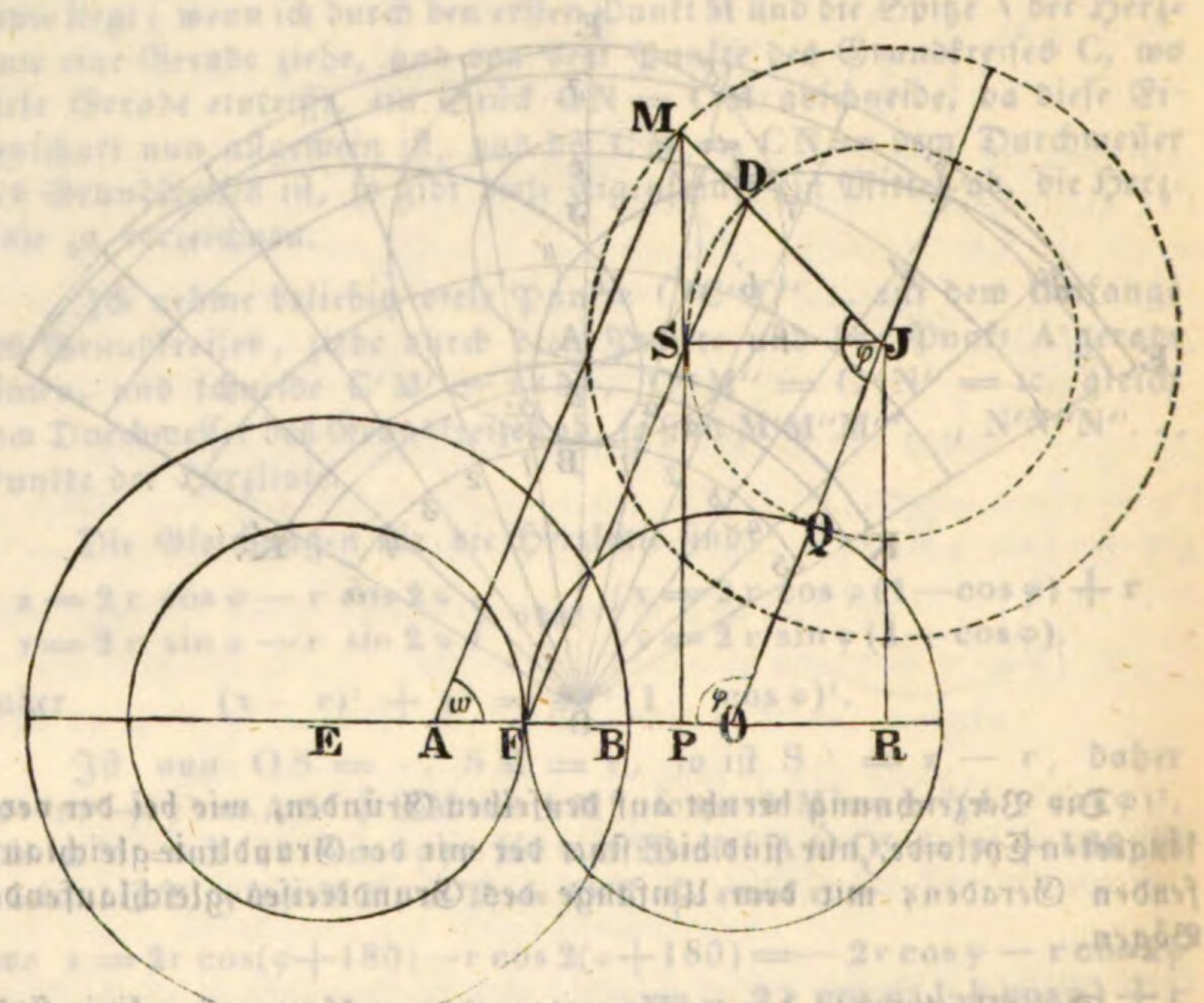
Die Verzeichnung beruht auf denselben Gründen, wie bei der verlängerten Cycloide, nur sind hier statt der mit der Grundlinie gleichlaufenden Geraden, mit dem Umfange des Grundkreises gleichlaufende Bögen.

Die Gleichungen der verlängerten oder verkürzten Herzlinie sind nach dem Früheren

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\,r\cos\varphi - a\cos 2\,\varphi \\ y &= 2\,r\sin\varphi - a\sin 2\,\varphi \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

wo φ der Wälzungswinkel im Grundkreise ist. Es sey OF der Halbmesser des Grundkreises, E F = O F der des erzeugenden, und EB der des beschreibenden. Es sey DIQ irgend eine Lage des erzeugenden Kreises, wo Q der Berührungspunkt des erzeugenden und des Grundkreises ist, und wo die Bögen FQ = DQ und IM = EB, also M der beschreibende Punkt ist. Es sey der Wälzungswinkel des Grundkreises FOQ = φ, daher auch QIM = φ; fällt man nun von M das Loth MP, so ist OP = x, MP = y, und ist IS $\perp$ MP, IR $\perp$ AP, so sieht man leicht, da MIS = φ — SIO = φ — (180 — φ) = 2φ — 180 ist, daß MS = — a sin 2φ; RP = — a cos 2φ; OR = — 2r cos φ; SP = 2r sin φ sind, daß man dadurch die obigen Gleichungen (1) erhält; da MI = AO = a und FOQ = QID = φ ist, so muß AM $\parallel$ OI, daher der Winkel MAO = ω = 180 — φ.

Fig. 441.



Die Gleichungen (1) können nun in folgende Gestalt gebracht werden:

$$x = 2\,r\cos\varphi - a\,(2\cos^2\varphi - 1)$$
$$y = 2\,r\sin\varphi - 2\,a\sin\varphi\cos\varphi,$$

woraus man:

$$x = 2\cos\varphi\,(r - a\cos\varphi) + a$$
$$y = 2\sin\varphi\,(r - a\cos\varphi)$$

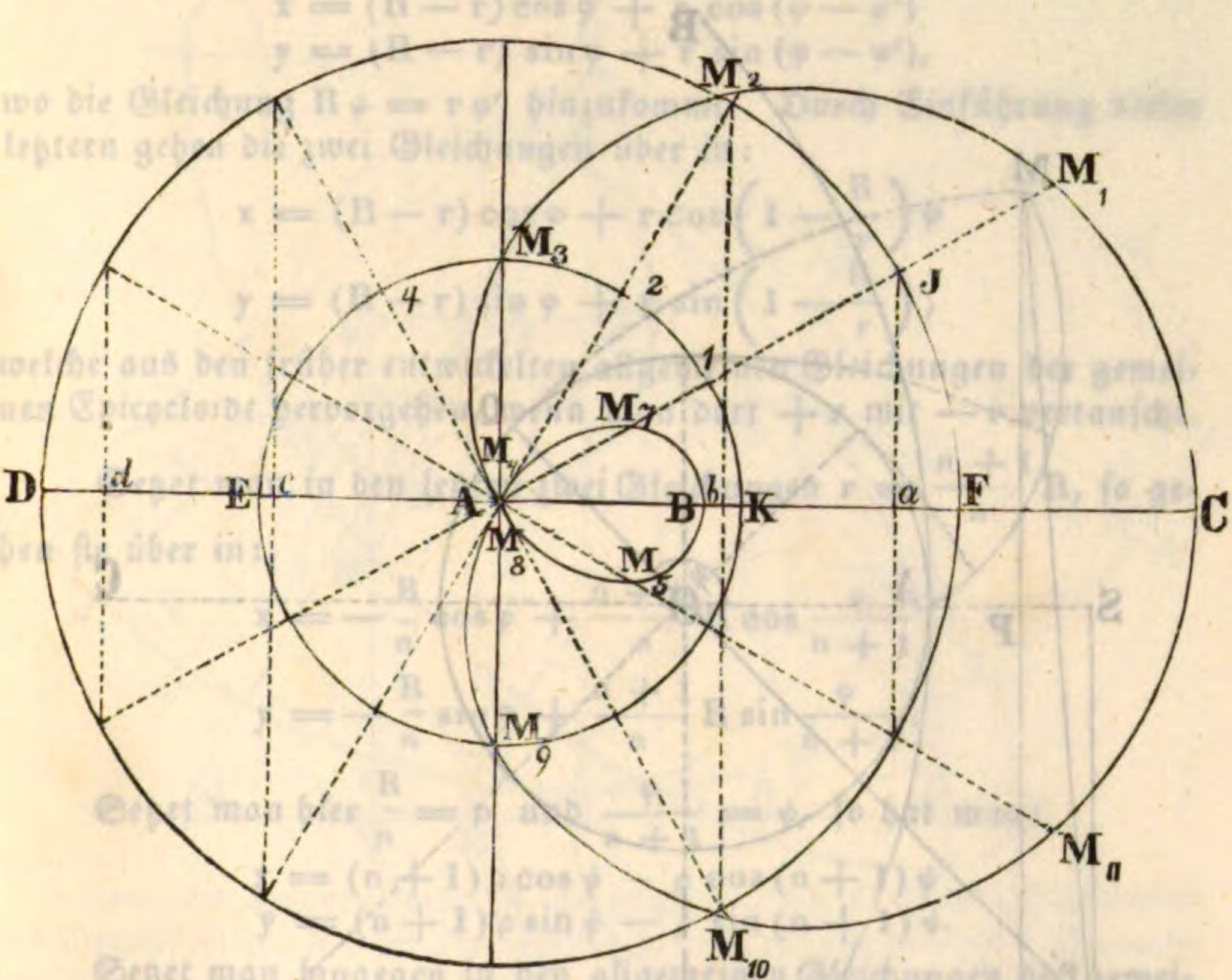
erhält, und wodurch man:

$$(x - a)^2 + y^2 = 4\,(r - a\cos\varphi)^2 \quad (2)$$

erhält; nun ist $x = OP$, $AO = a$, daher $x - a = AO - OP = AP$; daher $(x - a)^2 + y^2 = AP^2 + MP^2 = AM^2$. Nennt man nun $AM = \rho$, so gibt die Gleichung (2) uns

$\rho^2 = 4\,(r - a\cos\varphi)^2$, daher $\rho = 2\,(r - a\cos\varphi)$, oder $\rho = 2r + 2\,a\cos\omega$.

Fig. 442.

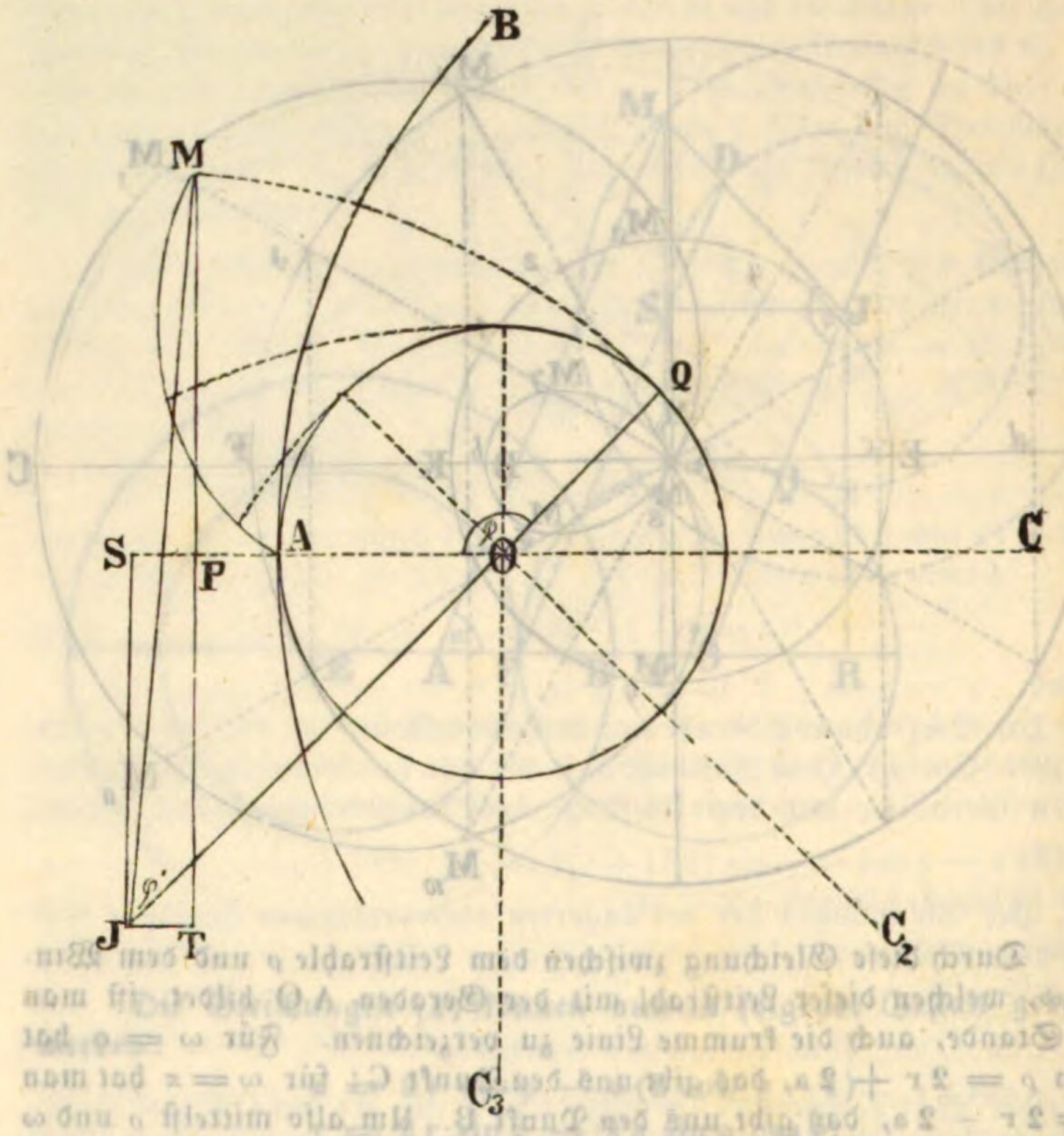


Durch diese Gleichung zwischen dem Leitstrahle ρ und dem Winkel ω, welchen dieser Leitstrahl mit der Geraden AO bildet, ist man im Stande, auch die krumme Linie zu verzeichnen. Für $\omega = o$ hat man $\rho = 2r + 2a$, das gibt uns den Punkt C; für $\omega = \pi$ hat man $\rho = 2r - 2a$, das gibt uns den Punkt B. Um also mittelst ρ und ω diese Krumme zu verzeichnen verfahre ich folgendermaßen: Aus A beschreibe ich mit $AK = 2r$ als Halbmesser einen Kreis, und eben so aus A mit $AF = 2a$ ebenfalls einen Kreis, theile beide Umfänge in gleich viele Theile, hier z. B. in 12 gleiche Theile, fälle von dem Theilungspunkte des zweiten Kreises Lothe auf den Durchmesser DF, so hat man $Aa = 2a \cos KAI$, $A1 = 2r$; mache ich daher die Verlängerung des Halbmessers A1, d. i. $M_1 1 = Aa$, so ist

$$AM_1 = A1 + M_1 I = 2r + 2r \cos KAI,$$

daher M_1 ein Punkt der verlangten Krummen; mache ich eben so $2M_2 = Ab$ $3M_3 = o$, so sind M_2, M_3 ebenfalls Punkte der verlangten Krummen. Da der Winkel KA4 ein stumpfer, also sein cosinus negativ ist, so hat man $\cos KA4 = - Ac$; ich muß also von A4 ein Stück $4M_4$ in entgegengesetzter Richtung abschneiden, und bekomme so den Punkt M_4; der Winkel $KAD = \pi$ gibt uns den Punkt B, indem $EB = 2a$; $M_7 7 = AD$ gibt M_7, $M_8 8 = Ac$ gibt M_8 u. s. w.

Fig. 443.



§. 353. Wenn der Erzeugungskreis größer als der Grundkreis ist, und diesen von innen berührt, so beschreibt irgend ein Punkt des Erzeugungskreises ebenfalls eine Epicycloide. Es sey $AO = R$ der Halbmesser des Grundkreises, $AC = r$ der des Erzeugungskreises. Es sey ferner der Bogen AQ des Grundkreises gleich dem Bogen AB des Erzeugungskreises, der Winkel $AOQ = \varphi$. Ist die Abwicklung von A bis Q fortgeschritten, so ist der Mittelpunkt des Erzeugungskreises nach I gekommen, und $IQ = r$; beschreibe ich nun aus I mit IQ einen Bogen $MQ = AB$, so ist M die Lage des erzeugenden Punktes. Ist nun $MIQ = \varphi'$, so muß, da $MQ = AQ$ ist, $r\varphi' = R\varphi$ seyn. Es sey nun $MP \perp AO$, $IS \perp AO$, $IT \perp MP$, so ist $OP = x$, $MP = y$, und wir haben:

$$y = MP = MT - IS = MI \cdot \sin MIT - IO \sin \varphi$$

$$x = OP = OS - IT = IO \cdot \cos \varphi - MI \cdot \cos MIT;$$

nun ist $\quad MIT = MIQ + QIT = \varphi' + 180 - \varphi;$

daher, da $MI = r$; $IO = r - R$ ist:

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos(\varphi - \varphi')$$
$$y = (R - r)\sin\varphi + r\sin(\varphi - \varphi'),$$

wo die Gleichung $R\varphi = r\varphi'$ hinzukommt. Durch Einführung dieser letztern gehen die zwei Gleichungen über in:

$$x = (R - r)\cos\varphi + r\cos\left(1 - \frac{R}{r}\right)\varphi$$
$$y = (R - r)\sin\varphi + r\sin\left(1 - \frac{R}{r}\right),$$

welche aus den früher entwickelten allgemeinen Gleichungen der gemeinen Epicycloide hervorgehen, wenn man dort $+r$ mit $-r$ vertauscht.

Setzet man in den letzten zwei Gleichungen $r = \frac{n+1}{n}R$, so gehen sie über in:

$$x = -\frac{R}{n}\cos\varphi + \frac{n+1}{n}R\cos\frac{\varphi}{n+1}$$
$$y = -\frac{R}{n}\sin\varphi + \frac{n+1}{n}R\sin\frac{\varphi}{n+1}.$$

Setzet man hier $\frac{R}{n} = \rho$ und $\frac{\varphi}{n+1} = \psi$, so hat man:

$$x = (n+1)\rho\cos\psi - \rho\cos(n+1)\psi$$
$$y = (n+1)\rho\sin\psi - \rho\sin(n+1)\psi.$$

Setzet man hingegen in den allgemeinen Gleichungen der gemeinen Epicycloiden, die wir früher gefunden hatten:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r\cos\left(1 + \frac{R}{r}\right)\varphi$$
$$y = (R + r)\sin\varphi - r\sin\left(1 + \frac{R}{r}\right)\varphi$$

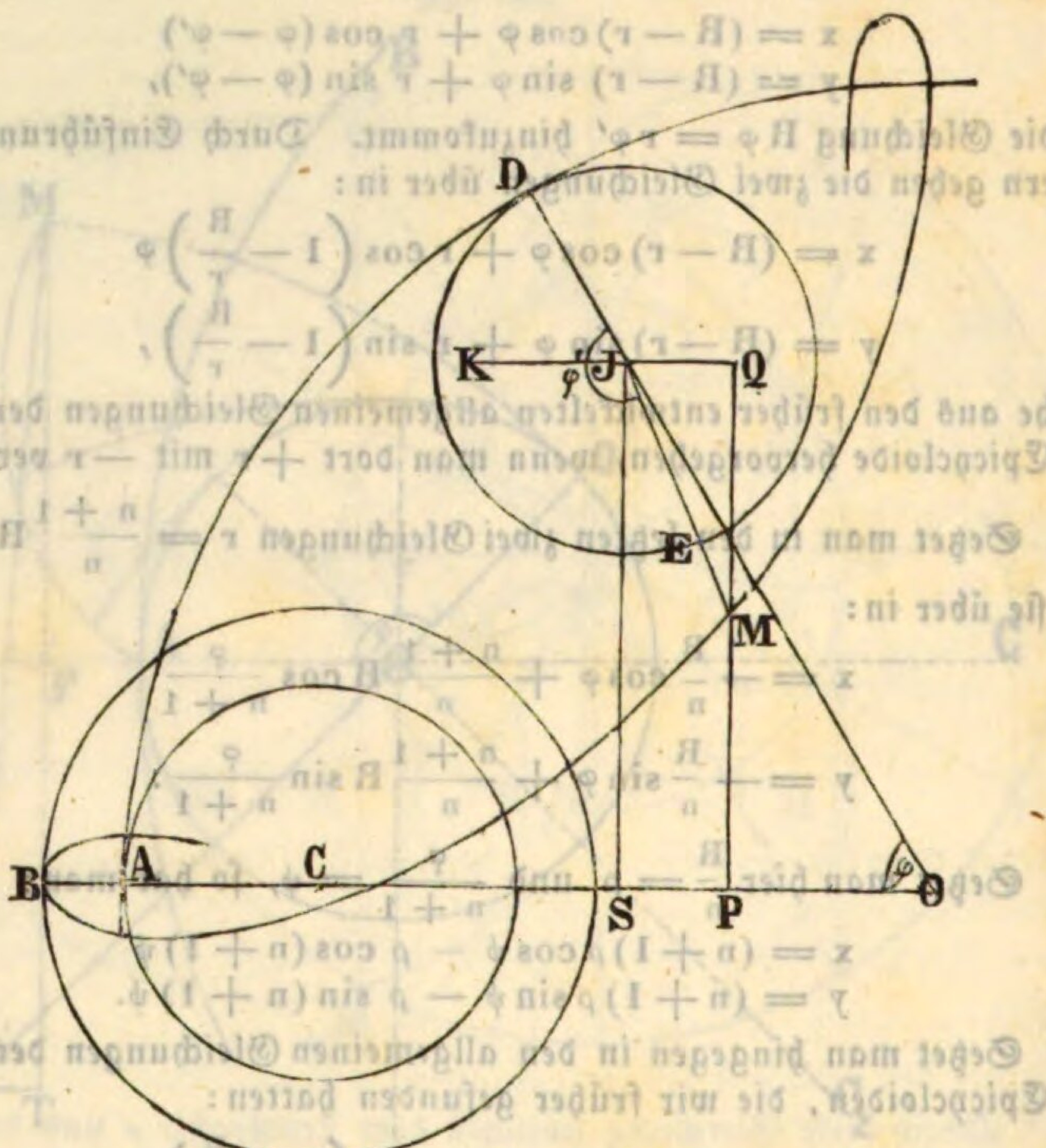
$R = nr$, so hat man:

$$x = (n+1)r\cos\varphi - r\cos(n+1)\varphi$$
$$y = (n+1)r\sin\varphi - r\sin(n+1)\varphi.$$

Man sieht also, daß, wenn der Erzeugungskreis den Grundkreis von außen berührt, und der Halbmesser des letzten Kreises n mal so groß als der des erstern, oder wenn der Erzeugungskreis den Grundkreis von innen berührt und der Halbmesser des Erzeugungskreises $= \frac{n+1}{n}$ von dem des Grundkreises ist, in beiden Fällen dieselbe Epicycloide herauskommt.

§. 354. Ist der Halbmesser des Erzeugungskreises kleiner als der des Grundkreises, und ist die Berührung von innen, so beschreibt ein Punkt des Erzeugungskreises eine Gattung von krummen Linien, die man Hypocycloiden nennt.

Fig. 444



Es sey A O der Halbmesser des Grundkreises, A C der des erzeugenden, und C B der des beschreibenden Kreises, wenn sich der erzeugende Kreis von A bis D fortgewälzt, so kommt C nach I, A nach E, B nach M. Es sey $MP \perp AO$, $IS \perp AO$, $IQ \perp MP$, der Wälzungswinkel des Grundkreises $AOD = \varphi$, der des erzeugenden Kreises $DIM = \varphi'$, $AO = R$, $AC = r$, $BC = a$; so muß der Bogen DE gleich dem Bogen AD seyn, daher $R\varphi = r\varphi'$. Es ist nun $OP = x$, $MP = y$, und man hat:

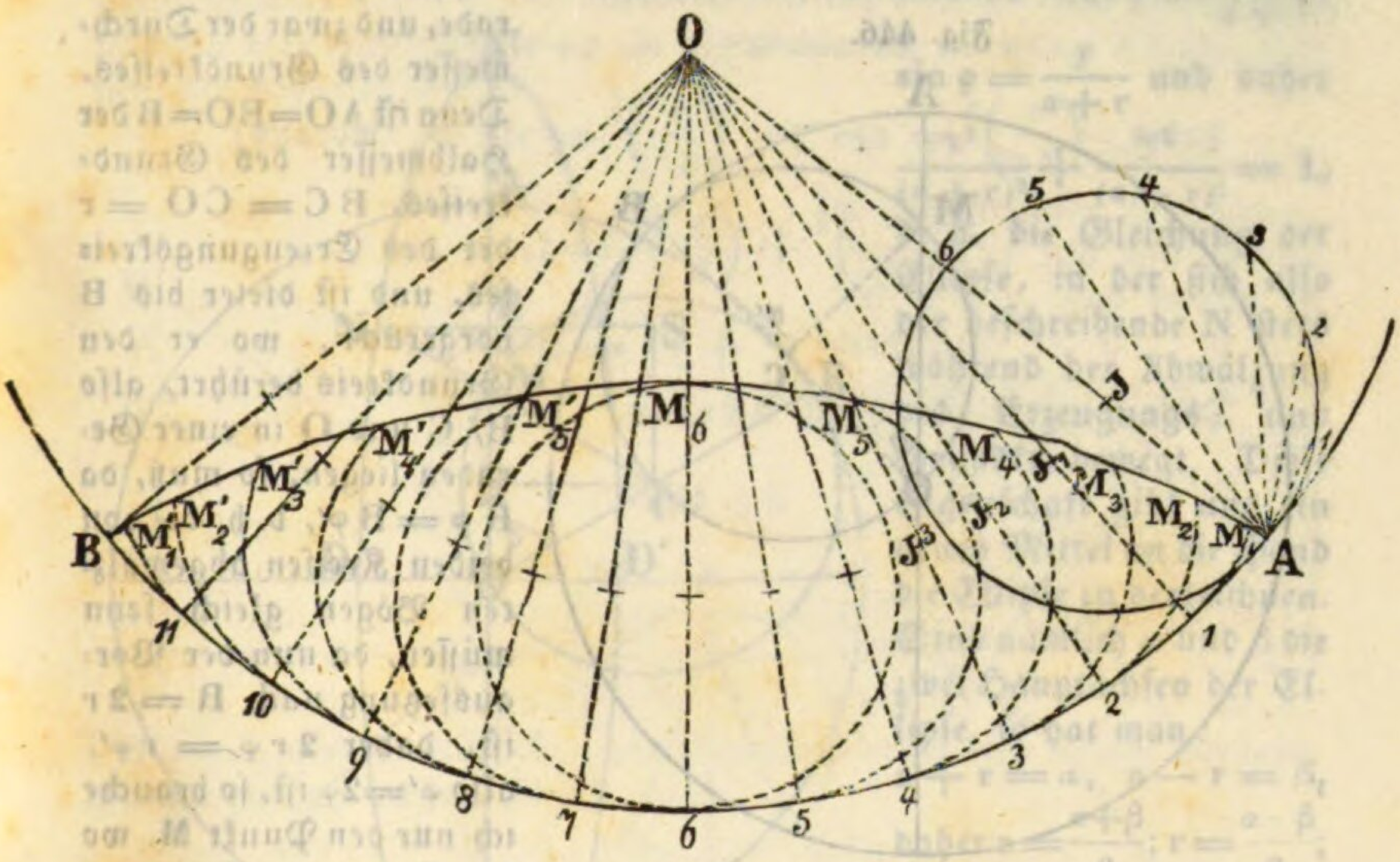
$$x = OP = OS - IQ = IO \cos\varphi - IM \cos QIM$$
$$y = MP = IS - QM = IO \sin\varphi - IM \sin QIM$$
$$IM = a; \; IO = DO - DI = R - r$$
$$\varphi' - \varphi = DIM - DIK = KIM = 180 - MIQ,$$

also $QIM = 180 - \varphi' + \varphi$, daher

$$x = (R - r)\cos\varphi + a\cos(\varphi - \varphi')$$
$$y = (R - r)\sin\varphi + a\sin(\varphi - \varphi'),$$

welche Gleichungen mit denen übereinstimmen für eine Epicycloide, wo der Erzeugungskreis den Grundkreis von innen berührt; der Unterschied ist nur, daß hier $R > r$, dort aber $r > R$ war.

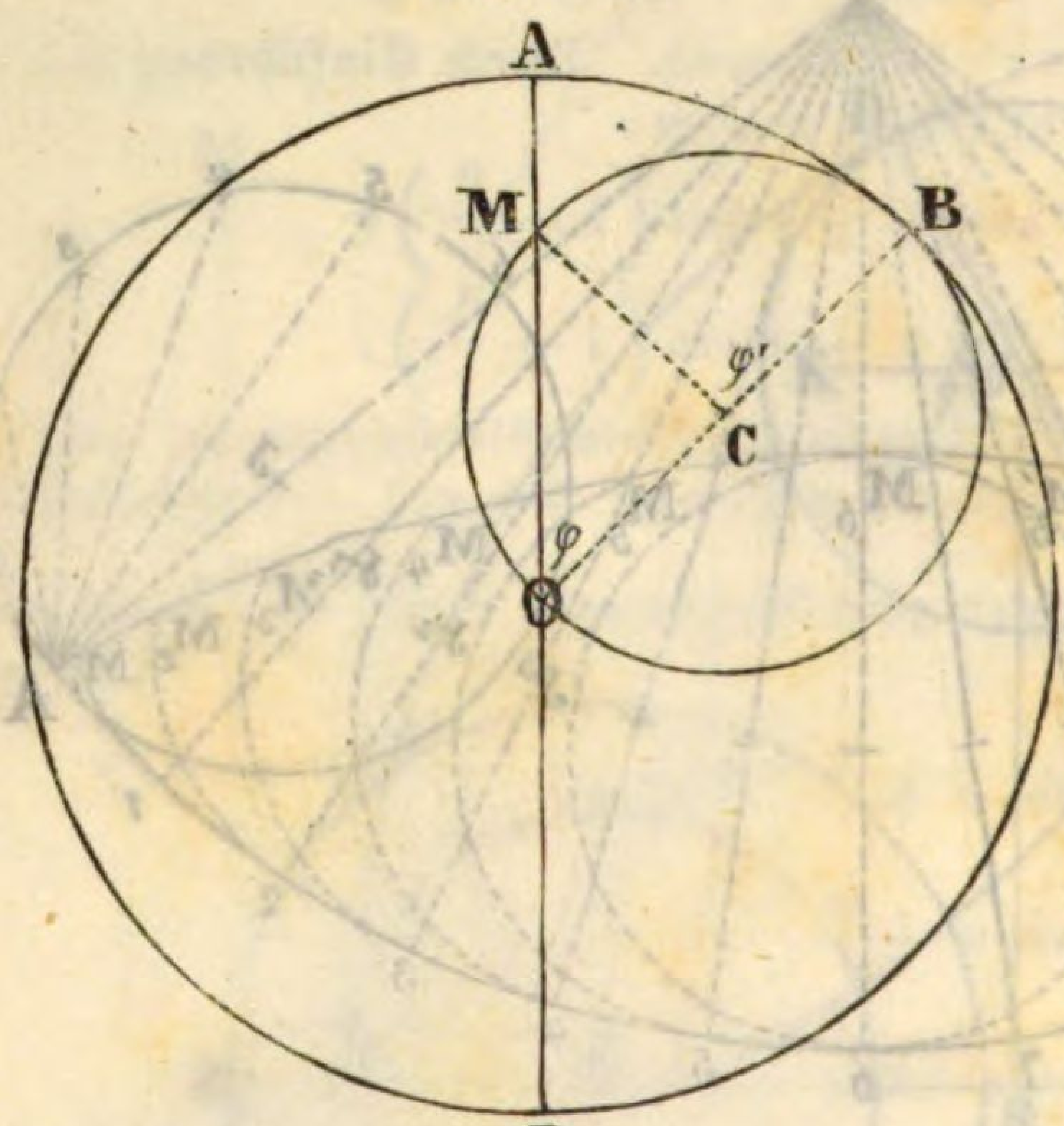
Fig. 445.



Um die Hypocycloide zu verzeichnen, sey O A der Halbmesser des Grundkreises, A I der Halbmesser des Erzeugungskreises; ich mache den Bogen A B des Grundkreises gleich dem Umfange des Erzeugungskreises, theile sowohl diesen, als den Bogen A B in gleich viel gleiche Theile, hier z. B. in 12 in den Punkten 1, 2, 3 u. s. w. Ich beschreibe nun aus O mit dem Halbmesser O I einen Kreisbogen, verbinde O mit 1, 2, 3 ... des Bogens A B, so geben die Durchschnittspunkte I_1 I_2 I_3 ... die auf einanderfolgenden Lagen des Mittelpunktes I des erzeugenden Kreises, wenn sein Berührungspunkt mit dem Grundkreise nach 1, 2, 3 .. fortgerückt ist. Da der Bogen A 1 des Grundkreises gleich dem Bogen A 1 des Erzeugungskreises ist, so werde ich die Lage des beschreibenden A finden, wenn der Erzeugungskreis den Grundkreis in 1 berührt, wenn ich aus 1 des A B einen Begen mit dem Halbmesser A I, und aus I_1 mit dem Halbmesser A I beschreibe; wo beide Bögen sich schneiden, ist M_1 der Ort, wo der Punkt A jetzt ist; beschreibe ich eben so aus 2 des A B mit dem Halbmesser = A 2 (Sehne des Umfanges) und aus I_2 mit A I Bögen, so schneiden sich beide in M_2, und dieß ist wieder die Lage des beschreibenden Punktes A, wenn der Grundkreis vom Erzeugungskreise in 2 berührt wird, eben so aus 3, 4, 5 ... des Bogens A B mit den Halbmessern A 3, A 4, A 5 ... (Sehnen des Umfanges) beschrieben, und stets durch Bögen aus I_3 I_4 I_5 ... mit dem Halbmesser A I geschnitten, so bekommt man die Punkte M_3, M_4, M_5 u. s. w., und dadurch den Hypocycloidalbogen A B.

§ 355. Ist der Durchmesser des Erzeugungskreises gleich dem Halbmesser des Grundkreises, so ist dann die Hypocycloide eine Gerade, und zwar der Durchmesser des Grundkreises.

Fig. 446.



Denn ist AO=BO=R der Halbmesser des Grundkreises, BC = CO = r der des Erzeugungskreises, und ist dieser bis B vorgerückt, wo er den Grundkreis berührt, also B, C und O in einer Geraden liegen, so muß, da $R\varphi = R\varphi'$, d. h. die von beiden Kreisen abgewälzten Bögen gleich seyn müssen, da nun der Voraussetzung nach $R = 2r$ ist, daher $2r\varphi = r\varphi'$, also $\varphi' = 2\varphi$ ist, so brauche ich nur den Punkt M, wo der Erzeugungskreis den Durchmesser AB schneidet, mit C zu verbinden, so muß nach der Natur des Kreises MCB = 2MOB, also ist MCB = φ', daher der Punkt M der Punkt, wo der beschreibende Punkt A hinkommt, wenn der Erzeugungskreis den Grundkreis in B berührt. Da nun diese Betrachtungen für jeden Winkel φ gelten, so wird also der beschreibende Punkt während der ganzen Abwälzung des Erzeugungskreises stets in der Geraden AD bleiben; er wird zuerst von A nach D, und dann wieder von D nach A rücken.

Ist aber noch immer unter der Voraussetzung $R = 2r$ mit dem erzeugenden Kreise ein beschreibender Kreis verbunden, dessen Halbmesser = a ist, so wird ein Punkt des letzten Kreises dann eine **Ellipse** beschreiben, die somit also hier als eine verlängerte oder verkürzte Hypocycloide erscheint.

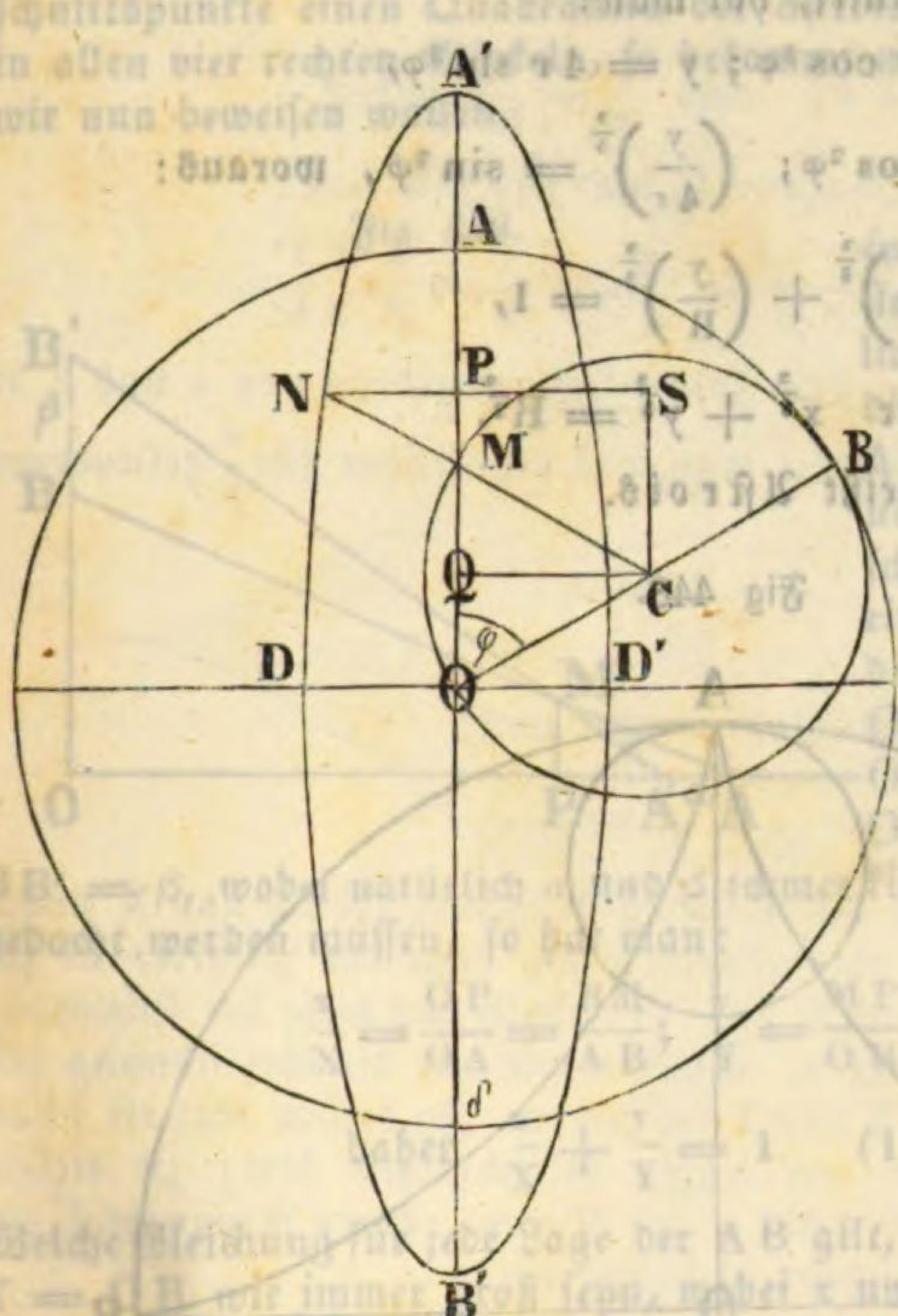
Denn ist alles Uebrige wie in der früheren Figur und CN der Halbmesser des beschreibenden Kreises, so ist, wenn der erzeugende Kreis den Grundkreis in B berührt, dann N die Lage des beschreibenden Punktes. Fällt man nun von N ein Loth auf AB, nimmt AO als Abscissenachse, O als Anfangspunkt an, so ist $OP = x$, $NP = y$. Sind nun NS und CQ senkrecht auf AO, und CS ∥ AO, so ist $SCB = \varphi$, also auch $NCS = \varphi$, daher $NS = NC \sin\varphi = a \sin\varphi$

$PQ = CS = a\cos\varphi$; $OQ = OC\cos\varphi = r\cos\varphi$; $PS = CQ = r\sin\varphi$,

daher $x = PQ + OQ = a\cos\varphi + r\cos\varphi = (a + r)\cos\varphi$

$y = NS - PS = a\sin\varphi - r\sin\varphi = (a - r)\sin\varphi$,

Fig. 447.



woraus $\cos\varphi = \frac{x}{a+r}$; $\sin\varphi = \frac{y}{a+r}$ und daher

$$\frac{x^2}{(a+r)^2} + \frac{y^2}{(a-r)^2} = 1,$$

d. h. die Gleichung der Ellipse, in der sich also der beschreibende N stets während der Abwälzung des Erzeugungs- und Grundkr. bewegt. Diese Eigenschaft gibt uns ein neues Mittel an die Hand die Ellipse zu verzeichnen. Sind nämlich α und β die zwei Hauptachsen der Ellipse, so hat man:

$a + r = \alpha$, $a - r = \beta$,

daher $a = \frac{\alpha+\beta}{2}$; $r = \frac{\alpha-\beta}{2}$; beschreibe ich daher mit einem Halbmesser $= \alpha - \beta$ dem Unterschiede beider Hauptachsen einen Kreis, ziehe irgend einen Halbmesser O B, den ich in C halbire, und aus C mit dem Halbmesser O C mache ich einen Bogen, der die Gerade A O in M schneidet; schneide von der M C ein Stück $NC = \frac{\alpha+\beta}{2}$ ab, so muß N ein Punkt der verlangten Ellipse seyn.

Auf diese Eigenschaft, die wir hier gezeigt, hat man ein Instrument gegründet, um Ellipsen mechanisch beschreiben zu können.

Wie man sieht, wird die Ellipse, sobald $a = r$ eine gerade Linie ist.

§. 356. Ist bei einer Hypocycloide der Halbmesser des Grundkreises viermal so groß als der des Erzeugungskreises, also $R = 4r$, oder $\varphi' = 4\varphi$, so hat man die Gleichungen:

$$x = 3r\cos\varphi + r\cos 3\varphi$$

$$y = 3r\sin\varphi - r\sin 3\varphi.$$

Nun ist $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$; $\sin^3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, daher, diese Werthe substituirt, hat man:

$$x = 4r\cos^3\varphi\,;\; y = 4r\sin^3\varphi,$$

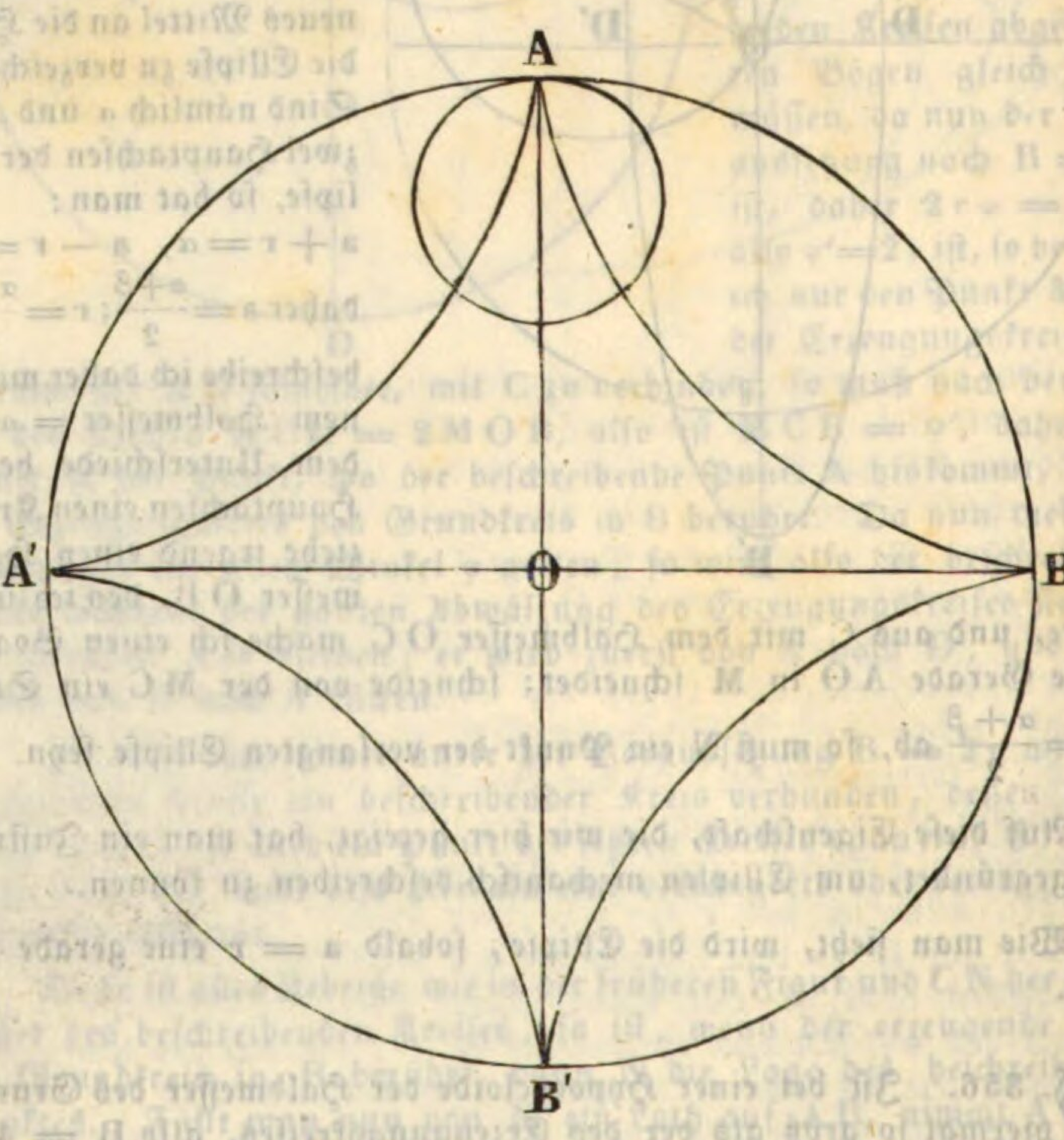
daher $\left(\frac{x}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2\varphi$; $\left(\frac{y}{4r}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin^2\varphi$, woraus:

$$\left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

oder $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$.

Diese Hipocycloide heißt Astrois.

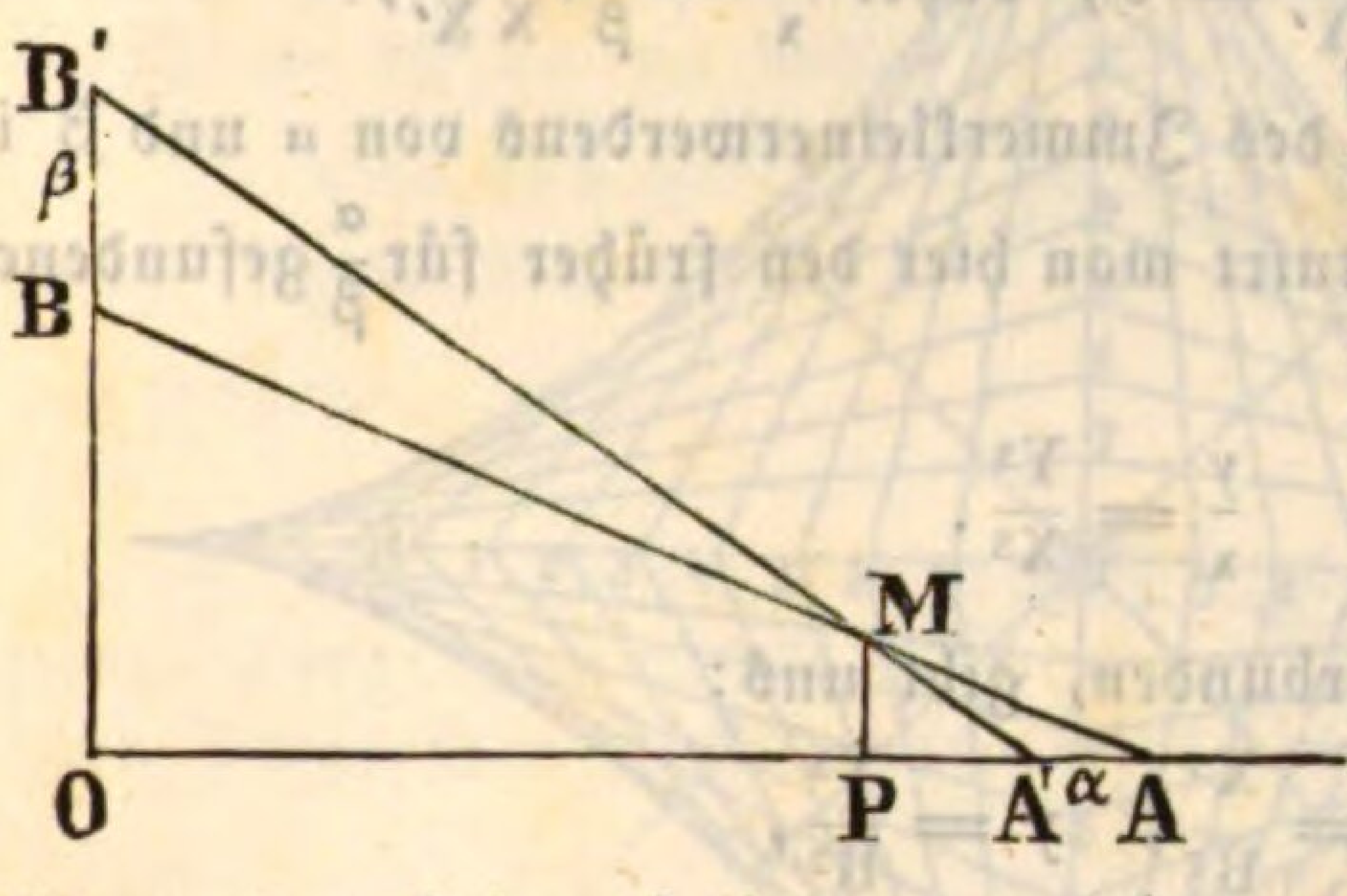
Fig 448.



Eine merkwürdige Eigenschaft dieser krummen Linien besteht darin, daß, wenn man zu irgend einem Punkte derselben eine Berührende zieht, die Länge der Berührenden zwischen den beiden Achsen stets dieselbe bleibt, oder mit andern Worten, bewegt sich eine Gerade zwischen den zwei rechtwinkligen Coordinatenachsen stets so, daß ihre Länge

stets unverändert bleibt, so werden ihre auf einander folgenden Durchschnittspunkte einen Quadranten der Astrois bilden. Macht man dieß in allen vier rechten Winkeln, so bekommt man die ganze Astrois, was wir nun beweisen wollen.

Fig. 449.



Es sey die Gerade AB in irgend einer ihrer Lagen, sie bewege sich nun unendlich wenig, und komme in die Lage A′B′, so daß AB = A′B′ = R bleibe, und M sey der Durchschnittspunkt der zwei auf einander folgenden Lagen dieser Geraden. Es sey nun OP=x; MP=y; OA=X, OB = Y; OA′ = X′; OB′ = Y′; AA′ = α; BB′ = β, wobei natürlich α und β immer kleiner und kleiner werdend gedacht werden müssen, so hat man:

$$\frac{x}{X}=\frac{OP}{OA}=\frac{BM}{AB};\ \frac{y}{Y}=\frac{MP}{OB}=\frac{AM}{AB},$$

$$\text{daher}\quad \frac{x}{X}+\frac{y}{Y}=1 \quad (1).$$

Welche Gleichung für jede Lage der AB gilt, es mögen X = OA und Y = OB wie immer groß seyn, wobei x und y die Coordinaten eines Punktes der AB bedeuten. Der Voraussetzung der Aufgabe nach aber sind X und Y nicht gänzlich willkürlich, sondern sind an die Bedingung gebunden, daß AB stets die unveränderte Länge R beibehalte, d. h. an die Gleichung

$$X^2+Y^2=R^2 \quad (2)$$

gebunden. Rückt also AB in eine andere Lage, z. B. in A′B′, so muß wieder (3) $X'^2+Y'^2=R^2$ seyn; da aber M nicht irgend einen Punkt der AB, sondern einen solchen Punkt bedeuten soll, wo die AB ihre nächstfolgende, von ihr unendlich wenig verschiedene Lage schneiden soll; daher wenn A′B′ diese nächste Lage in der Figur bezeichnet, so hat man:

$$(4)\quad \frac{x}{X'}+\frac{y}{Y'}=1,$$

wobei verstanden ist, daß X′ und Y′ sich von X und Y unendlich wenig unterscheiden, daher die mit der Gleichung (3) gleichbedeutende

$$(X+\alpha)^2+(Y-\beta)^2=R^2$$

sich ohne Ende der Gleichung $X^2+2X\alpha+Y^2-2Y\beta=R^2$ immer

mehr nähern wird, je kleiner als α und β sind, woraus mit Rücksicht auf die Gleichung (2) wir

$$X\alpha - Y\beta = 0, \text{ oder } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{Y}{X} \text{ haben.}$$

Der Unterschied der Gleichungen (1) und (4) gibt uns:

$$x.\frac{\alpha}{XX'} - y.\frac{\beta}{YY'} = 0, \text{ daher } \frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{YY'}{XX'},$$

welche bei Berücksichtigung des Immerkleinerwerdens von α und β in $\frac{y}{x} = \frac{\alpha}{\beta}.\frac{Y^2}{X^2}$ übergeht; substituirt man hier den früher für $\frac{\alpha}{\beta}$ gefundenen Werth, so hat man:

$$\frac{y}{x} = \frac{Y^3}{X^3}.$$

Diese Gleichung mit (1) verbunden, gibt uns:

$$x = \frac{X^3}{R^2}; \quad y = \frac{Y^3}{R^2},$$

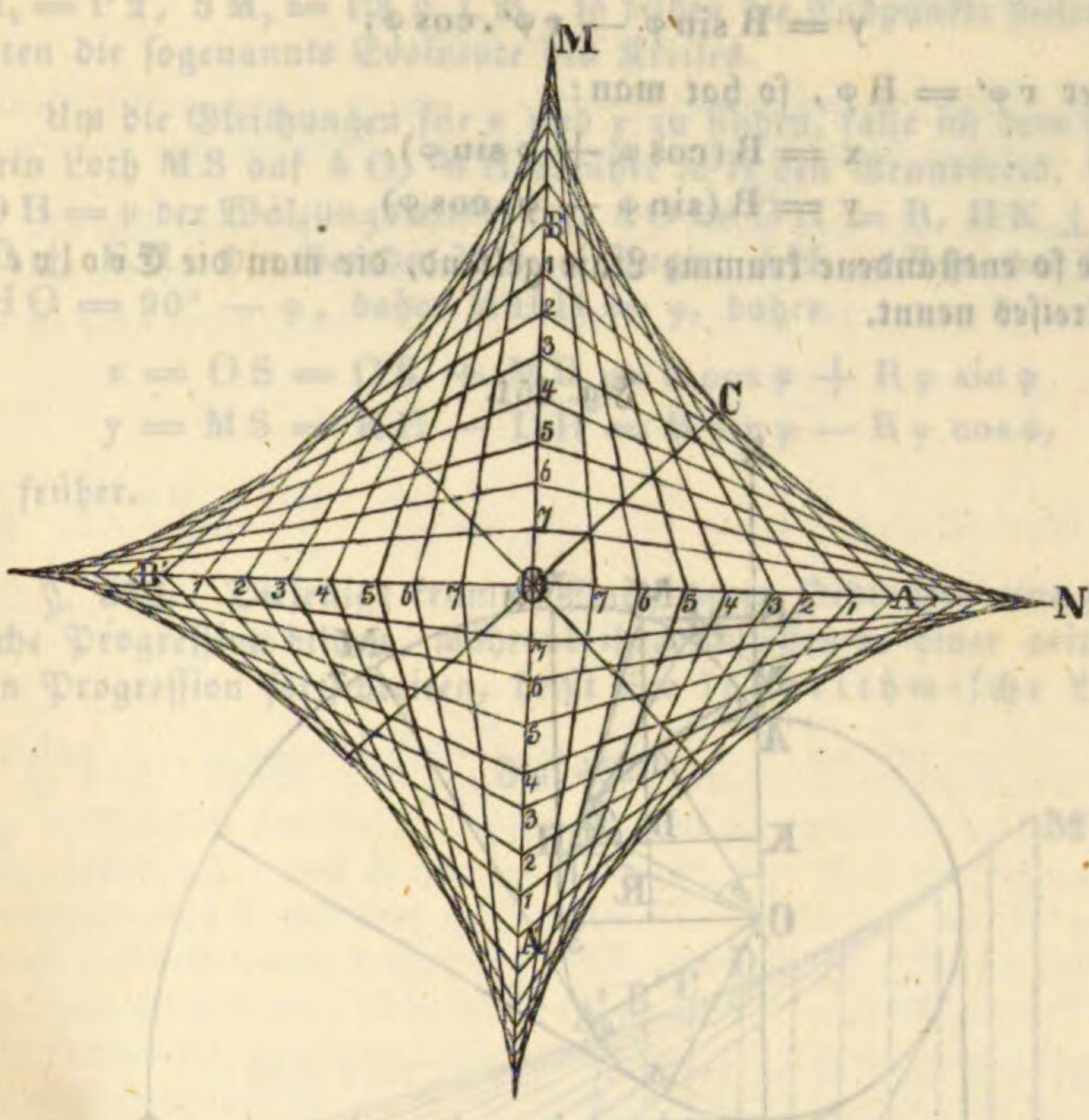
wodurch wir also die Lage des Punktes M haben, sobald uns X und Y gegeben sind suchen wir aber allgemein die Lage des Punktes M für was immer für Werthe von X und Y, sobald nur diese der Gleichung $X^2 + Y^2 = R^2$ Genüge leisten, so haben wir nur die Bezeichnung von x und y unabhängig von X und Y zu suchen. Zu diesem Behufe schaffen wir X und Y aus den drei letzten Gleichungen fort; zu diesem Zwecke erheben wir sowohl x als y zur Potenz, deren Exponent $\frac{2}{3}$ ist, und addiren beide Gleichungen, so haben wir:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}},$$

d. h. die verlangte Krumme ist die Astrois.

Durch die so eben bewiesene Eigenschaft haben wir ein neues Mittel die Astrois zu beschreiben. Um eine Astrois von einem gegebenen R zu beschreiben, errichte ich einen rechten Winkel MON, halbire ihn durch OC, schneide $OC = \frac{1}{2}R$ ab, ziehe durch C eine Gerade AB senkrecht auf OC, so ist AB = R, nehme auf der OB die Punkte 1, 2, 3... an, und aus 1, 2, 3 .. mit dem Halbmesser = R schneide ich die Punkte 1, 2, 3... in der OA ab, verbinde nun 1 mit 1, 2 mit 2 u. s. w., so geben, je näher 1, 2, 3... an einander liegen, diese Geraden Berührende der Astrois, die hier durch ihre Tangenten gebildet erscheint.

Fig. 450



§ 357. Wir hatten als allgemeine Gleichungen für die Epicycloiden:

$$\left.\begin{array}{l} x = (R + r)\cos\varphi - r\cos(\varphi + \varphi') \\ y = (R + r)\sin\varphi - r\sin(\varphi + \varphi') \end{array}\right\} \text{ wobei } R\varphi = r\varphi',$$

wofür wir setzen wollen:

$$x = (R + r)\cos\varphi - r(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi')$$
$$y = (R + r)\sin\varphi - r(\sin\varphi\cos\varphi' + \cos\varphi\sin\varphi').$$

Denken wir uns nun den Halbmesser r des erzeugenden Kreises über alle Grenzen groß, d. h. der Kreis soll sich immer mehr und mehr einer geraden Linie nähern, die sich auf dem Grundkreise abwickelt, und es handelt sich um die krumme Linie, die ein Punkt derselben beschreibt. Wird r über alle Grenzen groß, so nähert sich $\varphi' = \varphi \cdot \frac{R}{r}$ ohne Ende der Null, daher $\cos\varphi'$ der Einheit und $\sin\varphi'$ dem φ'; man hat daher:

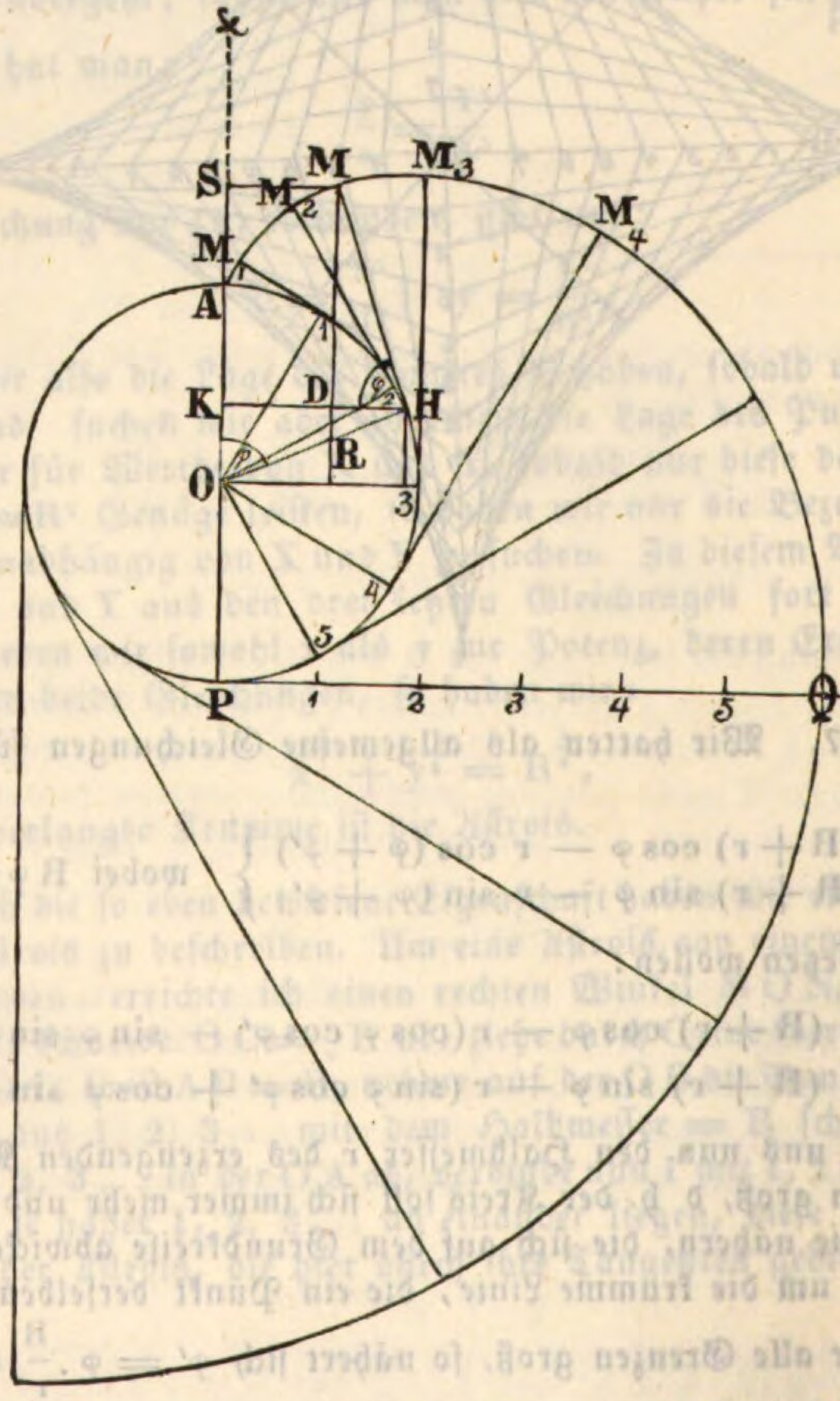
$$x = R\cos\varphi + r\cos\varphi - r\cos\varphi + r\varphi' \cdot \sin\varphi$$
$$y = R\sin\varphi + r\sin\varphi - r\sin\varphi - r\varphi'\cos\varphi,$$

daher
$$x = R\cos\varphi + r\varphi' \sin\varphi$$
$$y = R\sin\varphi - r\varphi'.\cos\varphi;$$

da aber $r\varphi' = R\varphi$, so hat man:
$$x = R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$
$$y = R(\sin\varphi - \varphi.\cos\varphi)$$

für die so entstandene krumme Linie geltend, die man die **Evolvente** des Kreises nennt.

Fig. 451.



Um diese krumme Linie zu verzeichnen, sey A O der Halbmesser des Grundkreises, A 1 2 3 4 5 P der halbe Umfang, die Berührende P Q sey gleich diesem halben Umfange. — Diesen sowohl als P Q theile ich in gleiche Theile, z. B. in sechs Theile. In den Punkten 1, 2, 3 . . . des

Kreisumfanges errichte ich Tangenten, und mache $1 . M_1 1 = A1 = P1$, $2 M_2 = P2$, $3 M_3 = P3$ u. s. w., so bilden die Endpunkte dieser Tangenten die sogenannte Evolvente des Kreises.

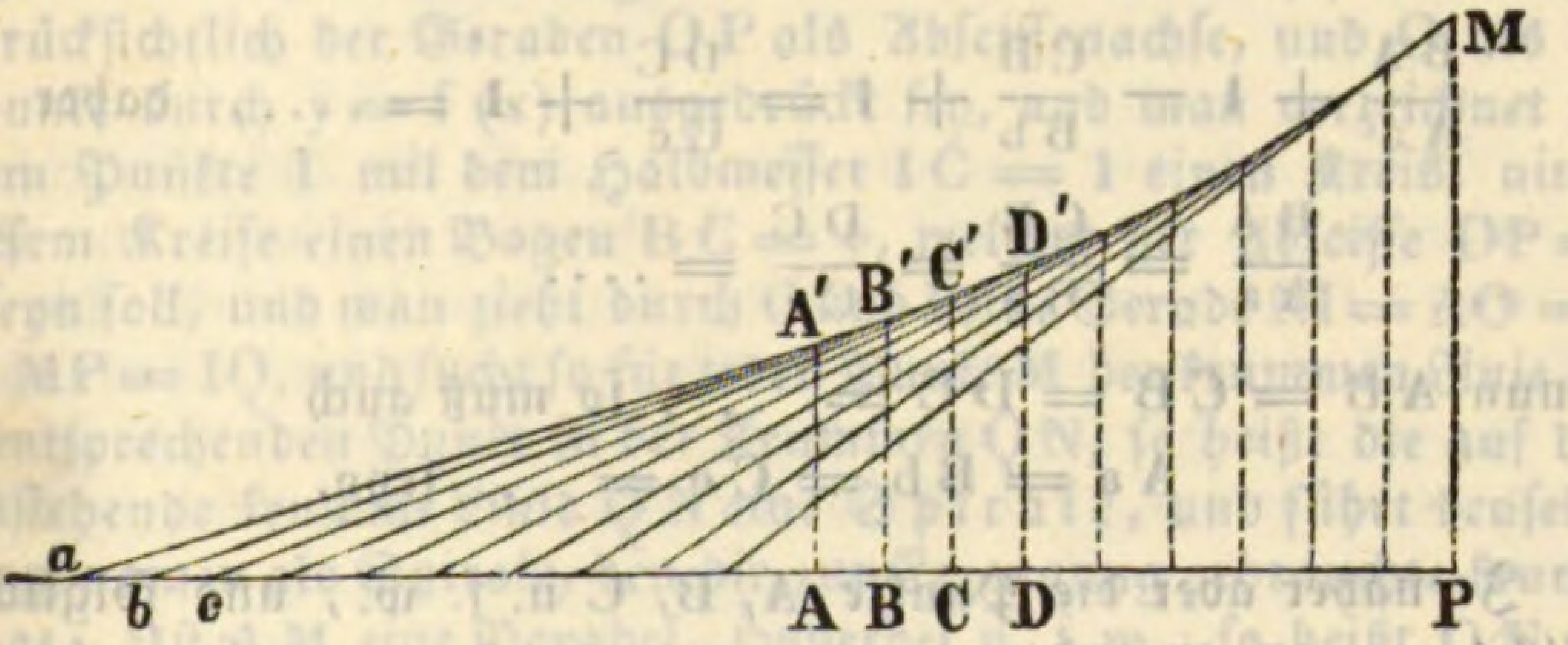
Um die Gleichungen für x und y zu finden, fälle ich vom Punkte M ein Loth MS auf AO, MH berühre in H den Grundkreis, so daß $AOH = \varphi$ der Wälzungswinkel sey, $AO = OH = R$, $HK \perp AO$, $MD \perp KH$, die Gerade $MH =$ Bogen $AH = R\varphi$, der Winkel $KHO = 90° - \varphi$, daher $MHD = \varphi$, daher

$$x = OS = OK + MD = R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$
$$y = MS = KH - DH = R\sin\varphi - R\varphi\cos\varphi,$$

wie früher.

§. 358. Diejenige krumme Linie, deren Ordinaten eine geometrische Progression bilden, während ihre Abscissen in einer arithmetischen Progression fortschreiten, heißt eine logarithmische Linie.

Fig 452.



Es sey $AA' = p$; $BB' = pq$; $CC' = p.q^2$; $DD' = p.q^3$, d. h. $BB' = q.AA'$; $CC' = BB'.q$; $DD' = CC'.q\ldots$, während $AB = BC = CD = \ldots = m$ sey.

Es sey $x = AP$; $y = MP$, und es sey zwar $AP = n.AB$. Man hat also

$$x = n.m;\ y = p \cdot q^n, \text{ daher}$$
$$y = p\, q^{\frac{x}{m}}, \text{ also}$$
$$\log y = \log p + \frac{x}{m}\log q.$$

Ist $AA' = 1$, oder $p = 1$, d. h. nimmt als Anfangspunkt denjenigen Punkt an, wo die Ordinate gleich 1 ist, so hat man:

$$\log y = \frac{x}{m}\log q.$$

Nennet man $\frac{\log 9}{m} = h$, so hat man

$$\log y = h x$$

als Gleichung der logarithmischen Linie, deren Form verschiedenartig ist, je nachdem die Basis des Logarithmen-Systems eine andere ist.

Denken wir uns durch die Punkte A′ und B′ eine Gerade gezogen, welche die Abscissenachse in a trifft, eben so schneide die B′C′ die Achse in b, die C′D′ in d u. s. w. Der Voraussetzung nach ist nun:

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{CC'}{BB'} = \frac{DD'}{CC'} = \ldots.$$

Nun ist auch $\frac{BB'}{AA'} = \frac{Ba}{Aa}$; $\frac{CC'}{BB'} = \frac{Cb}{Bb}$; $\frac{DD}{CC} = \frac{Dc}{Cc} \ldots$, daher

$$\frac{Ba}{Aa} = \frac{Cb}{Bb} = \frac{Dc}{Cc} = = \ldots., \text{ oder}$$

$$\frac{BA + Aa}{Aa} = \frac{CB + Bb}{Bb} = \frac{DC + Cc}{Cc} = \ldots., \text{ daher}$$

$$\frac{BA}{Aa} + 1 = \frac{CB}{Bb} + 1 = \frac{DC}{Cc} + 1 = \ldots., \text{ daher}$$

$$\frac{BA}{Aa} = \frac{CB}{Bb} = \frac{DC}{Cc} = \ldots.$$

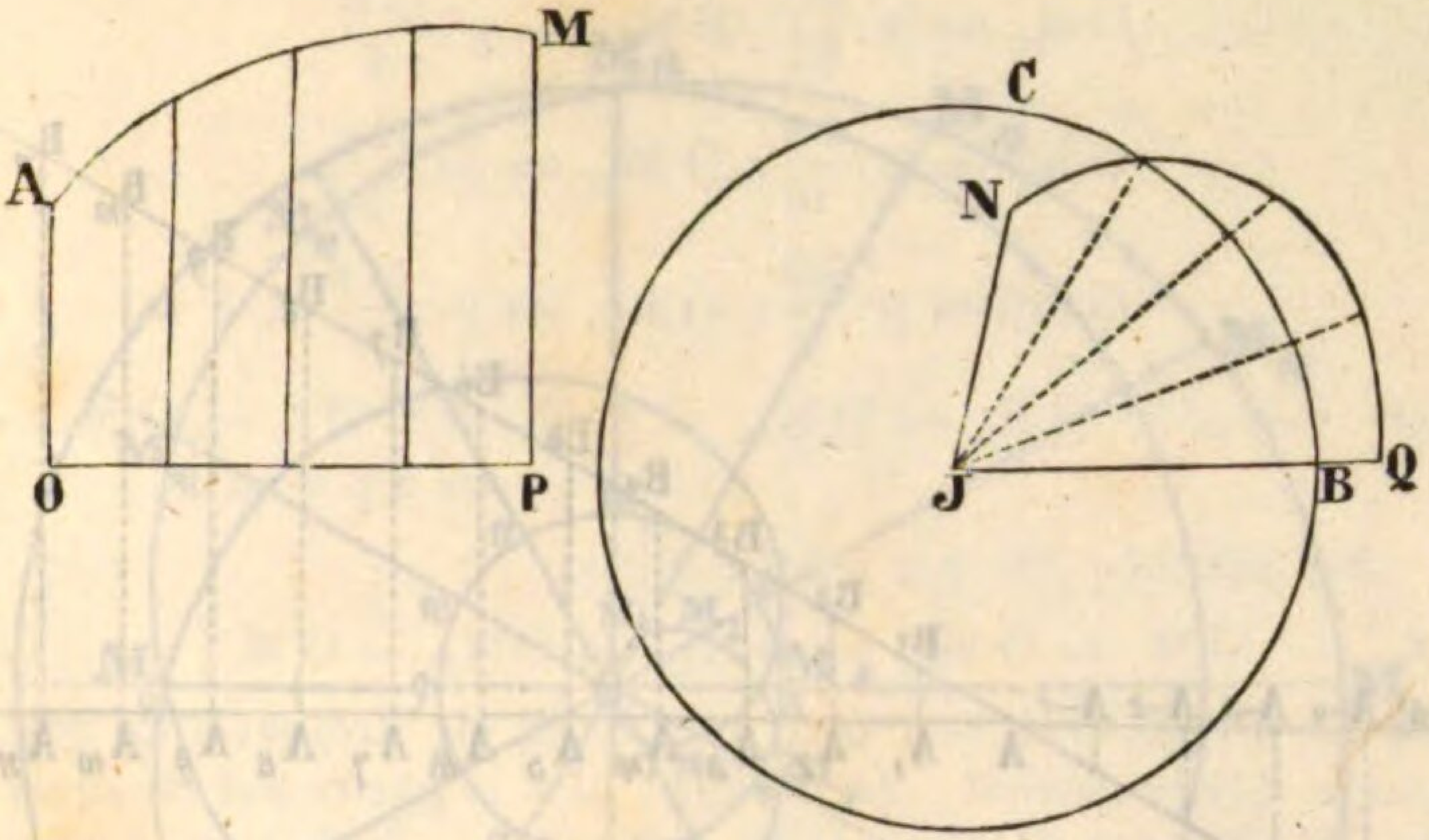
Da nun $AB = CB = DC = \ldots$, so muß auch

$$Aa = Bb = Cc = \ldots. \text{ seyn.}$$

Je näher aber die Punkte A, B, C u. s. w., und folglich auch A′B′C′.... an einander angenommen werden, um so mehr werden die Geraden A′a, B′b, C′c.... sich berührenden Geraden nähern, daher um so mehr Aa, Bb, Cc.... dann die zugehörigen Subtangenten darstellen. Man sieht daher, daß bei den logarithmischen Linien die Subtangente stets dieselbe Größe hat.

Diese Eigenschaft läßt sich zur Verzeichnung benützen, sobald A′ und B′ gegeben ist; zeichnet man die Gerade A′B′, die in a die Achse schneidet, macht Bb = Aa, wodurch man den Punkt b hat, zieht B′b, bis es durch CC′ in C′ geschnitten wird, wodurch man den Punkt C′ der logarithmischen Linie hat, schneidet Cc = Bb ab, wodurch man C hat; zieht C′c, bis es durch DD′ in D′ geschnitten wird, wodurch man D′ hat u. s. f.

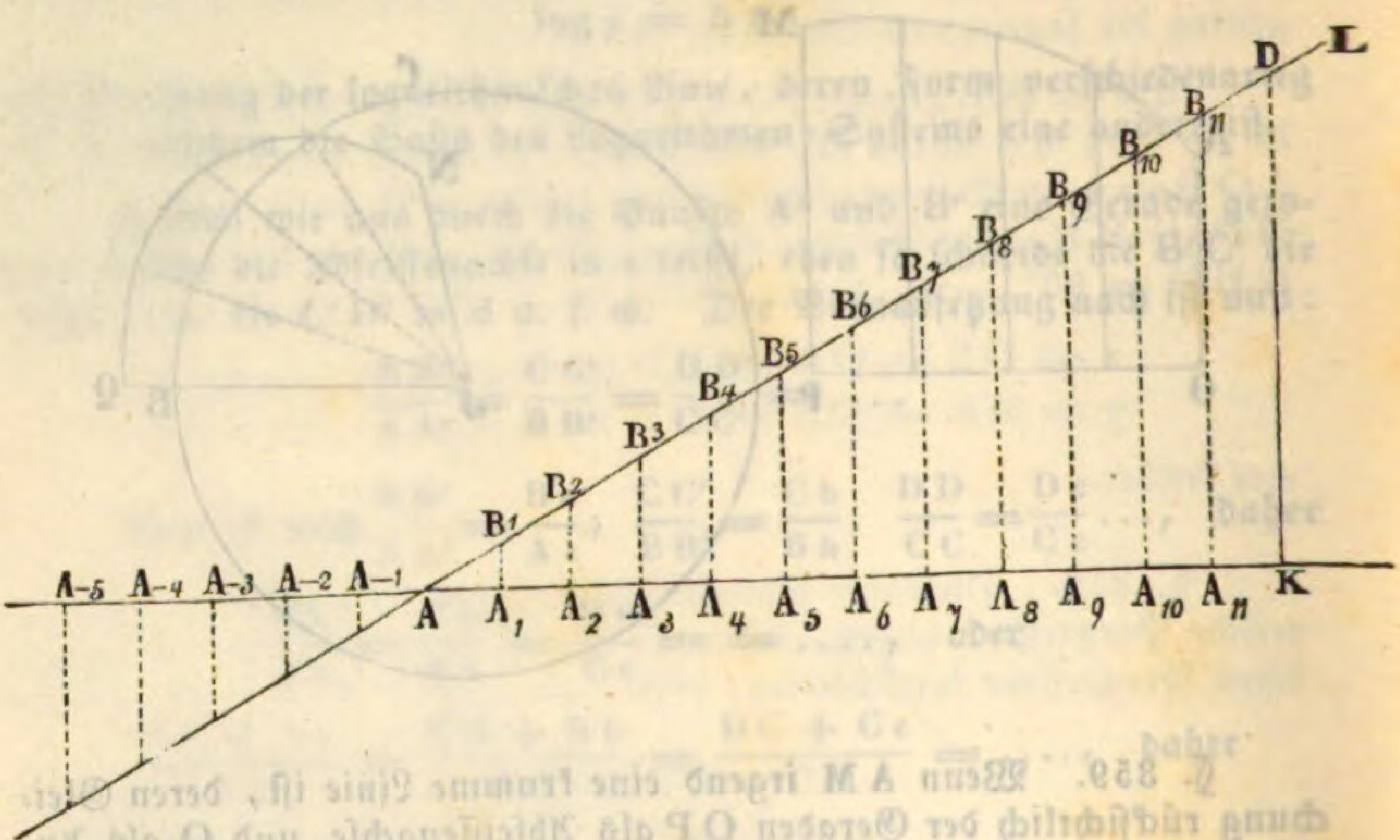
Fig. 452 a).



§. 359. Wenn A M irgend eine krumme Linie ist, deren Gleichung rücksichtlich der Geraden O P als Abscissenachse, und O als Anfangspunkt durch $y = f(x)$ ausgedrückt sey, und man verzeichnet nun aus dem Punkte I mit dem Halbmesser I C = 1 einen Kreis, nimmt auf diesem Kreise einen Bogen $BC = \varphi$, welcher der Abscisse $OP = x$ gleich seyn soll, und man zieht durch C und I eine Gerade $NI = AO = y$, eben so $MP = IQ$, und sucht so für jeden Punkt M der krummen Linie A M einen entsprechenden Punkt in der Krummen Q N, so heißt die auf diese Art entstehende krumme Linie Q N eine Spirale, und führt denselben Gattungsnamen als Spirale, den die zur Erzeugung gebrauchte krumme Linie hat. Ist A M eine Parabel, Hyperbel u. s. w., so heißt Q N eine parabolische, hyperbolische u. s. w. Spirale. Der Punkt I heißt der Pol, jede Gerade vom Pole zu einem Punkte der Spirale Leitstrahl. Den veränderlichen Leitstrahl wollen wir stets durch r, den Winkel, den dieser Leitstrahl mit einer festen, durch den Pol gezogenen Geraden (der Polarachse) bildet, durch φ bezeichnen. Ist die zur Erzeugung gewählte Linie eine gerade Linie, so heißt die so entstandene Spirale eine liniäre oder Archimedische.

Hier müssen wir zwei Fälle unterscheiden, entweder ist der Anfangspunkt in dem Punkte, wo die Gerade die Abscissenachse schneidet, oder es ist dieses nicht der Fall.

Fig. 453.



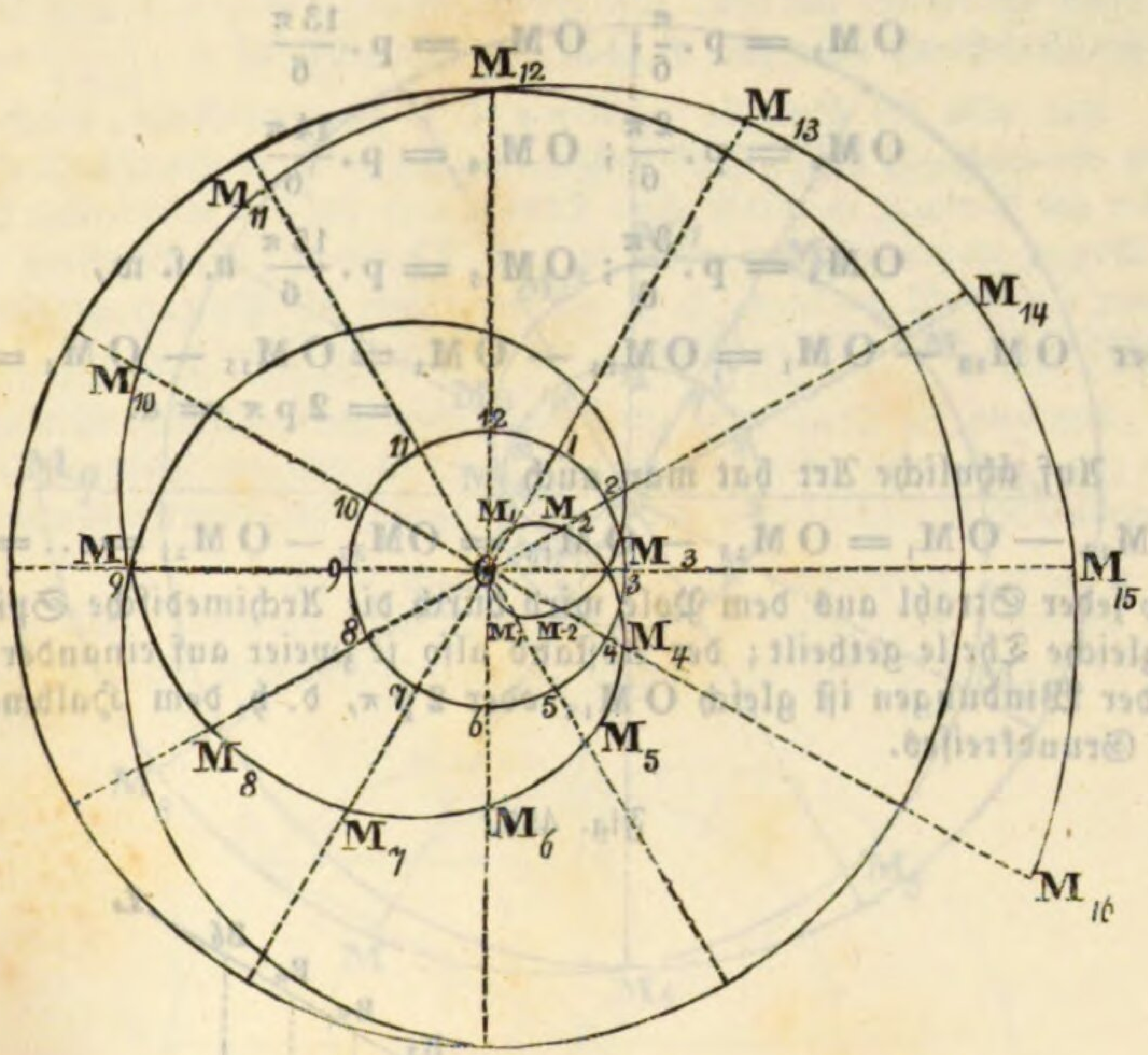
Es sey AL die gegebene Gerade, AK die Abscissenachse, A der Anfangspunkt. Es sey mit dem Halbmesser $O_1 = 1$ ein Kreis beschrieben; theilen wir den Umfang desselben in gleiche Theile (hier z. B. in 12 gleiche Theile), ziehen wir durch alle diese Theilungspunkte Halbmesser. Schneiden wir von der AK ein Stück AK gleich dem Umfange unseres Kreises ab, und theilen wir AK auch in 12 gleiche Theile.

Für die Gerade AL gilt für jeden Punkt, wenn $LAK = \alpha$:

$$y = x \tan \alpha, \quad \text{oder} \quad \tan \alpha = p; \quad y = px.$$

Um nun die krumme Linie, deren Gleichung $r = p . \varphi$ ist, zu verzeichnen, hat man vom Halbmesser O 1, der zum Winkel $\varphi = 12{,}1 = AA_1$ gehört, ein Stück $r = OM_1 = A_1 B_1$ abzuschneiden; eben so vom Halbmesser O 2, der zu $\varphi = 12{,}2 = AA_2$ gehört, ein Stück $r = OM_2 = A_2 B_2$ abzuschneiden. Eben so ist $OM_3 = A_3 B_3$; $OM_4 = A_4 B_4$ u. s. f. Eben so entsprechen den negativen Abscissen

Fig. 454.



$A A_{-1}$, $A A_{-2}$, $A A_{-3}$ u. s. w. negative Werthe von φ, 12, 11; 11, 10; 10, 9, und dieser entsprechen auch negative Werthe von r, nämlich $r = O M_{-1} = O M_{-2} = O M_{-3}$ u. s. w., welche in entgegengesetzter Richtung abgeschnitten sind.

Alle die Punkte $M_1\, M_2\, M_3 \ldots$, $M_{-1}\, M_{-2}\, M_{-3}$ mit einander verbunden, geben die verlangte krumme Linie, welche in unendlichen Windungen nach zwei Richtungen rund herum den Pol O umkreiset.

Für $\varphi = 2\pi$ hat man $r = O M_{12} = DK = 2 p \pi$, nennen wir $DK = a$, und beschreiben wir aus dem Mittelpunkte O mit $O M_{12}$ einen Kreis, so sieht man, daß

$$O M_1 = \frac{a}{12};\ O M_2 = 2 \cdot \frac{a}{12};\ O M_3 = 3 \cdot \frac{a}{12};\ O M_4 = 4 \cdot \frac{a}{12} \text{ u. s. w.}$$

ist. Wir können daher unsere Krumme auch dadurch verzeichnen, daß wir den Kreis, dessen Halbmesser $a = DK = p \cdot AK = 2 \pi p$ ist, in mehrere, z. B. in 12 gleiche Theile theilen, zu allen Theilpunkten Halbmesser ziehen, vom ersten Halbmesser $\frac{1}{12}$, vom zweiten $\frac{2}{12}$ u. s. w. vom Mittelpunkte aus abschneiden; diese Punkte mit einander verbunden, geben die Krumme.

Wie man sieht, ist

$$OM_1 = p \cdot \frac{\pi}{6};\quad OM_{13} = p \cdot \frac{13\pi}{6}$$

$$OM_2 = p \cdot \frac{2\pi}{6};\quad OM_{14} = p \cdot \frac{14\pi}{6}$$

$$OM_3 = p \cdot \frac{3\pi}{6};\quad OM_{15} = p \cdot \frac{15\pi}{6} \text{ u. s. w,}$$

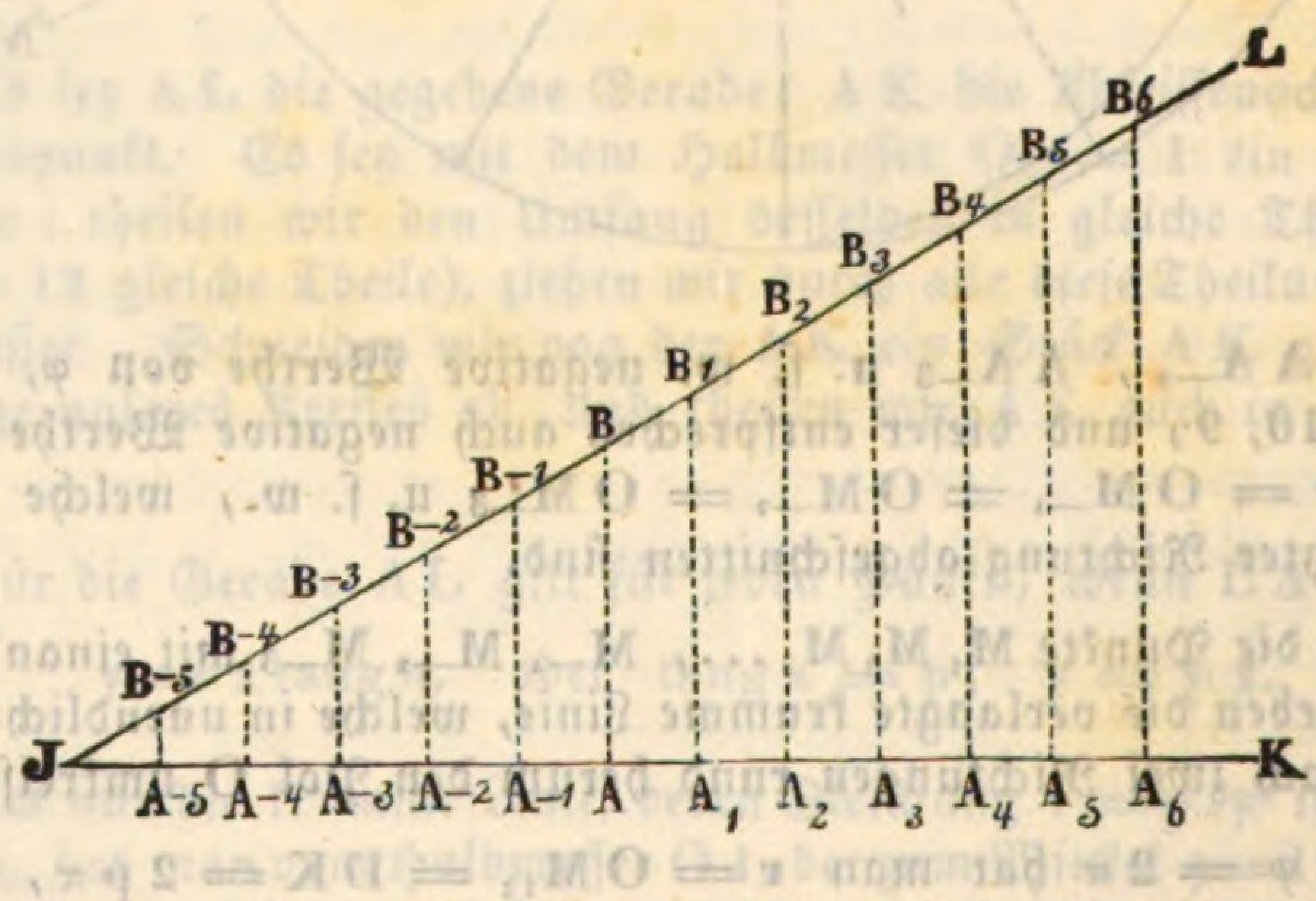
daher $OM_{13} - OM_1 = OM_{14} - OM_2 = OM_{15} - OM_3 = \ldots$
$= 2p\pi = a.$

Auf ähnliche Art hat man auch

$$OM_{13} - OM_1 = OM_{25} - OM_{13} = OM_{37} - OM_{25} = \ldots = a.$$

Also jeder Strahl aus dem Pole wird durch die Archimedische Spirale in gleiche Theile getheilt; der Abstand also je zweier auf einander folgender Windungen ist gleich OM_{12} oder $2p\pi$, d. h. dem Halbmesser des Grundkreises.

Fig. 455.



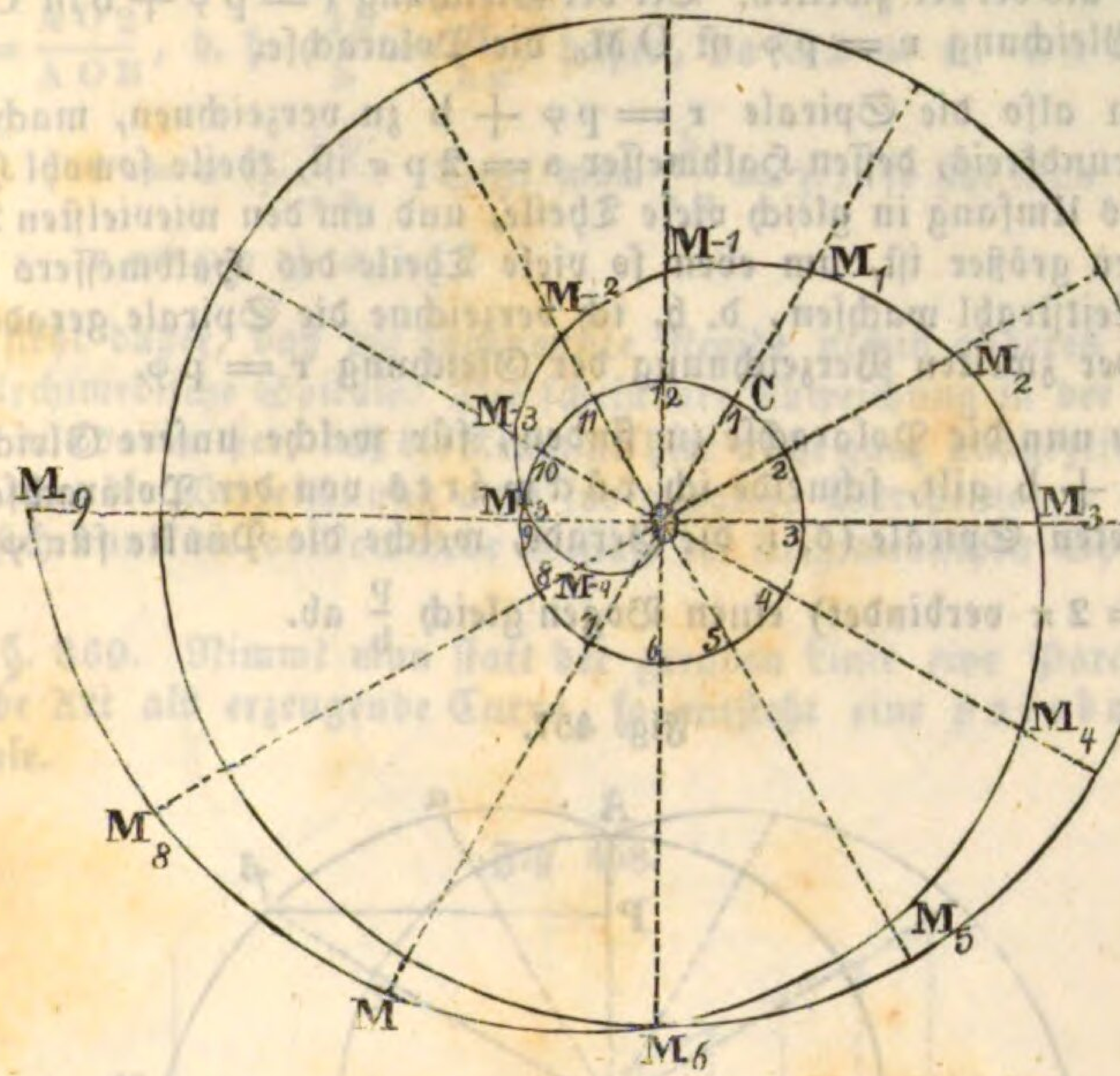
Es sey nun die Gerade IL und A der Anfangspunkt, $BIA = \alpha$ $\tang \alpha = p$; $AB = b$; $AI = c$, so ist für $x = AA_4$ $y = A_4B_4$ dann $\frac{y}{b} = \frac{x + c}{c}$, daher

$$y = (x + c)\frac{b}{c} = (x + c)\tang\alpha = x \tang\alpha + c \tang\alpha, \text{ mithin}$$

$$y = px + b.$$

Die aus dieser Geraden entstehende Spirale hat daher die Gleichung $r = p\varphi + b$.

Fig. 456.



Um nun diese Spirale zu verzeichnen, beschreibe ich mit dem Halbmesser $OC = 1$ einen Kreis, trage $AK = 2\pi =$ dem Umfange dieses Kreises auf der IK auf, theile beide in gleiche Theile (hier in 12), und man hat sofort für $\pi = o$, also in der Richtung OC, $OM_1 = AB$; für $\varphi = \frac{2\pi}{12} = AA_1$; $r = OM_2 = A_1B_1$; für $\varphi = \frac{4\pi}{12} = AA_2$; $r = OM_3 = A_2B_2$ u. s. w., wodurch ich M_1, M_2, M_3 u. s. w. erhalte.

Eben so erhalte ich für $\varphi = -\frac{2\pi}{12} = AA_{-1}$; $r = OM_{-1} = A_{-1}B_{-1}$; für $\varphi = -\frac{4\pi}{12} = AA_{-2}$; $r = OM_{-2} = A_{-2}B_{-2}$ u. s. w.; endlich für $\varphi = -\frac{b}{p}$ oder $\varphi = AI$ wird $r = o$, und man sieht, daß man genau wieder eine Archimedische Spirale hat. Nur ist hier nicht r für $\varphi = 2\pi$ der Halbmesser des Grundkreises, sondern r für $\varphi = 2\pi - \frac{b}{p}$ $\left(\text{wo } \frac{b}{p} \text{ die Bogenlänge für den Halbmesser 1 ausdrückt}\right)$ ist der Halbmesser des Grundkreises.

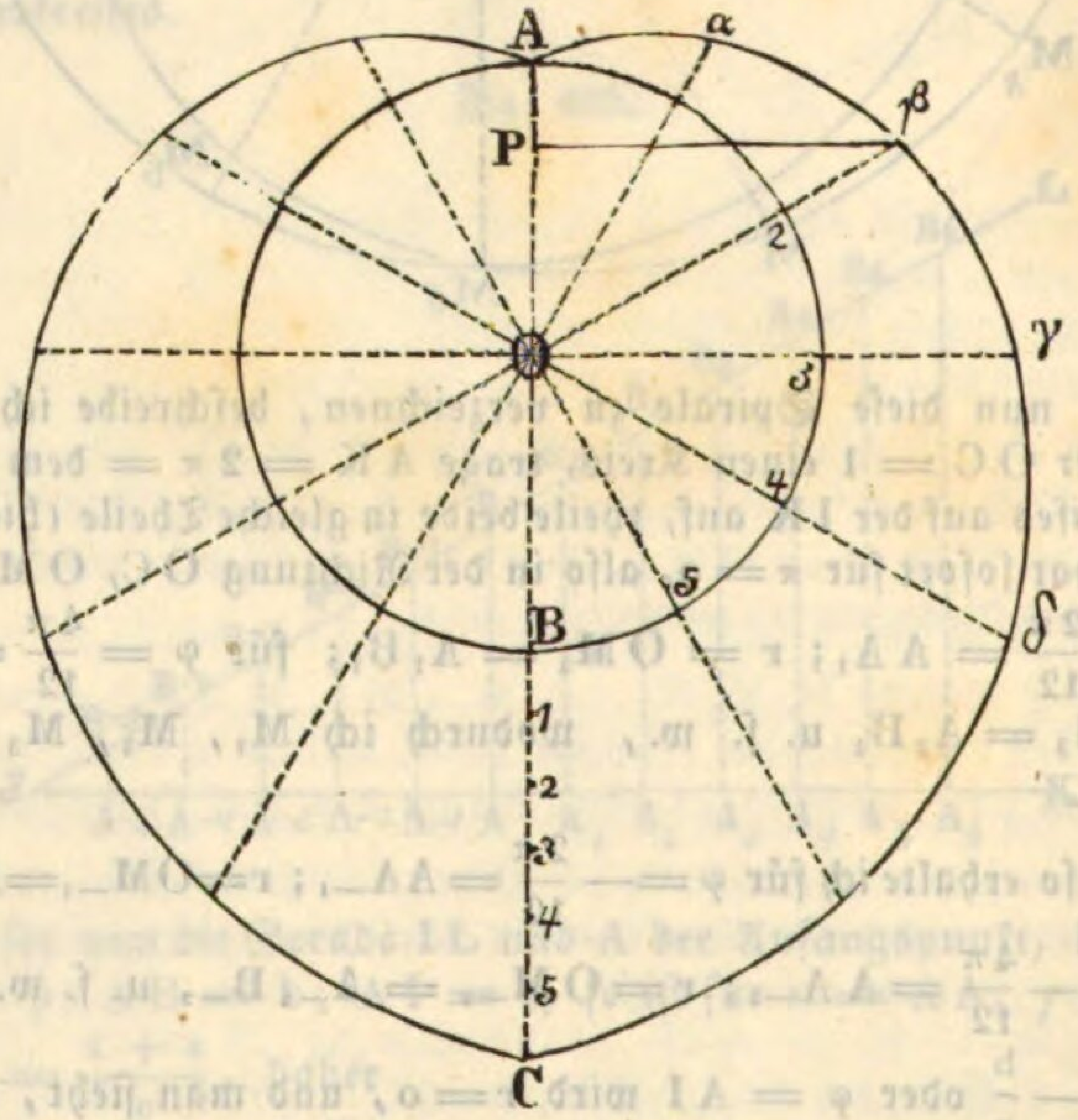
Die Spirale also, deren Gleichung $r = p\varphi + b$ ist, unterscheidet sich von der Spirale, deren Gleichung $r = p\varphi$ ist, gar nicht; nur

werden die φ bei der ersten Gleichung von einer andern Polarachse gemessen als bei der zweiten. Bei der Gleichung $r = p\varphi + b$ ist OM_1, bei der Gleichung $r = p\varphi$ ist OM_6 die Polarachse.

Um also die Spirale $r = p\varphi + b$ zu verzeichnen, mache ich einen Grundkreis, dessen Halbmesser $a = 2p\pi$ ist, theile sowohl Halbmesser als Umfang in gleich viele Theile, und um den wievielsten Theil der Bogen größer ist, um eben so viele Theile des Halbmessers lasse ich den Leitstrahl wachsen, d. h. ich verzeichne die Spirale gerade so, wie bei der zweiten Verzeichnung der Gleichung $r = p\varphi$.

Um nun die Polarachse zu finden, für welche unsere Gleichung $r = p\varphi + b$ gilt, schneide ich rückwärts von der Polarachse der verzeichneten Spirale (d. i. die Gerade, welche die Punkte für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ verbindet) einen Bogen gleich $\frac{p}{b}$ ab.

Fig. 457.



Die Neoide oder Spinnlinie erhält man, wenn bei einem Kreise ADB der Durchmesser AB um das Stück BC verlängert wird, und BC und der Halbkreis ADB in eben so viele gleiche Theile getheilt werden, und die Halbmesser O1, O2, O3.... bezüglich um die Stücke $\alpha 1 = B1$; $\beta 2 = B2$; $\gamma 3 = B3$ u. s. w. verlängert werden, wodurch man die Punkte α, β, γ... der Spinnlinie erhält. Suchen wir die Gleichung dieser Krummen, nennen wir $AO = a$, $BC = b$.

Es sey $\beta P \perp AO$; $x = OP$, $y = P\beta$; $O\beta = O2 + 2\beta$, wobei $\frac{2\beta}{BC} = \frac{AO2}{AOB}$, d. h. $\frac{2\beta}{b} = \frac{\varphi}{a\pi}$, daher, da $O2 = a$, $O\beta = r$,

$$r = a + \frac{b\varphi}{a\pi}.\quad \text{Setzt man } \frac{b}{a\pi} = p,\ \text{so hat man}$$

$$r = p\varphi + a.$$

Man sieht daher, daß die sogenannte Neoide nichts anderes ist, als eine Archimedische Spirale. Die scheinbare Abweichung in der Gestalt rührt nur davon her, daß die Krumme hier nicht ganz ausgezeichnet ist. Setzt man die Verzeichnung auch für negative Werthe von φ fort, so zeigt sich dann die vollkommene Gestalt der Archimedischen Spirale.

§. 360. Nimmt man statt der geraden Linie eine Parabel auf dieselbe Art als erzeugende Curve, so entsteht eine **parobolische** Spirale.

Fig. 458.

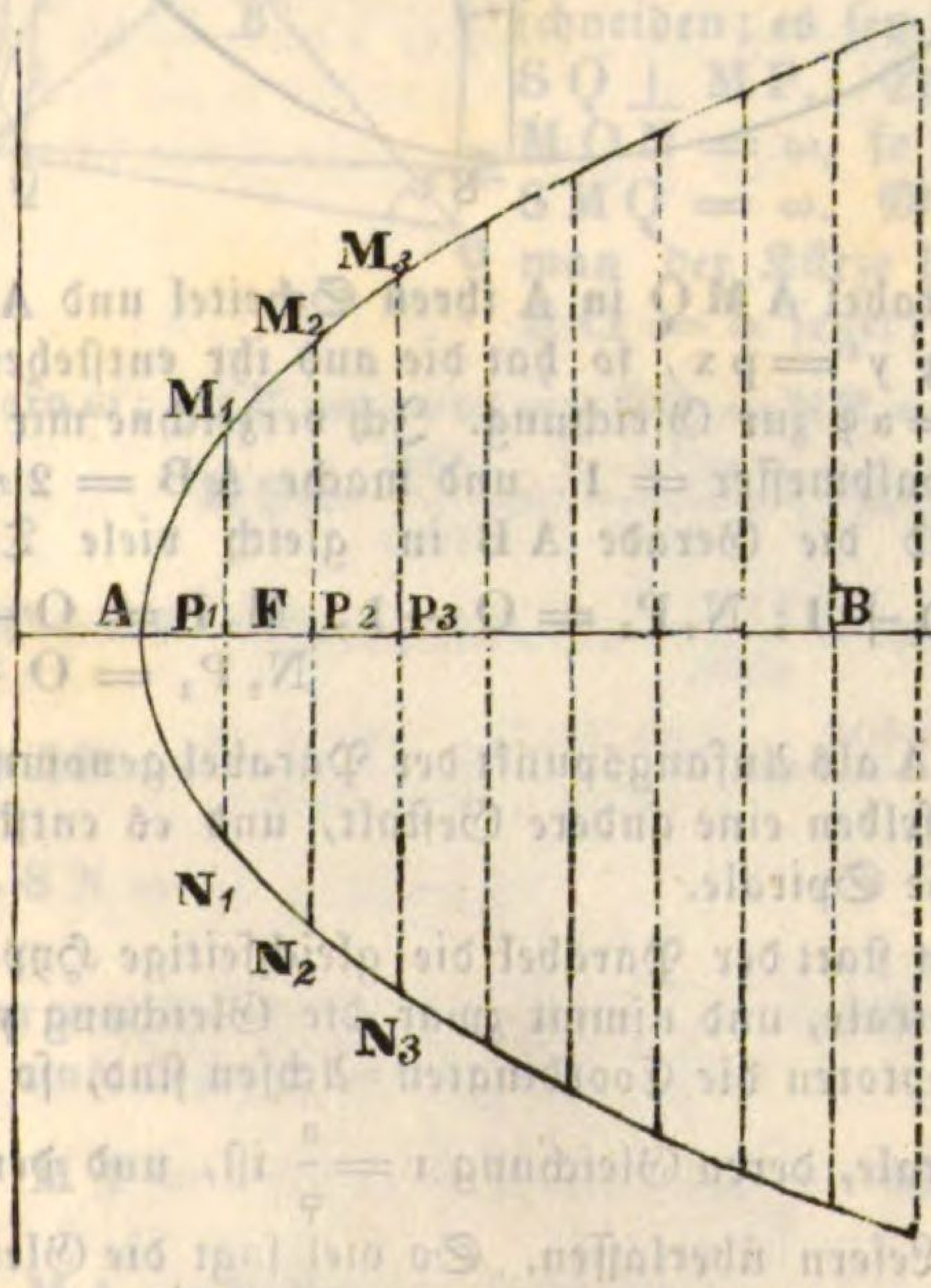
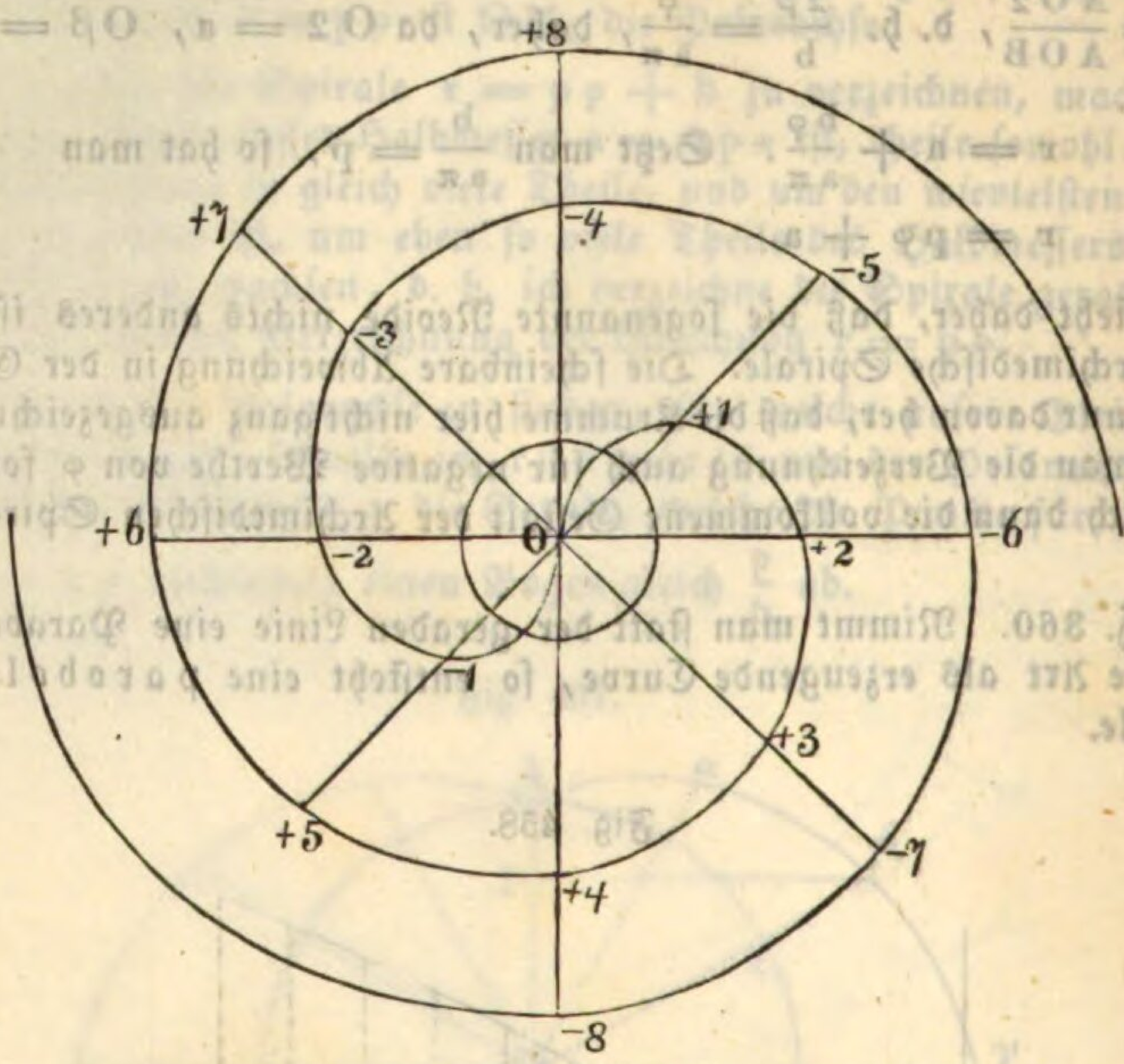


Fig. 459.



Hat die Parabel AMQ in A ihren Scheitel und AB zur Achse, und die Gleichung $y^2 = px$, so hat die aus ihr entstehende parabolische Spirale $r^2 = a\varphi$ zur Gleichung. Ich verzeichne mir wieder einen Kreis mit dem Halbmesser = 1, und mache $AB = 2\pi$; theile den Kreisumfang und die Gerade AB in gleich viele Theile, mache

$$M_1P_1 =, O + 1;\ N_1P_1 = O - 1;\ M_2P = O + 2,$$
$$N_2P_2 = O - 2 \text{ u. s. w.}$$

Wird nicht A als Anfangspunkt der Parabel genommen, so erhält die Gleichung derselben eine andere Gestalt, und es entsteht auch eine andere parabolische Spirale.

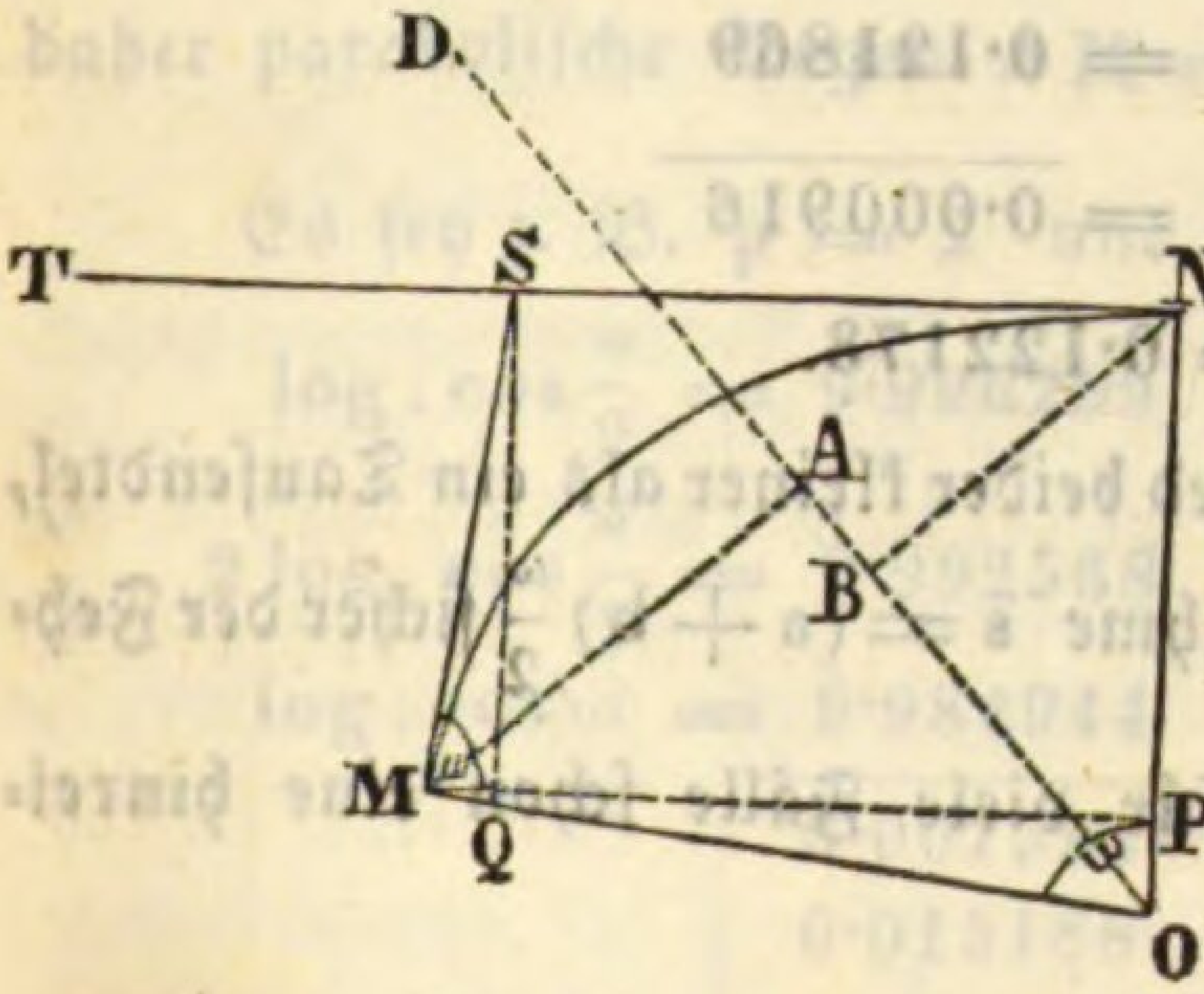
Benützt man statt der Parabel die gleichseitige Hyperbel zur Erzeugung einer Spirale, und nimmt zwar die Gleichung $yx = a^2$, wo nämlich die Assymptoten die Coordinaten-Achsen sind, so hat man die hyperbolische Spirale, deren Gleichung $r = \frac{a}{\varphi}$ ist, und deren Verzeichnung wir unsern Lesern überlassen. So viel sagt die Gleichung, daß r nur gleich Null wird für $\varphi = \infty$, d. h. daß sich die Krumme in unendlich vielen Windungen immer mehr und mehr dem Pole nähert, ohne ihn je zu erreichen. Je kleiner hingegen φ wird, desto größer wird r, für $\varphi = 0$ wird $r = \infty$. Man sieht also, je kleiner der Winkel eines Leitstrahles mit der Polarachse ist, desto größer wird er. Der Leitstrahl wird also für immer kleiner werdende φ sich ohne Ende einer

Geraden nähern, die mit der Polarachse gleichlaufend ist. Es wird also dieser Ast der Krummen sich dieser Geraden als Assymptote stets nähern.

Ist endlich die erzeugende Krumme eine logarithmische, so heißt auch die daraus entstehende Spirale eine logarithmische Spirale.

§. 361. (Rectification durch Annäherung.) Als Anhang zu dem Vorhergehenden wollen wir hier eine Methode mittheilen, annäherungsweise die Länge einer krummen Linie anzugeben, was die Mathematiker das Rectificiren (Gerademachen) einer krummen Linie nennen.

Fig. 460.



Es sey MN der Bogen irgend einer krummen Linie; ich ziehe durch M und N die Berührungslinien MS und NT, die sich in S schneiden, ziehe ebenfalls durch die Punkte M und N die Normalen dieser Punkte, die natürlich auf der Berührenden senkrecht stehen, und die sich in O schneiden; es sey ferner $MP \perp NO$, $SQ \perp MP$. Es sey der Winkel $MON = \omega$, so ist begreiflich auch $SMQ = \omega$. Man hat nun, wenn man der Kürze halber $MO = a$, $NO = b$ setzet:

$$MP = a \sin\omega;\ OP = a\cos\omega;\ SQ = NP = b - a\cos\omega;$$

$$MS = \frac{SQ}{\sin\omega} = \frac{b - a\cos\omega}{\sin\omega};\ MQ = SQ.\operatorname{cotg.}\omega$$

$$SN = QP = MP - MQ = a\sin\omega - \frac{b - a\cos\omega}{\sin\omega}.\cos\omega = \frac{a - b\cos\omega}{\sin\omega},$$

daher $SN + SM = \frac{a - b\cos\omega}{\sin\omega} + \frac{b - a\cos\omega}{\sin\omega} = \frac{(a+b)(1-\cos\omega)}{\sin\omega}$, oder

$$MS + SN = (a+b)\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}.$$

Halbiren wir ferner den Winkel MON durch DO, und machen $MA \perp DO$ und $NB \perp DO$, so hat man:

$$MA = a\sin\frac{\omega}{2};\ NB = b\sin\frac{\omega}{2},\quad \text{daher}$$

$$MA + NB = (a+b)\sin\frac{\omega}{2}.$$

Nun ergibt sich leicht, daß der Bogen MN unserer Krummen, unter der Voraussetzung, daß er zwischen M und N stets gegen O hohl bleibt, kleiner als $MS + SN$ und größer als $MA + NB$ seyn werde,

oder wenn wir die Größe des Bogens MN durch s bezeichnen, so haben wir:

$$(a+b)\tan\frac{\omega}{2} > s > (a+b)\sin\frac{\omega}{2}.$$

Alle Decimalstellen, in denen $\tan\frac{\omega}{2}$ und $\sin\frac{\omega}{2}$ mit einander übereinstimmen, werden auch für s gelten, und somit können wir annäherungsweise setzen:

$$s = (a+b).\frac{\omega}{2}.$$

Ist $\omega = 14°$, so hat man:

$$\tan\frac{\omega}{2} = \tan 7° = 0{\cdot}122785$$

$$\sin\frac{\omega}{2} = \sin 7° = 0{\cdot}121869$$

$$\text{Unterschied} = 0{\cdot}000916$$

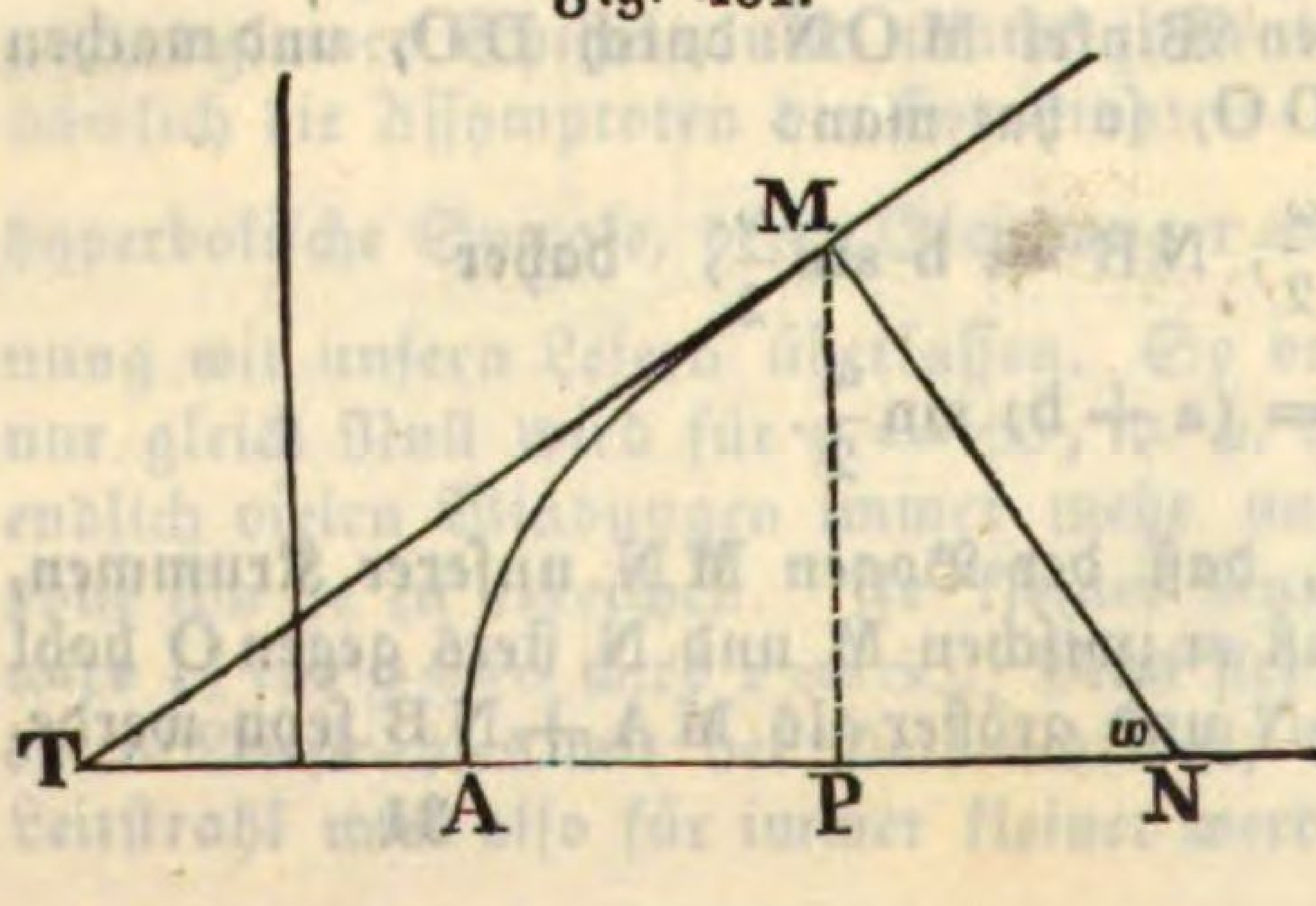
$$\frac{\omega}{2} = \text{arc}\, 7° = 0{\cdot}122173.$$

Wie man sieht, ist hier der Unterschied beider kleiner als ein Tausendtel, folglich in diesem Falle bei der Annahme $s = (a+b)\frac{\omega}{2}$ sicher der Fehler kleiner als $\frac{a+b}{1000}$, was gewiß für viele Fälle schon eine hinreichende Genauigkeit gibt.

Man kann also sagen, **ist der Winkel zweier Normalen nicht bedeutend**, und ändert die Krumme den Sinn der Biegung in diesem Zwischenraume nicht, **so ist die Länge des Bogens annährungsweise gleich der halben Summe der Normalen** (von den Endpunkten des Bogens bis zu ihrem Zusammentreffen dieselben genommen), **multiplicirt mit dem Winkel der Normalen** (Bogen für den Halbmesser 1 dieses Winkels).

Beispiel. Wir wollen die Länge des parabolischen Bogens AM bestimmen, wobei A der Scheitel der Parabel ist. Wir haben dafür unter der Voraussetzung, daß der Winkel $\omega = MNA$ beider Normalen MN und AN nicht bedeutend sey:

Fig. 461.



$$AM = \tfrac{1}{2}(MN + AN).\omega.$$

Nun ist:

$$MN = \frac{PN}{\cos\omega} = \frac{p}{2\cos\omega};$$

$$AN = AP + PN = x + \frac{p}{2};$$

nun ist $y^2 = px$, $x = \frac{y^2}{p}$,

$y = MP = PN \cdot \tang \omega = \frac{p}{2} \tang \omega$, daher $x = \frac{p}{4} \tang^2 \omega$, also

$$AN = \frac{p}{4} \tang^2 \omega + \frac{p}{2};$$

daher
$$MN + AN = \frac{p}{4}\left(\tang^2 \omega + 2 + \frac{2}{\cos \omega}\right)$$
$$= \frac{p}{4} \cdot \left(\frac{1 + \cos \omega}{\cos \omega}\right)^2$$
$$= p \cdot \left(\frac{\cos^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}\right)^2,$$

daher parabolische Bogen $AM = \left(\frac{\cos^2 \frac{\omega}{2}}{\cos \omega}\right)^2 \frac{p \omega}{2}$.

Es sey z. B. $p = 2$ und $\omega = 15^\circ$, so hat man:

$\log . \cos \frac{\omega}{2} = 9 \cdot 996269$	$\text{arc.}\, 15^\circ = \frac{\text{arc.}\, 180^\circ}{12} = \frac{\pi}{12}$
$2 \log . \cos \frac{\omega}{2} = 9 \cdot 992538$	$\log \pi = 0 \cdot 497150$
$\log . \cos \omega = 9 \cdot 984944$	$\log 12 = 1 \cdot 079181$
$0 \cdot 007594$	$9 \cdot 417969$
$0 \cdot 015188$	
$9 \cdot 417967$	

$\log AM = 9 \cdot 433155$, daher $AM = 0 \cdot 027112$,

welches Resultat erst in der sechsten Decimalstelle vom wahren Werthe abweicht.

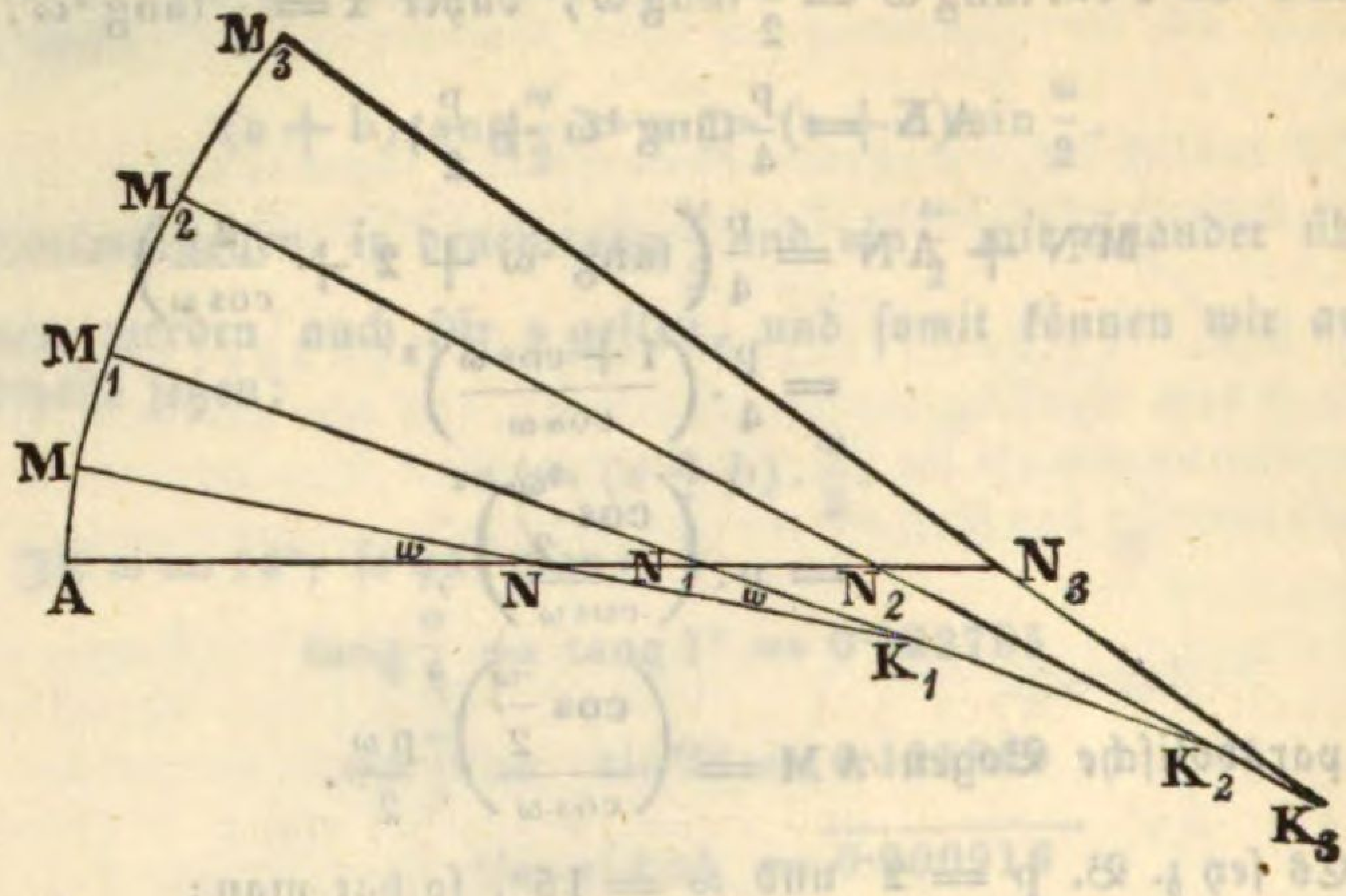
Es sey zweitens ein parabolischer Bogen zu rectificiren, wo $p = 50$; $x = \frac{1}{2}$; daher $y = 5$ ist, so hat man

$$\tang \omega = \frac{2 y}{p} = \frac{10}{50} = 0 \cdot 2, \quad \text{daher } \omega = 11^\circ 18' 36'',$$

woraus die Größe des Bogens $= 5 \cdot 0345$ gefunden wird

§. 362. Es lassen sich aber Annäherungsformeln für jeden Bogen einer krummen Linie finden, wenn der Winkel, den die beiden äußersten Normalen dieses Bogens mit einander machen, auch jede beliebige Größe hat. Es seyen nämlich AN_3 und M_3N_3 die beiden äußersten Normalen des Bogens AM_3, welche sich unter dem Winkel

Fig. 624



$AN_3M_3 = \lambda$ treffen. Denken wir uns nun die Krumme in den Punkten M, M_1, M_2, M_3.... so abgetheilt, daß die Winkel je zweier nächsten Normalen einerlei seyen, z. B. $= \omega$, und zwar so, daß λ ein Vielfaches von ω sey (in der hier gezeichneten Figur ist $\lambda = 4\omega$); nur ist, dem Früheren zufolge, annäherungsweise desto genauer, je kleiner als ω ist:

$$\left.\begin{aligned} \text{Bogen } AM &= (AN + MN)\frac{\omega}{2} \\ \text{» } MM_1 &= (MK_1 + M_1K_1)\frac{\omega}{2} \\ \text{» } M_1M_2 &= (M_1K_2 + M_2K_2)\frac{\omega}{2} \\ \text{» } M_2M_3 &= (M_2K_3 + M_3K_3)\frac{\omega}{2} \end{aligned}\right\}\ \text{I.}$$

Macht man nun: $AN_3 = m$; $M_3N_3 = m^1$: $MN = n_1$, $M_1N_1 = n_2$; $M_2N_2 = n_3$; $NN_3 = p_1$; $N_1N_3 = p_2$; $N_2N_3 = p_3$; daher $AN = m - p_1$; $NN_1 = p_1 - p_2$; $N_1N_2 = p_2 \quad p_3$; $N_2N_3 = p_3$, so hat man:

$$AN + MN = m - p_1 + n_1$$

$$MK_1 + M_1K_1 = MN + M_1N_1 + NK_1 + N_1K_1$$
$$= n_1 + n_2 + (p_1 - p_2)\left(\frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} + \frac{\sin\omega}{\sin\omega}\right)$$

$$M_1K_2 + M_2K_2 = M_1N_1 + M_2N_2 + N_1K_2 + N_2K_2$$
$$= n_2 + n_3 + (p_2 - p_3)\left(\frac{\sin 3\omega}{\sin\omega} + \frac{\sin 2\omega}{\sin\omega}\right)$$

$$M_2K_3 + M_3K_3 = M_2N_2 + M_3N_3 + N_2K_3 + N_3K_3$$
$$= n_3 + m_1 + p_3\left(\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega} + \frac{\sin 3\omega}{\sin\omega}\right).$$

Daher durch Addition der Gleichungen I:

$$\text{Bogen } AM_3 = \omega \left\{ \left[\frac{m+m'}{2} + n_1 + n_2 + n_3 + \frac{p_1}{2} \cdot \frac{\sin 2\omega}{\sin\omega} + \frac{p_2}{2}\left(\frac{\sin 3\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin\omega}{\sin\omega}\right) + \frac{p_3}{2}\left(\frac{\sin 4\omega}{\sin\omega} - \frac{\sin 2\omega}{\sin\omega}\right) \right] \right\}$$

$$\text{Bogen } AM_3 = \omega \left\{ \left(\frac{m+m'}{2} + n_1 + n_2 + n_3 + p_1 \cos\omega + p_2 \cos 2\omega + p_3 \cos 3\omega \right) \right\}$$

$$\text{Bogen } AM_3 = \omega \left\{ \left(\frac{m+m'}{2} + n_1 + p_1 \cos\omega + n_2 + p_2 \cos\omega + n_3 + p_3 \cos 3\omega \right) \right\}.$$

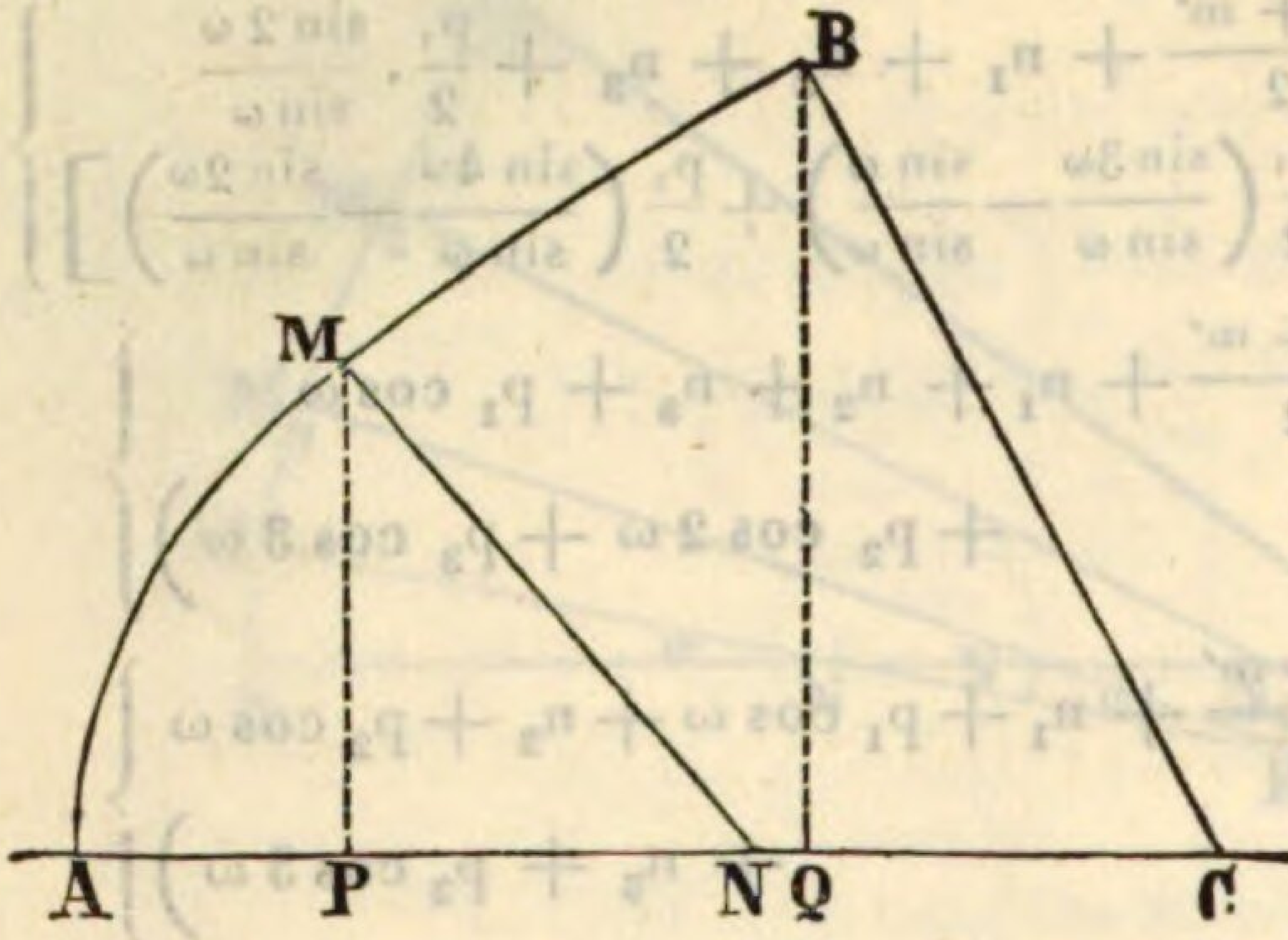
Würde man den Bogen $AM = \sigma$ statt in vier solche Theile in r Theile getheilt haben, so daß also $\omega = \frac{\lambda}{r}$ wäre, so hätte man:

$$\sigma = \omega \left\{ \left(\frac{m+m'}{2} + n_1 + p_1 \cos\omega + n_2 + p_2 \cos\omega + \ldots, n_{r-2} + p_{r-2} \cos(r-2)\omega + n_{r-1} + p_{r-1} \cos(r-1)\omega \right) \right\} \text{II},$$

wobei m und m′ die Normalen der Endpunkte des Bogens σ bis zum Zusammentreffungspunkte sind, $\lambda = r\omega$ der Winkel, den sie bilden, $n_1\, n_2\, n_3 \ldots, n_{r-1}$ die Längen der Normalen der einzelnen Theilpunkte, bis sie die Normale m treffen, $p_1\, p_2\, p_3 \ldots p_{r-1}$ die Entfernungen, wo die $n_1\, n_2\, n_3 \ldots$ die m treffen, von dem Punkte wo m und m′ zusammentreffen Nehmen wir in II ein allgemeines Glied mit dem Zeiger z, und schreiben wir demselben das Summenzeichen Σ vor, wodurch wir ausdrücken wollen, daß man statt z, von 1 angefangen, alle Werthe bis zu der bei Σ angesetzten Größe, alle natürliche Zahlen zu setzen habe, und diese Werthe zu addiren hat, so erhält die Gleichung II folgende Gestalt:

$$\sigma = \omega \left(\frac{m+m'}{2} + \Sigma_1^{r-1} (n_z + p_z \cos z\omega) \right) \text{ (III).}$$

Fig. 463.



Nehmen wir nun an, die Abscissenachse liege in der ersten Normale m, und es sey die Länge des Bogens $\sigma = AB$ zu finden; die beiden Normalen $AC = m$ und $BC = m'$, ihr Winkel $ACB = \lambda$; es sey $BQ \perp AC$, A der Anfangspunkt, ferner $AQ = X$; $BQ = Y$, so hat man:

$$m' = BC = \frac{Y}{\sin\lambda};$$
$$m = AC = X + Y \operatorname{cotg}.\lambda.$$

Es sey nun M irgend ein Punkt dieser Krummen, $AP = x$, $MP = y$, MN die Normale, $MNA = \varphi$, so hat man:

$$MN = \frac{y}{\sin\varphi}; \; NC = AC - AN = m - x - y \operatorname{cotang}\varphi.$$

Ist nun $\varphi = z\frac{\lambda}{r} = z.\omega$, so haben wir unseren früheren Bezeichnungen gemäß: $MN = n_z$, $NC = p_z$ zu setzen, und es ist $n_z = \frac{y_z}{\sin z\omega}$; $p_z = m - x_z - y_z \operatorname{cotg}. z\omega$, wodurch die Gleichung III in folgende übergeht:

$$\sigma = \omega\left(\frac{m+m'}{2} + \Sigma_1^{r-1}\left[(m - x_z)\cos z\omega + y_z \sin z\omega\right]\right) \text{ (IV).}$$

§. 363. Wenden wir das Vorhergehende auf eine Parabel an, die Coordinaten des Endpunktes des Bogens seyen X und Y, der Anfangspunkt des Bogens im Scheitel, der Parameter $= p$, so hat man $m = X + Y \operatorname{cotg}\lambda$, $m' = \frac{Y}{\sin\lambda}$, wo wieder λ der Winkel der Normalen der beiden Endpunkte ist, daher

$$\frac{m+m'}{2} = \frac{1}{2}\left(X + Y \operatorname{cotg}.\frac{\lambda}{2}\right), \text{ wobei } \operatorname{tang}\lambda = \frac{2Y}{p}.$$

Für irgend einen Punkt der Parabel, dessen Normale mit der Achse den Winkel φ bildet, hat man:

$$x = \frac{p}{4}\operatorname{tang}^2\varphi; \;\; y = \frac{p}{2}\operatorname{tang}\varphi.$$

Ist nun $\varphi = z\omega$, so hat man den früheren Bezeichnungen gemäß:

$$x_z = \frac{p}{4}\operatorname{tang}^2 z\omega; \;\; y_z = \frac{p}{2}\operatorname{tang} z\omega, \text{ daher}$$

$$\sigma = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(X + Y \,\text{cotg.}\, \frac{\lambda}{2}\right) \\ + \Sigma_1^{r-1} \left[\left(m - \frac{p}{4} \,\text{tang}^2 z\omega \right) \cos z\omega + \frac{p}{2} \,\text{tg.} z\omega . \sin z\omega \right] \end{array} \right\}$$

$$= \omega \left\{ \frac{1}{2}\left(X + Y \cot. \frac{\lambda}{2}\right) + \Sigma_r^{r-1} \left(m \cos z\omega + \frac{p}{4} . \frac{1 - \cos^2 z\omega}{\cos z\omega} \right) \right\}$$

$$= \omega \left\{ \frac{1}{2}\left(X + Y \cot. \frac{\lambda}{2}\right) + \Sigma_r^{r-1} \frac{p}{4} . \left(\frac{4m - p}{p} \cos z\omega + \frac{1}{\cos z\omega} \right) \right\},$$

wobei $\omega = \frac{\lambda}{r}$.

Für ein Zahlenbeispiel sey $p = 2$, und die Ordinate Y die im Brennpunkte, daher $Y = \frac{p}{2} = 1$; $X = \frac{p}{4} = \frac{1}{2}$; $\text{tang}\, \lambda = 1$, also $\lambda = 45^\circ$ und $m = \frac{3}{2}$; $\frac{\lambda}{2} = 22^\circ\, 30'$; $\text{cotang.} \frac{\lambda}{2} = 2{\cdot}4142136$, so hat man:

$$\sigma = \omega \left\{ 1{\cdot}4571068 + \Sigma_r^{r-1} \left(\cos z\omega + \frac{1}{2} . \frac{1}{\cos z\omega} \right) \right\},$$

wobei $\omega = \frac{45^\circ}{r}$ ist.

Theilet man nun den parabolischen Bogen in drei Theile, setzet also $r = 3$, daher $\omega = 15^\circ$, so hat man:

$$\sigma = \left\{ 1{\cdot}4571068 + \Sigma_1^2 \left(\cos z\, 15^\circ + \frac{1}{2} . \frac{1}{\cos z\, 15^\circ} \right) \right\} . \text{arc.}\, 15^\circ, \text{ oder}$$

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \left(1{\cdot}4571068 + \cos 15^\circ + \frac{1}{2} . \frac{1}{\cos 15^\circ} + \cos 30^\circ \right. \\ \left. \qquad + \frac{1}{2} . \frac{1}{\cos 30^\circ} \right) \end{array} \right\} 0{\cdot}2617994$$

$\log. \cos 15^\circ$	$= 9{\cdot}984944$	$\cos 15^\circ$	$= 0{\cdot}965926$
$-\log. \cos 15^\circ$	$= 0{\cdot}015056$		
$\log 2$	$= 0{\cdot}301030$		
	$9{\cdot}714026$	$\frac{1}{2} . \frac{1}{\cos 15^\circ}$	$= 0{\cdot}517638$
$\log. \cos 30^\circ$	$= 9{\cdot}937531$	$\cos 30^\circ$	$= 0{\cdot}866025$
$-\log. \cos 30^\circ$	$= 0{\cdot}062469$		
	$0{\cdot}301030$		
	$9{\cdot}761439$	$\frac{1}{2} . \frac{1}{\cos 30}$	$= 0{\cdot}577350$
			$1{\cdot}457107$
		μ	$= 4{\cdot}384046$

$\log \mu = 0{\cdot}641875$
$\log. \text{arc.}\, 15^\circ = 9{\cdot}417969$
$\log \sigma = 0{\cdot}059844$,
daher $\sigma = 1{\cdot}14775$,

welches vom wahren Werthe nur um 2 in der letzten Stelle abweicht.

Würde man den Bogen von 45° statt in 3 in 5 Theile theilen, was aber hier nach der Genauigkeit des erhaltenen Resultats nicht nothwendig ist, so hätte man:

$$\sigma = \text{arc}.9^\circ \left\{ 1{\cdot}457107 + \Sigma_1^4 \left(\cos z \,.\, 9^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos z \,.\, 9^\circ} \right) \right\}, \text{ oder}$$

$$\sigma = \text{arc}.9^\circ \left\{ 1{\cdot}457107 + \cos 9^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 9^\circ} \right.$$
$$+ \cos 18^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 18^\circ}$$
$$+ \cos 27^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 27^\circ}$$
$$\left. + \cos 36^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos 36^\circ} \right\}.$$

Das Resultat dieser Rechnung muß in den 5 ersten Ziffern mit dem so eben Gefundenen übereinstimmen, die sechste Ziffer wird natürlich besser seyn.

§. 364. Es sey der Bogen AB in der letzten Figur ein elliptischer Bogen, wo a und b dieselbe große und kleine Achse sind. Wir haben Seite 374 gefunden, wenn φ der Winkel der Berührenden mit der Achse ist:

$$x^2 = \frac{a^4 \sin^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}; \quad y^2 = \frac{b^4 \cos^2\varphi}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}.$$

Benennen wir durch φ den Winkel, den die Normale mit der Achse der x macht, so hat man $\sin\varphi$ mit $\cos\varphi$ und umgekehrt zu vertauschen. Nehmen wir ferner den Anfangspunkt statt vom Mittelpunkte vom Scheitel, so hat man x mit a — x zu vertauschen, und man hat:

$$a - x = \frac{a^2 \cos\varphi}{h}; \; y = \frac{b^2 \sin\varphi}{h},$$

wobei $h^2 = a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi$ ist, daher

$$x = a - \frac{a^2}{b^2} \text{cotg}.\,\varphi \,.\, y.$$

Nimmt man den Anfangspunkt des Bogens im Scheitel, X und Y als die Ordinaten des Endpunktes, λ als den Winkel der Normalen der beiden Endpunkte, so hat man:

$$\frac{m + m'}{2} = \frac{1}{2}\left(X + Y \,\text{cotg}.\, \frac{\lambda}{2}\right); \; m = X + Y \,\text{cotg}.\,\lambda,$$

wobei $\cot.\lambda = \frac{b^2 (a - X)}{a^2 Y}$ ist, und man hat somit für die elliptische

Bogenlänge folgenden Ausdruck:

$$\sigma = \omega \left\{ \frac{1}{2}\left(X + Y \operatorname{cotg}.\frac{\lambda}{2}\right) + \Sigma_1^{r-1}\left((m - x_z)\cos z\omega + y_z \sin z\omega\right)\right\}.$$

Dem Früheren gemäß ist nun:

$$x_z = a - \frac{a^2}{b^2} \operatorname{cotg}. z\omega . y_z\,; \quad y_z = \frac{b^2 \sin z\omega}{h_z}, \quad \text{daher}$$

$$\sigma = \omega \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\left(X + Y \operatorname{cotg}.\frac{\lambda}{2}\right) \\ \quad + \Sigma_1^{r-1}\left[(m-a)\cos z\omega + \left(\frac{a^2 \cos^2 z\omega}{b^2 \sin z\omega} + \sin z\omega\right) y_z\right] \end{array} \right\},$$

$$\sigma = \omega \left\{ \frac{1}{2}\left(X + Y \cot.\frac{\lambda}{2}\right) + \Sigma_1^{r-1}\left((m-a)\cos z\omega + h_z\right)\right\},$$

wobei $h_z^2 = a^2 \cos^2 z\omega + b^2 \sin^2 z\omega$ ist.

Zur leichteren Berechnung von h_z hat man:

$$h_z = a\sqrt{\cos^2 z\omega + \frac{b^2 \sin^2 z\omega}{a^2}} = a\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2 z\omega}$$

$$= a\sqrt{1 - e^2 \sin z\omega}.$$

Setzt man nun $e \sin z\omega = \sin\psi_z$, so hat man $h_z = a \cos\psi_z$, und somit:

$$\sigma = \omega \left\{ \frac{1}{2}\left(X + Y \operatorname{cotg}.\frac{\lambda}{2}\right) + \Sigma_1^{r-1}\left[(m-a)\cos z\omega + a\cos\psi_z\right]\right\},$$

wobei $\omega = \frac{\lambda}{r}$; $m = X + Y \operatorname{cotg}.\lambda$; $\operatorname{cotg}.\lambda = \frac{b^2(a - X)}{a^2 Y}$ und $\sin\psi_z = e \sin z\omega$ ist.

Als Zahlenbeispiel berechnen wir die Länge eines elliptischen Quadranten, wo $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, also

$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ist; $\lambda = 90°$; $X + Y \operatorname{cotg}.\frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}$; $m = 1$; $m - a = 0$,

daher: $$\sigma = \left(\frac{3}{4} + \Sigma_1^{r-1} \cos\psi_z\right)\frac{\pi}{2r}, \quad \text{oder}$$

$$\sigma = \left(\frac{3}{4} + \cos\psi_1 + \cos\psi_2 + \cos\psi_3 + \ldots \cos\psi_{r-1}\right)\frac{\pi}{2r},$$

wobei $\sin\psi_z = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin z\omega$, oder

$\sin\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin\omega$; $\sin\psi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.\sin 2\omega$; $\sin\psi_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3\omega$

u. s. w., und $\omega = \frac{\pi}{2r}$ ist, wobei r nach unserem Belieben ist.

Nehmen wir r = 3 an, also $\omega = \text{arc. } 30^\circ$, so hat man:

$$\sin\omega = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};\ \sin\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{4};\ \cos\psi_1 = \frac{\sqrt{13}}{4}$$

$$\sin 2\omega = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\psi_2 = \frac{3}{4};\ \cos\psi_2 = \frac{\sqrt{7}}{4},$$ daher

$$\sigma = \left(\frac{3 + \sqrt{13} + \sqrt{7}}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{6},$$ also

$$\sigma = 1{\cdot}21099,$$

was um 0·00006 zu klein ist, gegen das wahre Resultat.

Macht man die Abtheilung statt in 3 in 6 Theile, so hat man $\omega = 15^\circ$, und hat somit:

$\log\sin 1\,\omega = 9{\cdot}412996$	$\log\sin\psi_1 = 9{\cdot}350527$	$\psi_1 = 12^\circ\,57'\,9''$
$\log\sin 2\,\omega = 9{\cdot}698970$	$\log\sin\psi_2 = 9.636501$	$\psi_2 = 25^\circ\,39'\,32''$
$\log\sin 3\,\omega = 9{\cdot}849485$	$\log\sin\psi_3 = 9{\cdot}787016$	$\psi_3 = 37^\circ\,45'\,40''$
$\log\sin 4\,\omega = 9{\cdot}937531$	$\log\sin\psi_4 = 9{\cdot}875061$	$\psi_4 = 48^\circ\,35'\,25''$
$\log\sin 5\,\omega = 9{\cdot}984944$	$\log\sin\psi_5 = 9{\cdot}922474$	$\psi_5 = 56^\circ\,46'\,26''$,

daher
$$\cos\psi_1 = 0{\cdot}974\,556$$
$$\cos\psi_2 = 0{\cdot}901\,388$$
$$\cos\psi_3 = 0{\cdot}790\,571$$
$$\cos\psi_4 = 0{\cdot}661\,439$$
$$\cos\psi_5 = 0{\cdot}547\,944$$
addirt $\frac{3}{4} = 0{\cdot}75$

$4{\cdot}625\,898$

Hievon der Logarithmus $0{\cdot}665\,195$

$\log\pi \quad 0{\cdot}497\,149$

$1{\cdot}162\,344$

$-\log 12 = 1{\cdot}079\,181$

$\log\sigma = 0{\cdot}083\,163,$

daher $\sigma = 1{\cdot}211\,05.$

Welcher Werth sogar in der letzten Decimalstelle richtig ist.

Wir wollen zweitens das Stück des elliptischen Bogens derselben Ellipse (wo also a = 1, b = ½) haben, welches zwischen dem Scheitel der großen Achse (unserem gegenwärtigen Anfangspunkte) und dem Punkte der Ellipse, wo die Berührende desselben mit der großen Achse einen Winkel von 45° macht, wo also unser $\lambda = 45^\circ$ ist. Für diesen Fall ist $X = a - \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}};\ Y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}},$ daher $X = 0{\cdot}1055728;\ Y = 0{\cdot}2236068;\ m = X + Y\cot.\lambda = 0{\cdot}3291796;$ $m - a = -0{\cdot}6708204;\ \frac{1}{2}\left(X + Y\,\text{cotg.}\,\frac{\lambda}{2}\right) = 0{\cdot}3227037,$

mithin $\sigma = [0{\cdot}3227037 + \Sigma_1^{r-1}(-0{\cdot}6708204 \cos z\omega + \cos\psi_z)].\omega$,
wo $\omega = \frac{\text{arc. } 45^0}{r}$, r in unserem Belieben steht, und wo

$$\sin\psi_z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin z\omega \text{ ist.}$$

Nehmen wir für r die Zahl 3 an, also $\omega = \text{arc. } 15^0$, so ist:

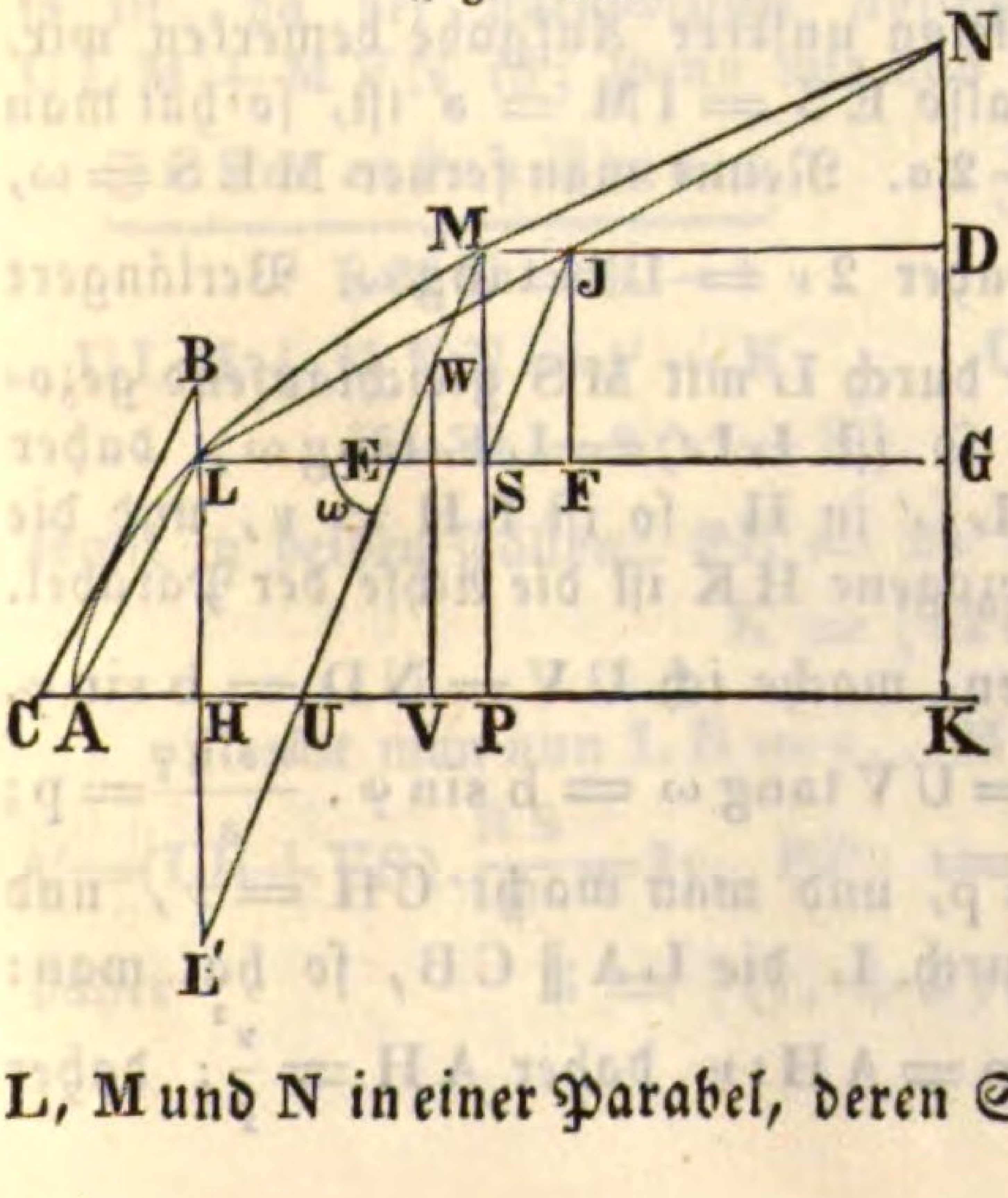
$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} 0{\cdot}3227037 + [-0{\cdot}6708204(\cos 15^0 + \cos 30^0) + \cos\psi_1 \\ \qquad\qquad + \cos\psi_2].\text{ arc. } 15^0 \end{array} \right\}',$$

und wobei $\sin\psi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 15^0$; $\sin\psi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 30^0$,
daher $\log \sin\psi_1 = 9{\cdot}3505268$; $\log\sin\psi_2 = 9{\cdot}6365006$,
mithin $\psi_1 = 12^0\, 57'\, 9''$ $\psi_2 = 25^0\, 39'\, 32''$
$\log\cos\psi_1 = 9{\cdot}9888069$ $\log\cos\psi_2 = 9{\cdot}9549117$
$\cos\psi_1 = 0{\cdot}9745564$ $\cos\psi_2 = 0{\cdot}9013878$.
Man erhält somit $\sigma = 0{\cdot}253877$.

Auf dieselbe Art kann man die Hyperbel und andere krumme Linien rectificiren, oder ihre Länge bestimmen.

§. 365. (Annäherungsweise Quadratur der krummen Linien). Wir wollen zum Schlusse dieser Abtheilung eine Methode mittheilen, wie man den Flächeninhalt bei krummen Linien annäherungsweise bei jeder beliebigen Genauigkeit finden kann. Die Bestimmung des Flächeninhaltes bei krummen Linien führt bei den Mathematikern von jeher den Namen Quadratur der krummen Linie.

Fig. 464.



Denken wir uns den Flächenraum zwischen einer Krummen und der Abscissenachse durch rechtwinklich auf der Achse stehende und gleich weit von einander entfernte Ordinaten in einzelne Streifen abgetheilt. Wir wollen hier zuerst nachweisen, daß man sich jederzeit durch was immer für drei Punkte L M N eine Parabel ziehen kann, so daß die MI (wo J der Halbirungspunkt der LN ist) ein Durchmesser der Parabel ist. Zum Behufe dieser Untersuchung denken wir diese Aufgabe gelöst, und L, M und N in einer Parabel, deren Scheitel A, Achse AK und Para-

meter $= p$ sey, so hat man, wenn $MI = a$, $IN = b$, $NID = \varphi$, $AH = \xi$, $LH = \nu$ ist, wobei LH, MP, NK auf AK, LG, MD auf NK, und IF auf LG senkrecht sind: $\nu^2 = p\xi$, $MP^2 = p \cdot AP$, $NK^2 = p \cdot AK$. Da nun $ND = DG = b \sin\varphi$, $ID = b \cos\varphi$, also $MP = DG + HL = b \sin\varphi + \nu$, $AP = AH + LS = AH + LF - MI = \xi + b \cos\varphi - a$, $MP = \nu + b \sin\varphi$, $NK = \nu + 2 b \sin\varphi$, $AK = \xi + 2 b \cos\varphi$; so hat man:

$\nu^2 = p\xi$; $(\nu + b \sin\varphi)^2 = p(\xi + b \cos\varphi - a)$; $(\nu + 2 b \sin\varphi)^2 = p(\xi + 2 b \cos\varphi)$; $b^2 \sin^2\varphi + 2\nu b \sin\varphi = p(b \cos\varphi - a)$; $4 b^2 \sin^2\varphi + 4\nu b \sin\varphi = 2 p b \cos\varphi$.

Durch Elimination des ν aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$p = \frac{b^2 \sin^2\varphi}{a},$$

wodurch der Parameter bestimmt ist. Bestimmt man nun aus der Gleichung

$$b^2 \sin^2\varphi + 2\nu b \sin\varphi = \frac{b^2 \sin^2\varphi}{a}(b \cos\varphi - a)$$

den Werth von ν und dadurch ξ, so hat man:

$$2\nu = \frac{b \sin\varphi}{a}(b \cos\varphi - 2a)$$

$$\xi = \frac{\nu^2}{p},$$

so ist der Scheitel, die Richtung der Achse und der Parameter der Parabel bestimmt, welche durch die Punkte L, M und N durchgeht, mit der Bedingung, daß die durch M die LN halbirende Gerade IM ein Durchmesser der Parabel ist.

Zur geometrischen Construktion unserer Aufgabe bemerken wir, daß, wenn man $ME \parallel IS$ zieht, also $ES = IM = a$ ist, so hat man $LE = LF - 2IM = b \cos\varphi - 2a$. Nennt man ferner $MES = \omega$, so ist $\text{tang.}\,\omega = \frac{MS}{ES} = \frac{b \sin\varphi}{a}$; daher $2\nu = LE \,\text{tang}\,\omega$. Verlängert man also ME über E, bis es die durch L mit MS gleichlaufend gezogene Gerade LL′ in L′ trifft, so ist $LL' = LE \,\text{tang}\,\omega$, daher $LL' = 2\nu$. Halbirt man also LL′ in H, so ist $LH = \nu$, und die durch H mit MD gleichlaufend gezogene HK ist die Achse der Parabel.

Um den Scheitel A zu finden, mache ich $UV = ND = b \sin\varphi$, so ist, da $MUV = \omega$ ist, $VW = UV \,\text{tang}\,\omega = b \sin\varphi \cdot \frac{b \sin\varphi}{a} = p$; ist nun $BW \parallel AK$, also $BH = p$, und man macht $CH = \nu$, und verbindet C mit B und zieht durch L die $LA \parallel CB$, so hat man: $LH : BH = AH : CH$, oder $\nu : p = AH : \nu$, daher $AH = \frac{\nu^2}{p}$; daher

A der Scheitel der Parabel ist. Würden die drei Punkte L, M und N in einer Geraden liegen, so hätte man a = MI = o, daher p und ν unendlich würden, somit dann keine Parabel möglich wäre.

Wenn wir nun was immer für eine Krumme haben, so können wir uns den Raum zwischen der Krummen und der Abscissenachse durch gleich weit von einander abstehende, auf dieser Achse senkrecht stehende Ordinaten zu abtheilen, und die Ordinaten so nahe an einander schieben, daß je drei nächste Theilungspunkte der Krummen in einem parabolischen Bogen so liegen, daß die Ordinate des mittleren Punktes ein Durchmesser ist, rücksichtlich der Sehne, die die zwei Nachbarpunkte verbindet.

Fig. 465.

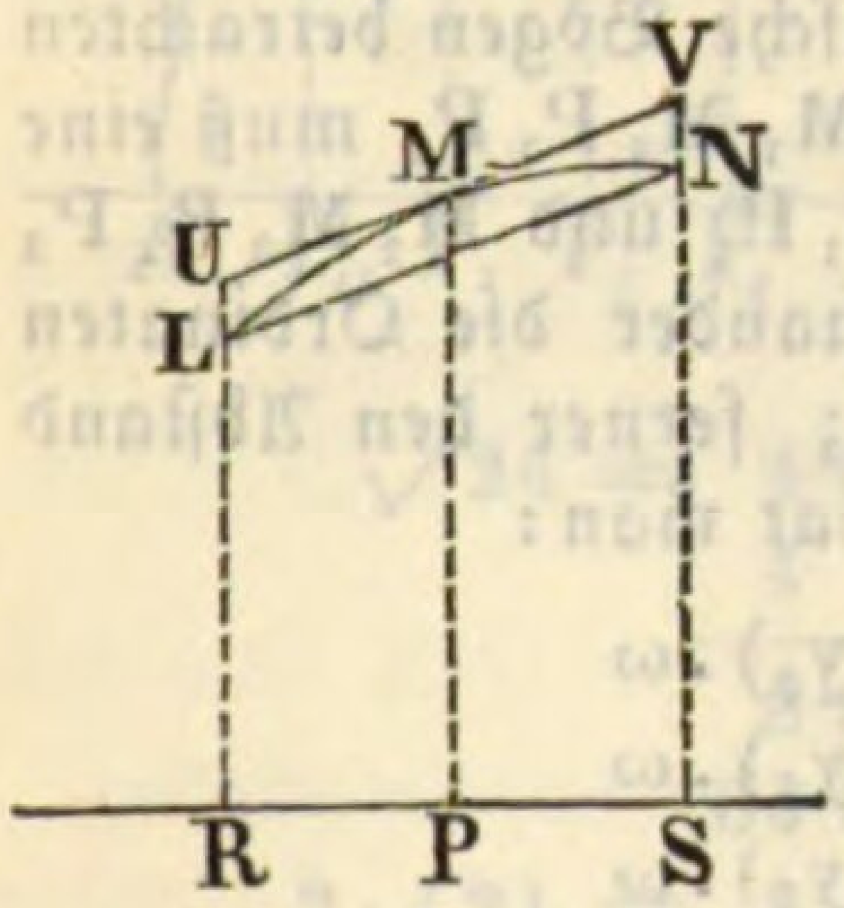
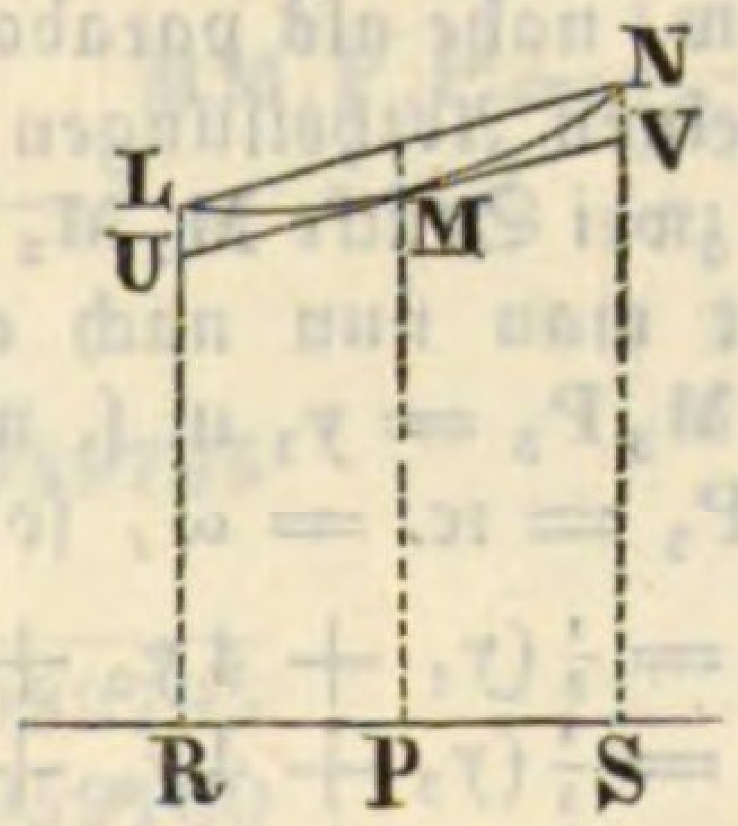


Fig. 466.



Es seyen L, M und N drei solche Punkte einer Krummen, wobei wir sie uns so nahe an einander denken, daß L, M, N zugleich in einer Parabel sind, wo die Ordinate MP Durchmesser der Sehnen ist, die mit LN gleichlaufend sind, so daß die Berührende in M die UV ∥ LN ist. LR und NS sind die Ordinate von L und N rücksichtlich der Abscissenachse der Krummen, von der LMN nur ein einzelner Theil ist. In der Figur unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem die Krumme hohl oder erhoben gegen die Achse steht.

Nennet man nun das Trapez LNRS = t, und UVRS = t′, so ist, da der parabolische Abschnitt LMN doppelt so groß als ULM + MVN ist; wenn wir das Stück LMNSR = K nennen.

In der ersten Figur:

$$LMN = K - t$$

$$ULM + MVN = t' - K$$

$$K - t = 2(t' - K)$$

In der zweiten Figur:

$$LMN = t - K$$

$$ULM + MVN = K - t',\ \text{daher}$$

$$t - K = 2(K - t'),$$

somit in beiden Fällen: $3K = 2t' + t$, also

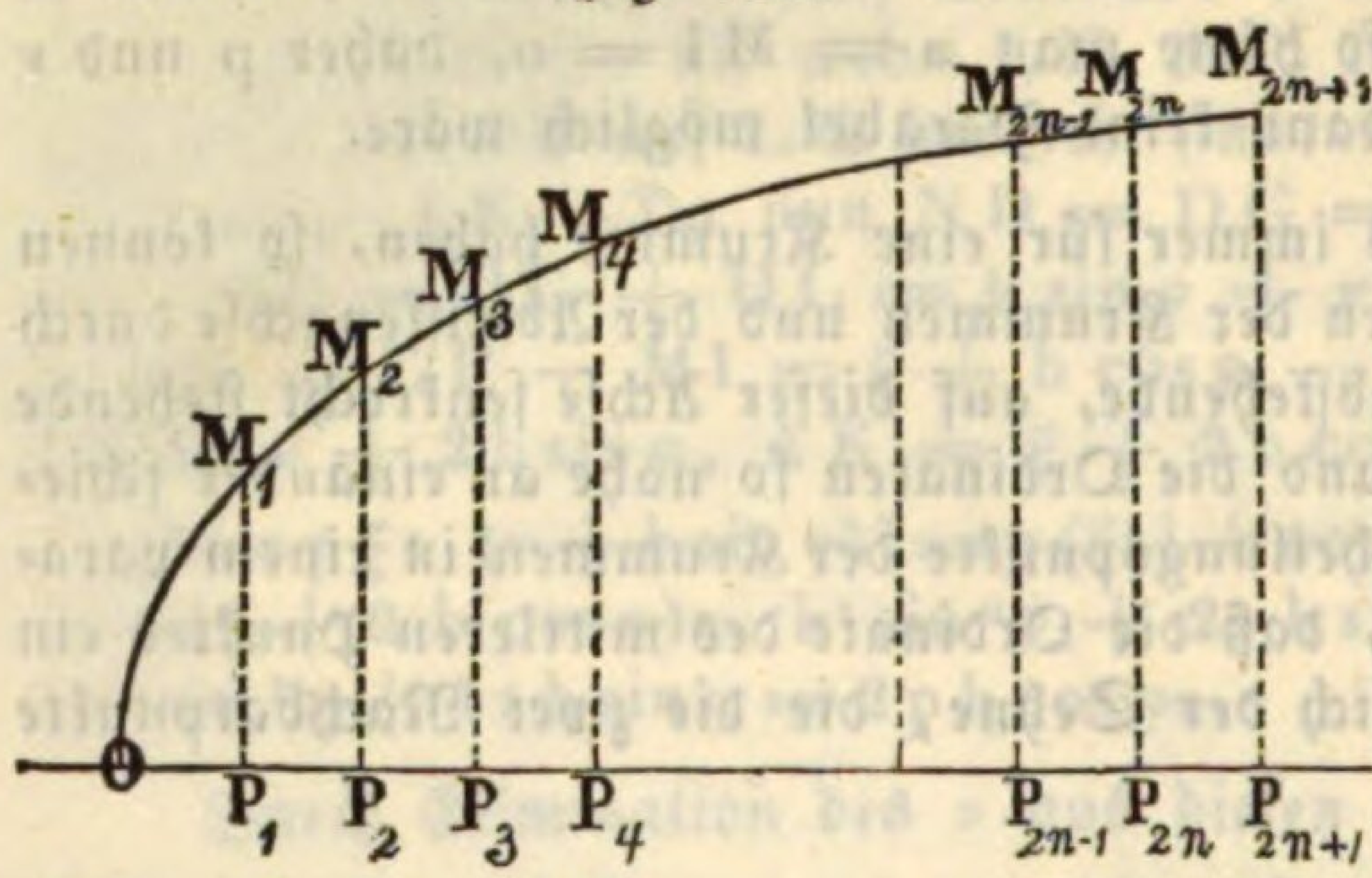
$$K = \tfrac{1}{3}(2t' + t)$$

Nennt man nun $LR = y_1$, $MP = y_2$, $NS = y_3$, so hat man:

$$t' = (UR + VS).\frac{RS}{2} = 2y_2 . RP;\quad t = (LR + NS).\frac{RS}{2} = (y_1 + y_3)\,RP,$$

daher $$K = \tfrac{1}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).RP.$$

Fig. 467.



Hat man nun den Flächeninhalt irgend einer Krummen (auch in dem Falle, wenn man ihre Gleichung nicht kennt, oder sie überhaupt ohne gesetzmäßige Bildung ist) zu bestimmen, so theile ich mir den Raum durch die Ordinaten M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3 u. s. w., die gleich weit von einander abstehen, so daß ich die Bögen $M_1 M_2 M_3$, $M_3 M_4 M_5$, $M_5 M_6 M_7$ u. s. w. nahe als parabolische Bögen betrachten kann. Die Anzahl der einzelnen Abtheilungen $M_1 M_2 P_1 P_2$ muß eine gerade seyn, weil wir immer zwei Stücke $M_1 M_2 P_1 P_2$ und $M_2 M_3 P_2 P_3$ zusammen nehmen. Nimmt man nun nach einander die Ordinaten $M_1 P_1 = y_1$, $M_2 P_2 = y_2$, $M_3 P_3 = y_3$ u. s. w.; ferner den Abstand der Ordinaten $P_1 P_2 = P_2 P_3 = \text{ꝛc.} = \omega$, so hat man:

$$M_1 M_3 P_1 P_3 = \tfrac{1}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \cdot \omega$$
$$M_3 M_5 P_3 P_5 = \tfrac{1}{3}(y_3 + 4y_4 + y_5) \cdot \omega$$
$$M_5 M_7 P_5 P_7 = \tfrac{1}{3}(y_5 + 4y_6 + y_7) \cdot \omega$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$M_{2n-1} M_{2n+1} P_{2n-1} P_{2n+1} = \tfrac{1}{3}(y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1}).$$

Daher hat man für den ganzen Raum zwischen $M_1 P_1$ und $M_{2n+1} P_{2n+1}$ folgende Reihe, wenn man $P_1 P_{2n+1} = a$ setzet:

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2n} \left\{ \begin{matrix} y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + 2y_7 + \dots \\ + 2y_{2n-1} + 4y_{2n} + y_{2n+1} \end{matrix} \right\}, \text{ oder}$$

$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2n} \left\{ \begin{matrix} y_1 + 2(y_3 + y_5 + y_7 + \dots y_{2n-1}) \\ y_{2n+1} + 4(y_2 + y_4 + y_6 + \dots y_{2n}) \end{matrix} \right\}, \text{ daher}$$

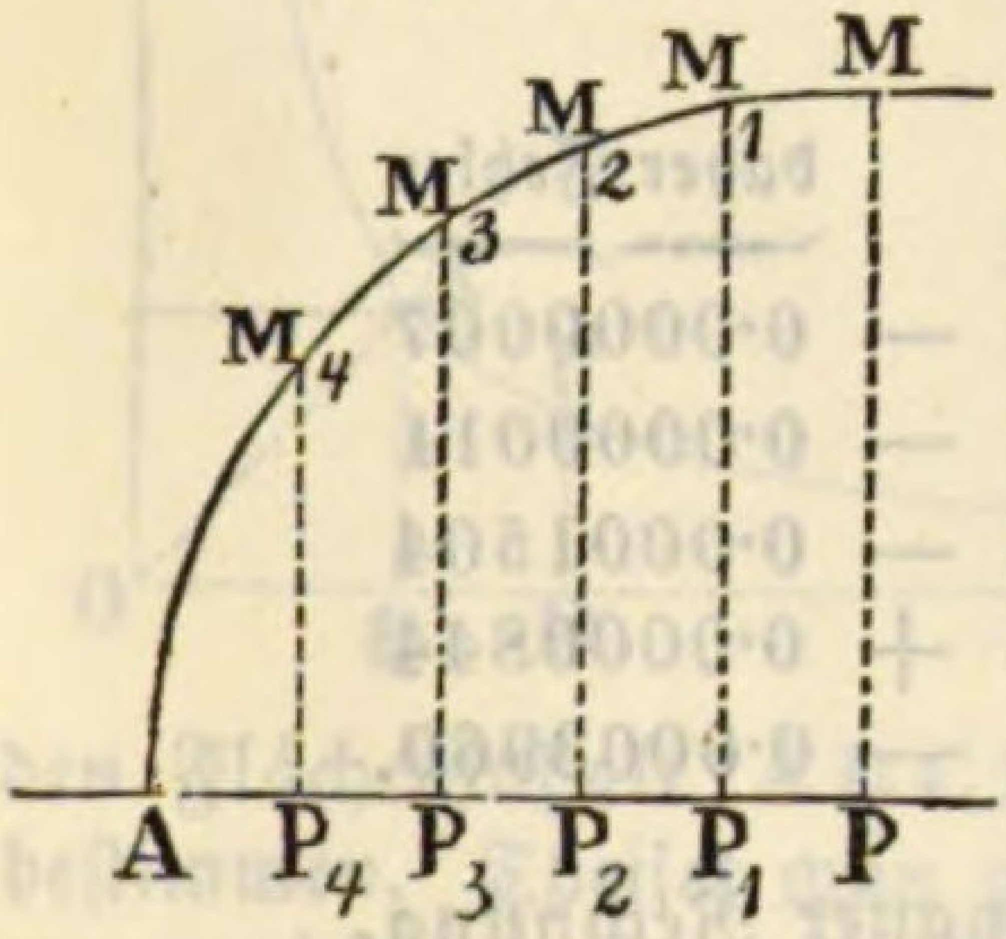
$$F = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{n} \left\{ \begin{matrix} \dfrac{y_1 + 2_{2n+1}}{2} + y_3 + y_5 + y_7 + \dots y_{2n-1} \\ + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots y_{2n}) \end{matrix} \right\}.$$

Hat nun die krumme Linie ein Gesetz oder eine Gleichung, so kann man die Werthe von $y_1 y_2 y_3 \dots$ durch Rechnung bestimmen; es finden sich selbst für diese Summirungen dann bedeutende Abkürzungen. Ist aber das Gesetz der krummen Linie unbekannt, so bleibt nichts anderes übrig, als die Werthe von $y_1 y_2 y_3$ u. s. w. durch Messung zu bestimmen. Hat die Krumme ein solches Endstück wie hier $O M_1 P_1$ ist, so betrachtet man es, wenn $O P_1$ hinreichend klein, ebenfalls als ein parabolisches Stück, und macht $M_1 O P_1 = \tfrac{2}{3} O P_1 \cdot M_1 P_1$.

Wir wollen als eine Probe der Genauigkeit des von uns hier gelehrten Verfahrens dasselbe auf die Flächeninhaltsbestimmung eines Kreisquadranten anwenden.

§. 366. Es sey der Viertelkreis APM, dessen Halbmesser $= 1$. Theilen wir zuerst den Halbmesser in fünf gleiche Theile, und nennen die in den Theilungspunkten errichteten Ordinaten $y_1 y_2 y_3 y_4$, so hat man:

Fig. 468.



$$y_1 = \frac{\sqrt{24}}{5},\ y_2 = \frac{\sqrt{21}}{5},\ y_3 = \frac{4}{5},\ y_4 = \frac{3}{5};$$

somit, da

$$MM_4P_4P = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}(1+4y_1+2y_2+4y_3+y_2) \text{ ist,}$$

$\sqrt{24} = 4{\cdot}8989795$
$\quad 4$
$\quad 8{\cdot}8989795$
$\quad 35{\cdot}5959180$
$2\sqrt{21} = 9{\cdot}1651514$
$\quad 44{\cdot}7610694$
$\quad 3$
$\quad 47{\cdot}7610694$
$\quad 9{\cdot}5522138$
$\quad 10{\cdot}5522138$
$\quad 2{\cdot}1104427$

$MM_4P_4P = 0{\cdot}7034809$ nach unserer Annäherungsmethode,
dagegen $= 0{\cdot}7035555$ genau gerechnet, daher
Unterschied $= 0{\cdot}0000746$ zu klein.

Um den ganzen Viertelkreis zu erhalten, macht man:

$$AM_4P_4 = \tfrac{2}{3}\cdot y_4\cdot\tfrac{1}{5} = 0{\cdot}08, \text{ daher}$$

nach der Annäherungsmethode Viertelkreis $= 0{\cdot}7834809$,
genau gerechnet $= 0{\cdot}7853981$,
daher Fehler $= 0{\cdot}0019172$.

Hier ist der Fehler nahe 0·002, während er bei MM_4P_4P kleiner als 0.0001 ist; dieses rührt von der minderen Genauigkeit der Annahme $AM_4P_4 = \frac{2}{3}AP_4 . MP_4$. Wird aber der Halbmesser in mehre gleiche Theile getheilt, so wird dieses übrig bleibende Stück nun selbst kleiner, also der dadurch herbeigeführte Fehler auch kleiner.

Theilet man den Halbmesser in 9 gleiche Theile, und wendet dieselbe Annäherungsmethode an, so daß der Viertelkreis in 9 Streifen zerfällt; nennt man die Streifen, vom Mittelpunkte gegen den Umfang gezählt, den Raum aus dem ersten und zweiten Streifen I., aus dem dritten und vierten II, aus dem fünften und sechsten III., aus dem siebenten und achten IV., und den letzten Streifen am Umfange V., so hat man:

	nach der Näherungsmethode	nach genauer Rechnung	daher Fehler
I.	= 0·2203795	0·2203788,	— 0·0000007
II.	= 0·2080655	0·2089644,	— 0·0000011
III.	= 0·1841163	0·1839659,	— 0·0001504
IV.	= 0·1376058	0·1376902,	+ 0·0000844
V.	= 0·0343310	0·0339350,	— 0·0003960.

I + II + III + IV = 0·7510671 nach genauer Rechnung,
= 0 7509994 nach der Annäherungsmethode,

daher Fehler = 0·0000677 zu klein;
der Viertelkreis = 0·7853981 genau
= 0·7849344 nach der Annäherungsmethode,

Fehler = 0·0004637 zu klein.

Theilt man den Halbmesser in 15 gleiche Theile, so den Flächeninhalt der 14 Streifen vom Mittelpunkte an

nach genauer Rechnung = 0·7693320,
nach unserer Näherungsmethode = 0·7693015,

daher Fehler = 0·0000305.

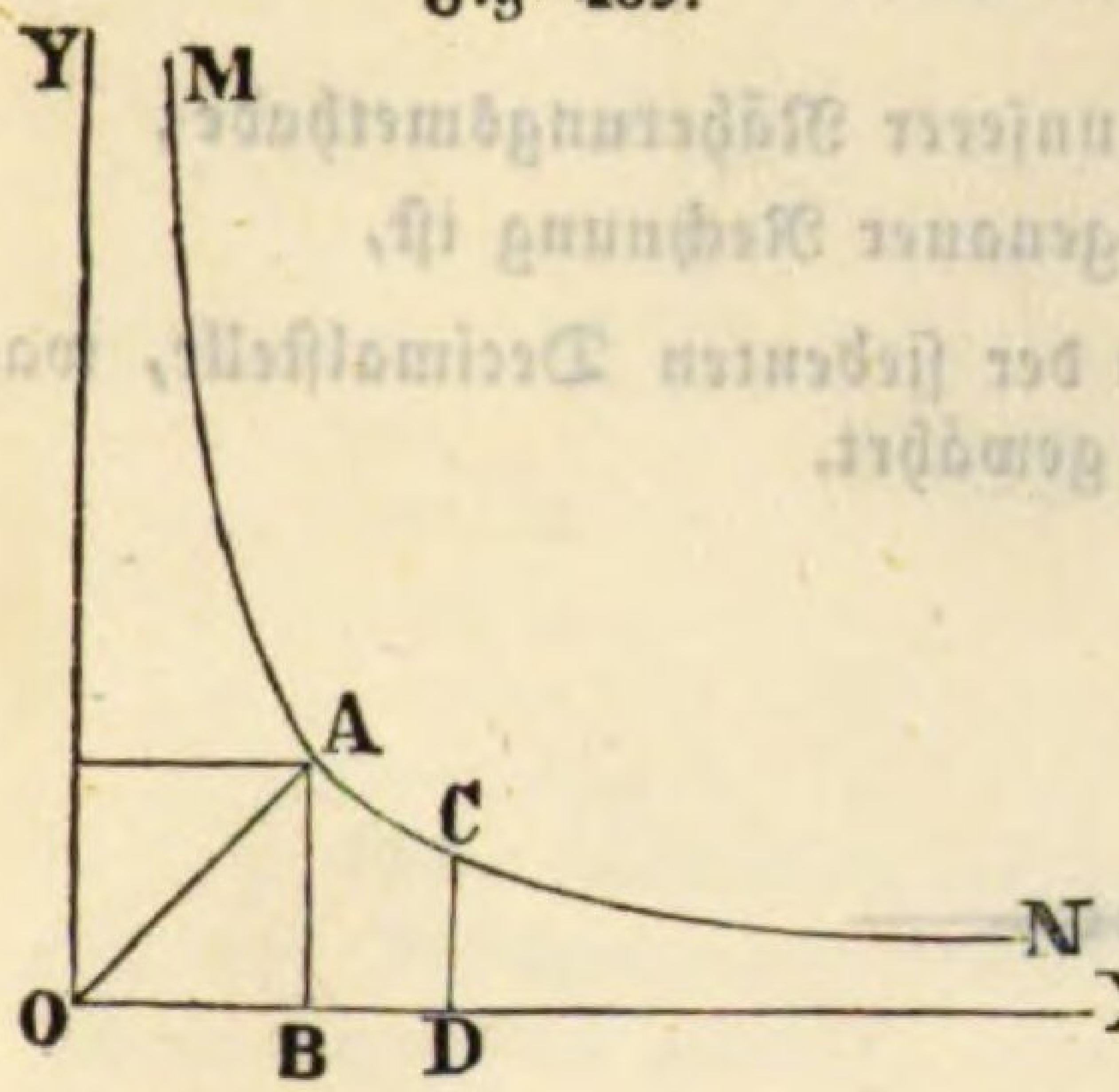
Eben der ganze Viertelkreis = 0·7853981 genau
= 0·7852575 nach der Näherungsmethode,

daher Fehler = 0·0001406 zu klein.

Es begreift sich leicht, daß man hier die Näherung so weit treiben kann, als man nur will.

§. 367. Nachdem die Flächeninhaltsbestimmung bei der Parabel und der Ellipse im Früheren gezeigt wurde, so wollen wir die so eben entwickelte Quadratur-Methode auf eine Hyperbel anwenden.

Fig. 469.



Es sey MN der Ast einer gleichseitigen Hyperbel, O ihr Mittelpunkt, A der eine Scheitel; nehmen wir die Assymptoten OX und OY als Achsen der x und y an, so ist, wenn $OA = a$ ist, bekanntlich die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel

$$y = \frac{a^2}{2x}.$$

Fällen wir von O das Loth $AB \perp OX$, machen $OD = OA = a$, und errichten $CD \perp OX$, so wollen wir es uns zur Aufgabe setzen, den Flächeninhalt ABCD zwischen der Hyperbel und der OX zu bestimmen. Theilet man nun die BD in sechs gleiche Theile, wodurch man nebst der B und D im Ganzen 7 Punkte hat, deren Abscissen wir $x_1 x_2 \ldots x_7$ nennen wollen, so daß $x_1 = OB$, $x_7 = OD$ ist.

Da nun $OB = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ist, so hat man $BD = a.\frac{2-\sqrt{2}}{2}$; daher

$$x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ x_2 = \frac{a(2+5\sqrt{2})}{12};\ x_3 = \frac{a(4+4\sqrt{2})}{12};\ x_4 = \frac{a(6+3\sqrt{2})}{12};$$

$$x_5 = \frac{a(8+2\sqrt{2})}{12};\ x_6 = \frac{a(10+\sqrt{2})}{12};\ x_7 = a.$$

Daher nach der Gleichung die zugehörigen Ordinaten:

$$y_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2};\ y_2 = \frac{3a(5\sqrt{2}-2)}{23};\ y_3 = \frac{3a(\sqrt{2}-1)}{2};\ y_4 = a(2-\sqrt{2});$$

$$y_5 = \frac{3a(4-\sqrt{2})}{14};\ y_6 = \frac{3a(10-\sqrt{2})}{49};\ y_7 = \frac{a}{2},\ \text{oder}$$

$y_1 = 0{\cdot}7071068\,a$	$y_4 = 0{\cdot}5857864\,a$	$y = 0{\cdot}5\,a$
$y_2 = 0{\cdot}6614437\,a$	$y_5 = 0{\cdot}5540971\,a$	
$y_3 = 0{\cdot}6213204\,a$	$y_6 = 0{\cdot}5256608\,a.$	

Da nun $ABCD = \frac{1}{3}.\frac{BD}{6}\left\{y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + y_7\right\}$

$y_1 + y_7 = 1{\cdot}2071068\,a$	$y_2 = 0{\cdot}6614437\,a$	$y_3 = 0{\cdot}6213204\,a$
$7{\cdot}0915636\,a$	$y_4 = 0{\cdot}5857864\,a$	$y_5 = 0{\cdot}5540971\,a$
$2{\cdot}3508350\,a$	$y_6 = 0{\cdot}5256608\,a$	$1{\cdot}1754175\,a$
$10{\cdot}6495054\,a$	$1{\cdot}7728909\,a$	$2{\cdot}3508350\,a$
	$7{\cdot}0915636\,a$	

da nun $\frac{BD}{18} = 0\cdot0162718$ ist, so hat man:

$ABCD = 0\cdot1732864\,a$ nach unserer Näherungsmethode;

da nun $= 0\cdot1732868\,a$ nach genauer Rechnung ist,

so beträgt hier der Fehler nur 4 in der siebenten Decimalstelle, was gewiß eine hinreichende Genauigkeit gewährt.

Zweiter Theil.

Die Lehre von den räumlichen Gebilden.

[illegible] = 0·0103773 ist, so hat man:

AD : CB = 0·1732061... nach unserer Näherungsmethode;

da nun = 0·1732058... nach genauer Rechnung ist,

so beträgt hier der Fehler nur 4 in der siebenten Decimalstelle, was gewiß eine hinreichende Genauigkeit gewährt.

Einleitung.

§. 368. Bei allen unsern bisherigen geometrischen Untersuchungen und Anschauungen waren alle Punkte und Linien als in einer Ebene verzeichnet gedacht. Befreien wir uns nun von dieser Voraussetzung, und betrachten wir Punkte und Linien, die im Raume überhaupt liegen, gehen wir zu den wechselseitigen Beziehungen der Linien, Flächen und Körper über. Schon in der Einleitung zu diesem Buche haben wir die Ebene als eine solche Fläche erklärt, wo die gerade Verbindungslinie von was immer für zwei Punkten derselben in der Fläche liegt. Liegt daher ein Theil der geraden Linie in einer Ebene, so muß auch die ganze Linie in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung in dieser Ebene liegen. Bei unsern Verzeichnungen der geraden Linien haben wir sie uns zur Anschauung gebracht, daß wir sie begrenzten, d. h. nur ein Stück derselben wirklich gezeichnet haben, obwohl wir nie damit den Gedanken verbunden, daß die gerade Linie (ihre Richtung) in den Endpunkten wirklich ihr Ende habe, was nur bei einer bestimmt ausgesprochenen Länge der Fall ist. Wie man sich nun eine gerade Linie in ihrer beiderseitigen unendlichen Ausdehnung nur denken und nicht verzeichnen kann, höchstens nur ein bestimmtes Stück derselben, so ist es ebenfalls bei der Ebene der Fall; ohne die Ebene zu begrenzen, läßt sich dieselbe auch nicht annäherungsweise zur Verzeichnung bringen. Nun sind die Begrenzungen einer Ebene gänzlich willkürlich, ich kann mir die Begrenzung der Ebene kreisrund, elliptisch, dreieckig, viereckig, vieleckig u. s. w. denken. Wir werden bei unsern Verzeichnungen willkürlich begrenzte Ebenen als Schiefecken (schiefe Parallelogramme) zeichnen, wobei wir der Einbildungskraft des Lesers zumuthen, sich die Ebene der Figur als ein Rechteck zu denken, welches nur durch die schiefe Stellung gegen das Auge als Schiefeck erscheint.

Zu der so eben erwähnten Schwierigkeit kommt noch die dazu, daß wir Punkte, Linien in einer Ebene zeichnen müssen, die nicht in einer Ebene sind. Wir helfen uns hier auf ähnliche Art, wie die Maler, die durch perspektivische Zeichnung das Vorwärts und Rückwärts zur Anschauung bringen; nur entbehren wir des Hilfsmittels der Farben und Schattirungen, weßhalb dem Leser größere Aufmerksamkeit zugemuthet wird, und er gut zu unterscheiden hat, welche Linien sich wirklich schneiden, welche sich bloß zu schneiden scheinen.

Um eine kleine Uebersicht der nachfolgenden Untersuchungen zu geben, bemerken wir, daß wir zuerst eine und mehrere Geraden in ihrem Verhalte mit einer Ebene, dann zwei Ebenen gegen einander, dann drei Ebenen, endlich Systeme mehrerer Ebenen betrachten wollen, welche uns den Uebergang zur Betrachtung der krummen Flächen darbieten. Alles dieses zusammen wollen wir die Flächenlehre nennen.

Die Körperlehre beschäftigt sich mit geschlossenen räumlichen Figuren, deren Oberfläche und Körperinhalt sie zu bestimmen lehrt, und theilt ihre Untersuchungen in die der eckigen (bloß von ebenen Flächen begrenzte) und die der runden (von ebenen und krummen Flächen, oder bloß von letzten begrenzten) Körper.

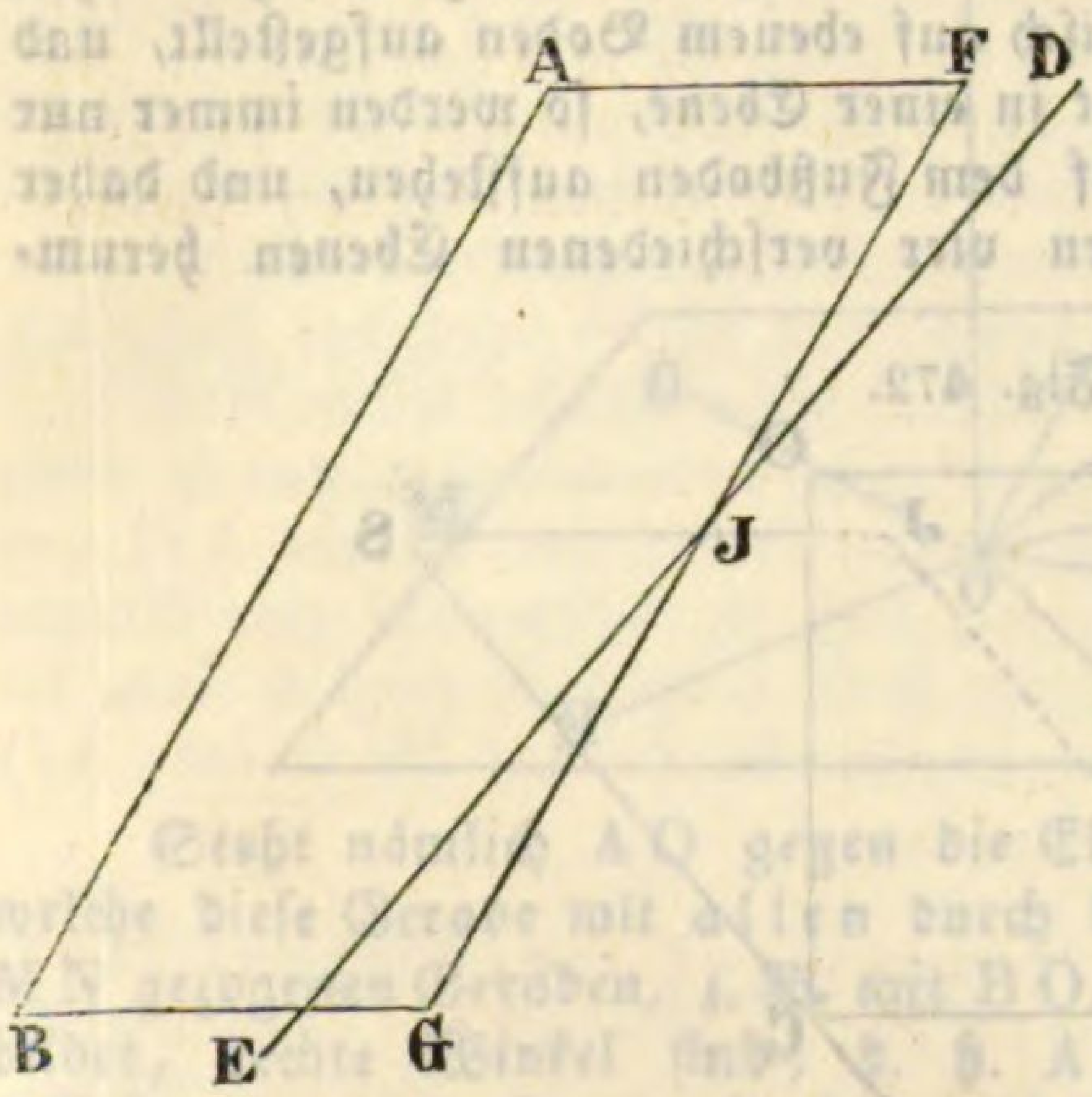
Erstes Buch.

Flächenlehre.

I. Gerade Linie im Raume.

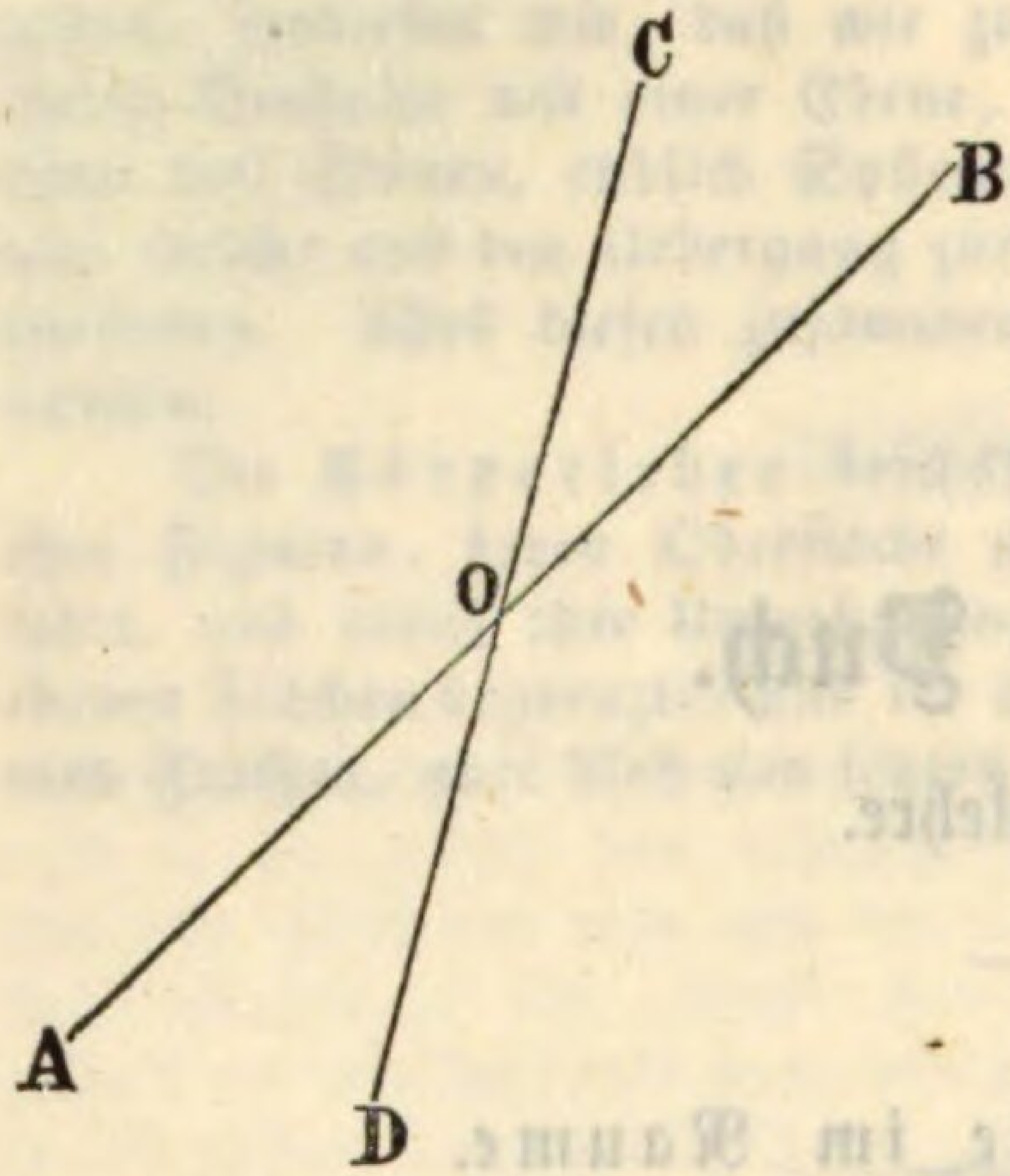
§. 369. **Zwei gleichlaufende Gerade liegen immer in einer Ebene.** Es seyen AB und CD gleichlaufend, d. h. sie hätten dieselbe Richtung, so müssen sie nothwendig in einer Ebene liegen; denn wäre dieses nicht der Fall, so nehmen wir in der CD den Punkt I. Da man nun stets durch drei Punkte A, B und I eine Ebene legen kann, so wollen wir es auch thun; da man nun in einer Ebene durch einen Punkt stets zu einer Geraden, die mit diesem Punkte in einer Ebene liegt, eine Gleichlaufende mit dieser ziehen kann, so wollen wir uns durch I in der Ebene ABI eine mit AB gleichlaufende Gerade FG denken. Da nun also AB ∥ FG, und der Voraussetzung nach AB ∥ CD ist, so müßte FG ∥ CD, was nicht seyn kann, da beide sich in I schneiden, und es kann dieß nur dann Statt finden, wenn CD mit FG zusammenfällt, d. h. wenn CD mit AB in einer Ebene liegt.

Fig. 470.



§. 370. **Durch zwei Gerade, die sich schneiden, läßt sich jederzeit eine Ebene durchlegen.**

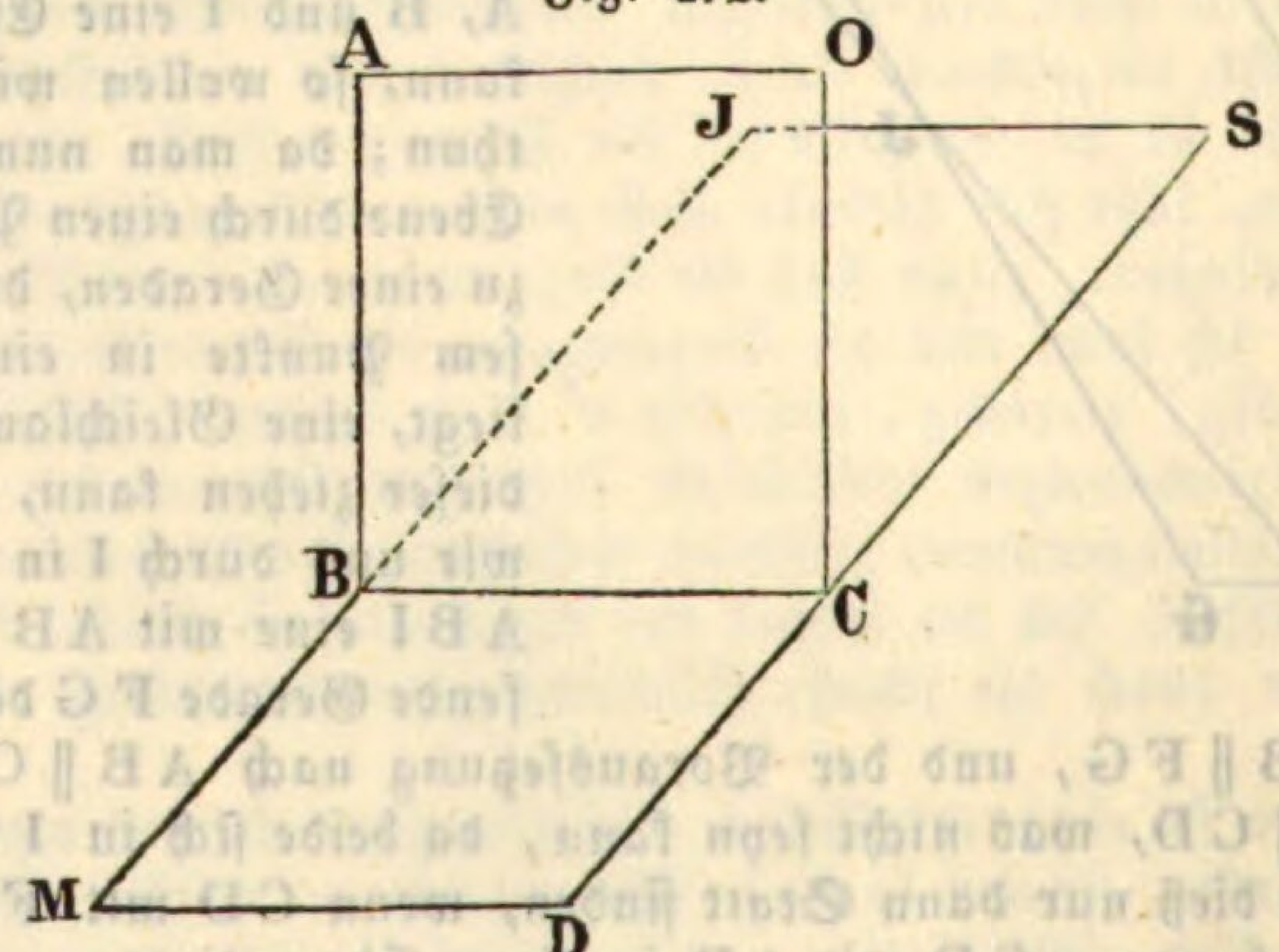
Fig. 471.



Es schneiden sich die Geraden AB und CD im Punkte O, durch den Punkt C und die Punkte A und B läßt sich jederzeit eine, und zwar nur Eine Ebene durchlegen. Nennen wir diese Ebene ABC; da nun der Punkt C und der Punkt O in dieser Ebene ABC liegen, so muß auch die ganze CD in dieser Ebene liegen.

Bei unseren Betrachtungen in der Ebene mußten zwei gerade Linien nothwendig entweder gleichlaufend seyn, oder sich schneiden, ein drittes war nicht möglich. Im Raume ist aber eine solche dritte Beziehung möglich, nämlich daß zwei Gerade weder gleichlaufend, noch sich schneidend sind, oder daß zwei gerade Linien in verschiedenen Ebenen liegen können; denn da drei Punkte die Lage einer Ebene fest bestimmen, und da durch je drei Punkte eine Ebene gelegt werden kann, so werden durch vier Punkte vier Ebenen möglich seyn. Hat man z. B. einen vierfüßigen Tisch auf ebenem Boden aufgestellt, und es sind die vier Endpunkte nicht in einer Ebene, so werden immer nur je drei Endpunkte desselben auf dem Fußboden aufstehen, und daher die vier Endpunkte in diesen vier verschiedenen Ebenen herumschwanken.

Fig. 472.

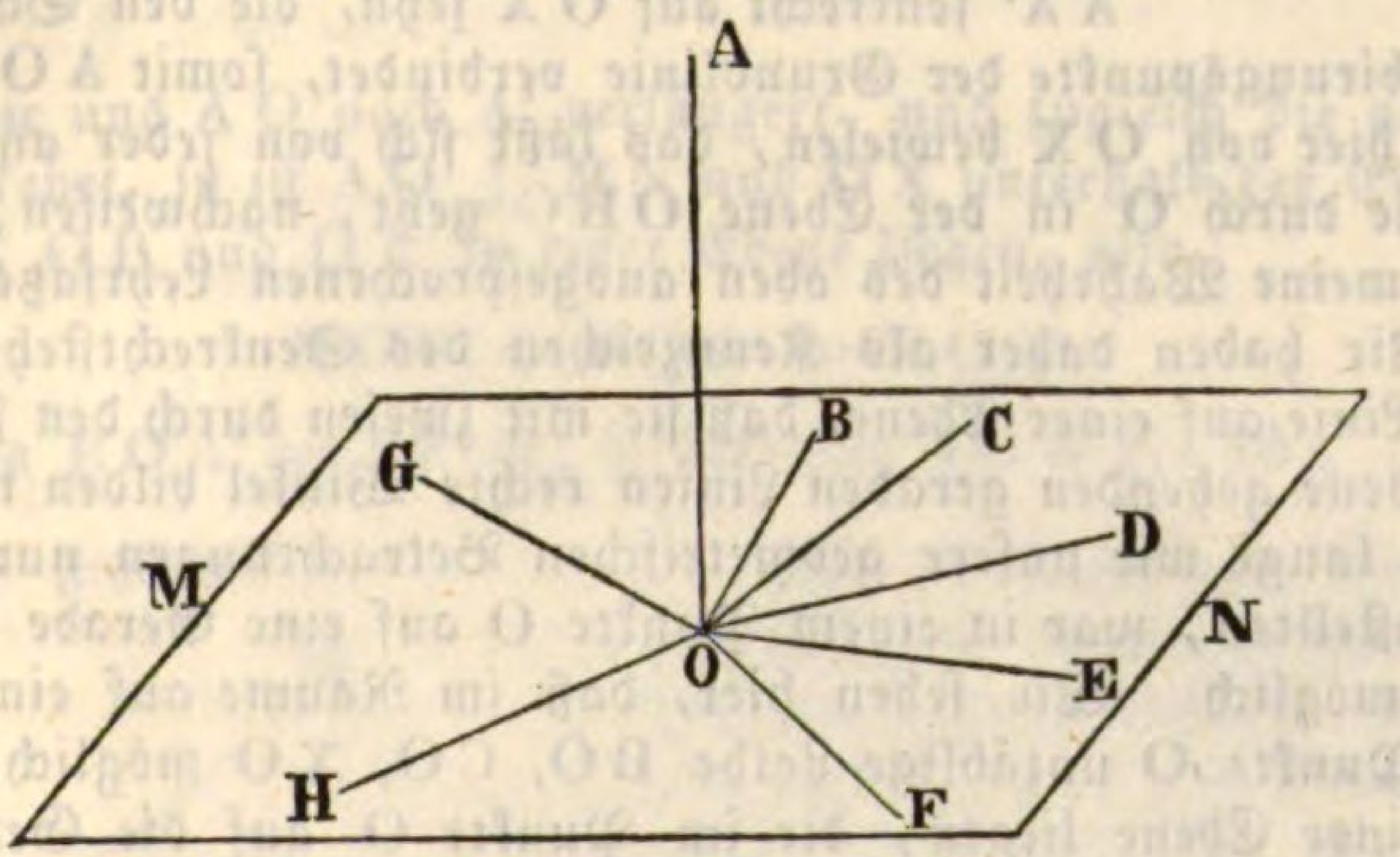


Hat man also vier Punkte, die nicht in einer Ebene sind, so werden zwei und zwei Punkte, mit einander verbunden, zwei Gerade geben, die nicht in derselben Ebene liegen. Es seyen die vier Punkte A, B, C, D, ABC liegen in einer Ebene, die wir uns hier aufrecht stehend denken wollen, BCD wieder in einer Ebene BCD, die wir

uns wagrecht denken wollen, ſo ſieht man, daß die Geraden AB und CD nicht gleichlaufend ſind, und ſich auch nicht auf beiden Seiten verlängert ſchneiden werden; denn die AB bleibt bei aller Verlängerung in der Ebene ABC, und die CD dagegen fortwährend in der BCD, die beiden Ebenen haben nur die Punkte der Geraden BC mit einander gemeinſchaftlich. Da nun die Gerade AB die BC nur im Punkte B, die CD die BC nur in C trifft, ſo kommen die beiden Geraden AB und CD nie zuſammen. Verlängern wir die BM nach rückwärts bis I, und um der Zeichnung mehr Anſchaulichkeit zu geben, punktiren wir die BJ, ſo lange ſie durch ACB gedeckt iſt. In der Figur *ſcheinen* ſich JS und OC zu ſchneiden, was aber in der That nicht der Fall iſt, und wir bitten unſere Leſer, ihre Einbildungskraft bei Anſchauung dieſer Figur ſo lange zu üben, bis die JS und OC ſich gehörig von einander trennen.

§. 371. Man ſagt von einer *geraden Linie, ſie ſtehe auf einer Ebene ſenkrecht, wenn ſie mit jeder Geraden, die durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogen wird, einen rechten Winkel bildet.*

Fig 473.



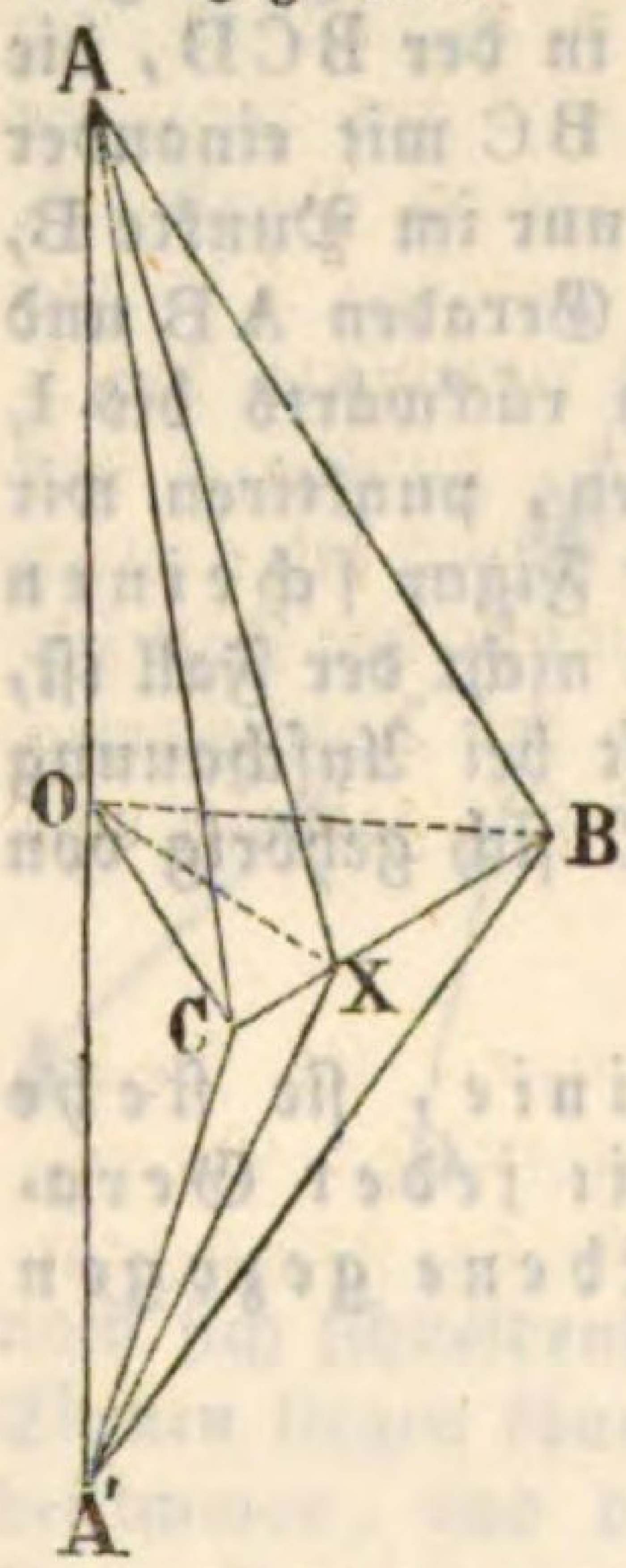
Steht nämlich AO gegen die Ebene MN ſo, daß die Winkel, welche dieſe Gerade mit *allen* durch den Fußpunkt O in der Ebene MN gezogenen Geraden, z. B. mit BO, CO, DO, EO, FO u. ſ. w. bildet, rechte Winkel ſind, d. h. AOB = 90°, AOC = 90°, AOD = 90° u. ſ. w., ſo ſagt man AO ſtehe auf der Ebene MN ſenkrecht. Um die Zuläſſigkeit dieſer Erklärung zu erläutern, werden wir folgenden Lehrſatz beweiſen:

Wenn eine Gerade auf zwei andern Geraden in einem Punkte ſenkrecht ſteht, ſo wird die erſte Gerade auch auf jeder dritten Geraden, die durch dieſen Punkt durchgeht, und in der Ebene der beiden andern Geraden liegt, ſenkrecht ſtehen.

Es ſey AO ⊥ BO und AO ⊥ CO, denken wir uns nun durch den Punkt O in der Ebene BOC irgend eine Gerade; um nun

eine solche Gerade in der Zeichnung darzustellen, nehme ich einen Punkt B der OB, verbinde ihn mit einem Punkte C der OC durch die Gerade BC, die in der Ebene OBC liegt, nehme nun irgend einen Punkt X der BC, und verbinde X mit O, so liegt die Gerade OX gewiß in der Ebene OBC. Ich verlängere die AO nach abwärts, und mache $A'O = AO$, verbinde B mit A und A', und vergleiche die zwei Dreiecke AOB und A'OB, so ist $AO = A'O$; $OB = OB$; $AOB = A'OB = 90^\circ$, daher $AOB \equiv A'OB$, folglich $AB = A'B$. Verbindet man nun C mit A und A', so hat man $AO = A'O$; $OC = OC$; $AOC = A'OC = 90^\circ$, daher $AOC \equiv A'OC$, folglich $AC = A'C$. Da nun dem Bewiesenen zu Folge $AB = A'B$, $AC = A'C$, und da $BC = BC$, so ist $ABC \equiv A'BC$, daher die Winkel $ACB = A'CB$; da nun auch $AC = A'C$ und $CX = CX$ ist, so sind die Dreiecke $ACX \equiv A'CX$, folglich auch $AX = A'X$, daher das Dreieck AXA' gleichschenklicht; daher muß die Grundlinie desselben AA' senkrecht auf OX seyn, die den Scheitel mit dem Halbirungspunkte der Grundlinie verbindet, somit $AO \perp OX$. Was ich hier von OX bewiesen, das läßt sich von jeder andern Geraden, die durch O in der Ebene OBC geht, nachweisen, woraus die allgemeine Wahrheit des oben ausgesprochenen Lehrsatzes sich ergibt. Wir haben daher als Kennzeichen des Senkrechtstehens einer geraden Linie auf einer Ebene, daß sie mit zweien durch den Fußpunkt in der Ebene gehenden geraden Linien rechte Winkel bilden muß.

Fig. 474.

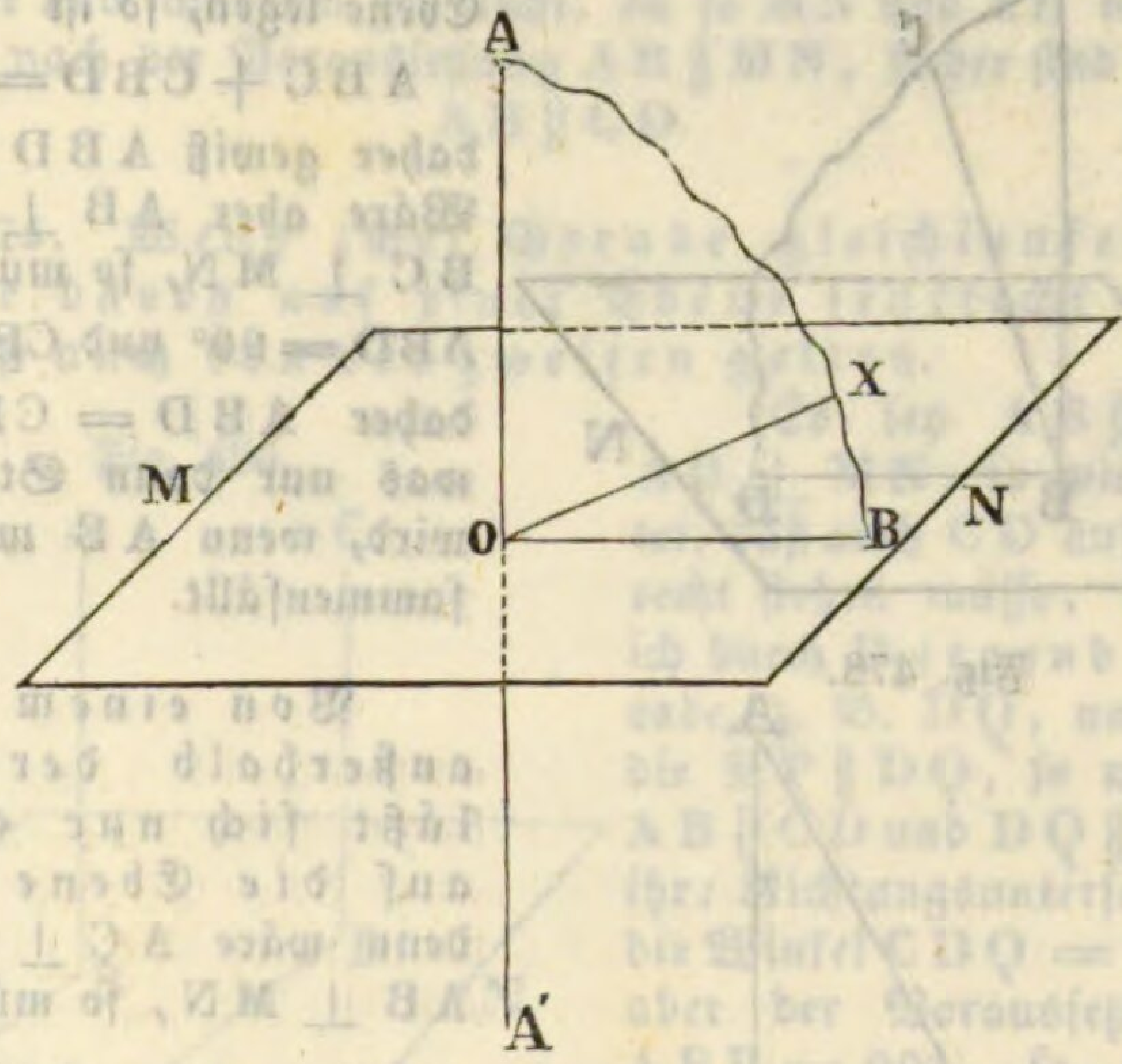


So lange wir unsere geometrischen Betrachtungen nur in einer Ebene anstellten, war in einem Punkte O auf eine Gerade AO nur ein Loth möglich. Wir sehen hier, daß im Raume auf eine Gerade AO im Punkte O unzählige Lothe BO, CO, XO möglich sind, die alle in einer Ebene liegen, die im Punkte O auf die Gerade AO senkrecht sind.

§. 372. Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, so wird sie mit jeder Geraden, die durch den Fußpunkt oberhalb der Ebene geht, **spitzige Winkel**, und mit jeder Geraden, die durch den Fußpunkt unterhalb der Ebene geht, **stumpfe** Winkel bilden.

Es sey die Gerade AO senkrecht auf der Ebene MN, und durch ihren Fußpunkt gehe die Gerade OX oberhalb der Ebene. Gehet OX oberhalb der Ebene MN, so kann ich mir durch AO und OX eine Ebene AOX legen, die erweitert die Ebene MN in einer durch O gehenden OB schneiden muß, so daß AO, OX und OB in einer Ebene liegen; da folglich $AOX + XOB = AOB$ seyn muß, und da $AOB = 90^\circ$ ist, weil $AO \perp MN$ ist, so muß $AOX < 90^\circ$ seyn.

Fig. 475

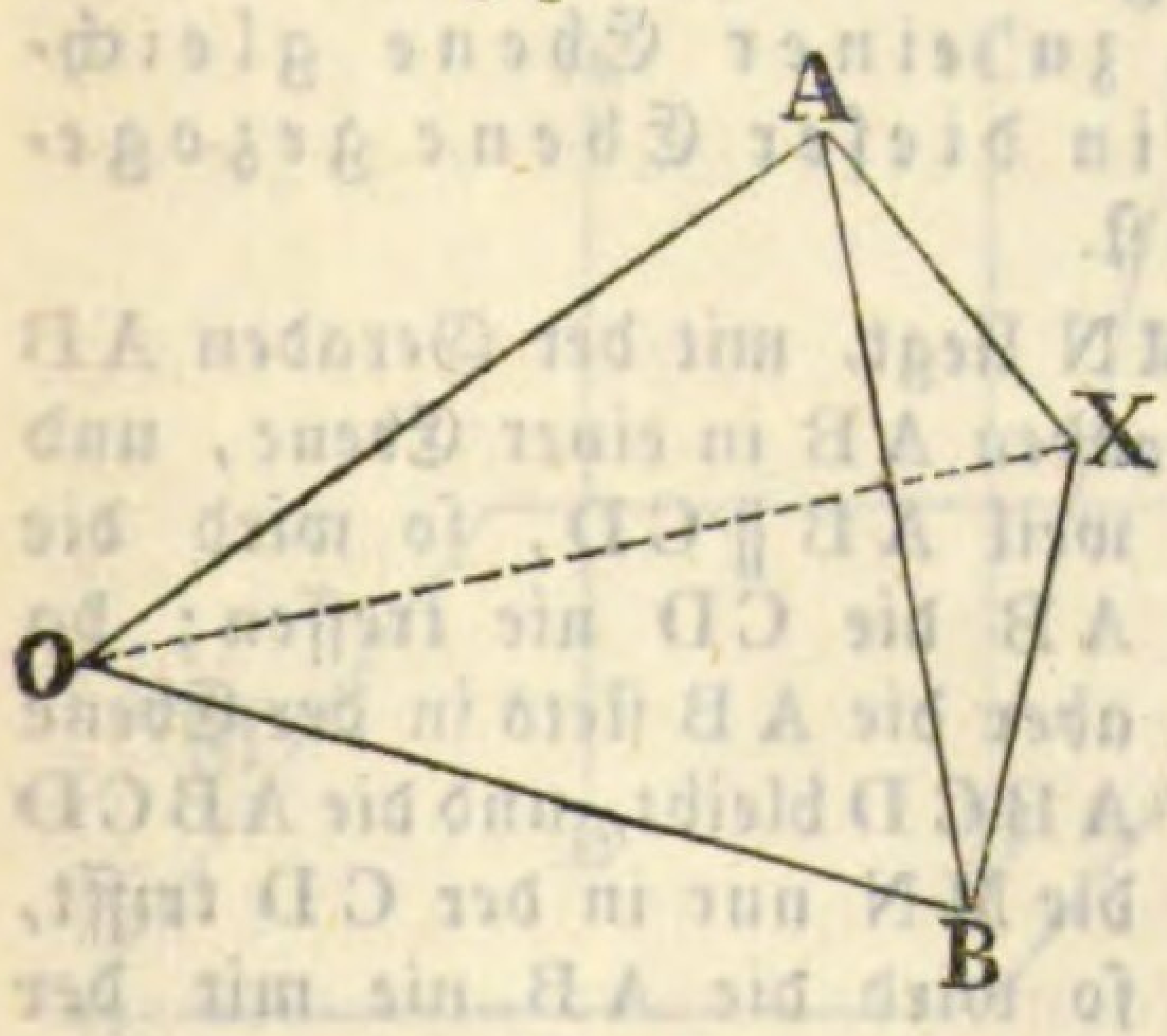


Denken wir uns A O nach A' verlängert, und zugleich die ganze Figur umgekehrt, so ist A O $\perp$ M N und O X unterhalb der Ebene; da nun O X, O B und O A' in einer Ebene liegen, also

$$XOB + BOA' = XOA'$$

ist, und da $BOA' = 90^\circ$ ist, so hat man $XOA' > 90^\circ$.

Fig. 476.



Wir erlauben uns, die Anfänger nochmals darauf aufmerksam zu machen, daß nur deßhalb, weil A O, O X und O B in einer Ebene liegen, $AOX + XOB = AOB$ ist; denn in der gegenwärtigen Fig., wo A O, O X und O B nicht in derselben Ebene liegen, ist auch nicht

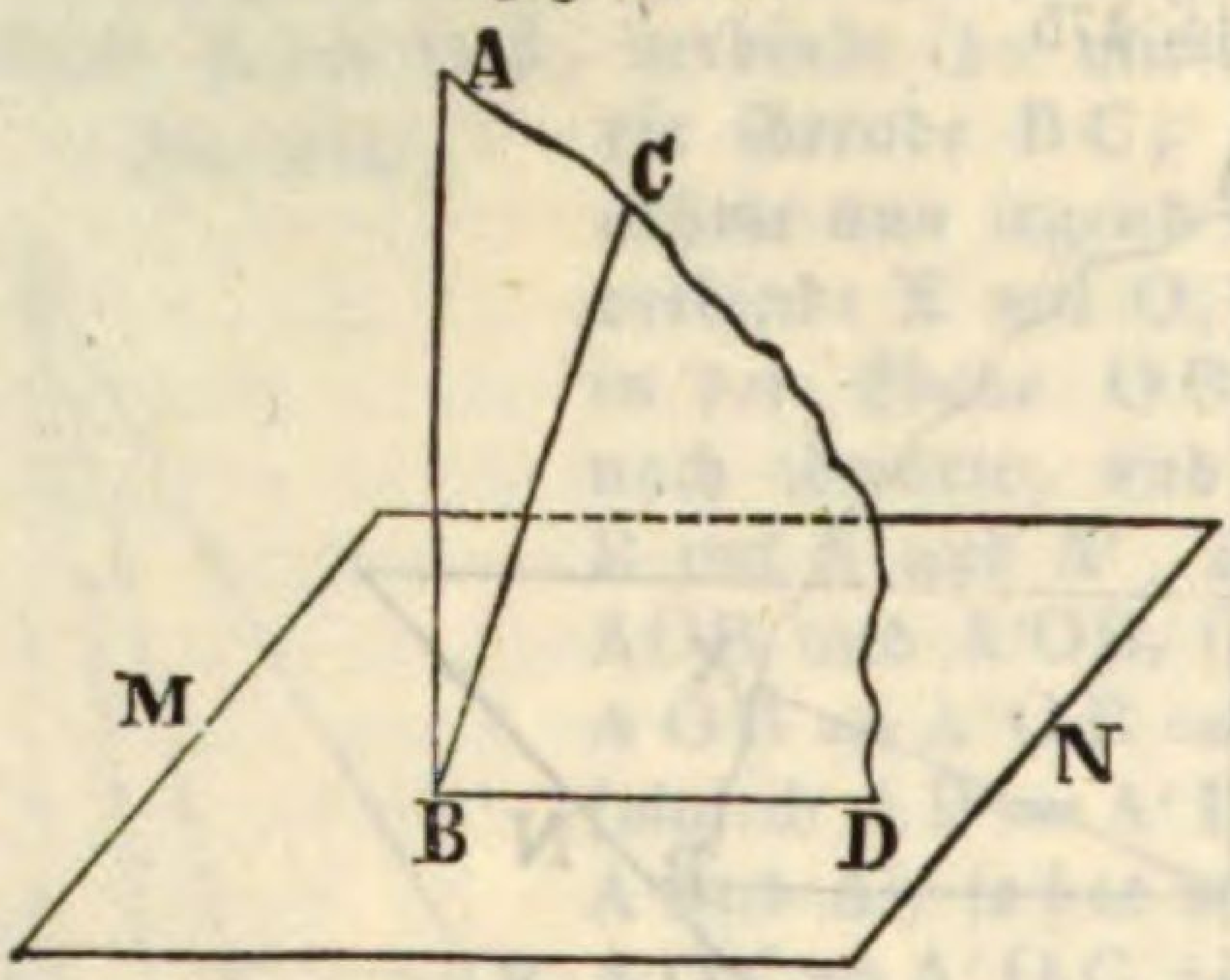
$$AOX + XOB = AOB,$$

sondern vielmehr

$$AOX + XOB > AOB.$$

§. 373. **In einem Punkte einer Ebene läßt sich nur ein Loth errichtet denken**; denn wäre A B $\perp$ MN, und B C $\perp$ MN, so kann man sich durch A B C eine Ebene legen, welche

Fig. 477.

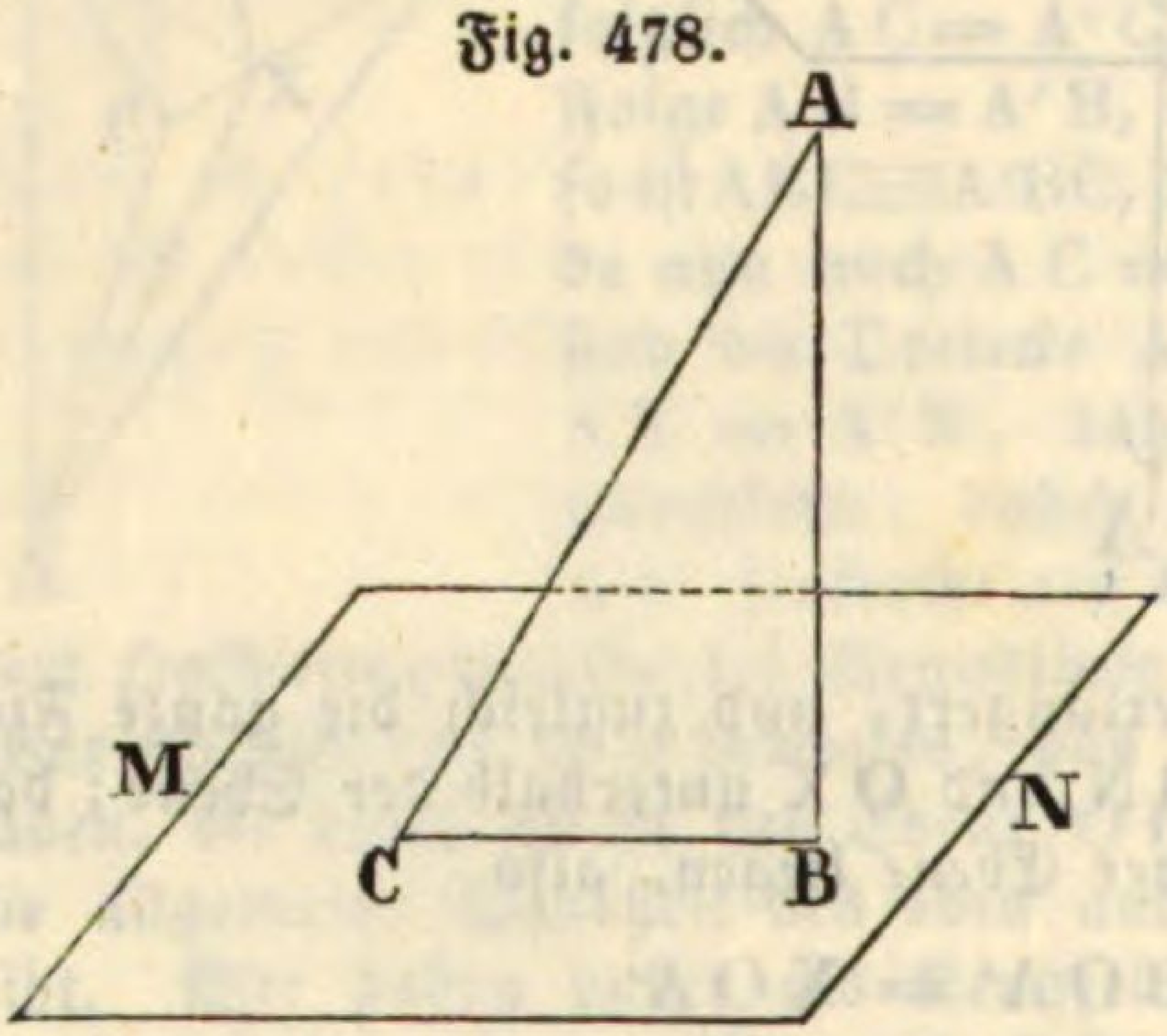


die MN in BD schneidet. Da nun AB, BC und BD in einer Ebene legen, so ist

$$ABC + CBD = ABD,$$

daher gewiß $ABD > CBD$. Wäre aber $AB \perp MN$ und $BC \perp MN$, so müssen $ABD = 90°$ und $CBD = 90°$, daher $ABD = CBD$ seyn, was nur dann Statt finden wird, wenn AB mit BC zusammenfällt.

Fig. 478.



Von einem Punkte außerhalb der Ebene läßt sich nur ein Loth auf die Ebene fällen; denn wäre $AC \perp MN$ und $AB \perp MN$, so müßte

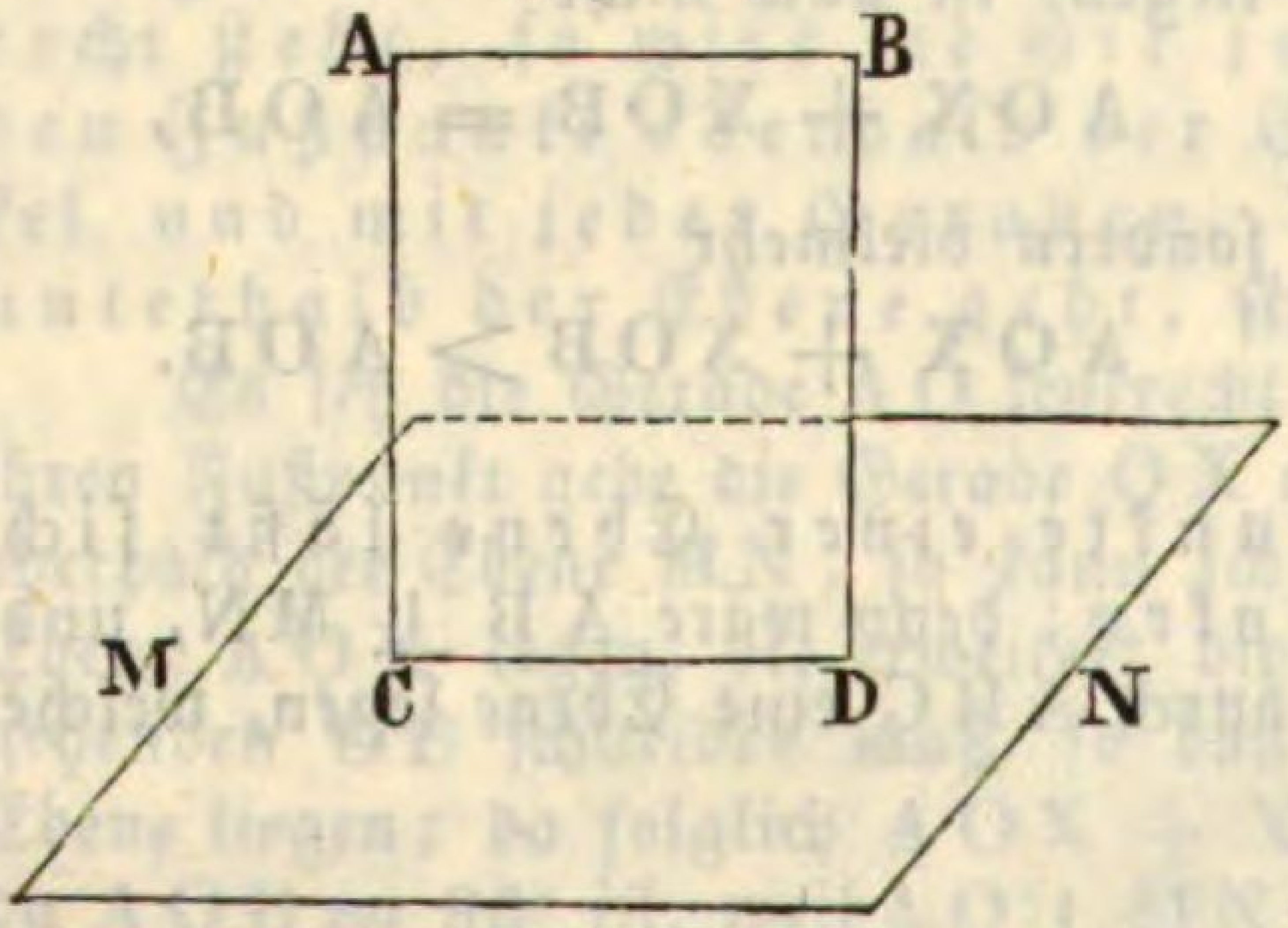
$ACB = 90°$; $ABC = 90°$,

daher $ABC + ACB = 180°$, also $AB \parallel AC$, was nur Statt finden kann, wenn beide zusammenfallen.

§. 374. **Eine Gerade heißt zu einer Ebene gleichlaufend, wenn beide verlängert und erweitert sich nie treffen. Eine Gerade ist zu einer Ebene gleichlaufend, wenn sie zu einer in dieser Ebene gezogenen Geraden gleichlaufend ist.**

Ist die CD, die in der Ebene MN liegt, mit der Geraden AB gleichlaufend, so liegt CD mit der Geraden AB in einer Ebene, und

Fig. 479.

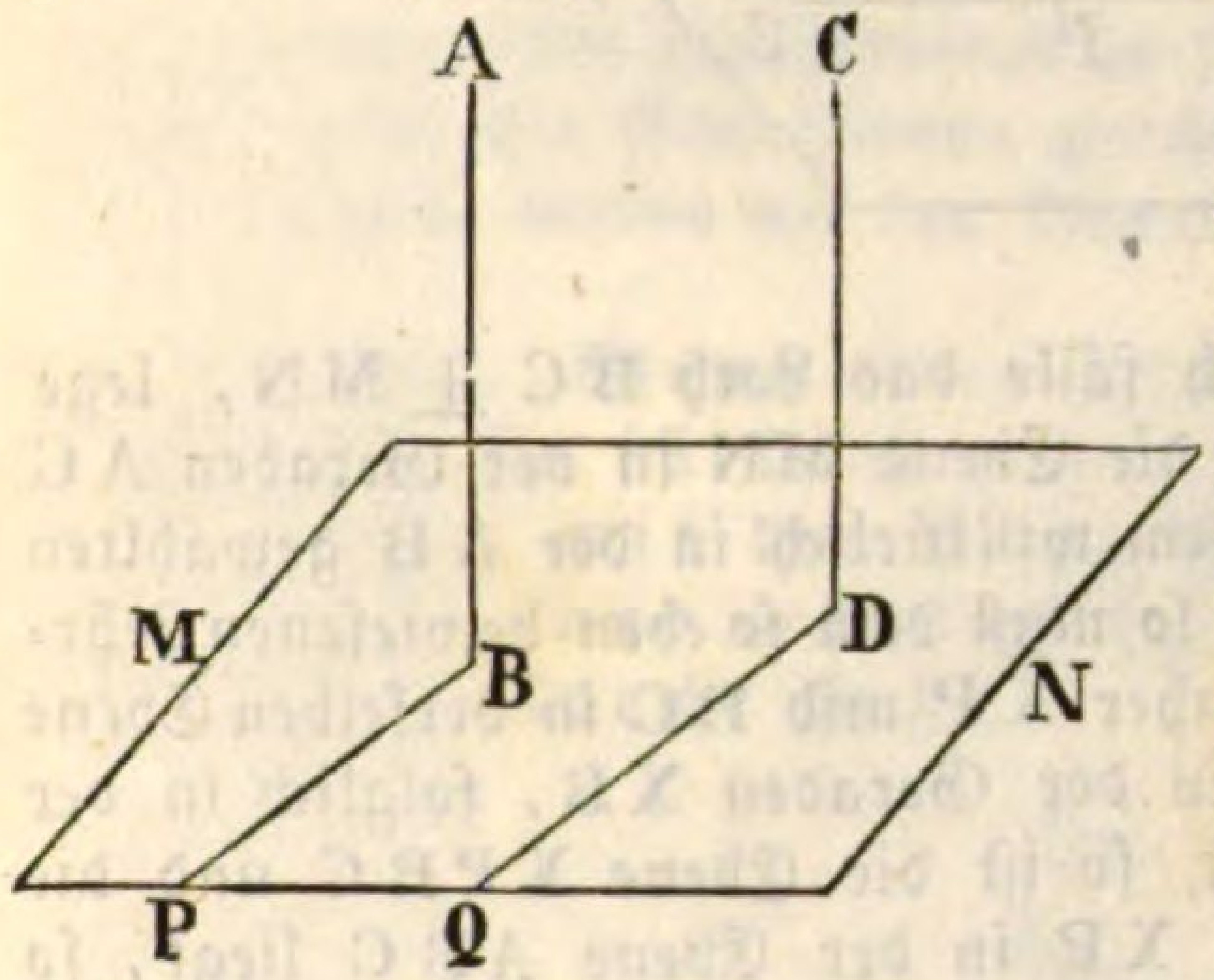


weil $AB \parallel CD$, so wird die AB die CD nie treffen; da aber die AB stets in der Ebene ABCD bleibt, und die ABCD die MN nur in der CD trifft, so wird die AB nie mit der Ebene MN zusammentreffen, daher $AB \parallel MN$. Umgekehrt ist die Voraussetzung die, daß $AB \parallel MN$, so sind jederzeit unzählige Gerade in der MN möglich, die mit AB gleichlau-

fend sind; denn ich darf nur durch AB irgend eine Ebene ABCD legen, welche die MN in CD schneidet, so liegen AB und CD in einer Ebene und schneiden sich nicht, da ja MN und AB nicht zusammentreffen nach der Voraussetzung $AB \parallel MN$, daher sind dann
$$AB \parallel CD.$$

§. 375. **Wenn zwei Gerade gleichlaufend sind, und eine davon auf einer Ebene senkrecht steht, so muß dieß auch von der zweiten gelten.**

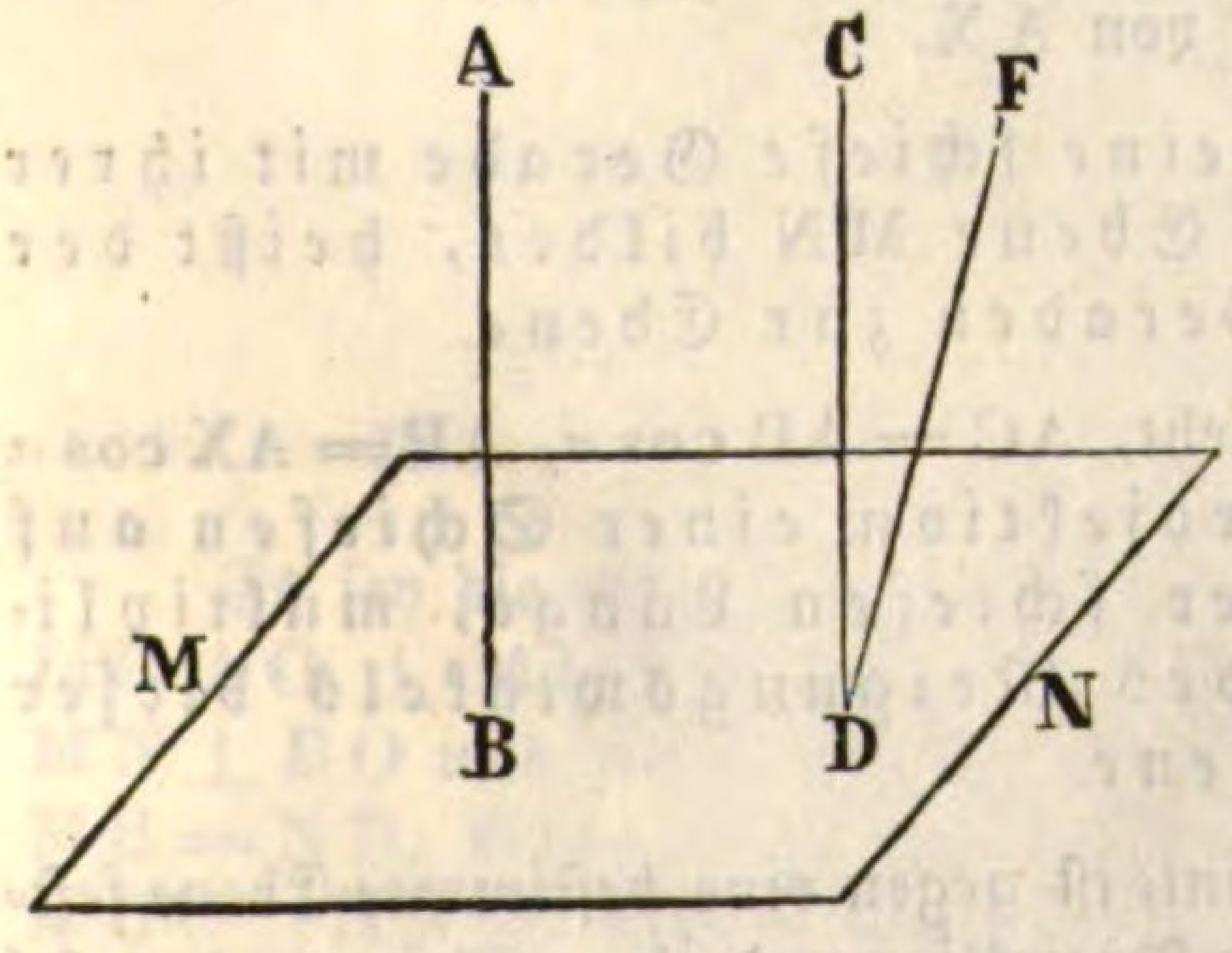
Fig. 480.



Es sey $AB \parallel CD$ und $AB \perp MN$, so wird behauptet, daß auch CD auf MN senkrecht stehen müsse; denn ziehe ich durch D irgend eine Gerade, z. B. DQ, und durch B die $BP \parallel DQ$, so müssen, da $AB \parallel CD$ und $DQ \parallel BP$, auch ihre Richtungsunterschiede, d. i. die Winkel $CDQ = ABP$; da aber der Voraussetzung nach $ABP = 90^\circ$, so muß auch $CDQ = 90^\circ$, also $CD \perp DQ$ seyn, was aber von der willkürlich gezogenen DQ gilt, gilt von jeder andern durch D in der Ebene MN gezogenen Geraden, daher $CD \perp MN$, was zu beweisen war.

Sind zwei Gerade auf derselben Ebene senkrecht, so sind sie stets gleichlaufend mit einander.

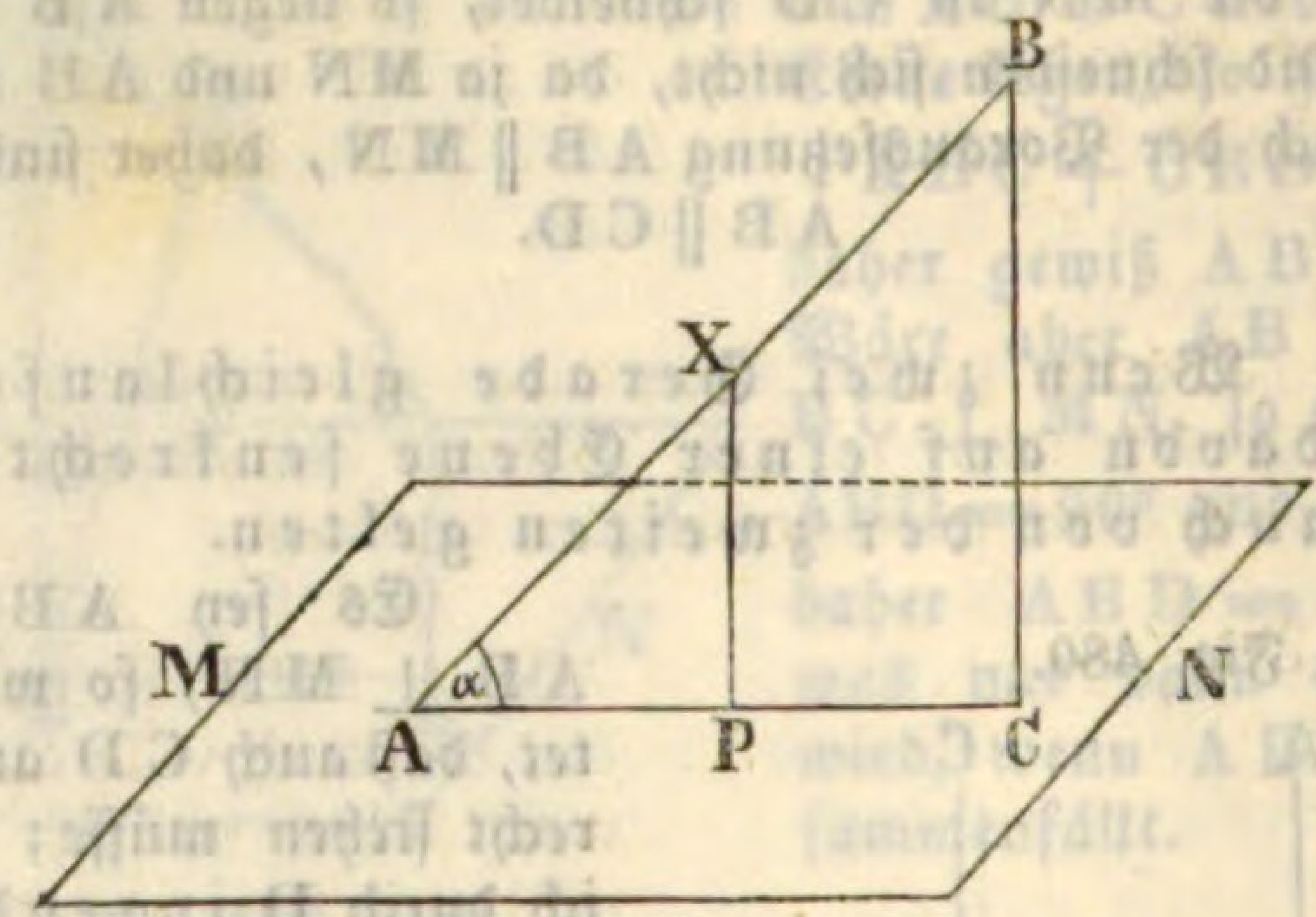
Fig. 481.



Ist $AB \perp MN$, und $CD \perp MN$, so müssen AB und CD gleichlaufend mit einander seyn; denn wäre dieß nicht der Fall, so könnte ich mir durch D eine Gerade $DF \parallel AB$ denken; dann wäre aber, da $AB \perp MN$, auch $DF \perp MN$, und wir hätten in D zwei Gerade CD und DF, beide im selben Punkte auf die Ebene MN senkrecht, was nicht seyn kann.

§. 376. **Wenn eine Gerade auf einer Ebene schief aufsteht, und man fällt von jedem ihrer Punkte Lothe auf die Ebene, so liegen die Fußpunkte aller dieser Lothe in einer geraden Linie, welche die Projektion der Schiefen auf dieser Ebene heißt.**

Fig 482.



Es sey die Schiefe AB, ich fälle das Loth BC ⊥ MN, lege durch ABC eine Ebene, welche die Ebene MN in der Geraden AC schneidet. Fället man nun von dem willkürlich in der AB gewählten Punkte X ein Loth XP ⊥ MN, so muß dem so eben bewiesenen Lehrsatze zu Folge XP ∥ BC seyn, daher XP und BC in derselben Ebene liegen; da aber der Punkt X in der Geraden XB, folglich in der Ebene XBC oder XPBC liegt, so ist die Ebene XPBC und die Ebene ABC dieselbe. Da nun XP in der Ebene ABC liegt, so muß der Punkt P, wo die XP die Ebene MN trifft, in derselben Geraden liegen, wo die Ebene ABC die MN trifft, daher der Punkt P in der AC liegen. Was vom Punkte P gilt, rücksichtlich X, wird von jedem andern Fußpunkte eines Lothes gelten, welches man von irgend einem Punkte der AB auf MN fällt; die Punkte aller dieser Lothe werden in der AC liegen, AC heißt die Projektion der AB, und eben so AP die Projektion von AX.

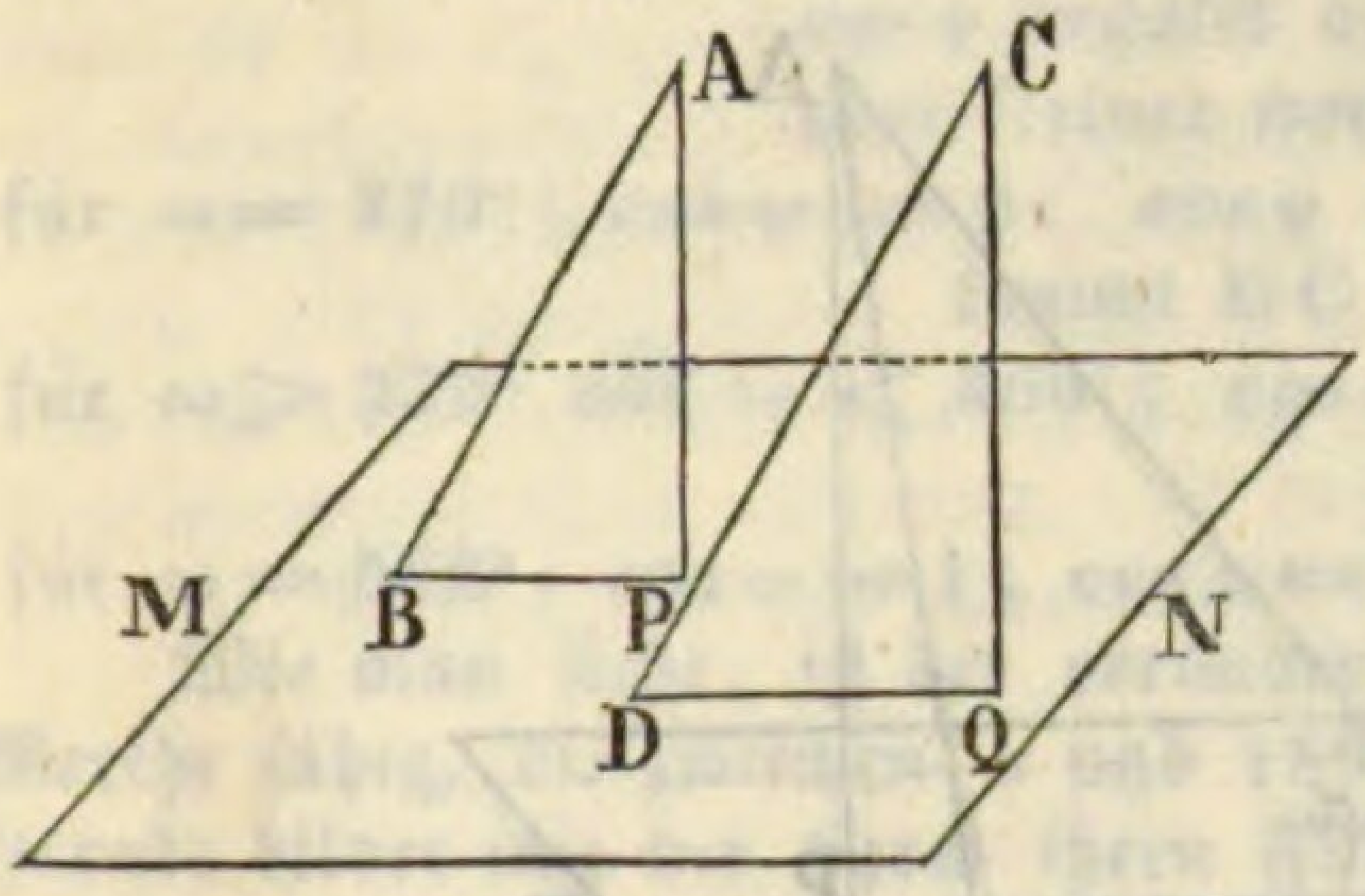
Der Winkel α, den eine schiefe Gerade mit ihrer Projektion AC auf der Ebene MN bildet, heißt der **Neigungswinkel** dieser Geraden zur Ebene.

Da nun, wie man leicht sieht, $AC = AB \cos\alpha$, $AP = AX \cos\alpha$ ist, so sieht man, daß die Projektion einer Schiefen auf einer Ebene gleich ist der schiefen Länge, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels dieser Geraden gegen diese Ebene.

Die Lage einer geraden Linie ist gegen eine bestimmte Ebene festgesetzt, wenn man die Lage ihrer Projektion und ihren Neigungswinkel kennt.

§. 377. Gleichlaufende Gerade haben gegen dieselbe Ebene gleiche Neigung.

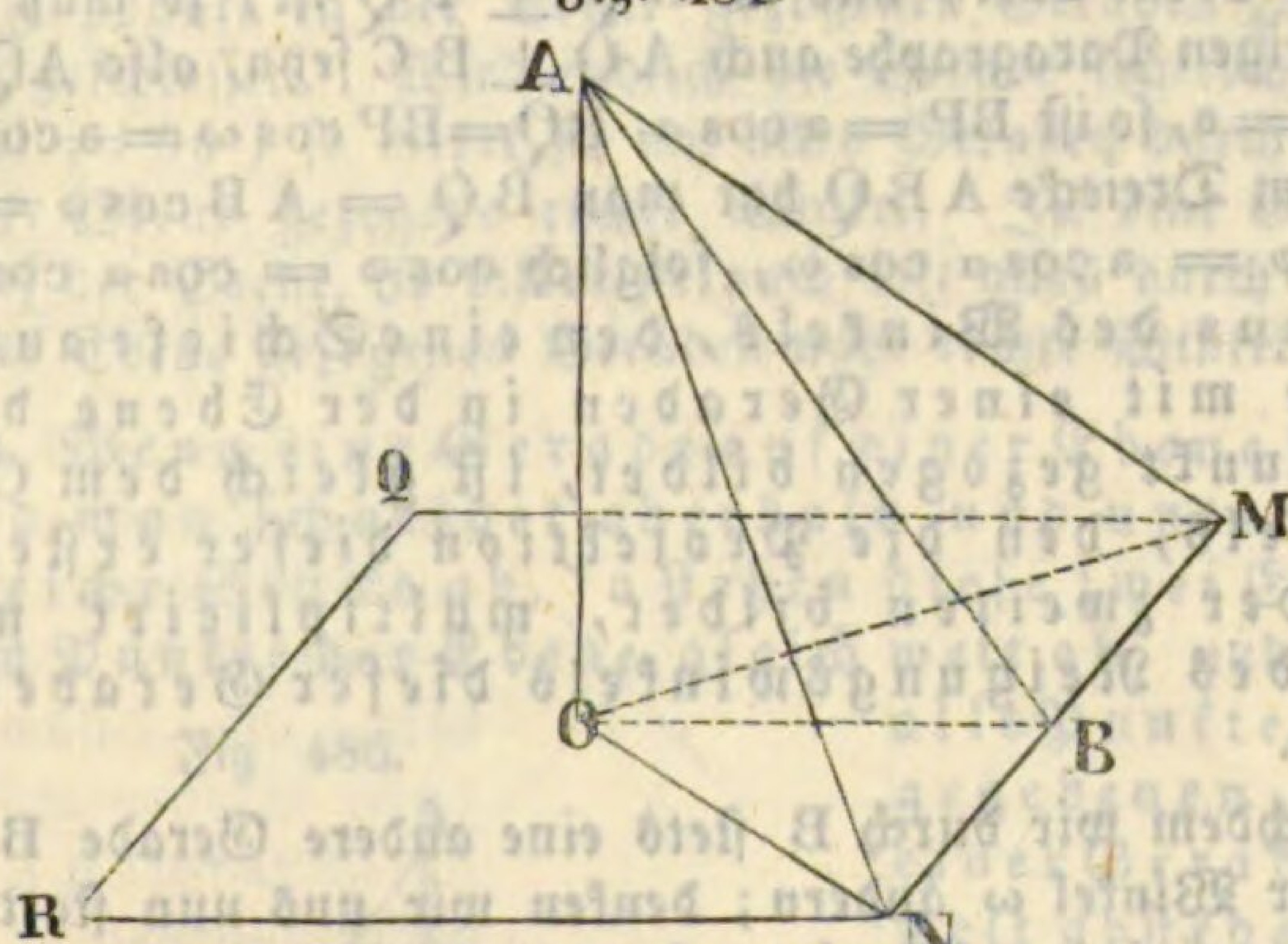
Fig. 483.



Es sey AB ∥ CD, ich fälle AP ⊥ MN und CQ ⊥ MN, daher auch AP ∥ CQ, somit die Winkel BAP = DCQ. Da nun auch APB = 90° = CQD, so müssen die dritten Winkel ABP = CDQ, welche aber die Neigungswinkel sind. Begreiflich ist, daß man den Satz nicht umkehren kann; denn es können zwei Gerade gleiche Neigung haben, ohne gleichlaufend zu seyn. Damit letzteres Statt finde, müssen auch ihre Projektionen gleichlaufend seyn, und nach derselben Seite liegen, wovon wir den Beweis unsern Lesern überlassen wollen.

§. 378. Wenn eine Linie schief auf einer Ebene aufsteht, so ist doch eine (und zwar nur eine) Gerade in der Ebene, mit der diese Schiefe einen rechten Winkel bildet, und nämlich diejenige, die auf der Projektion senkrecht steht.

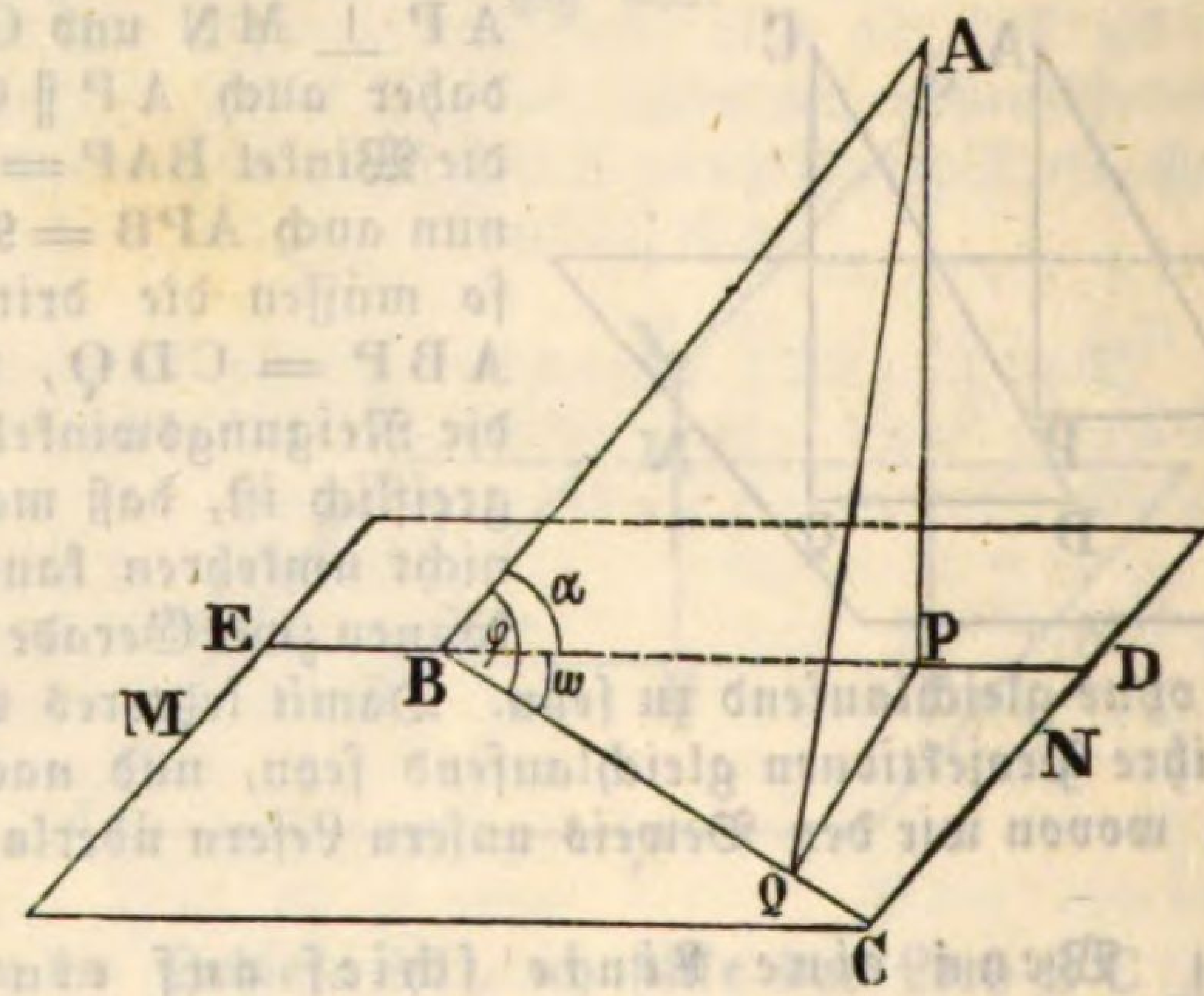
Fig. 484.



Es sey die Gerade AB schief gegen die Ebene MQRN. Ich fälle AO ⊥ MQRN, ziehe im Punkte B auf die Gerade BO die MN ⊥ BO und mache MB = NB, verbinde M und N mit O, so ist MB = NB, BO = BO, MBO = NBO = 90°, daher die Dreiecke MBO ≡ NBO, mithin MO = NO. Verbinde ich daher noch M und N mit A, so ist MO = NO, AO = AO und AOM = AON = 90°, daher die Dreiecke AMO ≡ AON, daher AM = AN, mithin AMN gleichschenklich, MN in halbirt, daher MN ⊥ AB w. z. b. w.

§. 379. Es sey die Schiefe AB, durch ihren Fußpunkt B ziehe ich die Gerade BC. Es handelt sich nun, wie groß ist der Winkel,

Fig. 485.



den die AB mit der BC bildet. Ich fälle das Loth AP auf die Ebene MN, und von dem Fußpunkte P dieses Lothes das Loth $PQ \perp BC$, nenne die Winkel $ABP = \alpha$, $PBC = \omega$, $ABC = \varphi$. Wenn man den Punkt Q mit A verbindet, so ist PQ die Projektion der Schiefen AQ auf die Ebene MN, und da $BQ \perp PQ$ ist, so muß nach dem Satze im vorigen Paragraphe auch $AQ \perp BC$ seyn, also $AQB = 90°$. Ist nun $AB = a$, so ist $BP = a \cos \alpha$, $BQ = BP \cos \omega = a \cos \alpha \cos \omega$; aber aus dem Dreiecke ABQ hat man $BQ = AB \cos \varphi = a \cos \varphi$, daher $a \cos \varphi = a \cos \alpha \cos \omega$, folglich $\cos \varphi = \cos \alpha \cos \omega$, d. h. der Cosinus des Winkels, den eine Schiefe außerhalb der Ebene mit einer Geraden in der Ebene durch ihren Fußpunkt gezogen bildet, ist gleich dem Cosinus des Winkels, den die Projektion dieser ersten Geraden mit der zweiten bildet, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels dieser Geraden gegen die Ebene.

Je nachdem wir durch B stets eine andere Gerade BC ziehen, wird sich der Winkel ω ändern; denken wir uns nun statt ω von 0 bis 360° alle möglichen Werthe gesetzt, d. h. ziehen wir durch B nach allen möglichen Richtungen Linien, so haben wir:

für $\omega = 0$; $\cos \omega = 1$; $\cos \varphi = \cos \alpha$, daher $\varphi = \alpha$,

für $\omega > 0$ und $\omega < 90°$, ist $\cos \omega$ positiv und < 1, daher $\cos \varphi < \cos \alpha$, also $\varphi > \alpha$, oder $\varphi < 90°$,

für $\omega = 90°$; $\cos \omega = 0$; $\cos \varphi = 0$, daher $\varphi = 90°$, was mit dem vorigen Paragr. übereinstimmt,

für $\omega > 90°$ und $\omega < 180°$; $\cos \omega$ negativ; da nun $\cos \varphi$ negativ, so ist $\varphi > 90°$,

für $\omega = 180°$; $\cos \omega = -1$; $\cos \varphi = -\cos \alpha$; $\varphi = 180 - \alpha$ (hier ist BC in die Lage BE gekommen).

für $\omega > 180°$ und $\omega < 270°$; $\cos\omega$ negativ und wachsend, daher $\cos\varphi$ negativ und wachsend; mithin φ stumpf, aber kleiner werdend,

für $\omega = 270°$; $\cos\omega = 0$; $\cos\varphi = 0$, daher $\varphi = 90°$; hier kommt BC in die Verlängerung der BQ,

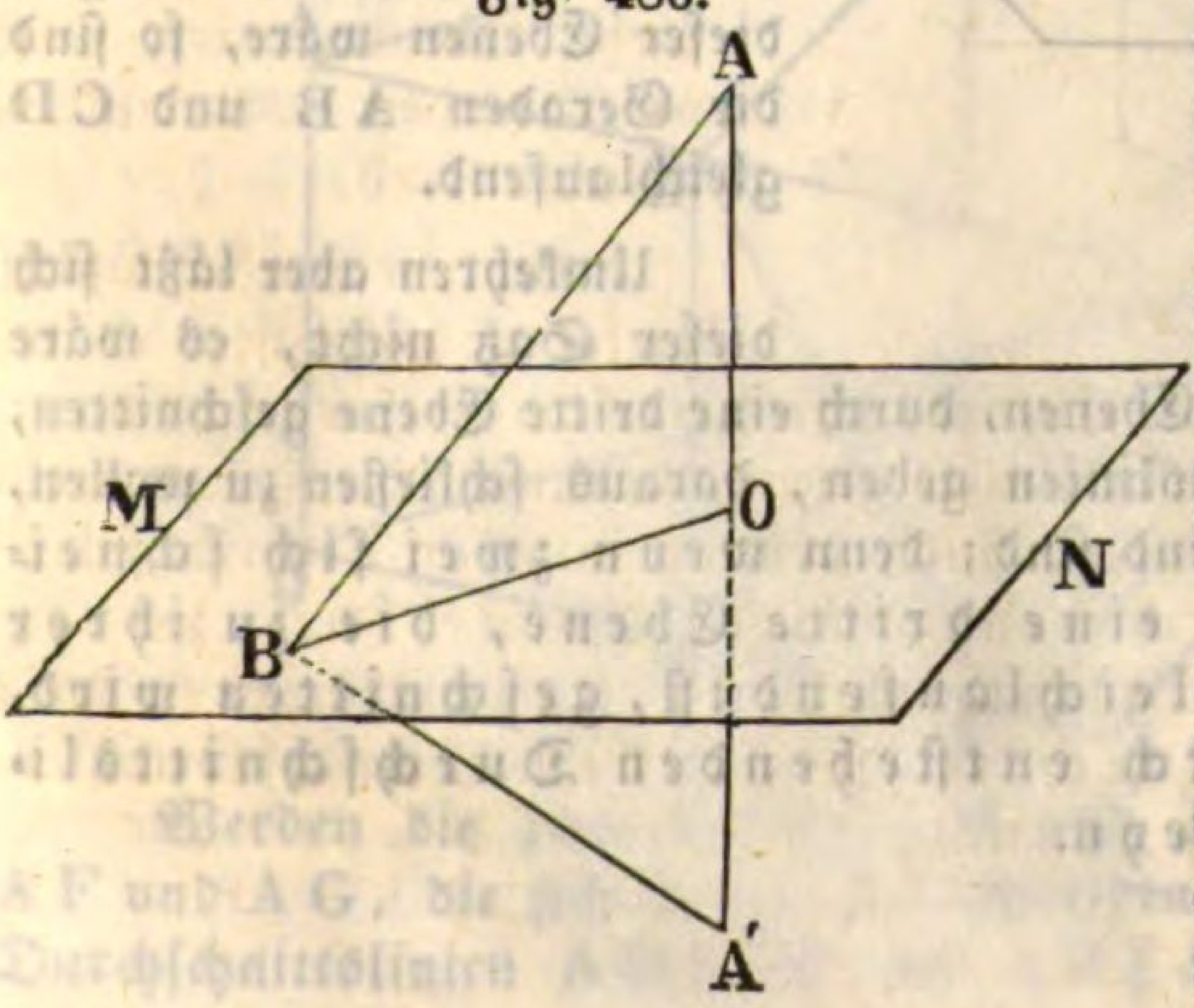
für $\omega > 270°$ und $\omega < 360°$; $\cos\omega$ positiv zunehmend, daher φ spitzig abnehmend,

für $\omega = 360°$; $\cos\omega = 1$; $\cos\varphi = \cos\alpha$, daher $\varphi = \alpha$.

Wie man sieht, ist der veränderliche Winkel φ aller möglichen Werthe fähig, die zwischen α und $180 - \alpha$ liegen, d. h. eine schiefe Gerade bildet mit der durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden alle Arten von Winkeln, deren Größe aber zwischen dem Neigungswinkel dieser Geraden und der Ergänzung zu 180° dieses Winkels liegen. Je kleiner daher dieser Neigungswinkel ist, desto größer die Mannigfaltigkeit der Winkel; je größer er aber ist desto beschränkter die Verschiedenheit der Winkel. So z. B. ist der Neigungswinkel der Geraden gegen die Ebene 80°, so liegen die Winkel, die diese Geraden mit den durch den Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden bildet, zwischen 80° und 100°; es ist kein spitziger kleiner als 80°, und kein stumpfer $> 100°$ möglich. Ist der Neigungswinkel $= 89°$, so sind die möglichen Winkel dieser Geraden mit der durch den Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden zwischen 89° und 91° eingeschlossen. Wird endlich die Gerade senkrecht, ihr Neigungswinkel $= 90°$, so bildet sie mit allen Geraden durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogene rechte Winkel. Ist eine Gerade nahe senkrecht auf der Ebene, so bildet sie auch mit allen durch ihren Fußpunkt in der Ebene gezogenen Geraden nahe rechte Winkel.

§. 380. **Wenn eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, und man schneidet oberhalb und unterhalb der Ebene gleiche Stücke ab, so stehen diese zwei Endpunkte von jedem Punkte der Ebene gleich weit ab, und umgekehrt alle Punkte, die von 2 gegebenen Punkten einer Geraden gleich weit abstehen, liegen in einer Ebene, die senkrecht die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte halbirt.**

Fig. 486.



Ist $AA' \perp MN$ und ist $AO = A'O$, so wird jeder Punkt B dieser Ebene von A und A′ gleich weit abstehen; denn verbindet man A und A′ mit B, so

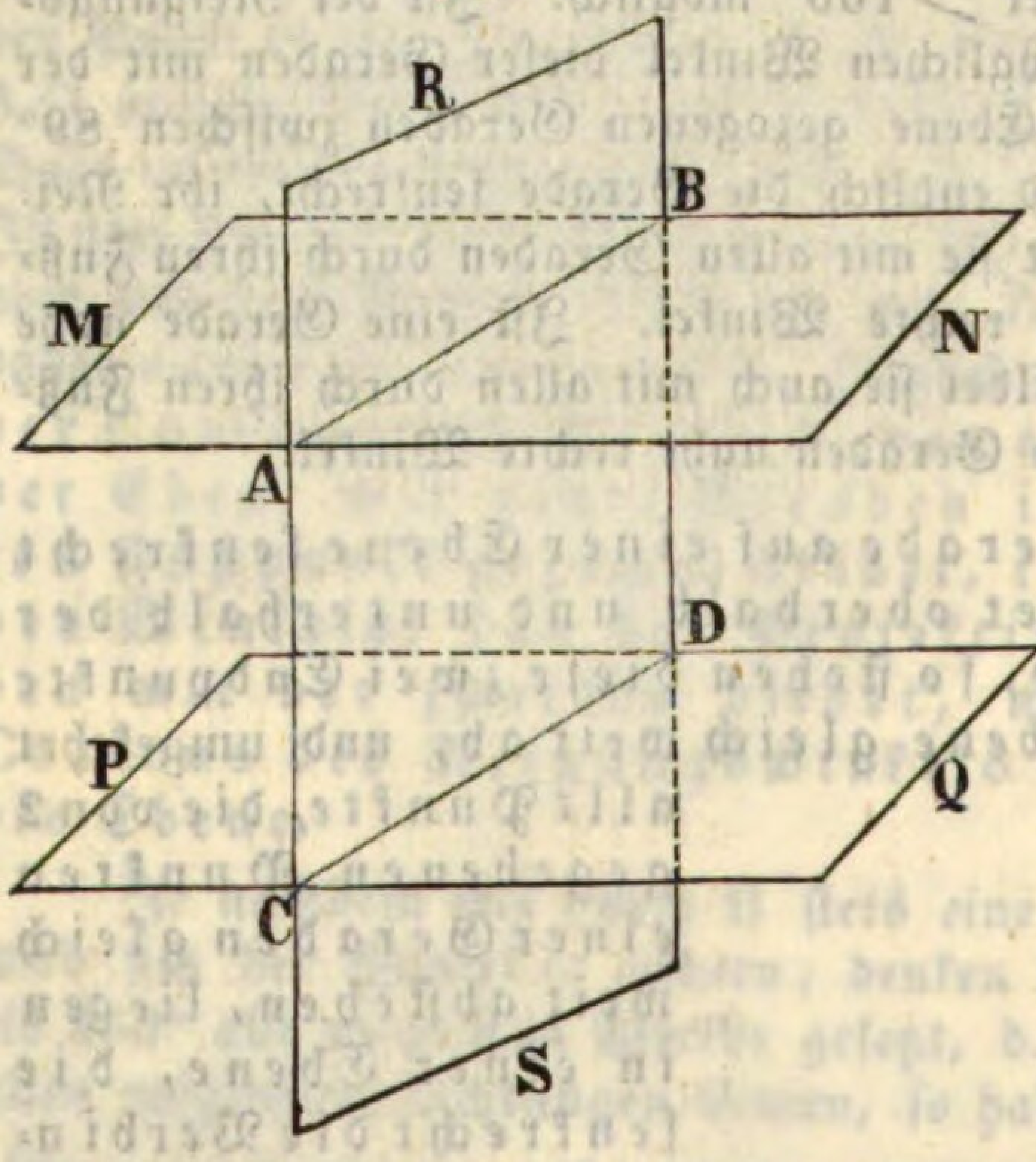
hat man AO = A'O, BO = BO, AOB = A'OB = 90°, daher AOB ≡ A'OB, mithin AB = A'B. Wäre hingegen die Voraussetzung AB = A'B, so ist dann, wenn O der Halbirungspunkt der AA' ist, AO = A'O, und da BO = BO, also BAO ≡ BA'O, somit die Winkel AOB = A'OB, daher jeder gleich 90°; mithin jeder Punkt, der von A und A' gleich weit absteht, in einer Geraden BO liegt, die senkrecht auf AO ist; aber alle diese Geraden müssen in einer Ebene liegen, die in O senkrecht auf die AO ist.

II. Zwei Ebenen.

§. 381. **Zwei Ebenen heißen gleichlaufend, wenn sie beide nach allen Seiten erweitert, nie zusammentreffen.**

Zwei gleichlaufende Ebenen werden, durch was immer für eine dritte Ebene geschnitten, gleichlaufende Durchschnittslinien geben.

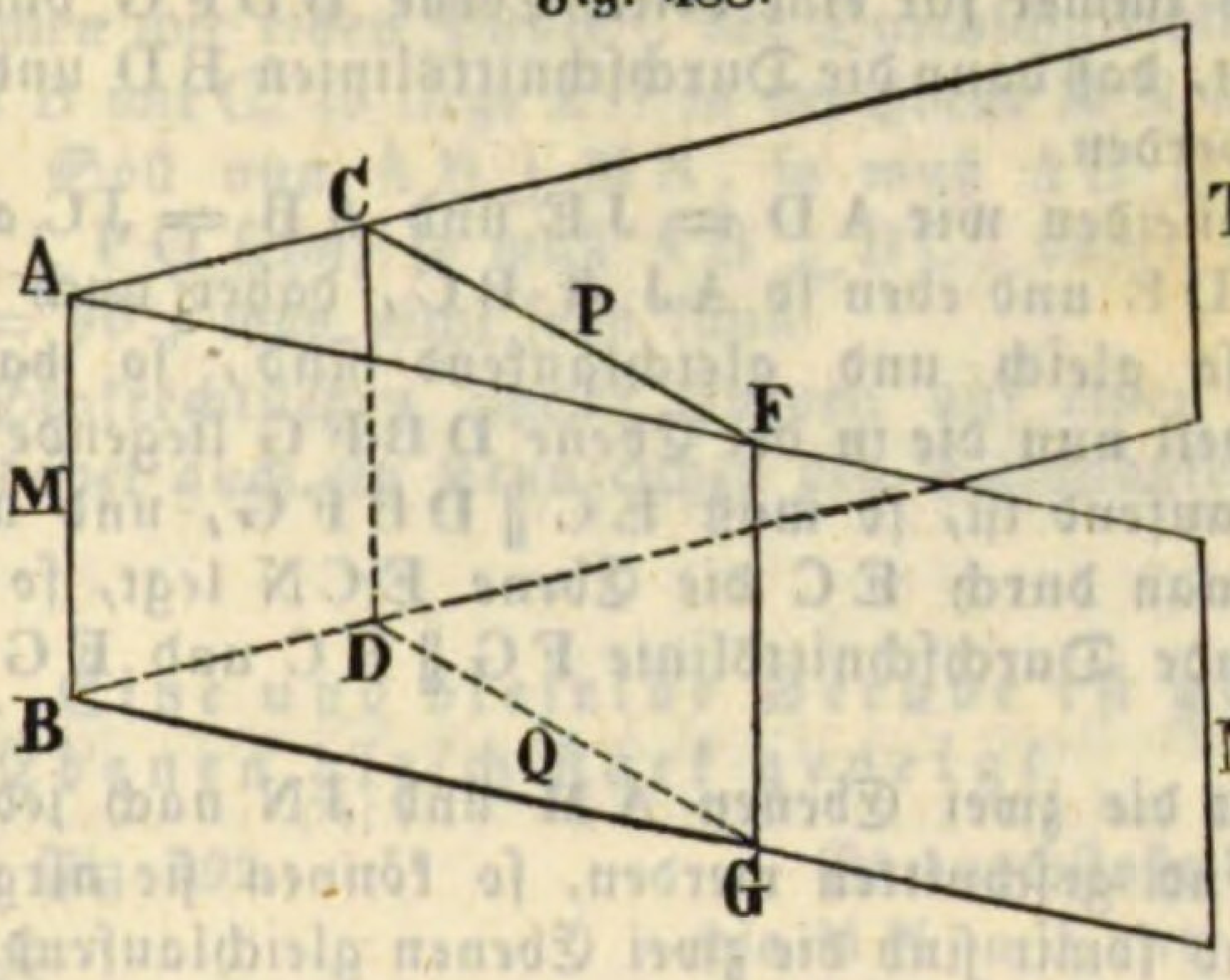
Fig. 487.



Es seyen die Ebenen MN und PQ gleichlaufend, d. h. sie treffen erweitert nirgends zusammen; beide Ebenen werden durch die Ebene RS in den Geraden AB und CD geschnitten, so liegen AB und CD natürlicherweise in einer Ebene, und da sie nie zusammentreffeen können, weil ein Zusammentreffen der AB und CD, welche stets in den Ebenen MN und RS bleiben, ein Zusammentreffen dieser Ebenen wäre, so sind die Geraden AB und CD gleichlaufend.

Umkehren aber läßt sich dieser Satz nicht, es wäre nicht erlaubt, so wie zwei Ebenen, durch eine dritte Ebene geschnitten, gleichlaufende Durchschnittslinien geben, daraus schließen zu wollen, daß die Ebenen gleichlaufend sind; denn wenn zwei sich schneidende Ebenen durch eine dritte Ebene, die zu ihrer Durchschnittslinie gleichlaufend ist, geschnitten wird, so werden die dadurch entstehenden Durchschnittslinien gleichlaufend seyn.

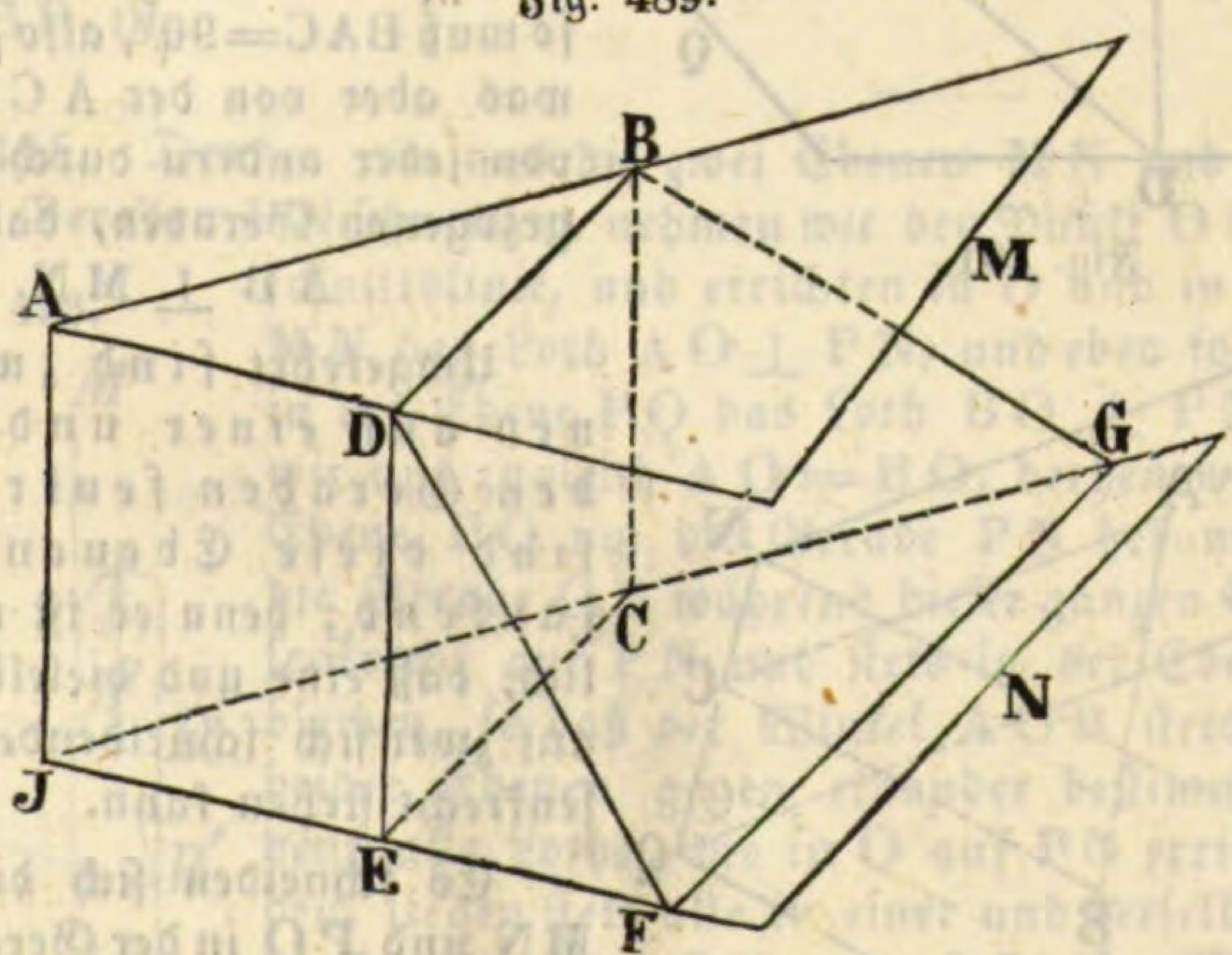
Fig. 488.



Es seyen die zwei Ebenen MN und MT, die sich in der Geraden AB schneiden. Legen wir nun die Ebene PQ gleichlaufend mit AB durch beide Ebenen und zwar so, daß die Ebene PQ die MT in CD, die MN in FG schneidet. Weil AB ‖ PQ, und die durch AB gelegte Ebene MP die PQ in der Geraden CD schneidet, so ist AB ‖ CD ganz auf ähnliche Art ist AB ‖ FG, daher CD ‖ FG.

§. 382. Wenn zwei Ebenen durch zwei sich schneidende Ebenen gleichlaufend geschnitten werden, so werden sie durch was immer für eine dritte Ebene geschnitten, ebenfalls gleichlaufende Durchschnittslinien geben, und daher beide Ebenen gleichlaufend seyn.

Fig. 489.



Werden die zwei Ebenen AM und JN durch die zwei Ebenen AF und AG, die sich in der AJ schneiden, so geschnitten, daß ihre Durchschnittslinien AD ‖ JF und AB ‖ JG, so behaupte ich, daß,

wenn man was immer für eine dritte Ebene BDFG durch diese beiden Ebenen legt, daß dann die Durchschnittslinien BD und FG gleichlaufend seyn werden.

Denn schneiden wir AD = JE und AB = JC ab, so ist natürlich AJ ⧣ DE und eben so AJ ⧣ BC, daher auch BC ⧣ DE. Weil nun diese gleich und gleichlaufend sind, so hat man auch BD ⧣ EC. weil nun die in der Ebene DBFG liegende Gerade BD zu EC gleichlaufend ist, so muß EC ‖ DBFG, und weil dieß der Fall ist, und man durch EC die Ebene ECN legt, so muß die dadurch entstehende Durchschnittslinie FG ‖ EC und FG ‖ BD seyn, w. z. b. w.

Da somit die zwei Ebenen AM und JN nach jeder Richtung hin gleichlaufend geschnitten werden, so können sie nirgends zusammentreffen, und somit sind die zwei Ebenen gleichlaufend.

§. 383. **Wenn zwei Ebenen mit einander gleichlaufend sind, und eine Gerade steht auf einer derselben senkrecht, so wird diese auch auf der andern senkrecht stehen.**

Fig 490.

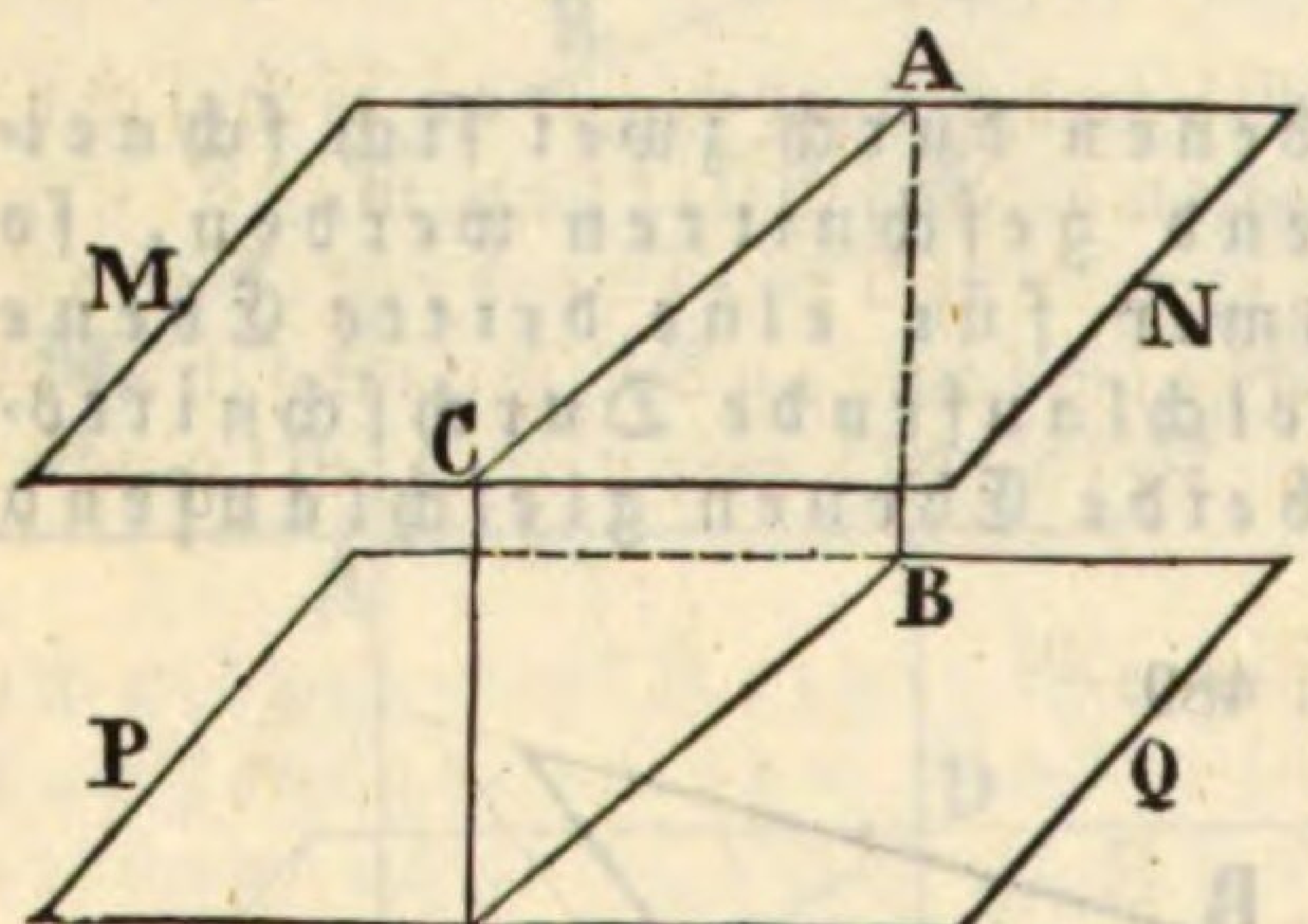
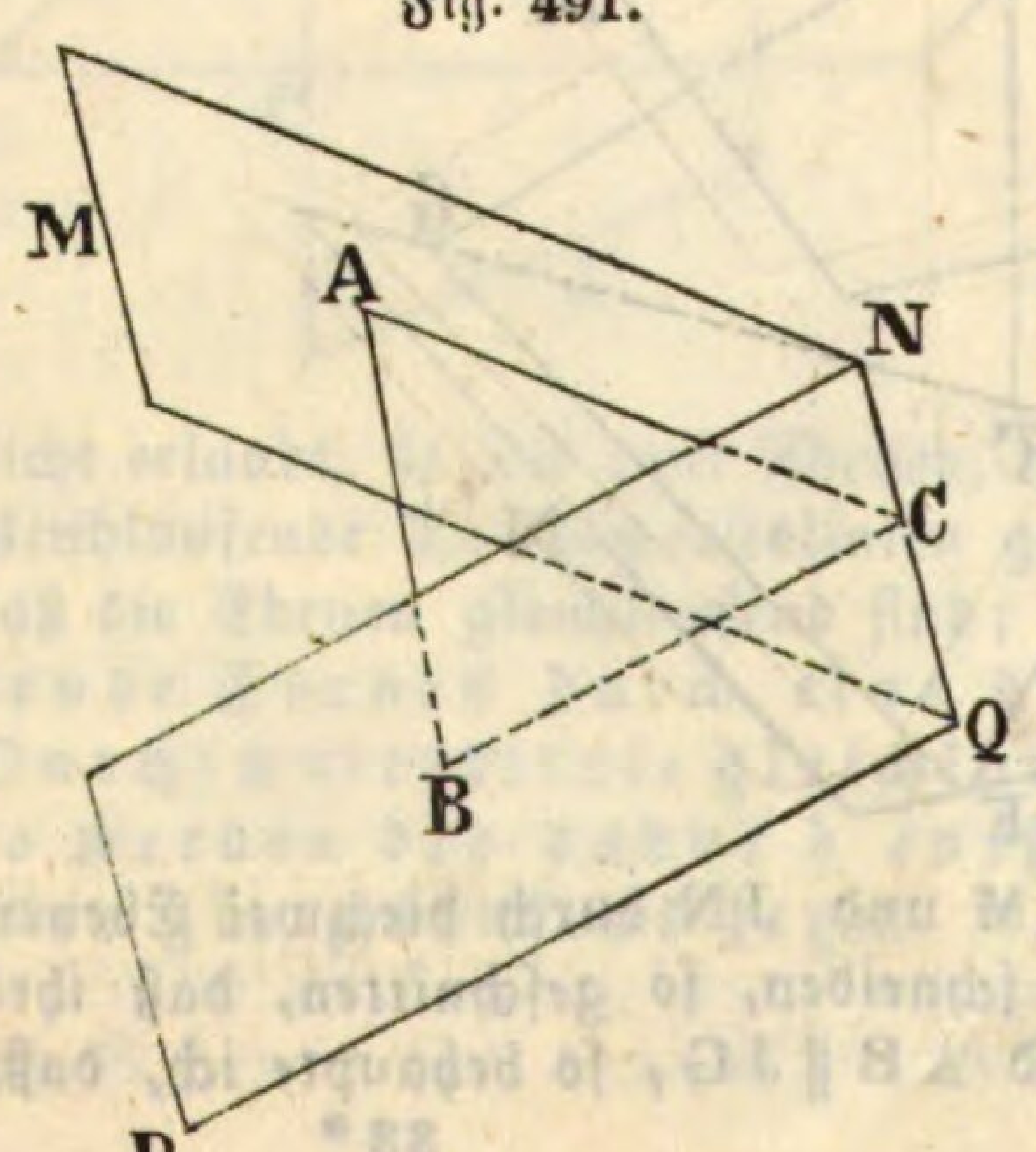


Fig. 491.



Es sey MN ‖ PQ und AB ⊥ PQ, ich ziehe in der Ebene MN die willkürliche Gerade AC, und lege durch die Punkte B, A und C eine Ebene ABCD, welche die PQ in BD schneidet, so sind BD ‖ AC. Da nun

$CAB + ABD = 180^\circ$ und $ABD = 90^\circ$, weil AB ⊥ PQ, so muß $BAC = 90^\circ$, also AB ⊥ AC, was aber von der AC gilt, gilt von jeder andern durch A in MN gezogenen Geraden, daher

AB ⊥ MN.

Umgekehrt **sind zwei Ebenen auf einer und derselben Geraden senkrecht, so sind diese Ebenen gleichlaufend**; denn es ist nicht möglich, daß eine und dieselbe Gerade auf zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht stehen kann.

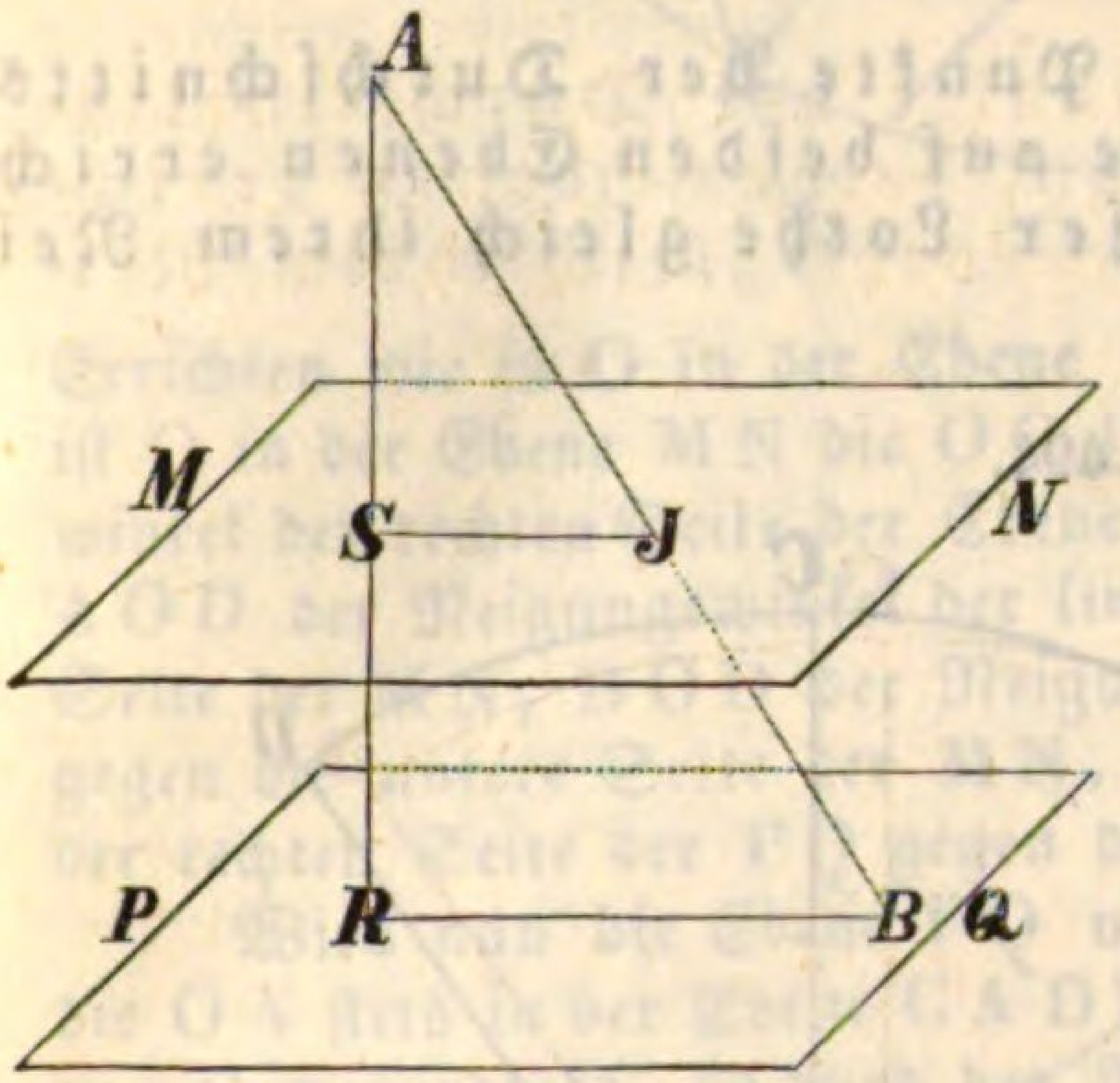
Es schneiden sich die Ebenen MN und PQ in der Geraden QN, so ist es unmöglich, daß eine und dieselbe Gerade AB (wo A in MN und B in PQ liegt) auf beiden senkrecht sey; denn wäre dieses der

Fall, so nehmen wir einen Punkt C der Durchschnittslinie, verbinden A mit C und B mit C, so liegt AC in der Ebene MN und BC in der Ebene PQ. Soll nun $AB \perp MN$, so muß $AB \perp AC$; und soll zugleich $AB \perp PQ$ seyn, so muß $AB \perp BC$, daher $BAC = 90^0$, und $ABC = 90^0$, was nicht seyn kann.

Das Senkrechtstehen zweier Ebenen auf einer und derselben Geraden ist daher auch ein Kennzeichen des Gleichlaufendseyns dieser Ebenen.

§. 384. **Eine und dieselbe Gerade ist gegen gleichlaufende Ebenen gleich stark geneigt.**

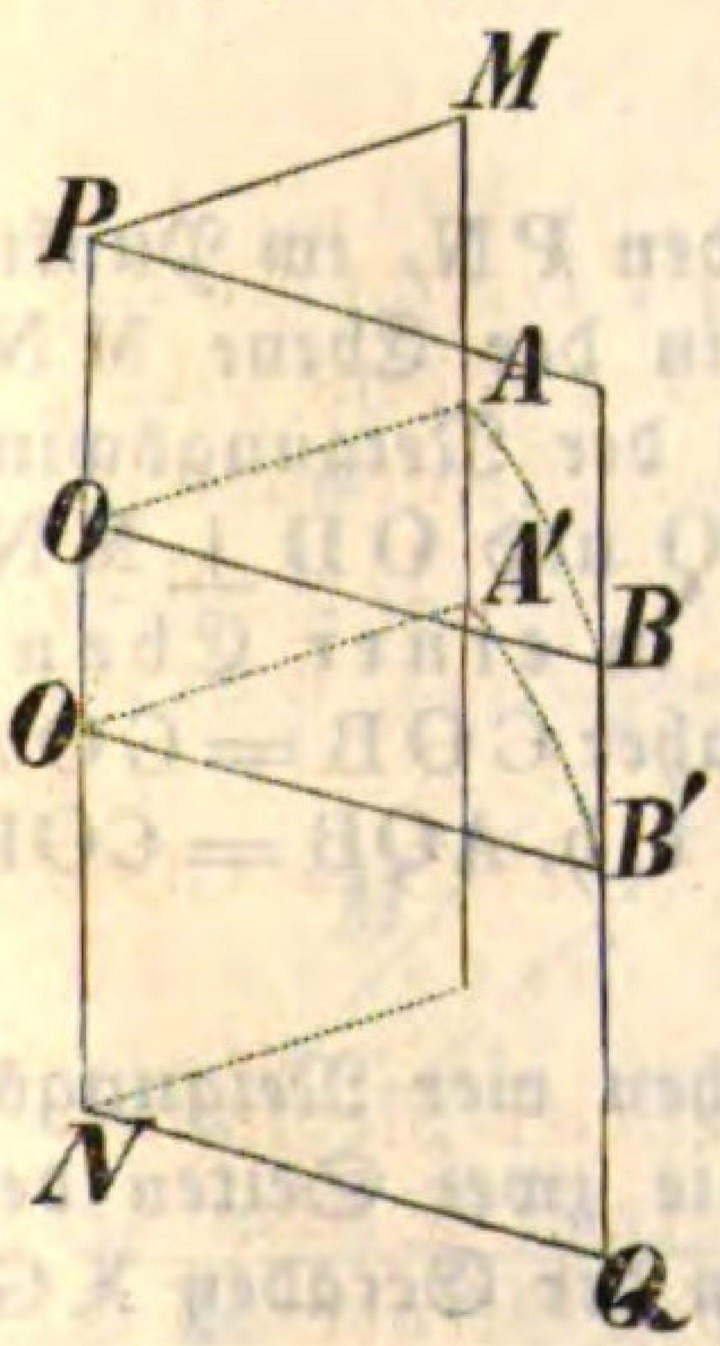
Fig 492.



Es durchstoße die Schiefe AB die MN in J und PQ in B, und $MN \parallel PQ$; ich fälle von A ein Loth $AR \perp PQ$, so wird auch $AR \perp MN$; es treffe die AR die MN in S. Lege ich nun durch B, A und R die Ebene BAR, so schneidet sie die MN in der JS, die PQ in der BR, und es wird $JS \parallel BR$. Da nun $AS \perp MN$ und $AR \perp PQ$, so sind JS und RB die Projektionen der AB auf den Ebenen MN und PQ, daher AJS und ABR die Neigungswinkel der Geraden AB gegen die Ebenen MN und PQ; diese Winkel müssen aber gleich seyn, da $JS \parallel BR$ ist.

§. 385. Denken wir uns die zwei Ebenen MN und PQ, die sich in der Geraden PN schneiden, nehmen wir den Punkt O der Durchschnittslinie, und errichten in O und in der Ebene MN das Loth $AO \perp PN$, und eben so in O und in der Ebene PQ das Loth $BO \perp PN$; denken wir uns zugleich $AO = BO$, drehen wir nun die Ebene PQ um die Gerade PN herum, so wird die Gerade OB während dieser ganzen Bewegung senkrecht auf PN und stets in der Ebene AOB bleiben, so daß der Winkel AOB stets die Lage beider Ebenen gegen einander bestimmen wird; denn alle Lothe, die in O auf PN errichtet werden, liegen stets alle in einer und derselben Ebene, die hier durch AOB dargestellt ist. Wie ich also auch immer die Ebene PQ drehe, so wird das in O in dieser Ebene auf PN errichtete Loth in der Ebene AOB liegen. Mit andern Worten, die

Fig. 493.



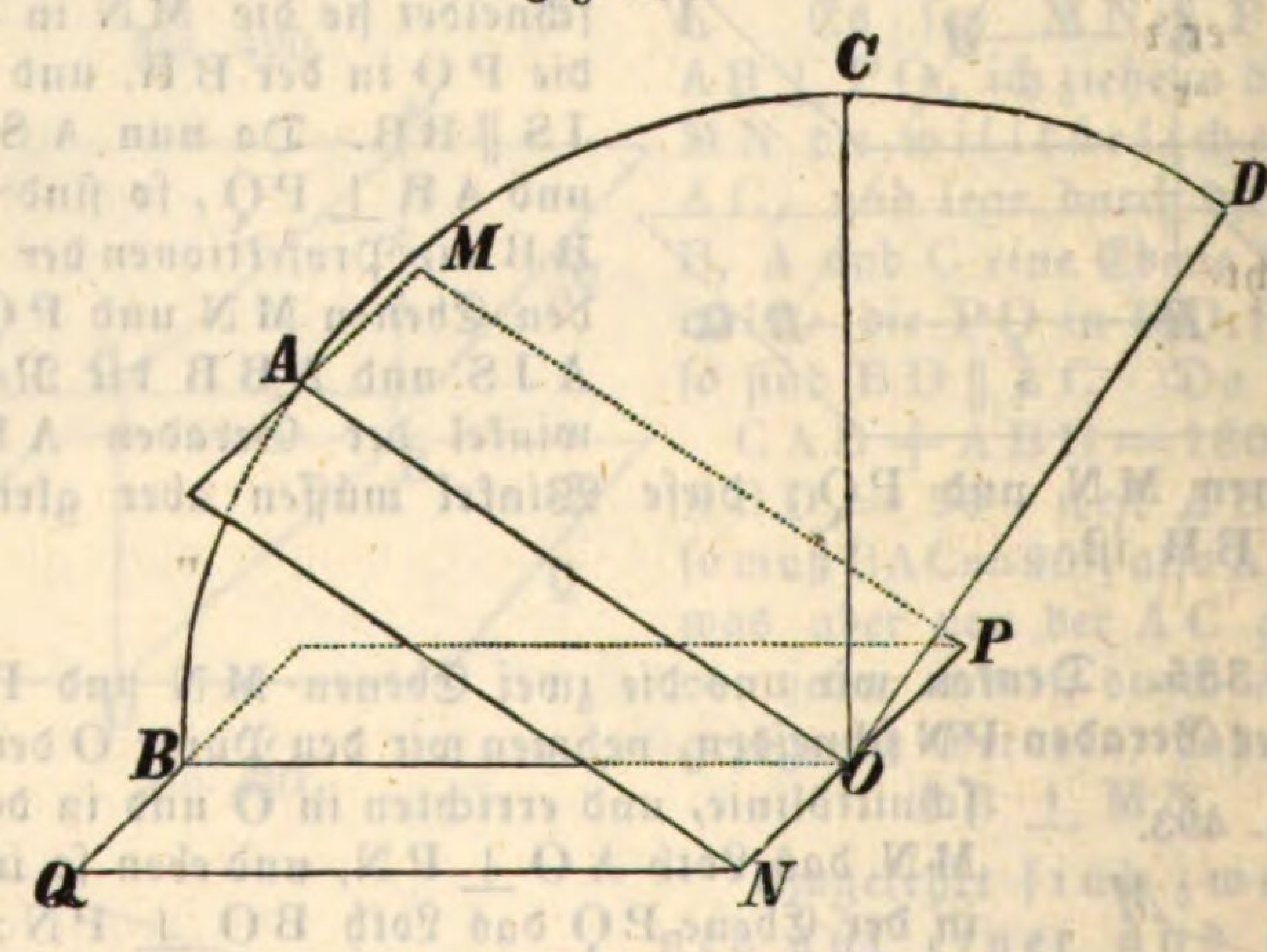
OB beschreibt bei der Drehung der Ebene PQ und PN die Ebene AOB. Wird der Winkel $AOB = 0$, oder gleich 180°, so fallen beide Ebenen zusammen.

Deßhalb nennt man den Winkel AOB den Neigungswinkel beider Ebenen MN und PQ. **Wenn man also in demselben Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen in beiden Ebenen Lothe auf die Durchschnittslinie errichtet, so heißt der Winkel dieser Lothe der Neigungswinkel beider Ebenen.**

Macht man statt im Punkte O im Punkte O′ dieselben Verzeichnungen, so erhält man $A'O'B' = AOB$, weil ihre Schenkel gleichlaufend sind.

Wenn man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen Lothe auf beiden Ebenen errichtet, so ist der Winkel dieser Lothe gleich ihrem Neigungswinkel.

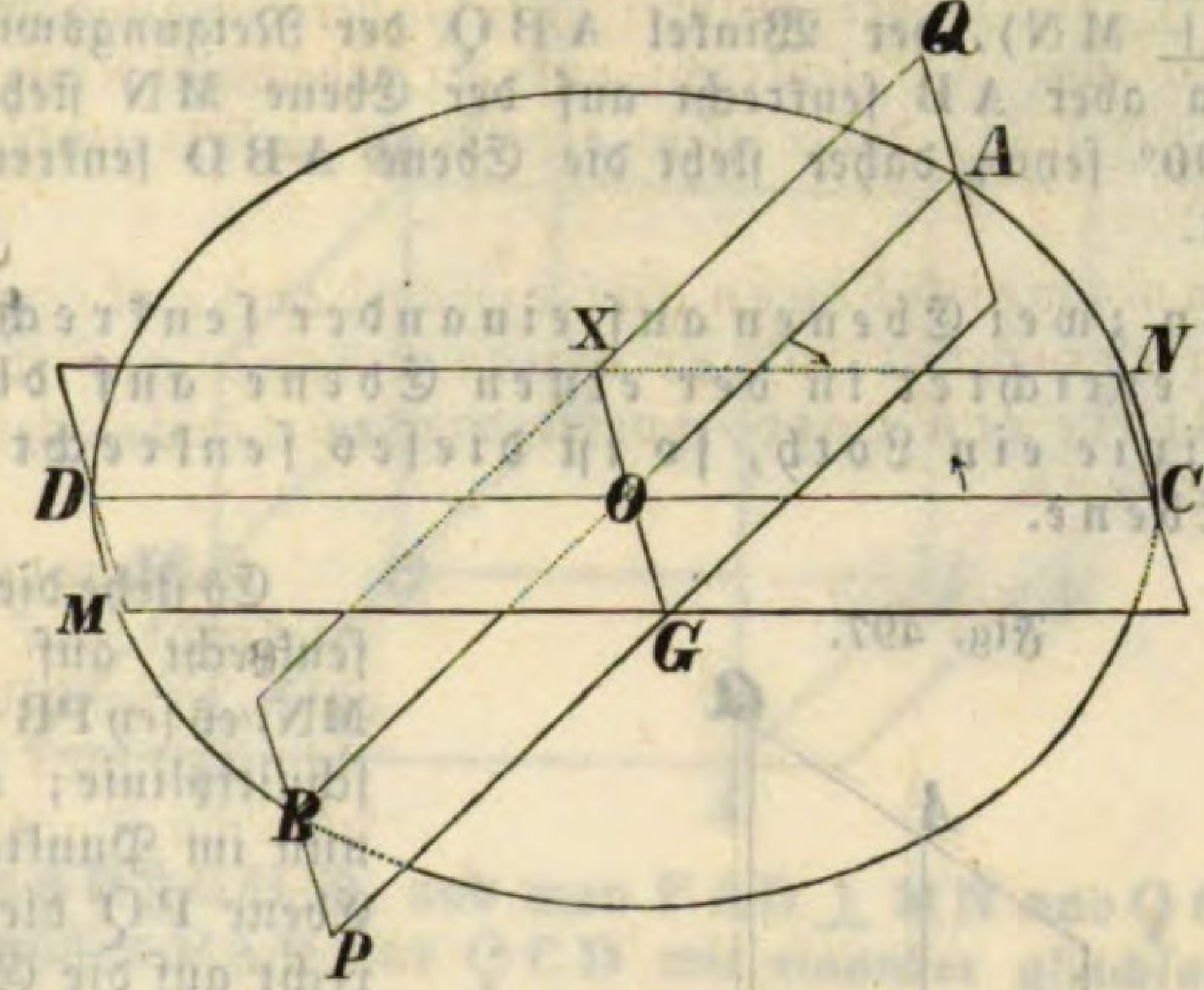
Fig. 494.



Es schneiden sich MN und PQ in der Geraden PN, im Punkte O der Geraden PN errichtet man $OA \perp PN$ in der Ebene MN, $OB \perp PN$ in der Ebene PQ, so daß also AOB der Neigungswinkel beider Ebenen ist; errichtet man nun $OC \perp PQ$ und $OD \perp MN$, so müssen die Geraden OC, OD, OA und OB in einer Ebene liegen. Da nun $COB = 90^{\circ}$; $DOA = 90^{\circ}$, daher $COB = COA$ ist, so hat man $COB - COA = DOA - COA$, d. h. $AOB = COD$ w. z. b. w.

Wenn zwei Ebenen sich schneiden, so entstehen vier Neigungswinkel der zwei Seiten der einen Ebene gegen die zwei Seiten der andern, die Ebenen PQ und MN schneiden sich in der Geraden XG.

Fig. 495.

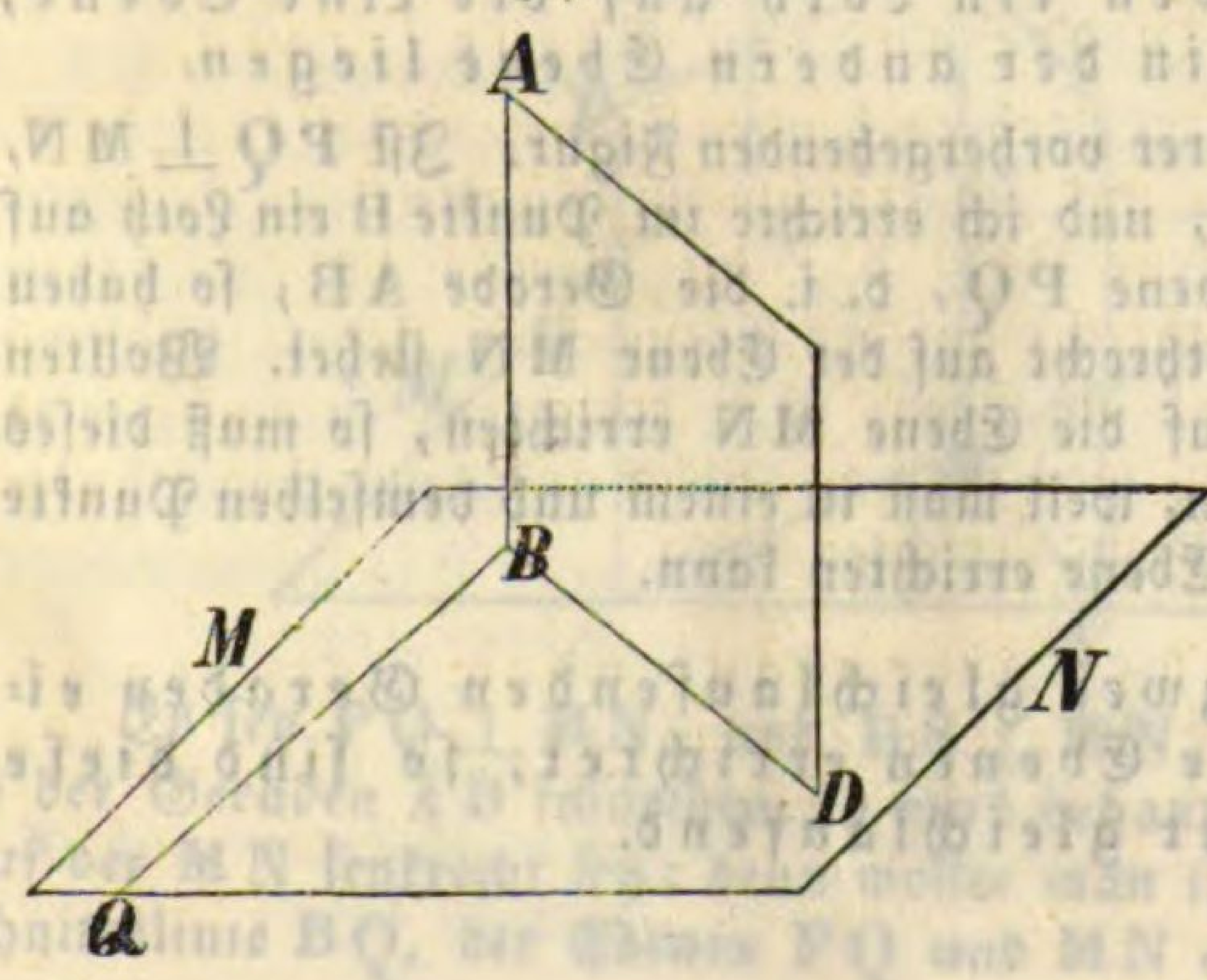


Errichten wir in O in der Ebene PQ die OA $\perp$ XG, und eben so ist O in der Ebene MN die OC $\perp$ XG, so ist AOC der Neigungswinkel der rechten Seite der Ebene PQ gegen die obere Seite der MN, AOD der Neigungswinkel der linken Seite der PQ gegen die obere Seite der MN, BOD der Neigungswinkel der linken Seite der PQ gegen die untere Seite der MN, endlich COB der Neigungswinkel der rechten Seite der PQ gegen die untere Seite der MN.

Wird nun die Ebene PQ um die XG herumgedreht, so bleibt die OA stets in der Ebene CADB, und wird die PQ stets um XG von C weggedreht, so wird der Neigungswinkel AOC stets größer, der Winkel AOD stets kleiner; sind AOC = AOD, d. h. ist der Neigungswinkel ein rechter, so sagt man, daß die zwei Ebenen senkrecht auf einander stehen.

§. 386. Wenn eine Gerade auf eine Ebene senkrecht steht, so ist jede durch dieses Loth gelegte Ebene auf der ersten Ebene senkrecht.

Fig. 496.

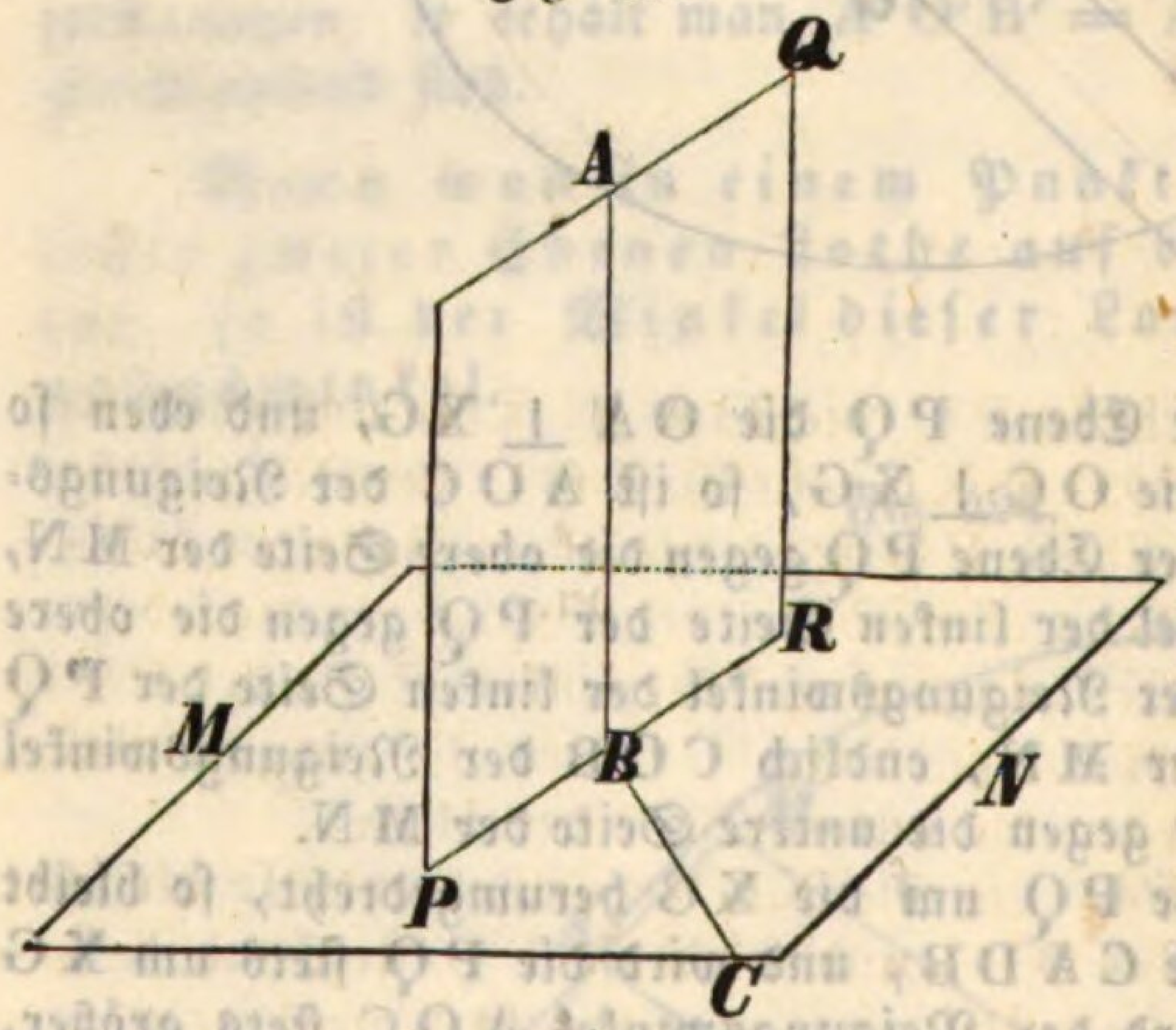


Es sey AB senkrecht auf die Ebene MN, ich ziehe durch den Fußpunkt B die willkürliche Gerade BD, und lege durch AB und D die Ebene ABD, welche natürlich die Ebene MN in der BD durchschneidet. Errichte ich nun im Punkte B in der Ebene

MN, BQ ⊥ DB, so ist, weil AB ⊥ BD (da ja der Voraussetzung nach AB ⊥ MN), der Winkel ABQ der Neigungswinkel beider Ebenen: da aber AB senkrecht auf der Ebene MN steht, so muß ABQ = 90° seyn, daher steht die Ebene ABD senkrecht auf der Ebene MN.

Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehen, und man errichtet in der einen Ebene auf die Durchschnittslinie ein Loth, so ist dieses senkrecht auf die andere Ebene.

Fig. 497.



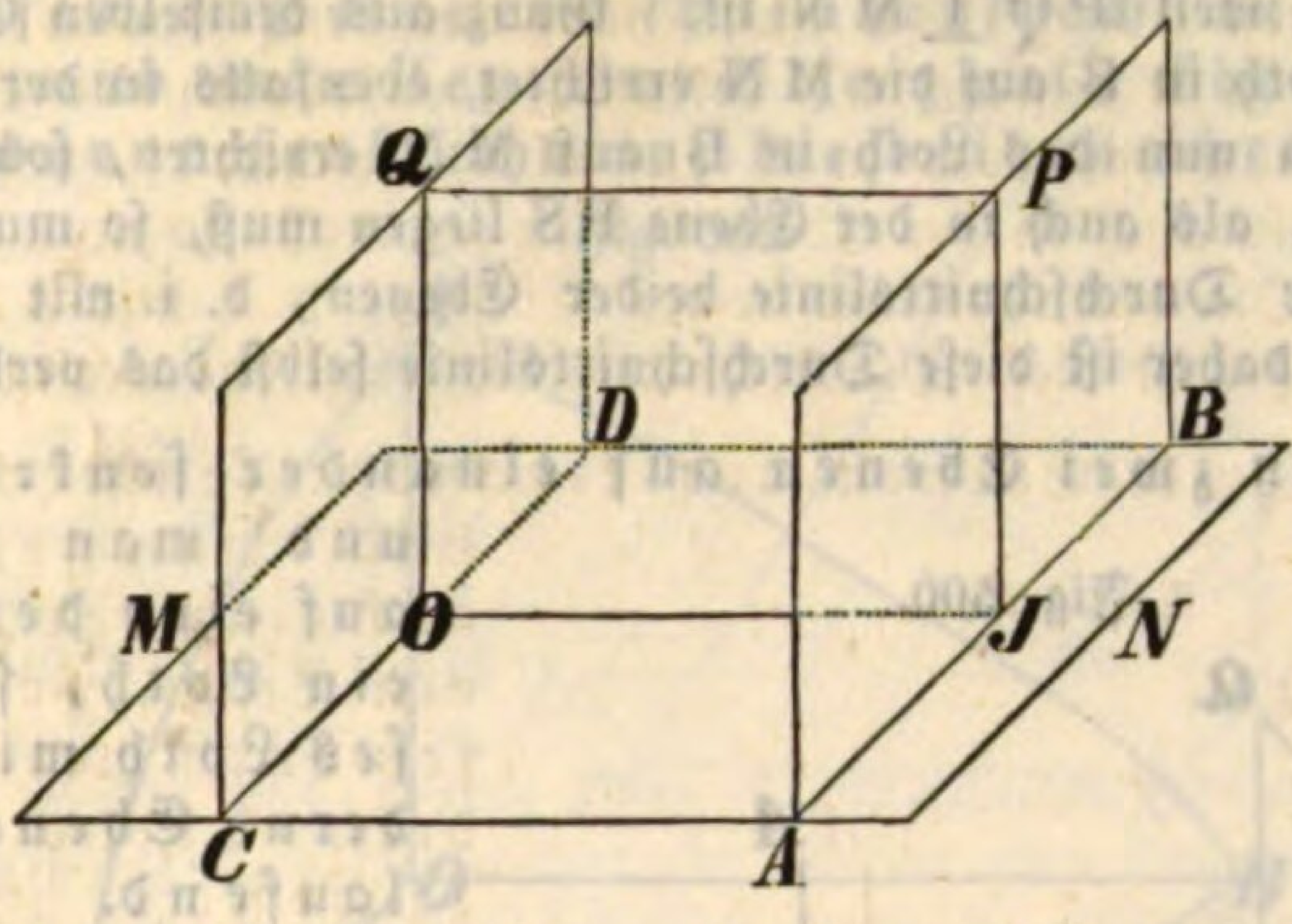
Es stehe die Ebene PQ senkrecht auf der Ebene MN, es sey PR ihre Durchschnittslinie; errichte ich nun im Punkte B, in der Ebene PQ die AB senkrecht auf die Gerade PR, so behaupte ich, daß die AB auf die Ebene MN senkrecht stehen wird; denn ziehen wir BC ⊥ PR in der Ebene MN, so ist ABC der Neigungswinkel beider Ebenen, und da diese nach der Voraussetzung senkrecht auf einander seyn sollen, so ist ABC = 90° oder AB ⊥ BC; da aber auch AB ⊥ PR, so ist natürlich AB senkrecht auf die Ebene MN, weil sie auf zwei durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden senkrecht steht.

Umgekehrt, sind zwei Ebenen auf einander senkrecht, und man errichtet in einem Punkte der Durchschnittslinie derselben ein Loth auf die eine Ebene, so muß dieses Loth in der andern Ebene liegen.

Bleiben wir bei unserer vorhergehenden Figur. Ist PQ ⊥ MN, PR die Durchschnittslinie, und ich errichte im Punkte B ein Loth auf die Gerade PR in der Ebene PQ, d. i. die Gerade AB, so haben wir bewiesen, daß diese lothrecht auf der Ebene MN stehet. Wollten wir daher in B ein Loth auf die Ebene MN errichten, so muß dieses mit der AB zusammenfallen, weil man in einem und demselben Punkte nicht zwei Lothe auf eine Ebene errichten kann.

Wenn man in zwei gleichlaufenden Geraden einer Ebene senkrechte Ebenen errichtet, so sind diese Ebenen mit einander gleichlaufend.

Fig. 498.

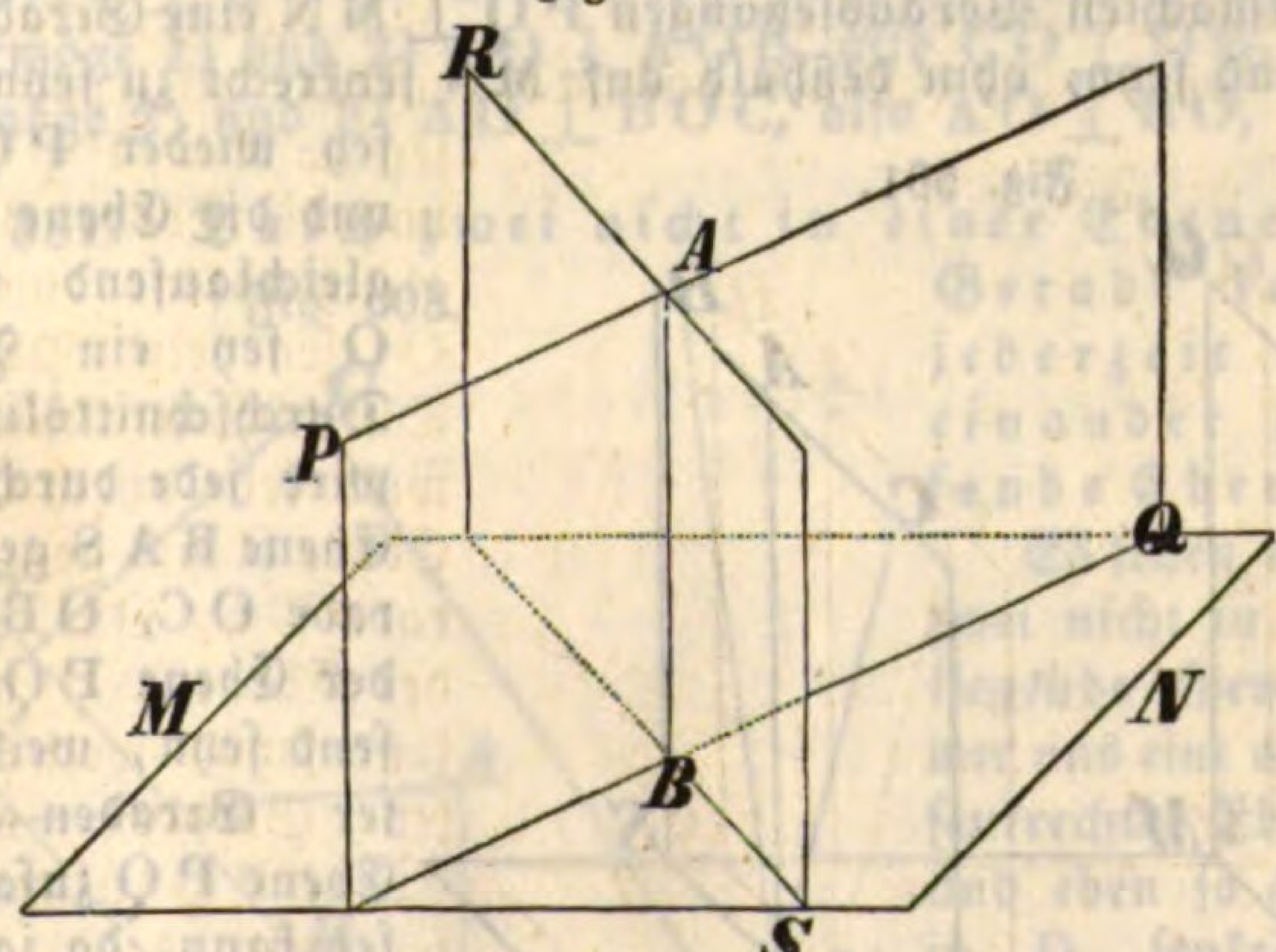


Wenn $AB \parallel CD$ ist, und man $PAB \perp MN$ und $QCD \perp MN$ macht, so müssen PAB und QCD mit einander gleichlaufend seyn. Denn errichtet man im Punkte J der AB auf die AB und dadurch natürlich auf die Ebene MN das Loth JP, errichtet eben so $OQ \perp MN$, so sind $JP \parallel OQ$, daher da $OC \parallel AJ$ und $OQ \parallel JP$, so müssen QCD und PAB mit einander gleichlaufend seyn.

Begreiflich darf dieser Satz nicht umgekehrt werden, denn zwei Ebenen können auf einer dritten senkrecht stehen, ohne daß ihre Durchschnittslinien gleichlaufend sind.

Wenn zwei Ebenen auf eine dritte Ebene senkrecht sind, so ist auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie auf dieser dritten Ebene senkrecht.

Fig. 499.

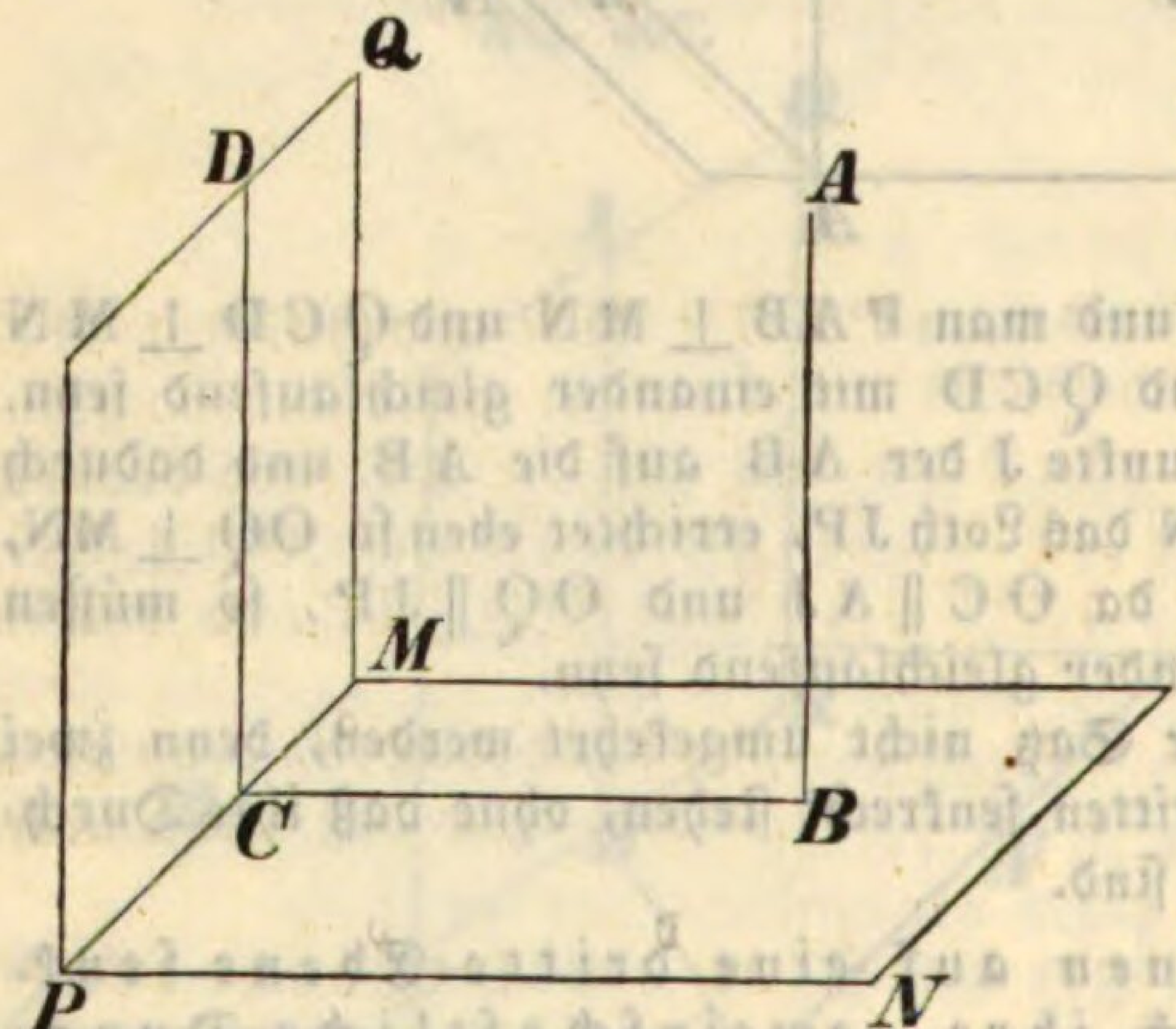


Es sey $PQ \perp MN$, und $RS \perp MN$, PQ und RS sollen sich in der Geraden AB schneiden, so wird behauptet, daß die Gerade AB auf der MN senkrecht sey; denn wollte man im Punkte B, der Durchschnittslinie BQ, der Ebenen PQ und MN ein Loth auf MN errich-

ten, so müßte nach dem Satze Seite 520 das Loth in der Ebene PQ liegen, weil PQ ⊥ MN ist. Ganz aus demselben Grunde aber muß das Loth in B auf die MN errichtet, ebenfalls in der Ebene RS liegen. Da nun das Loth in B auf MN errichtet, sowohl in der Ebene PQ, als auch in der Ebene RS liegen muß, so muß es natürlich mit der Durchschnittslinie beider Ebenen, d. i. mit AB zusammenfallen, daher ist diese Durchschnittslinie selbst das verlangte Loth.

Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, und man errichtet auf eine der Ebenen ein Loth, so ist dieses Loth mit der andern Ebene gleichlaufend.

Fig. 500.



Es sey die Ebene PQ ⊥ MN, und AB ⊥ MN, so behaupten wir, daß AB ∥ PQ seyn wird; denn errichten wir in C der Durchschnittslinie PM die CD ⊥ PM, so ist

CD ⊥ MN.

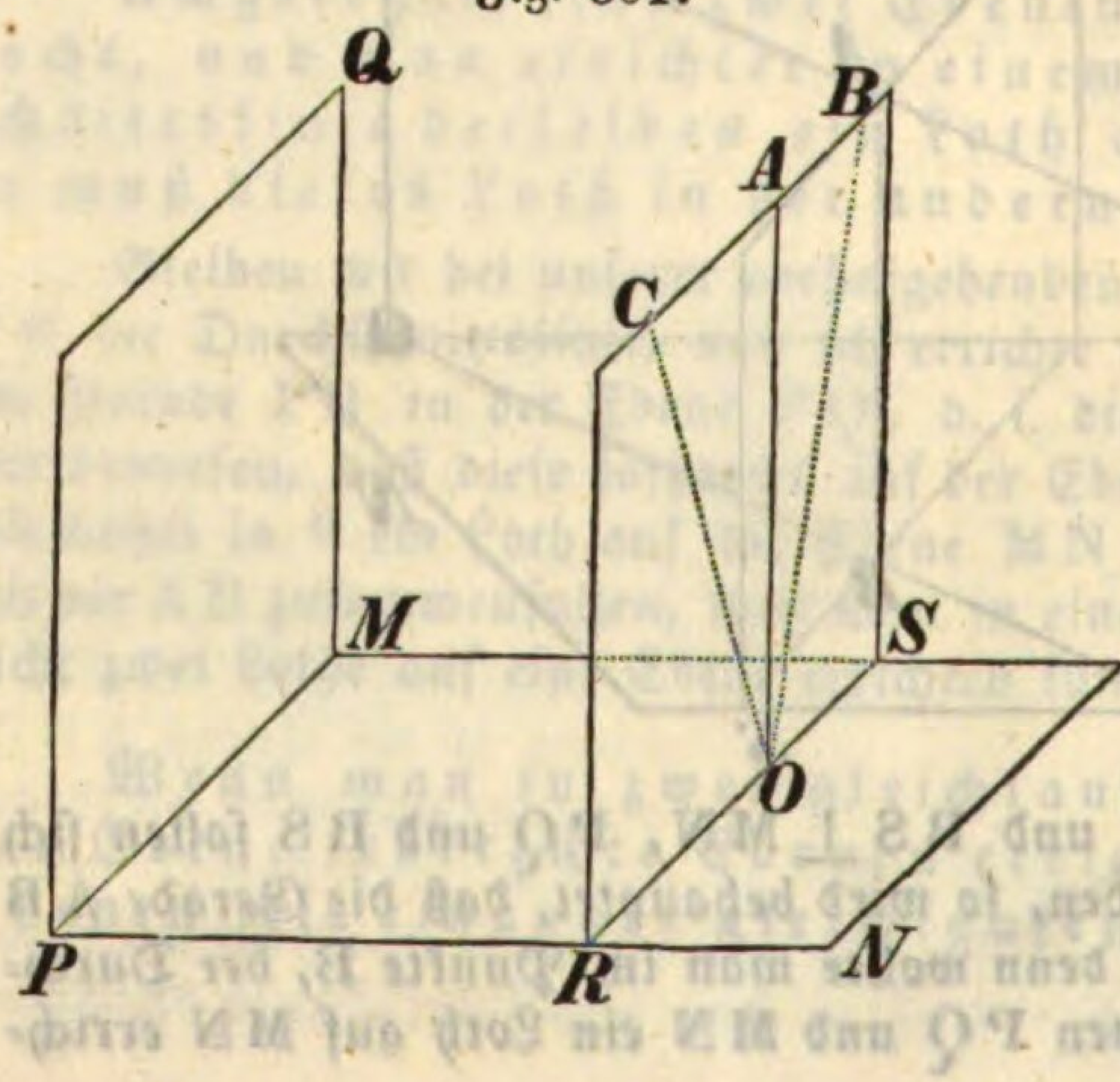
Da nun AB ⊥ MN, so hat man AB ∥ CD; ist AB ∥ CD, so muß auch AB ∥ PQ.

Umkehren aber darf man den Satz nicht, denn es kann unter den hier gemachten Voraussetzungen PQ ⊥ MN eine Gerade mit PQ gleichlaufend seyn, ohne deßhalb auf MN senkrecht zu seyn; denn es sey wieder PQ ⊥ MN, und die Ebene RAS sey gleichlaufend mit PQ, O sey ein Punkt der Durchschnittslinie RS, so wird jede durch O in der Ebene RAS gezogene Gerade OC, OB, OA mit der Ebene PQ gleichlaufend seyn, weil keine dieser Geraden mit der Ebene PQ zusammentreffen kann, da ja

PQ ∥ RAS,

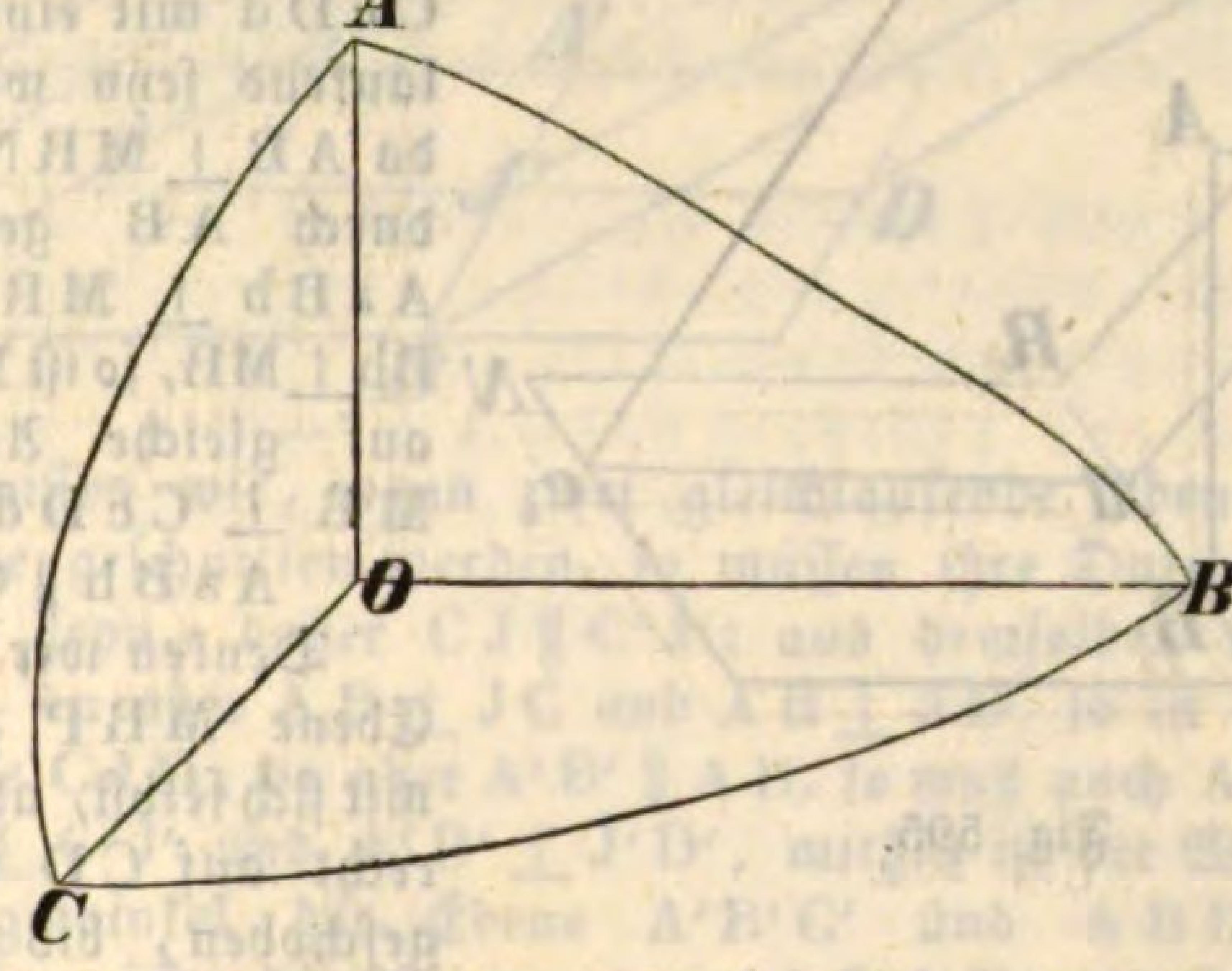
und doch kann nur eine dieser Geraden auf MN senkrecht seyn.

Fig. 501.



Wenn drei Gerade in einem Punkte so zusammentreffen, daß eine von ihnen senkrecht auf den übrigen ist, und man legt durch je zwei, Ebenen, so ist je eine davon senkrecht auf die beiden übrigen.

Fig. 502.



Ist 1) AO ⊥ BO; 2) AO ⊥ OC, und 3) BO ⊥ CO, so hat man wegen 1) und 2) AO ⊥ BOC, wegen 1) und 3) BO ⊥ AOC, und wegen 2) und 3) CO ⊥ AOB.

Umgekehrt, treffen drei Ebenen in einem Punkte so zusammen, daß je eine auf den beiden übrigen senkrecht steht, so wird von ihren Durchschnittslinien je eine auf den beiden übrigen senkrecht stehen.

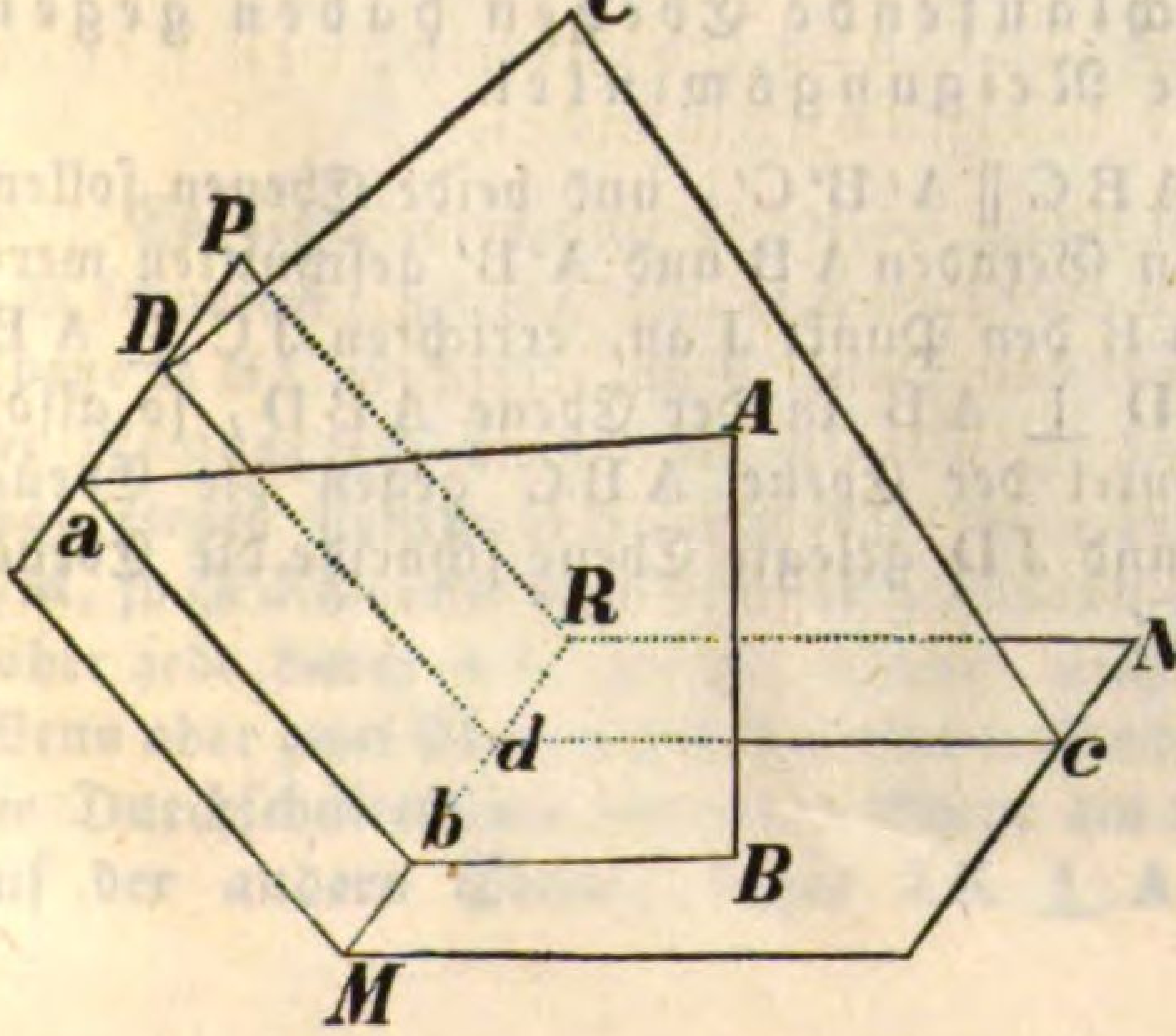
Behalten wir die vorhergehende Figur bei, und es sey

1) AOB ⊥ AOC; 2) AOB ⊥ BOC; 3) AOC ⊥ BOC,

so ist vermöge 1) und 2) CO ⊥ AOB, also CO ⊥ OB, CO ⊥ AO, und vermöge 2) und 3) AO ⊥ BOC, also AO ⊥ BO, AO ⊥ CO.

§. 387. **Durch zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade lassen sich jederzeit zwei zu einander gleichlaufende Ebenen legen.**

Fig. 503.



Es seyen AB und CD zwei nicht in einer Ebene liegende Gerade, denken wir uns eine auf AB in B senkrechte Ebene MRN, und eben so eine auf CD in D senkrechte Ebene RPM, welche Ebenen sich in MR schneiden. Von den Fußpunkten B und D fällen wir die Lothe Bb und Dd auf MR; die

Fig 504.

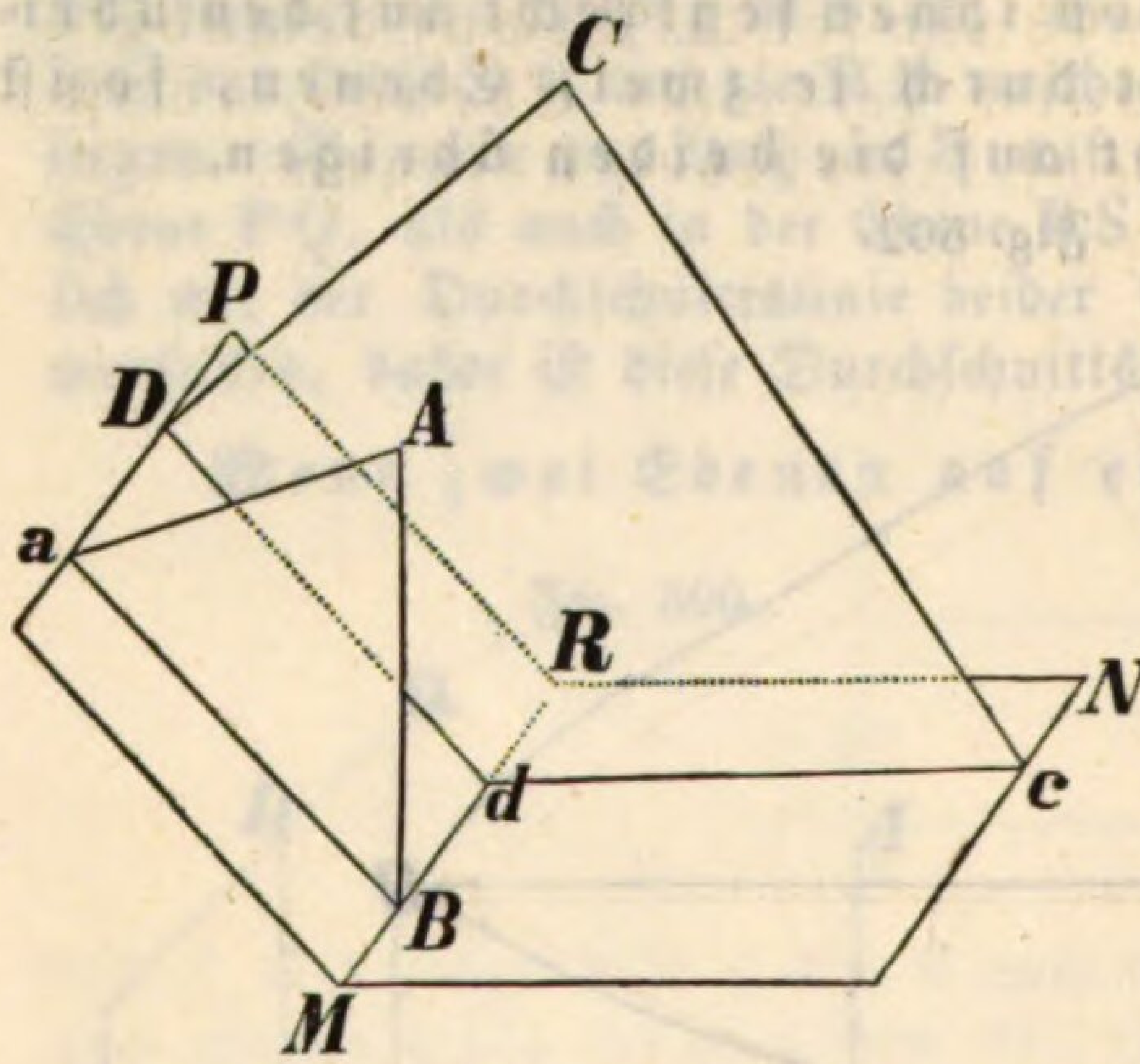
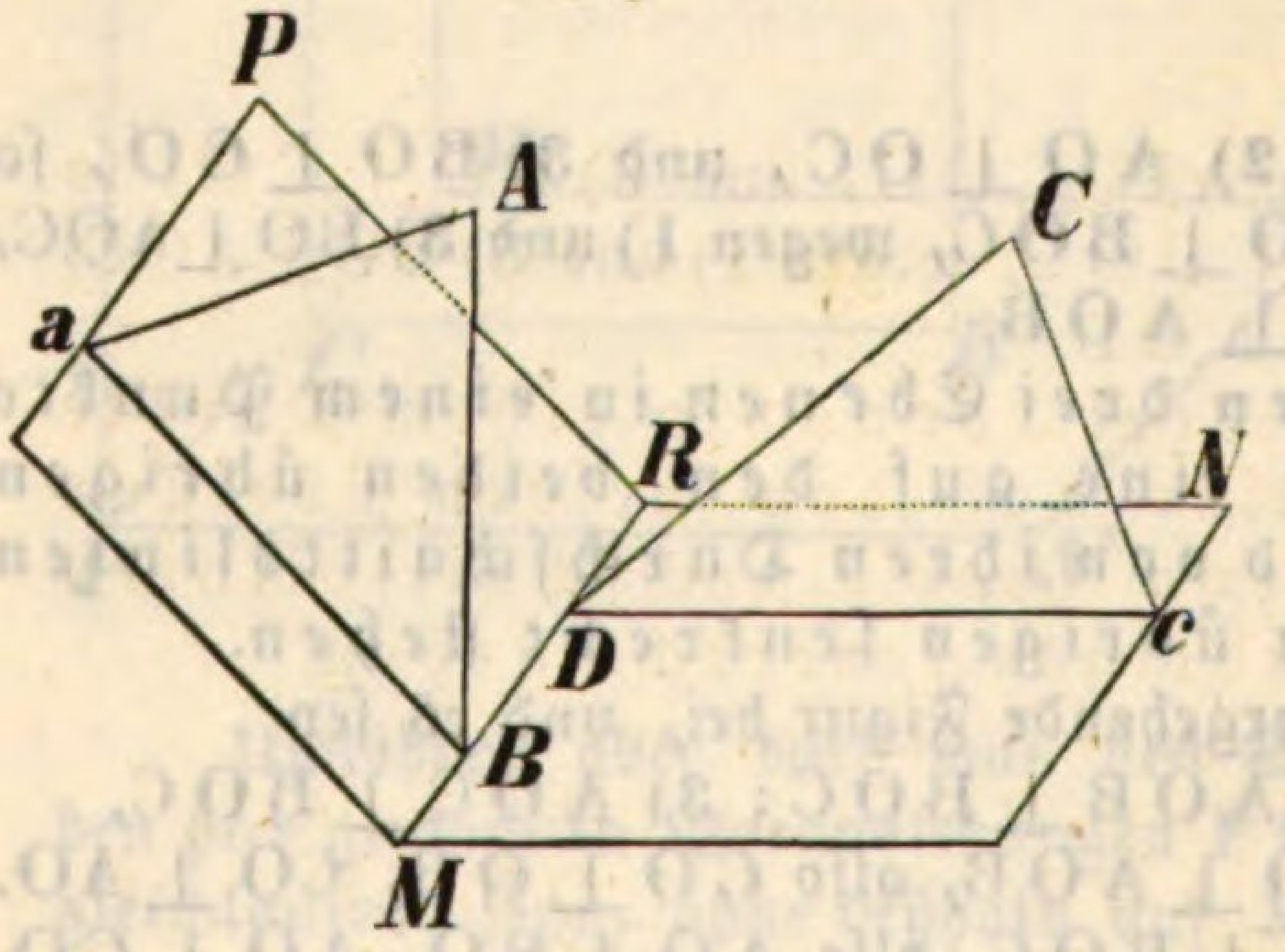


Fig 505.



Ebene ABb schneide die Ebene RPM in der ab, die Ebene CDc die Ebene MRN in der cd, so behaupten wir, daß die Ebenen AaBb und CcDd mit einander gleichlaufend seyn werden; denn da AB ⊥ MRN, so ist die durch AB gelegte Ebene AaBb ⊥ MRN, und da Bb ⊥ MR, so ist MR ⊥ AaBb; auf gleiche Art ist auch MR ⊥ CcDd, daher

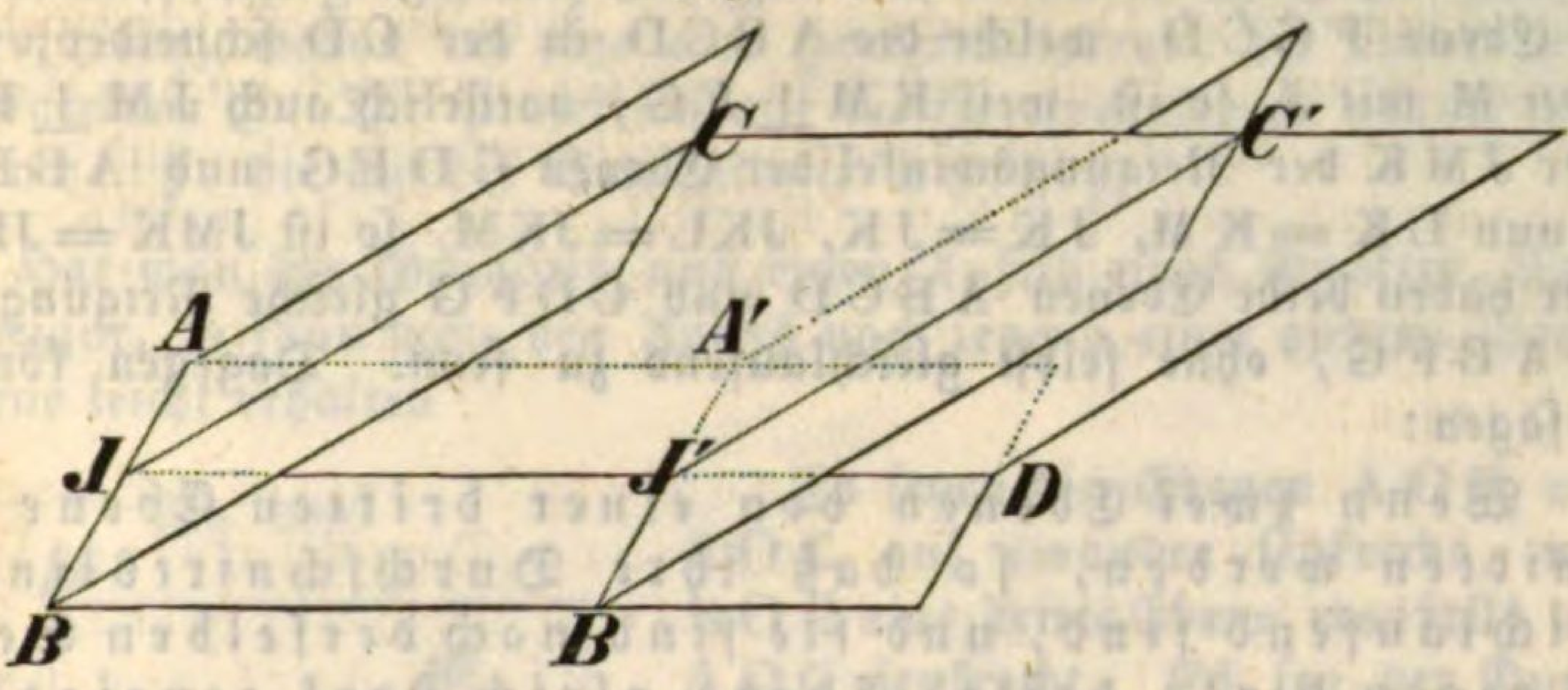
AaBb ∥ CcDd.

Denken wir uns nun die Ebene MRP gleichlaufend mit sich selbst, also stets senkrecht auf CD so vorwärts geschoben, bis die Durchschnittslinie MR in B ankommt, wobei die Ebene AaBb stets dieselbe bleibt, so haben wir Fig. 504. Denken wir uns nun die Ebene MRN gleichlaufend mit sich selbst, also stets auf AB senkrecht so hinaufgeschoben, bis die MR den Punkt D erreicht, so hat man Fig. 505, wodurch die Aufgabe gelöst ist, **eine Gerade zu ziehen, die auf zwei gegebenen Geraden zugleich senkrecht steht.**

§. 388. **Zwei gleichlaufende Ebenen haben gegen dieselbe Ebene gleiche Neigungswinkel.**

Es seyen die Ebenen ABC ∥ A′B′C′, und beide Ebenen sollen durch die Ebene ABD in den Geraden AB und A′B′ geschnitten werden. Nehmen wir in der AB den Punkt J an, errichten JC ⊥ AB in der Ebene ABC, und JD ⊥ AB in der Ebene ABD, so also, daß CJD der Neigungswinkel der Ebene ABC gegen die Ebene ABD ist. Die durch CJ und JD gelegte Ebene schneide die Ebene A′B′C′ in der Geraden J′C′.

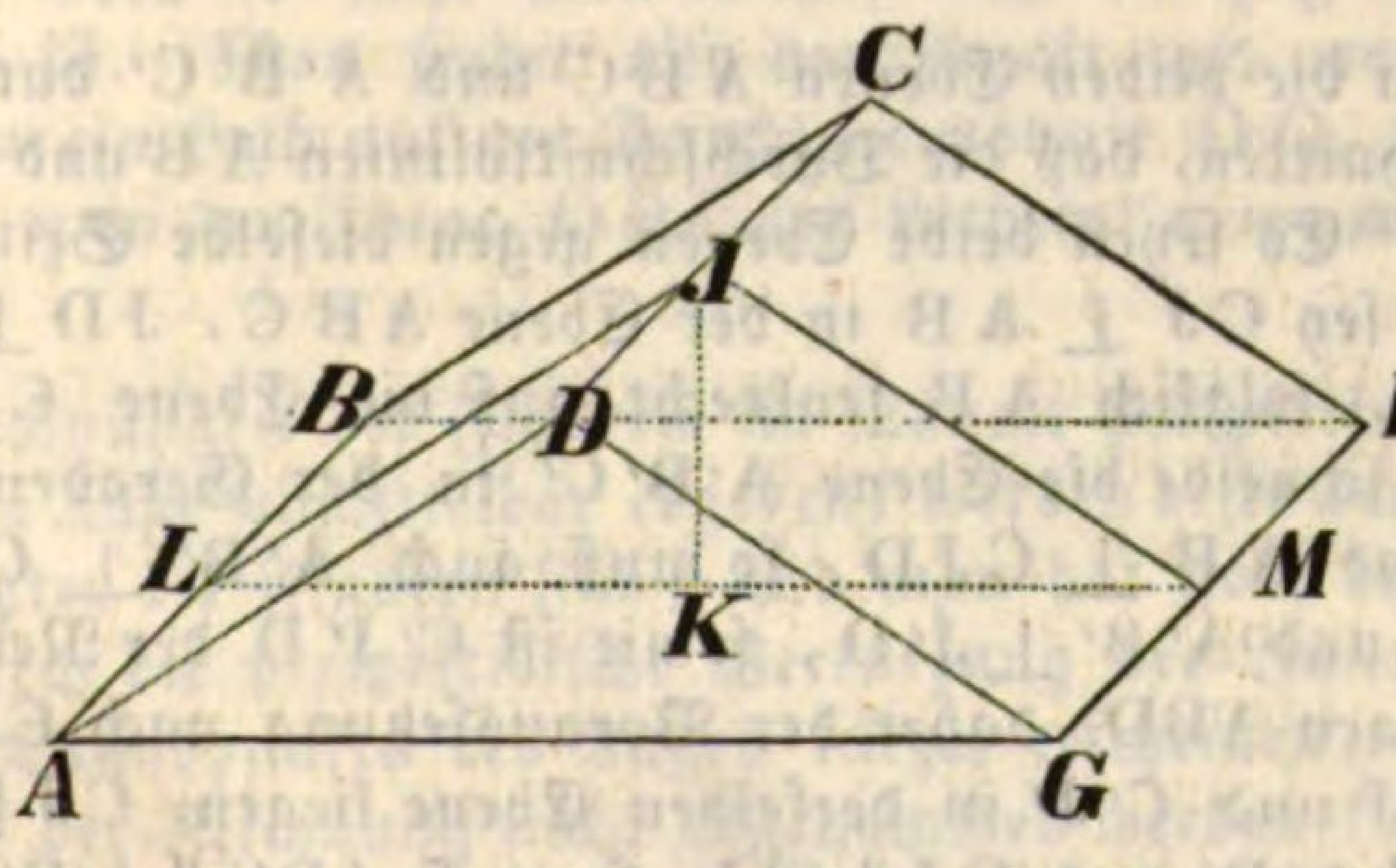
Fig. 506.



Nun wissen wir, wenn zwei gleichlaufende Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so müssen ihre Durchschnittslinien gleichlaufend seyn, daher C J ∥ C' J'; aus demselben Grunde muß A B ∥ A' B', da aber A B ⊥ J C und A B ⊥ J D, so ist A B senkrecht auf der Ebene C J D; da aber A' B' ∥ A B, so muß auch A' B' ⊥ C J D, daher A' B' ⊥ C' J' und A' B' ⊥ J' D', mithin ist der Winkel C' J' D' der Neigungswinkel der Ebene A' B' C' und A B D. Da aber C J ∥ C' J', so müssen die Neigungswinkel C' J' D' und C J D einander gleich seyn.

Es ist aber nicht erlaubt, diesen Satz rein umzukehren; denn es können zwei Ebenen dieselbe Neigung gegen eine dritte Ebene haben, ohne gleichlaufend zu seyn.

Fig. 507.

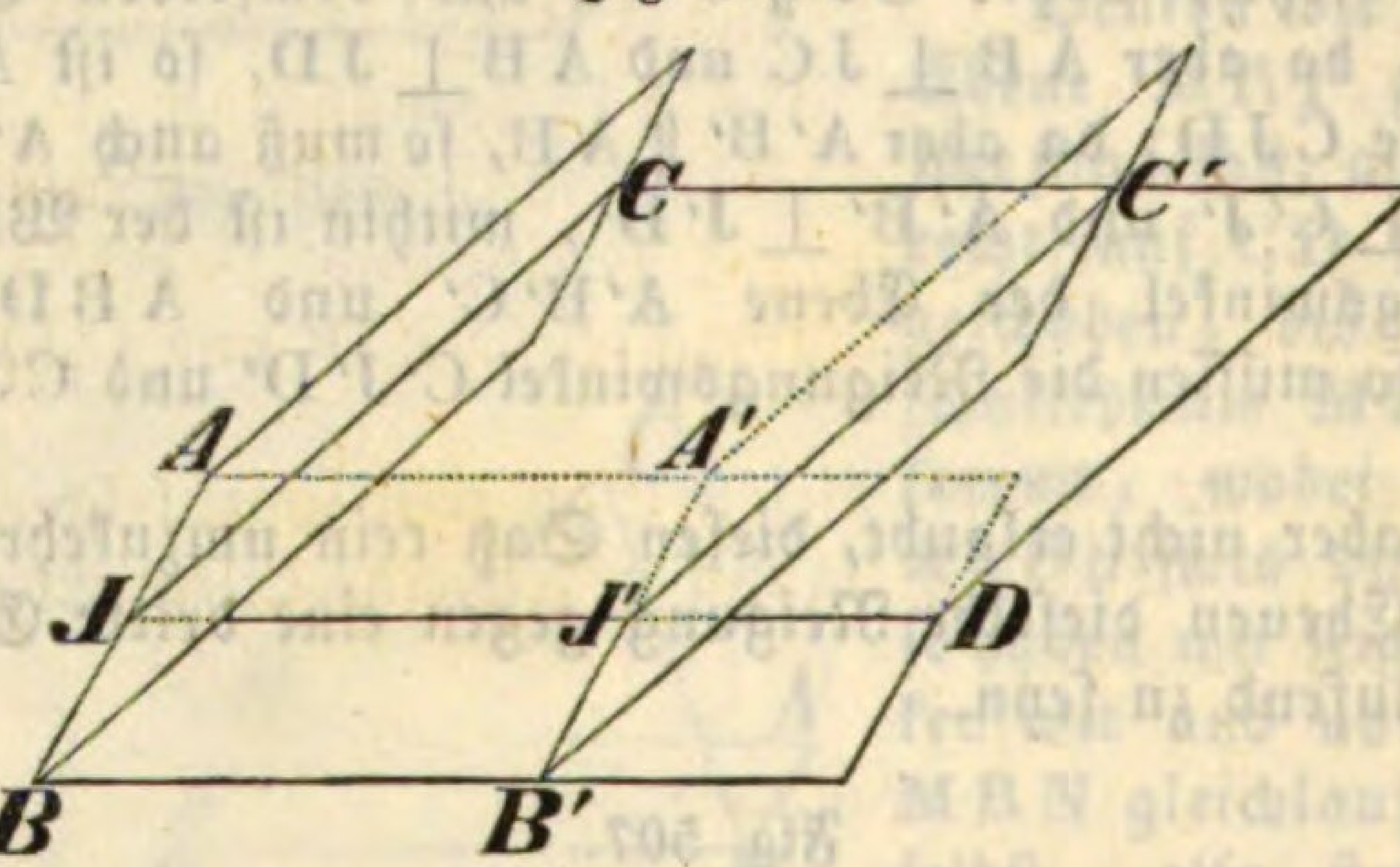


Es sey die Ebene A B C D, welche die Ebene A B F G in der A B schneidet; im Punkte L der A B errichtet man L J ⊥ A B in der Ebene A B C D, und L M ⊥ A B in der Ebene A B F G, so daß J L M der Neigungswinkel der Ebene A B C D gegen die Ebene A B F G ist. Von einem Punkte J der L J fällt man das Loth J K auf die Gerade L M, so ist J K auch senkrecht auf der Ebene A B F G, weil A L ⊥ L J M, daher jede durch A L gelegte Ebene, mithin auch A B F G ⊥ L J M. Wenn aber zwei Ebenen auf einander senkrecht sind, und man errichtet auf die Durchschnittslinie der einen Ebene ein Loth, so ist dieses senkrecht auf der andern Ebene, daher J K ⊥ A B F G. Macht man nun

KM = LK, zieht durch M die FG ∥ AB, und legt durch F, G und J eine Ebene FGCD, welche die ABCD in der CD schneidet; verbindet M mit J, so ist, weil KM ⊥ FG, natürlich auch JM ⊥ FG, daher JMK der Neigungswinkel der Ebenen CDFG und ABFG. Da nun LK = KM, JK = JK, JKL = JKM, so ist JMK = JLK, daher haben beide Ebenen ABCD und CDFG gleiche Neigung gegen ABFG, ohne selbst gleichlaufend zu seyn. Dagegen können wir sagen:

Wenn zwei Ebenen von einer dritten Ebene geschnitten werden, so daß ihre Durchschnittslinien gleichlaufend sind, und sie sind nach derselben Seite hin gegen diese dritte Ebene gleich stark geneigt, so sind diese Ebenen mit einander gleichlaufend.

Fig 508.



Es seyen die beiden Ebenen ABC und A′B′C′ durch die Ebene ABD so geschnitten, daß die Durchschnittslinien AB und A′B′ gleichlaufend seyen. Es seyen beide Ebenen gegen dieselbe Seite gleich stark geneigt. Es sey CJ ⊥ AB in der Ebene ABC, JD ⊥ AB in der Ebene ABD, folglich AB senkrecht auf die Ebene CJD. Diese Ebene CJD schneide die Ebene A′B′C′ in der Geraden J′C′; weil AB ∥ A′B und AB ⊥ CJD, so muß auch A′B′ ⊥ CJD, daher A′B′ ⊥ C′J′ und A′B′ ⊥ J′D, somit ist C′J′D der Neigungswinkel der A′B′C′ gegen ABD, daher der Voraussetzung nach CJD = C′J′D′, mithin, da CJ und C′J′ in derselben Ebene liegen, CJ ∥ C′J′. Da Da nun AB ∥ A′B′ und CJ ∥ C′J′, so muß ABC ∥ A′B′C′ w. z. b. w.

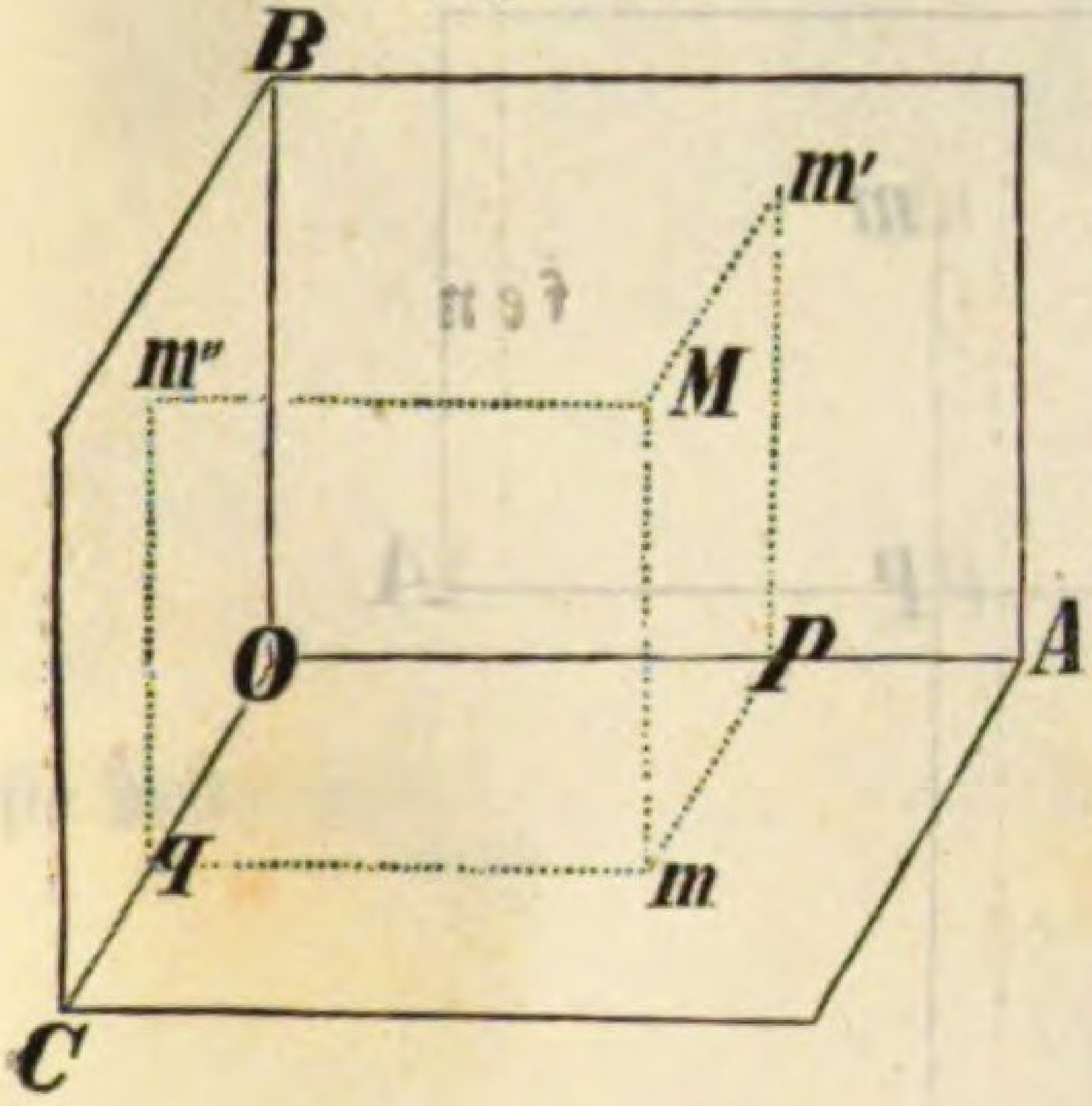
III. Projektionen.

§. 389. Wenn man von einem Punkte im Raume ein Loth auf eine Ebene fällt, so heißt der Fußpunkt die **Projektion des Punktes auf diese Ebene**. Eben so, wenn man von jedem Punkte einer geraden oder krummen Linie im Raume Lothe auf eine Ebene fällt, so bildet die Aufeinanderfolge der Fußpunkte dieser Lothe die **Projektion der Linie auf diese Ebene**.

Man pflegt gewöhnlich auf zwei auf einander senkrechte Ebenen zu projiciren, wovon die eine eine Horizontalebene, die andere eine Vertikalebene ist. Die Projektion auf die Horizontalebene nennet man Grundriß, die auf die Vertikallinie Aufriß.

Hat man den Grundriß und einen Aufriß eines Punktes, Linie oder Figur, so kann man den Aufriß nach irgend einer andern Vertikalebene leicht erhalten

Fig. 509.

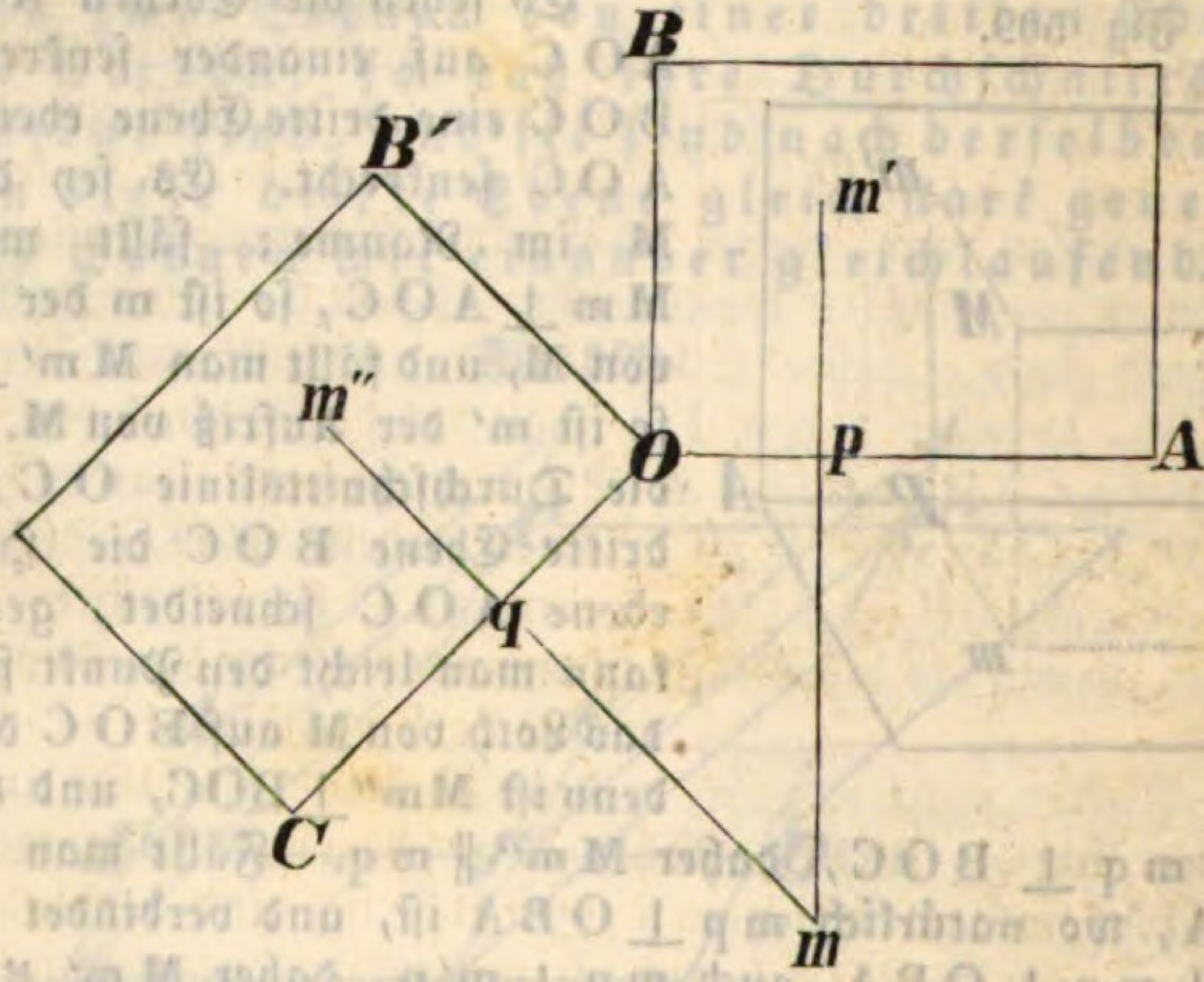


Es seyen die Ebenen AOB und AOC auf einander senkrecht, und BOC eine dritte Ebene ebenfalls auf AOC senkrecht. Es sey der Punkt M im Raume; fällt man nun $Mm \perp AOC$, so ist m der Grundriß von M, und fällt man $Mm' \perp AOB$, so ist m′ der Aufriß von M. Ist nun die Durchschnittslinie OC, wo die dritte Ebene BOC die Horizontalebene AOC schneidet, gegeben, so kann man leicht den Punkt finden, wo das Loth von M auf BOC diese trifft; denn ist $Mm'' \perp BOC$, und $mq \perp OC$, also auch $mq \perp BOC$, daher $Mm'' \parallel mq$. Fällt man nun noch $mp \perp OA$, wo natürlich $mp \perp OBA$ ist, und verbindet m′ mit p, so ist, weil $mp \perp OBA$, auch $mp \perp m'p$, daher $Mm' \#\, mp$ und $Mm \#\, m'p$; eben so sieht man leicht, daß $m''q \#\, Mm$, daher $m''q = m'p$ ist. Man findet also den Punkt m″, wenn man von dem Punkte m ein Loth auf die Durchschnittslinie OC, nämlich mq zieht, und in q in der Ebene OBC ein Loth $m''q = m'p$ auf OC errichtet.

Die Zeichnungen der Figuren im Raume perspektivisch (d. i. so wie sie sich dem Auge unmittelbar ergeben) werden desto verwickelter, je zusammengesetzter die Figuren sind, und man hat noch den Nachtheil dabei, daß durch die perspektivische Verkürzung der Linien (d. h. daß sie nach dem Standpunkte des Auges kürzer erscheinen, als sie sind) die Maße aus der Zeichnung nicht abgenommen werden können. Man ersetzt daher die perspektivische Zeichnung mit Vortheil durch zwei Zeichnungen, wovon die eine den Grundriß, die andere den Aufriß der Figur enthält, und wobei wenigstens die mit den Projektionsebenen gleichlaufenden Längen unverkürzt bleiben, und die andern durch Zeichnung oder Rechnung bestimmt werden können. Zu diesem Behufe denkt man sich die vertikale Ebene sammt der darauf befindlichen Projektion so weit zur Durchschnittslinie mit der Horizontalen gedreht, bis sie in einer Ebene liegen. Denken wir uns in unserer vorhergehenden Figur die Ebene BOA so um OA gedreht, bis beide Ebenen

in einer Ebene liegen, so begreift sich's leicht, daß m'p mit m p in eine Gerade kommt; denn m p m' ist der Neigungswinkel beider Ebenen, welcher in dem Falle, als die B O A um die O A noch um einen rechten Winkel gedreht wird, dann 180° wird. Drehen wir eben so die Ebene B O C um O C, bis B O C mit A O C in eine Ebene kommt, so muß m''q mit m q in eine Gerade kommen, und man hat folgende Figur.

Fig. 510.



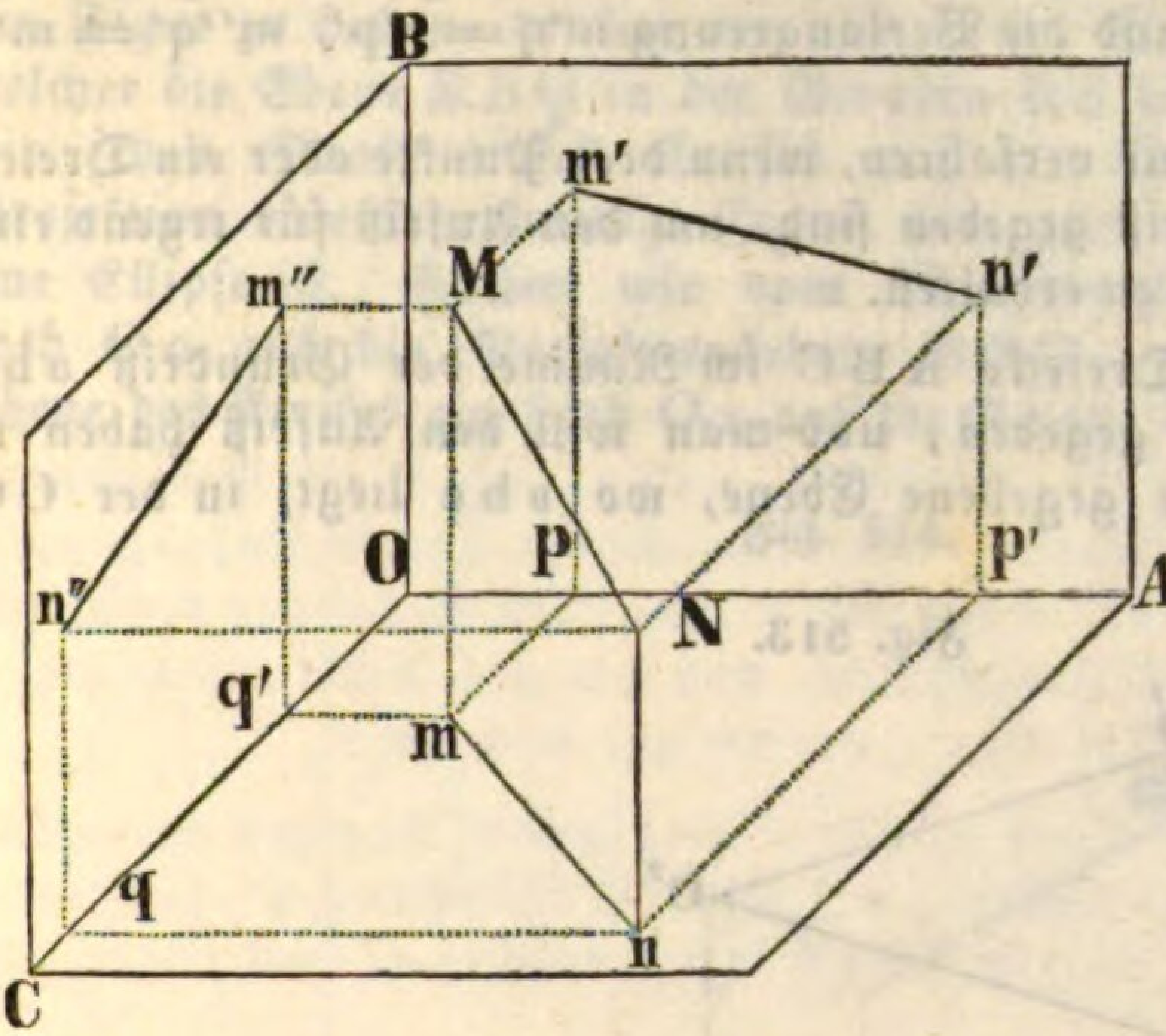
Um wieder zu Vorstellungen des projicirten Punktes M im Raume zu gelangen, muß man sich hier bei dieser Zeichnung die Ebene B O A sowohl, als B O C um einen rechten Winkel hinaufgedreht denken, wobei dann die beiden Geraden O B und O B' dieser Zeichnung wieder in einander fallen, wo dann die zwei Ebenen m'p m und m''q m sich in einer Geraden schneiden, die in m senkrecht auf A O C ist, und in dieser Geraden also senkrecht über m in einer Höhe gleich m'p oder gleich m''q liegt der fragliche Punkt M im Raume.

Ist also ein Punkt M im Raume durch seinen Grundriß m, und Aufriß m' gegeben, wo also m'p seine Höhe im Raume ist, so findet man den Aufriß dieses Punktes in irgend einer andern Vertikalebene, welche die Grundebene A O C in der O C schneidet; wenn man vom Grundriß m ein Loth auf O C fället, dieses Loth verlängert, die Verlängerung gleich m'p, d. h. der Höhe macht.

§. 390. Ganz so werden wir bei der Projektion eines Stückes einer geraden Linie verfahren.

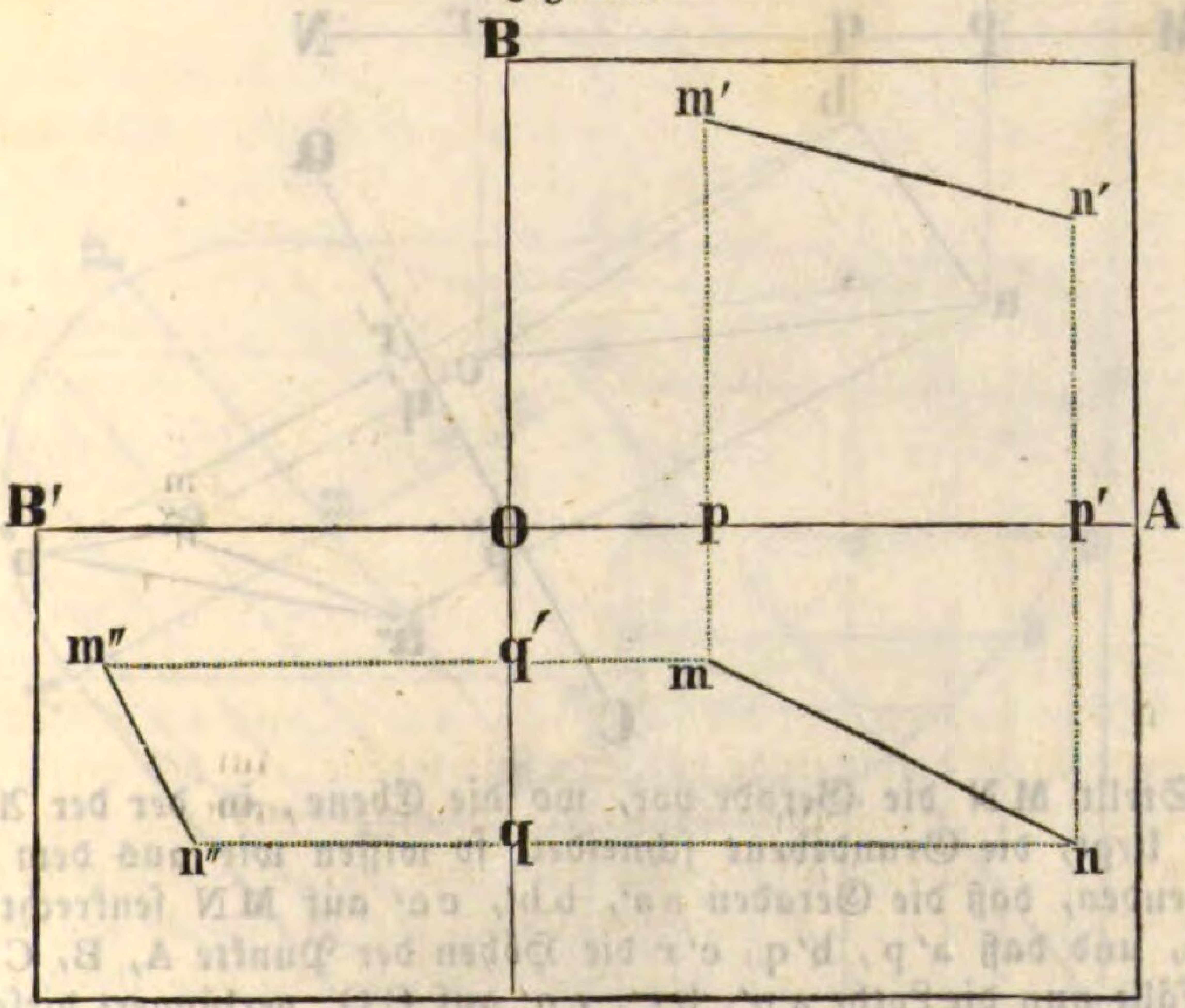
Es sey die Gerade M N, A O C die Grundebene, B O A und B O C darauf senkrecht, die Projektionen von M auf die Ebenen

Fig 511.



AOC, AOB und BOC seyen m, m', m'' und eben so die Projektionen von N auf dieselben Ebenen in derselben Ordnung n, n', n'', so ist mn der Grundriß von MN, und $m'n'$ und $m''n''$ sind Aufrisse der Geraden MN, hierbei ist wieder $m'p = m''q'$; $n'p' = n''q$. Denken wir uns auch hier die Ebenen BOA und BOC um die Geraden OA und OC als Achsen herumgedreht, bis sie beide mit COA in einer Ebene liegen, so hat man folgende Figur.

Fig. 512.



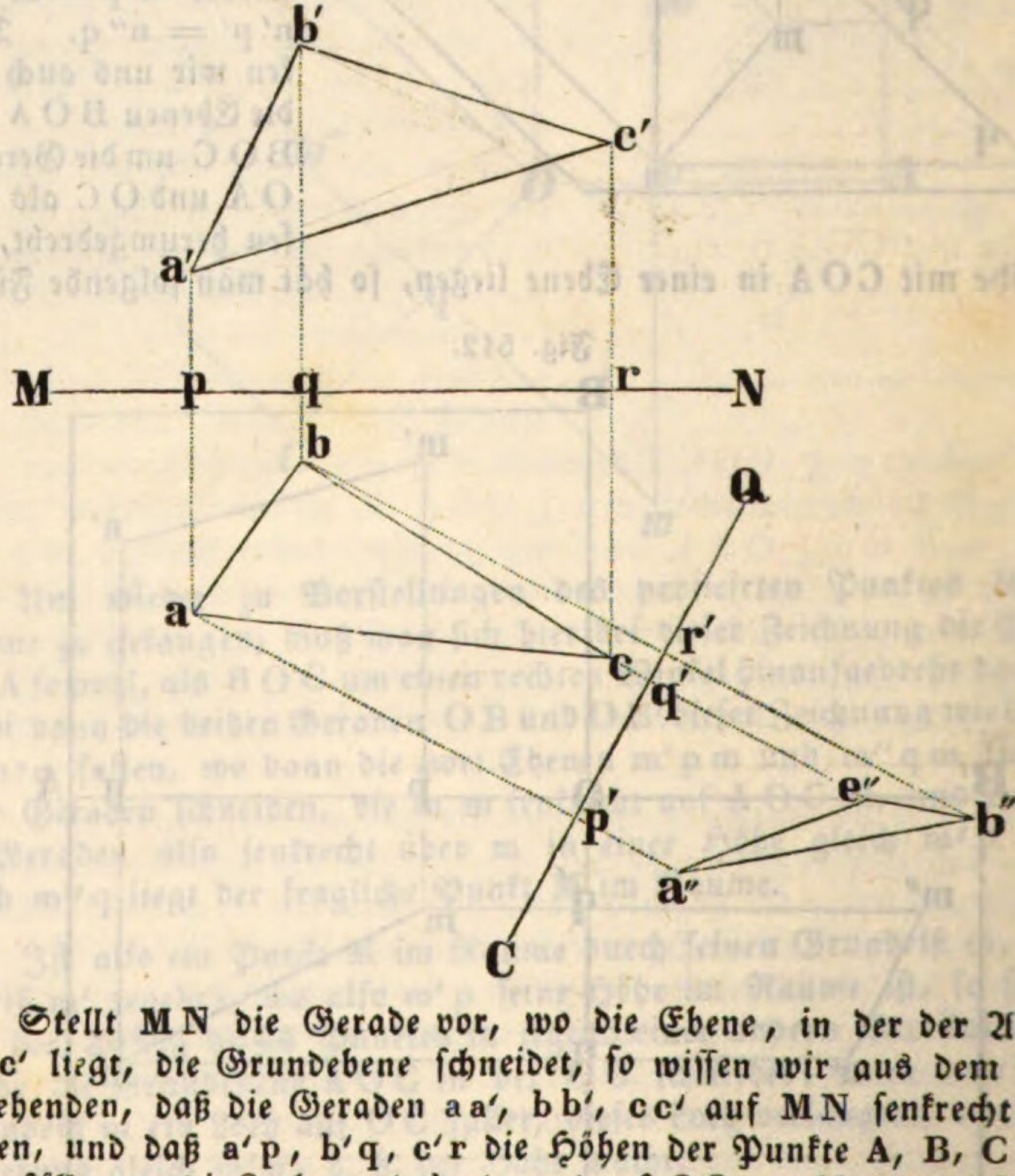
Und hierbei ist wieder $m'p$ mit mp, $n'p'$ mit np, $m''q'$ mit mq', $n''q$ mit nq in einer Geraden; ferner $n''q = n'p'$, $m''q' = m'p$. Wodurch, wie man sieht, wenn mn und $m'n'$ gegeben sind, und OC bestimmt ist, man auch leicht $m''n''$ findet, d. h. aus Grundriß mn und Aufriß $m'n'$ findet man leicht den Aufriß nach einem Durch-

schneidet OC, wenn man von m und n die Lothe mq′ und nq auf OC fällt, diese verlängert, und die Verlängerung n″q = n′p′, m″q′ = m′p macht.

Eben so werden wir verfahren, wenn drei Punkte oder ein Dreieck im Grundriß und Aufriß gegeben sind, um den Aufriß für irgend eine andere vertikale Ebene zu erhalten.

Es sey von dem Dreiecke ABC im Raume der Grundriß abc und der Aufriß a′b′c′ gegeben, und man will den Aufriß haben in einer Ebene, welche die gegebene Ebene, wo abc liegt, in der CQ senkrecht schneidet.

Fig. 513.

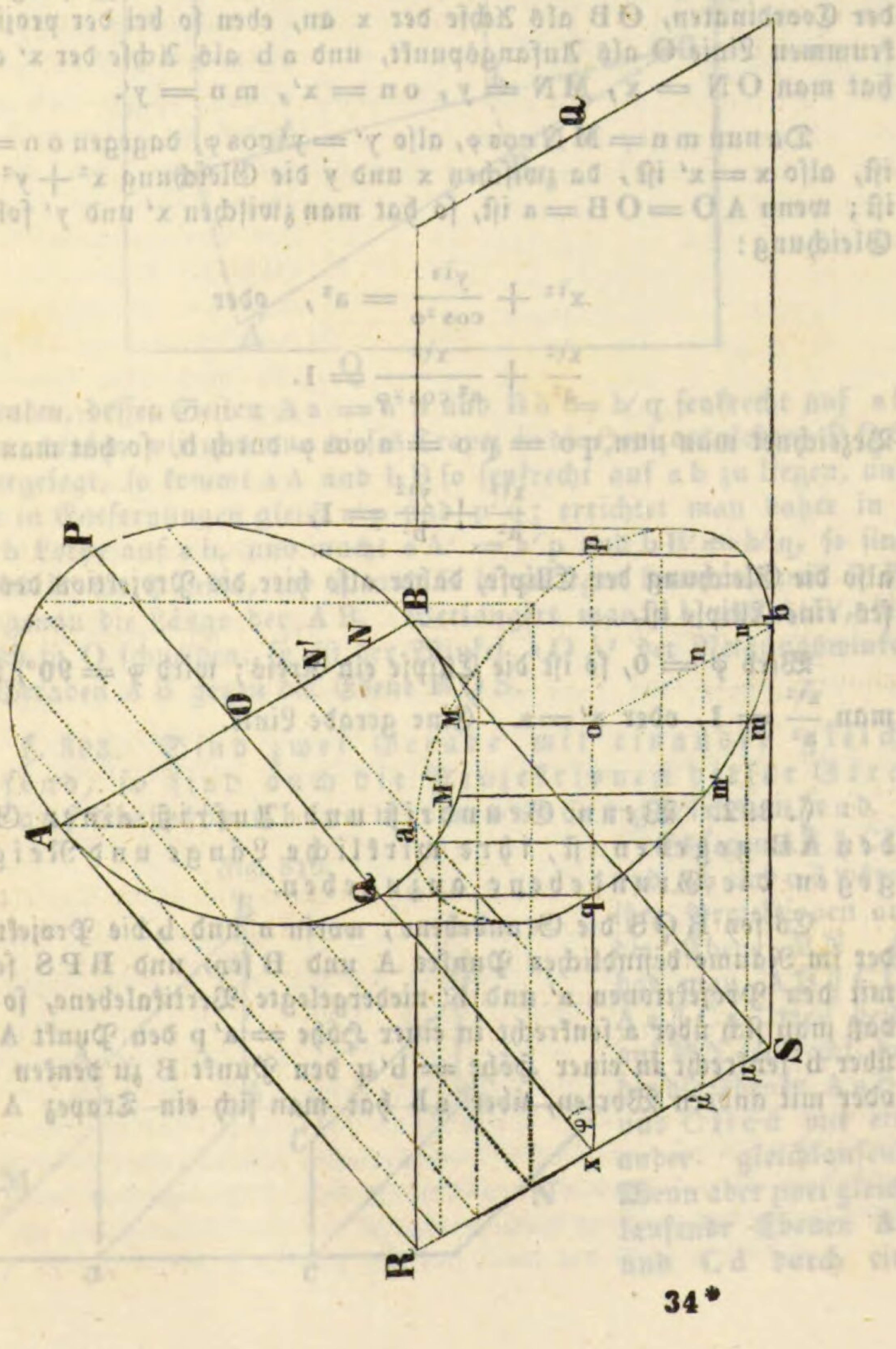


Stellt MN die Gerade vor, wo die Ebene, in der der Aufriß a′b′c′ liegt, die Grundebene schneidet, so wissen wir aus dem Vorhergehenden, daß die Geraden aa′, bb′, cc′ auf MN senkrecht seyn müssen, und daß a′p, b′q, c′r die Höhen der Punkte A, B, C sind. Man fällt nun die Lothe ap′, br′, cq′ auf CQ, verlängert diese und macht a″p′ = a′p, b″r′ = b′q, c″q′ = c′r, so ist a″b″c″ der verlangte Aufriß.

Um sich das Dreieck ABC im Raume vorstellen zu können, denken wir uns in a, b, c Lothe: das erste gleich a′p, das zweite gleich b′q, das dritte gleich c′r, so hat man die Punkte A, B, C und somit das Dreieck ABC.

§. 391. Um auch ein Beispiel der Projektion einer krummlinigen Figur zu haben, denken wir uns in der Ebene RSP einen Kreis, welcher die Ebene RSQ in der Geraden RS schneidet, und projiciren wir jeden Punkt dieses Kreises auf die Ebene RSQ, so ist die Projektion eine krummlinige Figur, die, wie wir nachweisen wollen, eine Ellipse ist. Fällen wir vom Mittelpunkte O des Kreises ein Loth Oo auf die Projektionsebene RSQ, eben so von O in der Ebene des Kreises ein Loth Ox auf die Gerade RS, verbinden x mit o,

Fig. 514.



so ist x o senkrecht auf R S, und der Winkel O α o = φ ist der Neigungswinkel beider Ebenen. Fällen wir eben so von den willkürlich ausgesuchten Punkten M und M′ die Lothe M m, und M′ m′ auf die Ebene R S Q, und die Lothe M μ und M′ μ auf die R S in der Ebene des Kreises, so ist M μ m = M′ μ′ m′ = φ. Ziehen wir durch den Mittelpunkt O den Durchmesser A B gleichlaufend mit R S, so ist die Projektion a b = A B. Verlängern wir μ M und μ′ M′, bis sie die A B in N und N′ schneide, und eben so μ m und μ′ m′, bis sie die a b in n und n′ schneide, so sieht man leicht, daß n und n′ die Projektionen von N und N′ sind. Nimmt man beim Kreise O als Anfangspunkt der Coordinaten, O B als Achse der x an, eben so bei der projicirten krummen Linie O als Anfangspunkt, und a b als Achse der x′ an, so hat man O N = x, M N = y, o n = x′, m n = y′.

Da nun m n = M N cos φ, also y′ = y cos φ, dagegen o n = O N ist, also x = x′ ist, da zwischen x und y die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ ist; wenn A O = O B = a ist, so hat man zwischen x′ und y′ folgende Gleichung:

$$x'^2 + \frac{y'^2}{\cos^2\varphi} = a^2, \quad \text{oder}$$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a^2 \cos^2\varphi} = 1.$$

Bezeichnet man nun q o = p o = a cos φ durch b, so hat man

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1,$$

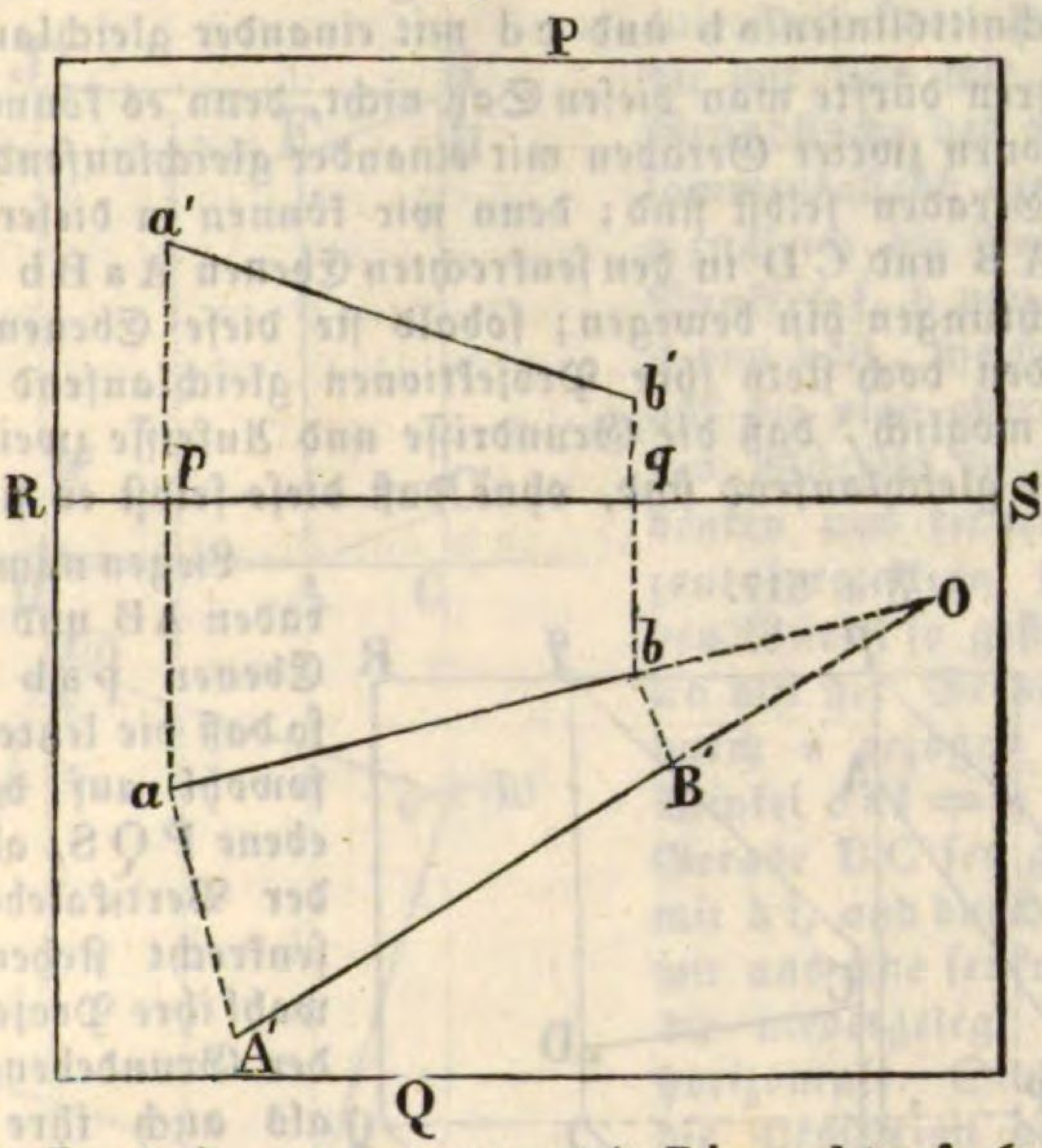
also die Gleichung der Ellipse, daher also hier die Projektion des Kreises eine Ellipse ist.

Wird φ = 0, so ist die Ellipse ein Kreis; wird φ = 90°, so hat man $\frac{x'^2}{a^2} = 1$, oder x′ = a. Eine gerade Linie.

§. 392. Wenn Grundriß und Aufriß einer Geraden A B gegeben ist, ihre wirkliche Länge und Neigung gegen die Grundebene anzugeben.

Es sey R Q S die Grundebene, worin a und b die Projektionen der im Raume befindlichen Punkte A und B sey, und R P S sey die mit den Projektionen a′ und b′ niedergelegte Vertikalebene, so also, daß man sich über a senkrecht in einer Höhe = a′ p den Punkt A, und über b senkrecht in einer Höhe = b′ q den Punkt B zu denken habe, oder mit andern Worten, über a b hat man sich ein Trapez A B a b

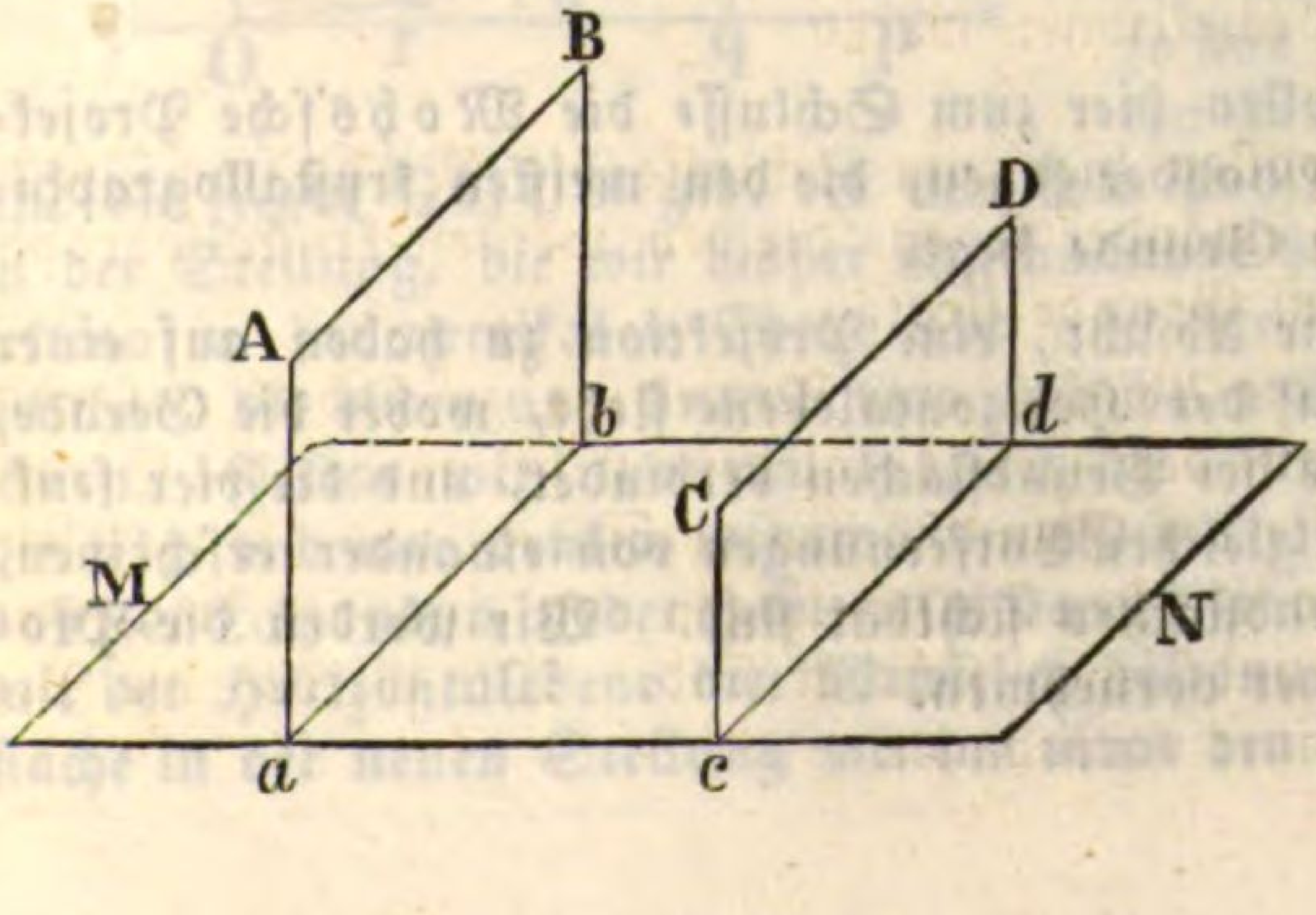
Fig. 515.



zu denken, dessen Seiten Aa = a′p und Bb = b′q senkrecht auf ab stehen; denken wir uns nun dieses Trapez in die Horizontalebene RQS niedergelegt, so kommt aA und bB so senkrecht auf ab zu liegen, und zwar in Entfernungen gleich a′p und p′q; errichtet man daher in a und b Lothe auf ab, und macht aA′ = a′p und bB′ = b′q, so sind A′ und B′ die Punkte, wo A und B hinzuliegen kommen, und A′B′ gibt genau die Länge der AB. Verlängert man ab und A′B′, bis sie sich in O schneiden, so ist der Winkel aOA′ der Neigungswinkel der Geraden AB gegen die Ebene RQS.

§. 393. **Sind zwei Gerade mit einander gleichlaufend, so sind auch die Projektionen dieser Geraden auf dieselbe Ebene mit einander gleichlaufend.**

Fig. 516.

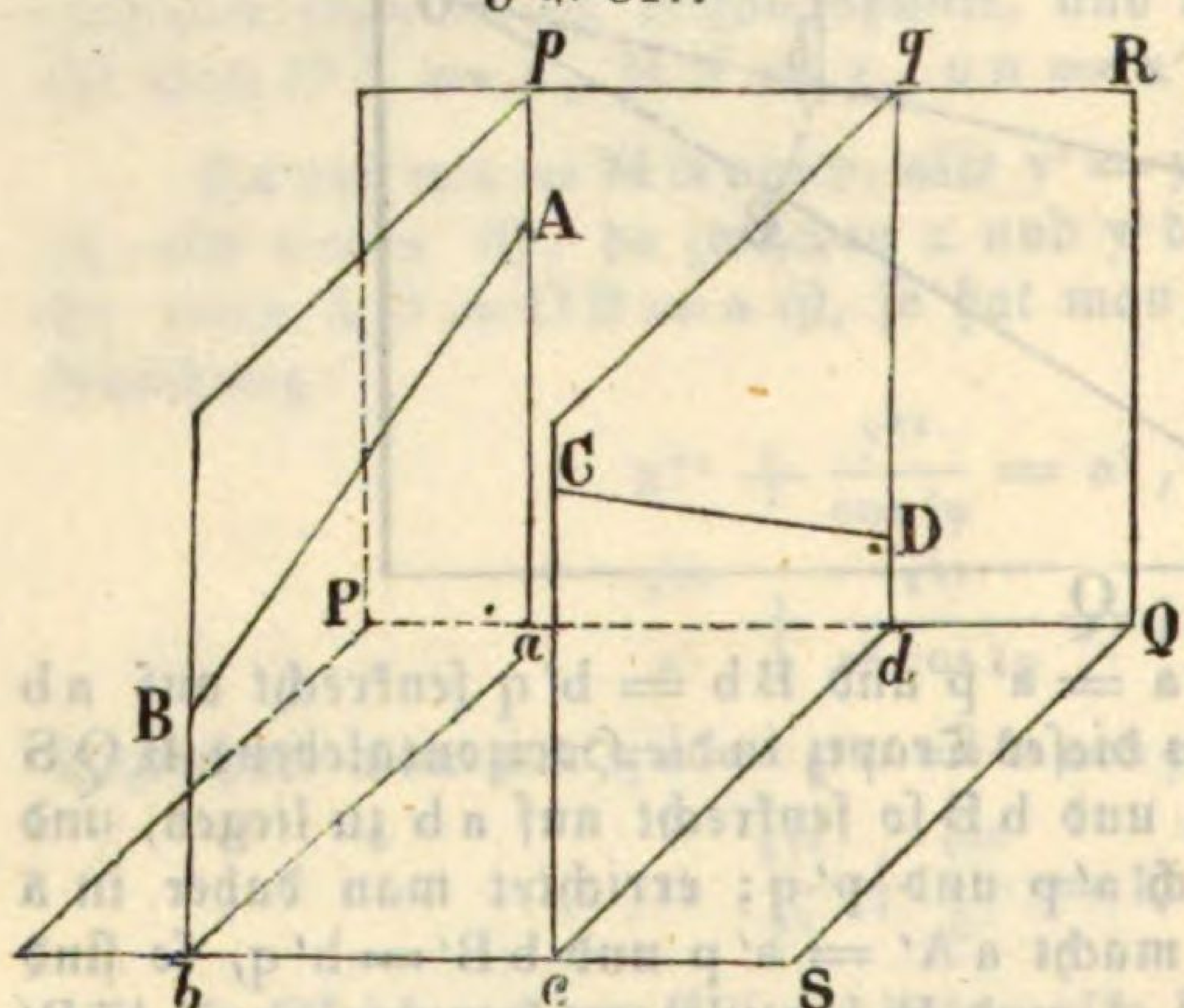


Es seyen AB ∥ CD, und ab und cd wären ihre Projektionen auf die Ebene MN, so hat man AB ∥ CD, Aa ∥ Cc, weil beide auf MN senkrecht, daher die Ebenen AaBb und CDcd mit einander gleichlaufend. Wenn aber zwei gleichlaufende Ebenen Ab und Cd durch eine

eine dritte sie schneidende Ebene MN geschnitten werden, so müssen ihre Durchschnittslinien ab und cd mit einander gleichlaufend seyn.

Umkehren dürfte man diesen Satz nicht, denn es können recht gut die Projektionen zweier Geraden mit einander gleichlaufend seyn, ohne daß es die Geraden selbst sind; denn wir können in dieser Figur hier die Gerade AB und CD in den senkrechten Ebenen AaBb und CcDd in allen Richtungen hin bewegen; sobald sie diese Ebenen nicht verlassen, werden doch stets ihre Projektionen gleichlaufend seyn. Ja, es ist sogar möglich, daß die Grundrisse und Aufrisse zweier Geraden mit einander gleichlaufend sind, ohne daß diese selbst es sind.

Fig. 517.



Liegen nämlich die Geraden AB und CD in zwei Ebenen pab und qcd, so daß die letzteren Ebenen sowohl auf der Grundebene PQS, als auch auf der Vertikalebene RQP senkrecht stehen, so sind wohl ihre Projektionen auf der Grundebene ab ∥ cd, als auch ihre Projektionen auf der Vertikalebene ap ∥ qd, und doch können, wie die Figur zeigt, die Geraden selbst verschiedene Richtungen haben. Wie man leicht sieht, würden die Projektionen hier von AB und CD auf die Ebene RQS nicht gleichlaufend seyn.

Es begreift sich, daß wenn die Projektionen von AB und CD noch auf der dritten Ebene RQS zu einander gleichlaufend wären, daß dann AB und CD selbst gleichlaufend seyn müßten; denn da AB und CD gleichlaufend mit RQS sind, und da sie also mit ihren Projektionen gleichlaufend seyn müssen, so müßten sie selbst gleichlaufend seyn, wenn es ihre Projektionen wären.

§. 394. Wir wollen hier zum Schlusse die Mohs'sche Projektion des Würfels aus einander setzen, die den meisten krystallographischen Zeichnungen zum Grunde liegt.

Man hat dabei die Absicht, eine Projektion zu haben auf einer Ebene, die senkrecht auf der Horizontalebene steht, wobei die Gerade, welche die Mittelpunkte der Grundflächen verbindet, und die vier senkrechten Kanten alle in gleichen Entfernungen von einander erscheinen, zugleich die beiden Grundflächen sichtbar sind. Wir werden die Projektion etwas allgemeiner vornehmen.

Fig. 518.

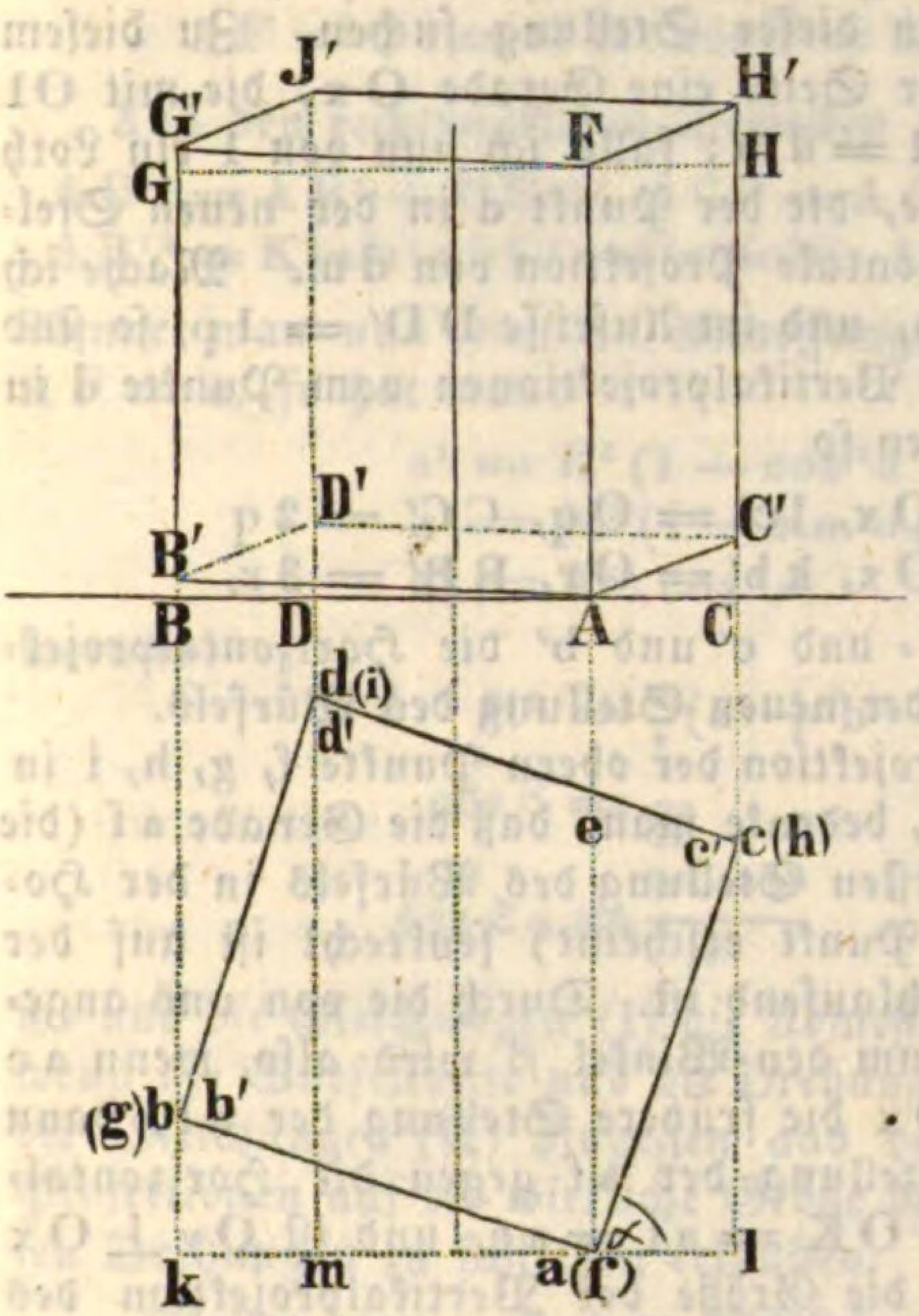
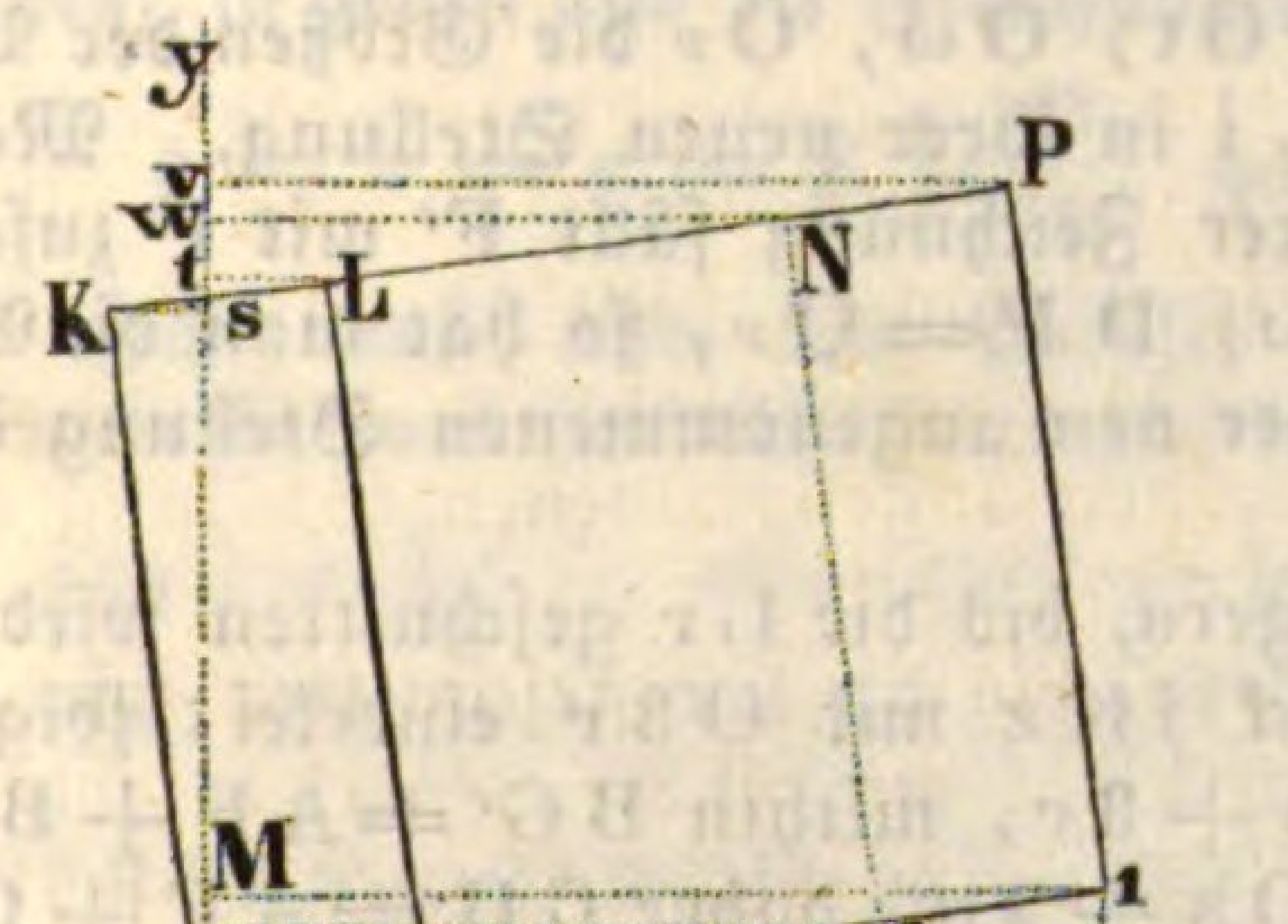


Fig. 519.



Es sey abcd die horizontale Projektion des Würfels, die wir uns mit der unteren Grundfläche des Würfels zusammenfallend denken, so daß a zugleich die Projektion des Punktes f, b von g, c von h, d von i ist, wo sich f, g, h, i auf die vier obern Eckpunkte des Würfels beziehen. Wir denken uns ferner die Horizontalprojektion, folglich auch den Würfel so gestellt, daß die ac mit der Geraden kl, die durch a gezogen wird, den Winkel cal = α bilde. Die Gerade BC sey gleichlaufend mit kl, und durch BC denken wir uns eine senkrechte Ebene, die niedergelegt wird in die horizontale. Suchen wir nun die Projektion unseres Würfels auf diese Ebene, so haben wir von den Punkten a, b, c, d Lothe auf BC zu ziehen, so werden A, B, C und D die vertikalen Projektionen der Punkte a, b, c und d seyn, weil diese selbst in der Horizontalebene liegen. Da nun die Punkte f, g, h, i gerade senkrecht über a, b, c, d, so liegen, daß ihre Höhe gleich ac ist, so werde ich in A, B, C, D Lothe auf BC errichten: AF = BG = CH = DJ = ac, so sind F, G, H, J die vertikalen Projektionen von f, g, h, i, und die Figur GHCB gibt die vertikale Projektion unseres Würfels in der Stellung, die wir bisher angenommen haben. Bei dieser Projektion in der vertikalen Ebene sind uns die vier vertikalen Kanten sichtbar, die obere und untere Grundfläche erscheinen nur als Grundlinien. Fällen wir nun von b, c, d die Lothe bk, cl, dm auf die kl, und nun denken wir uns den Würfel so in die Höhe gehoben, daß der Eckpunkt a in der Horizontalebene bleibt, und die bk, dm, cl mit der Horizontalebene den Winkel β bilden, d. h. daß die Grundfläche in der neuen Stellung mit der alten den Winkel β bilde.

Wir wollen nun die Horizontal- und Vertikalprojektion aller vier Endpunkte des Würfels in dieser Stellung suchen. Zu diesem Behufe zeichnen wir uns auf der Seite eine Gerade O x, die mit O l den Winkel β bilde, es sey O l = d m; fälle ich nun von l ein Loth l p auf O x, so ist l p die Höhe, die der Punkt d in der neuen Stellung hat, und O p ist die horizontale Projektion von d m. Mache ich also im Grundrisse m d′ = O p, und im Aufrisse D D′ = l p, so sind d′ und D′ die Horizontal- und Vertikalprojektionen vom Punkte d in seiner neuen Stellung. Ist eben so

$$O2 = l h, \quad 2q \perp Ox, \quad lc' = Oq, \quad CC' = 2q$$
$$O3 = b k, \quad 3r \perp Ox, \quad kb' = Or, \quad BB' = 3r,$$

so sind C′ und B′ die Vertikal- und c′ und b′ die Horizontalprojektionen der Punkte c und b in der neuen Stellung des Würfels.

Um nun die vertikale Projektion der obern Punkte f, g, h, i in der neuen Stellung zu erhalten, bedenke man, daß die Gerade a f (die a mit f verbindet, die in der ersten Stellung des Würfels in der Horizontalprojektion nur als ein Punkt erscheint) senkrecht ist auf der Geraden a e, die mit d m gleichlaufend ist. Durch die von uns angedeutete Drehung des Würfels um den Winkel β wird also, wenn a e in der Richtung O l ist, also O x die frühere Stellung der a l, dann gewiß O K $\perp$ O l die neue Stellung der a f gegen die Horizontalebene bezeichnen. Ist nun noch O K = a f = a c, und ist O y $\perp$ O x und K s $\perp$ O y, so wird O s die Größe der Vertikalprojektion des Punktes f in seiner neuen Stellung seyn. Errichtet man eben so in den Punkten 1, 2, 3 Lothe P 1 = N 2 = L 3, und macht L t $\perp$ O y, N ω $\perp$ O y, P ν $\perp$ O y, so sind O t, O ω, O ν die Größen der Vertikalprojektionen der Punkte g, h, i in ihrer neuen Stellung. Macht man daher A F′ = O S (in unserer Zeichnung fällt F′ mit F zusammen), B G′ = O t, C H′ = O ω, D J′ = O ν, so hat man die Vertikalprojektion von f, g, h, i in der neu angenommenen Stellung derselben.

Würden wir die K s verlängern, bis die L r geschnitten wird im Punkte z, so ist dann das Dreieck l K z mit O 3 r einerlei, folglich L z = s t = 3 r, daher O t = O s + 3 r, mithin B G′ = A F + B B′. Eben so findet man leicht O ω = O s + 2 q, daher C H = A F + C C′ und O ν = O s + 1 p, somit D J = A F + D D′, so also, daß in der Vertikalprojektion G′ J′ ∥ B′ D′ ∥ A C′ ∥ F′ H′ ist.

Wir wollen nun die numerischen Werthe der einzelnen Stücke der Vertikalprojektion berechnen, sobald K die Größe einer Kante des Würfels und die beiden Winkel α und β gegeben sind. Da nun c a l = α, also b a k = 90° — α ist, so hat man:

c l = K sin α, daher auch O 2 = K sin α

b K = O 3 = K cos α; man findet leicht, daß

O l = d m = K (sin α + cos α) ist, daher hat man

$$DD' = l.p = O.l \sin\beta = K(\sin\alpha + \cos\alpha)\sin\beta$$
$$CC' = 2q = O2.\sin\beta = K \sin\alpha . \sin\beta$$

$$B B' = 3 r = O 3 . \sin\beta = K \cos\alpha . \sin\beta$$
$$A F = O s = O K . \cos\beta = K \cos\beta.$$

Aus den rechtwinkligen Dreiecken $A B B'$ und $A C C'$ hat man:
$A B'^2 = A B^2 + B B'^2$; $A C'^2 = A C^2 + C C'^2$, folglich
$A B'^2 = K^2 \sin^2\alpha + K^2 \cos^2\alpha \sin^2\beta$; $AC'^2 = K^2 \cos^2\alpha + K^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta$.
Nennet man nun die drei Abmessungen $A B' = a$, $A C' = b$ und $A F = c$, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= K^2 (1 - \cos^2\alpha \cos^2\beta) \\ b^2 &= K^2 (1 - \sin^2\alpha . \cos^2\beta) \\ c^2 &= K^2 . \cos^2\beta \end{aligned}\right\} \text{(I)},$$

woraus:

$$\left.\begin{aligned} K^2 &= \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \\ \cos\beta &= \frac{c}{K} \\ \cos 2\alpha &= \frac{b^2 - a^2}{c^2} \end{aligned}\right\} \text{(II)},$$

wo uns die Gleichungen (I) die Abmessungen der Projektionen geben, wenn die Würfelkante und die Drehungswinkel α und β gegeben sind; die Gleichungen (II) hingegen aus den Abmessungen der gegebenen Projektionen auf die wirkliche Größe der Würfelkante und die gemachten Drehungen zu schließen erlauben.

Wollte man z. B. dem Würfel eine solche Stellung geben, daß die Abmessungen a, b, c seiner vertikalen Projektionen einander gleich werden, so geben uns die Gleichungen (II)

$$a = b = e = K \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \cos 2\alpha = 0.$$

Ich muß also den Würfel so drehen, daß die Winkellinie (Diagonale) $a d$ senkrecht steht auf der $k l$; ferner, daß

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ also } \sin\beta = \sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ mithin } \tan\beta = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ist. Im Diagonalschnitte unseres Würfels im Rechtecke $a f i d$ hat man $i d = K$, $a d = K \sqrt{2}$, also $\tan i a d = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dadurch, daß ich $\alpha = 45$ mache, steht $a d$ senkrecht auf die Richtung der $B C$; mache ich nun $i a d = \beta$, d. h. drehe ich den Würfel so, daß die $a i$ in die frühere Stellung der $a d$ kommt, d. h. daß $a i$ senkrecht auf $B C$ steht, so habe ich die verlangte Stellung des Würfels. Die wirkliche Verzeichnung dieses Falles wollen wir unsern Lesern überlassen. Wir wollen uns zur Mohs'schen Projektion wenden: Mohs dreht den Würfel zuerst horizontal, so daß $a k = 3 a l$, was wir auch in unserer Zeichnung gethan haben. Da nun die Dreiecke $a b k$ und $a c l$ mit einander einerlei sind, so ist $c l = a k = 3 a l$, daher

$$\tan\alpha = \frac{c l}{a l} = 3, \text{ mithin } \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}; \ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Mohs dreht ferner den Würfel um den Punkt a, so daß die vertikale Projektion von d m, d. h. $DD' = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} km$ ist. Da nun

$$lp = DD' = \frac{1}{2} km = \frac{1}{2} al = \frac{1}{2} K \cos\alpha = \frac{1}{2} \frac{K}{\sqrt{10}} \text{ und}$$

$$ol = dm = K(\sin\alpha + \cos\alpha) = K . \frac{4}{\sqrt{10}}, \text{ so ist}$$

$$\sin\beta = \frac{lp}{ol} = \frac{1}{8}; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{63}}{8}.$$

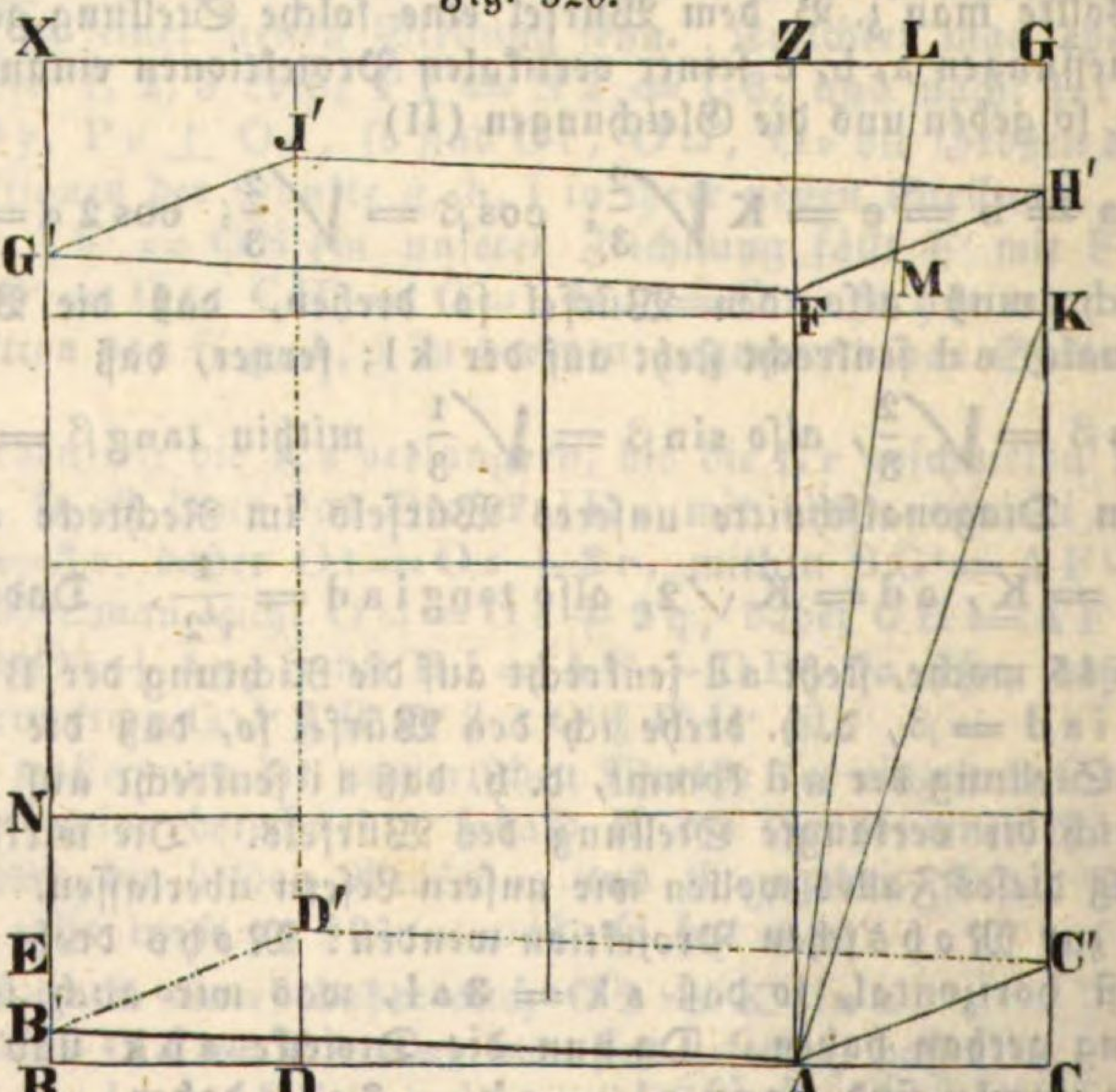
Diese Werthe in unsern Formeln substituirt, hat man:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= K^2\left(1 - \frac{1}{10} . \frac{63}{64}\right) = \frac{577}{406} K^2 \\ b^2 &= K^2\left(1 - \frac{9}{10} . \frac{63}{64}\right) = \frac{73}{640} K^2 \\ c^2 &= K^2 . \frac{63}{64} \qquad\quad\;\; = \frac{630}{640} . K^2 \end{aligned}\right\} \text{ woraus } \left\{\begin{aligned} a &= 0{\cdot}9495\,K \\ b &= 0{\cdot}3377\,K \\ c &= 0{\cdot}9922\,K \end{aligned}\right.$$

Verfertigt man sich nach diesen Verhältnissen drei entsprechende Maßstäbe, so kann man mit ihnen nach den drei Richtungen der a, b und c auch Messungen auf der Zeichnung machen, die für den wirklichen Körper gelten.

Es bleibt uns nur noch übrig, einen leichteren Weg für die Verzeichnung der Mohs'schen Projektion anzugeben.

Fig. 520.



Da die $BB' = K \cos\alpha . \sin\beta = al . \sin\beta = \frac{1}{8} . al = \frac{1}{8} . AC = \frac{1}{8} . \frac{1}{4} BC'$

ferner $CC' = K \sin\alpha . \sin\beta = ak \sin\beta = \frac{1}{8} . ak = \frac{1}{8} . AB = \frac{1}{8} . \frac{3}{4} BC'$

so werde ich mir ein Quadrat B C X G verzeichnen, theile jede Seite in 4 gleiche Theile, das Viertel B N theile ich in 8 gleiche Theile, so daß $BB' = \frac{1}{8}BN$; ferner $CC' = \frac{3}{8}BN$, $DD' = \frac{4}{8}BN$, so muß $AB'C'D'$ ein Gleicheck seyn. Da $CK = AB = ak$ und $AC = bl$ in der früheren Figur ist, so muß A K der wirklichen Größe der Würfelkante gleich seyn.

Ist nun $LG = \frac{1}{2}ZG$, also $ZL = \frac{1}{8}BC$, während $AZ = BC$, so ist $\tang ZAL = \frac{1}{8}$ (der Winkel, dessen Tangente $\frac{1}{8}$ ist, ist nur sehr wenig vom Winkel unterschieden, dessen Sinus $\frac{1}{8}$ ist; ist $\sin x = \frac{1}{8}$, so ist $\cos x = 0{\cdot}9922$, ist aber $\tang x' = \frac{1}{8}$, so hat man $\cos x' = 0{\cdot}9923$). Beschreibe ich aus dem Centrum A mit A K einen Bogen M K, der die A L in M schneidet, und fälle $MF \perp AZ$ so ist

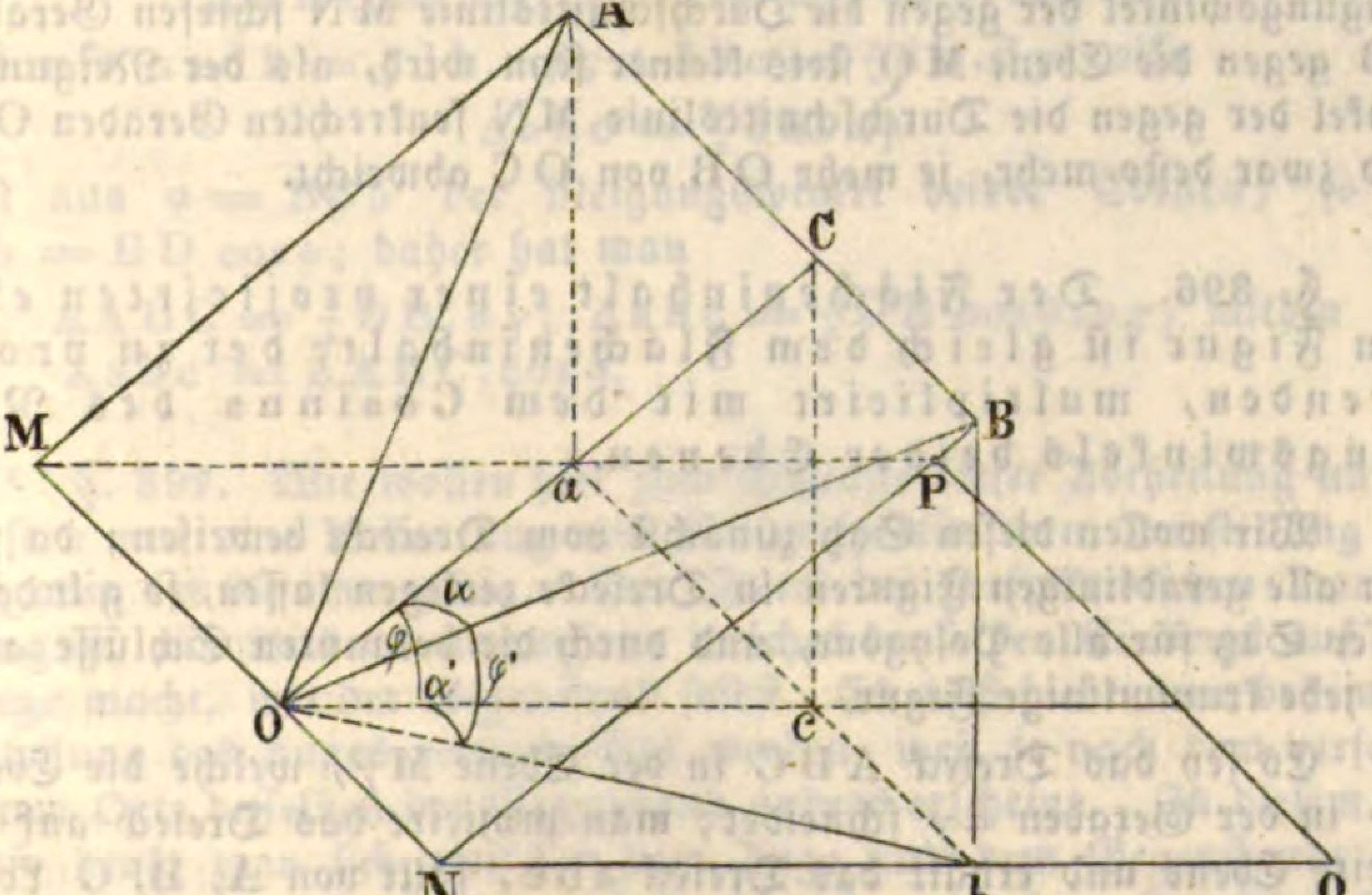
$$AF = AM \cos ZAL = K \cos\beta, \text{ wo } \sin\beta = \tfrac{1}{8} \text{ ist,}$$

daher A F die verlangte Größe nach unserer Rechnung hat. Mache ich nun $C'H' = D'J' = B'G = AF$, so hat man die verlangte Verzeichnung.

Für Zeichnungen im kleineren Maßstabe wird es hinlänglich seyn, $AF = AK$ zu machen.

§. 395. Es kann hier nicht unseres Ortes seyn, die Aufgaben der Projektionslehre oder darstellenden Geometrie (Géométrie descriptive) weiter zu verfolgen; es genügt uns, auf diese so wichtige Lehre vorbereitet zu haben; wir wollen hier nur die Projektion eines Winkels und eines Flächeninhaltes ins Auge fassen:

Fig. 521.



Es sey der Winkel A O B in der Ebene A B M N, welche die Ebene P Q M N in der M N schneidet. Es sey $AB \parallel MN$, man projicire A und B auf die Ebene P Q M N, ihre Projektionen seyen a und b.

Fällen wir von O das Loth OC auf AB, und c sey die Projektion von C. Es sey ferner $Coc = \varphi$, $COB = \alpha$, $BOb = \varphi$, $boc = \alpha'$, so hat man:

$$OC = OB \cos\alpha,\quad Oc = OC \cos\varphi = OB \cos\alpha \cos\varphi$$
$$Ob = OB \cos\varphi',\quad Oc = Ob \cos\alpha' = OB \cos\alpha' \cos\varphi',$$

daher 1) $\cos\alpha' . \cos\varphi' = \cos\alpha . \cos\varphi$.

$$BC = OB \sin\alpha,\quad BC = bc$$
$$bc = Ob \sin\alpha' = OB \cos\varphi' . \sin\alpha',$$

daher 2) $\sin\alpha = \sin\alpha' . \cos\varphi'$

$$Bb = OB \sin\varphi';\quad Bb = Cc$$
$$Cc = OC . \sin\varphi = OB \cos\alpha . \sin\varphi,$$

daher 3) $\sin\varphi' = \sin\varphi \cos\alpha$.

Die erste und zweite Gleichung gibt uns:

$$\tang\alpha' = \frac{\tang\alpha}{\cos\varphi},$$

und lehrt uns, da der Winkel α oder BOC stets ein spitziger seyn wird, daß der projicirte Winkel boc stets größer seyn wird, als der zu projicirende BOC, und zwar desto mehr, je größer der Neigungswinkel φ (den wir hier als spitzig betrachten) seyn wird; dasselbe wird für die Winkel AOC und aOc, daher auch für die Winkel AOB und aob gelten.

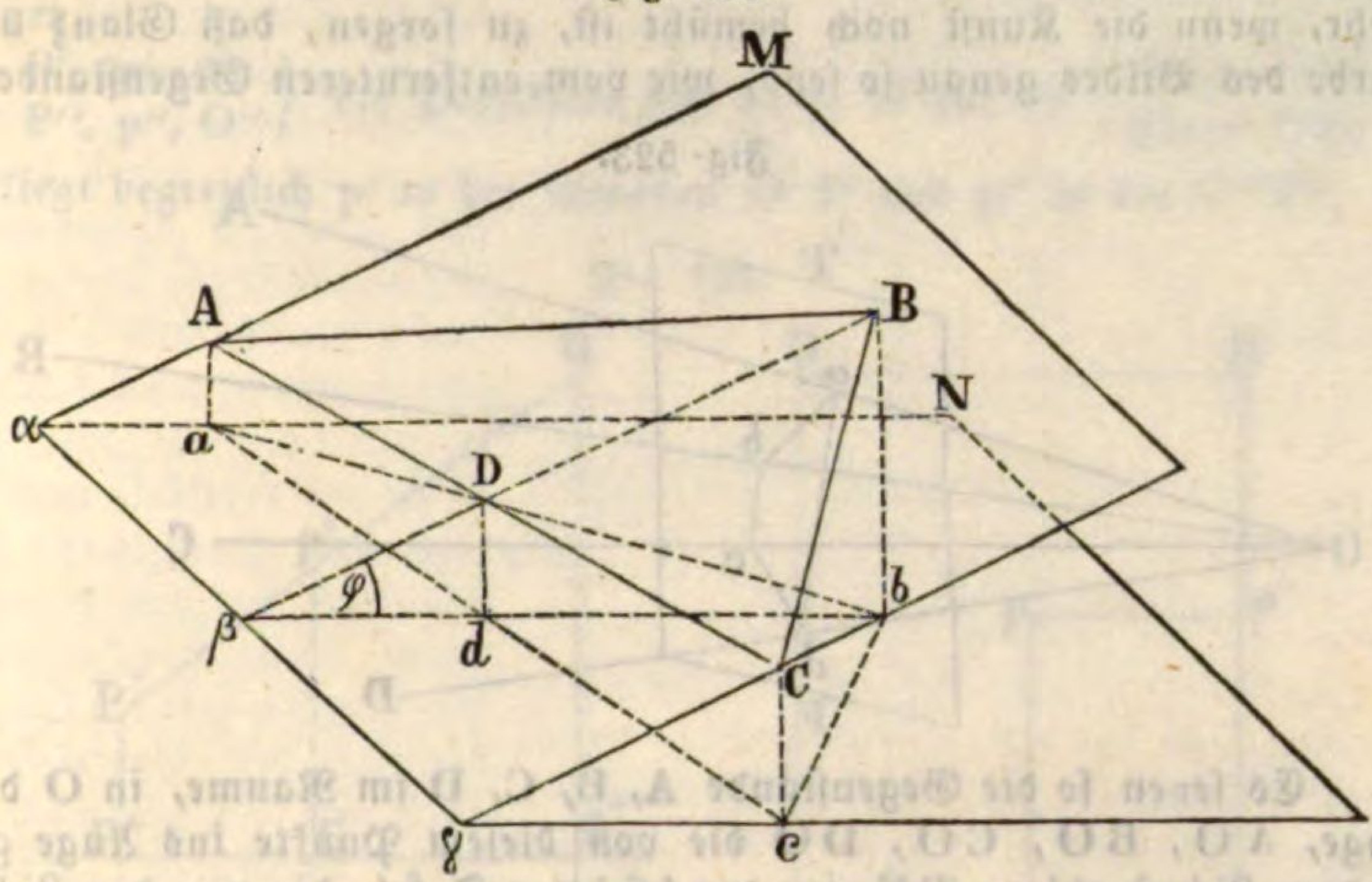
Die dritte Gleichung $\sin\varphi' = \sin\varphi . \cos\alpha$ lehrt uns, daß der Neigungswinkel der gegen die Durchschnittslinie MN schiefen Geraden OB gegen die Ebene MQ stets kleiner seyn wird, als der Neigungswinkel der gegen die Durchschnittslinie MN senkrechten Geraden OC, und zwar desto mehr, je mehr OB von OC abweicht.

§. 396. Der Flächeninhalt einer projicirten ebenen Figur ist gleich dem Flächeninhalte der zu projicirenden, multiplicirt mit dem Cosinus des Neigungswinkels beider Ebenen.

Wir wollen diesen Satz zunächst vom Dreiecke beweisen; da sich nun alle geradlinigen Figuren in Dreiecke zerlegen lassen, so gilt dann dieser Satz für alle Polygone, und durch die bekannten Schlüsse auch für jede krummlinige Figur.

Es sey das Dreieck ABC in der Ebene $M\gamma$, welche die Ebene $N\gamma$ in der Geraden $\alpha\gamma$ schneidet; man projicire das Dreieck auf die zweite Ebene und erhält das Dreieck abc, fällt von A, B, C Lothe

Fig. 522.



$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ auf die Durchschnittslinie, und verbindet α mit a, β mit b, γ mit c, so sind auch αa, βb, γc senkrecht auf $\alpha\gamma$. Die zwei senkrechten Ebenen $Bb\beta$ und $AaCc$ schneiden sich in Dd, daher Dd senkrecht auf γN. Der Flächeninhalt des Dreiecks ADB ist gleich DB, multiplicirt mit dem halben Lothe von A auf DB; das Loth aber von A auf DB ist gleich $\alpha\beta$, daher $\Delta ADB = DB.\frac{1}{2}\alpha\beta$. Eben so erhält man $\Delta DBC = DB.\frac{1}{2}\beta\gamma$, daher

$$\Delta ABC = DB.\tfrac{1}{2}(\alpha\beta + \beta\gamma) = \tfrac{1}{2}.DB.\alpha\gamma.$$

Eben so $\Delta adb = \frac{1}{2}db.\alpha\beta$; $\Delta dbc = \frac{1}{2}db.\beta\gamma$, also

$$\Delta abc = \tfrac{1}{2}db.\alpha\gamma.$$

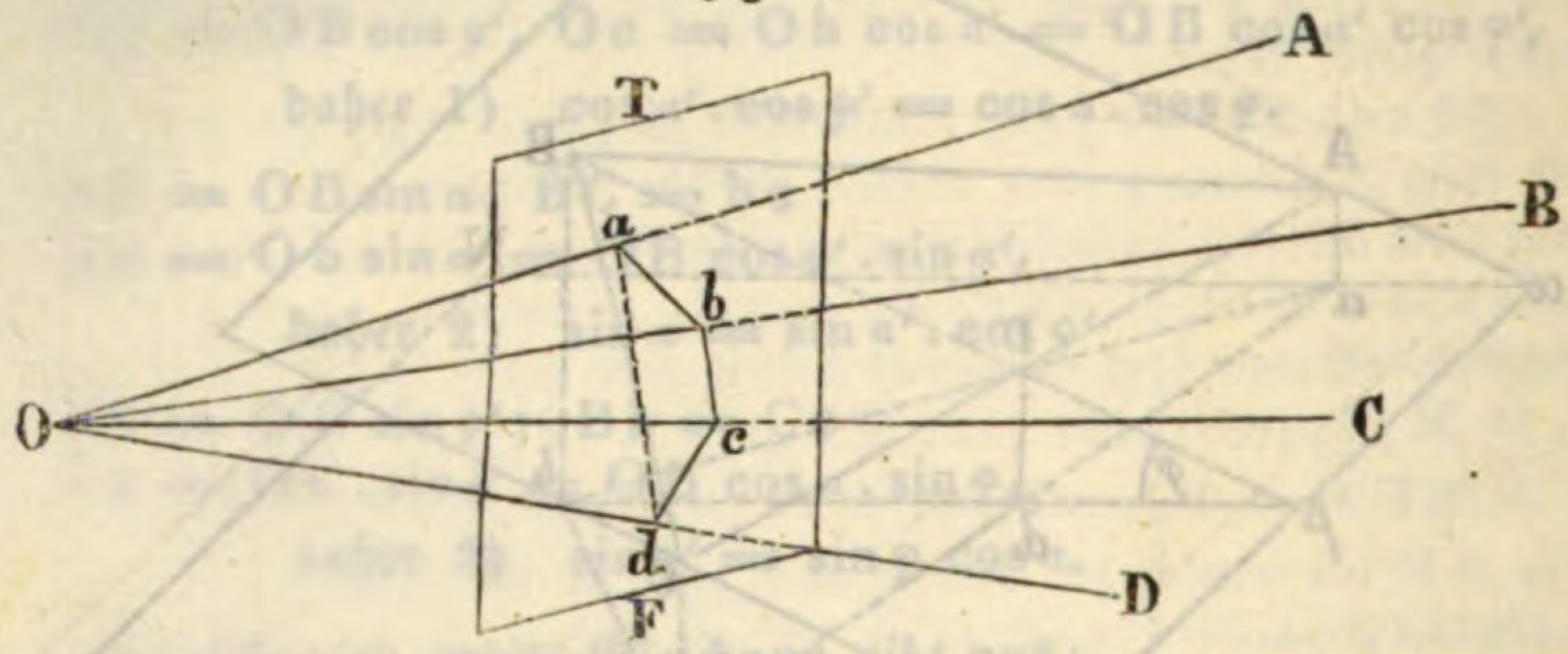
Ist nun $\varphi = B\beta b$ der Neigungswinkel beider Ebenen, so ist $db = BD\cos\varphi$; daher hat man

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{2}DB.\alpha\gamma;\quad \Delta abc = \tfrac{1}{2}DB\cos\varphi.\alpha\gamma, \text{ mithin}$$
$$\Delta abc = \Delta ABC.\cos\varphi.$$

§. 397. Wir wollen hier zum Schlusse dieser Abtheilung unsern Lesern nur eine Andeutung von der perspektivischen Darstellung der Figuren im Raume geben. Der Zweck der perspektivischen Darstellung ist, ein Bild zu entwerfen, welches denselben Eindruck auf das Auge macht, wie der Gegenstand selbst. Es muß hiebei eine bestimmte Stellung des Auges vorausgesetzt werden, weil je nach dem verschiedenen Orte desselben der Gegenstand anders erscheint. Zu diesem Behufe denkt man sich zwischen dem Auge und dem Gegenstande eine durchsichtige Tafel, wo die Lichtstrahlen der einzelnen Punkte des betrachteten Gegenstandes diese Tafel treffen, denkt man sich den Ort des Bildes; denn für das Auge ist es gleichgiltig, ob der Lichtstrahl von einem Punkte des wirklichen Körpers, oder von dem Punkte, wo

dieser Lichtstrahl die gedachte Tafel trifft, ins Auge kommt, um so mehr, wenn die Kunst noch bemüht ist, zu sorgen, daß Glanz und Farbe des Bildes genau so seyn, wie vom entfernteren Gegenstande.

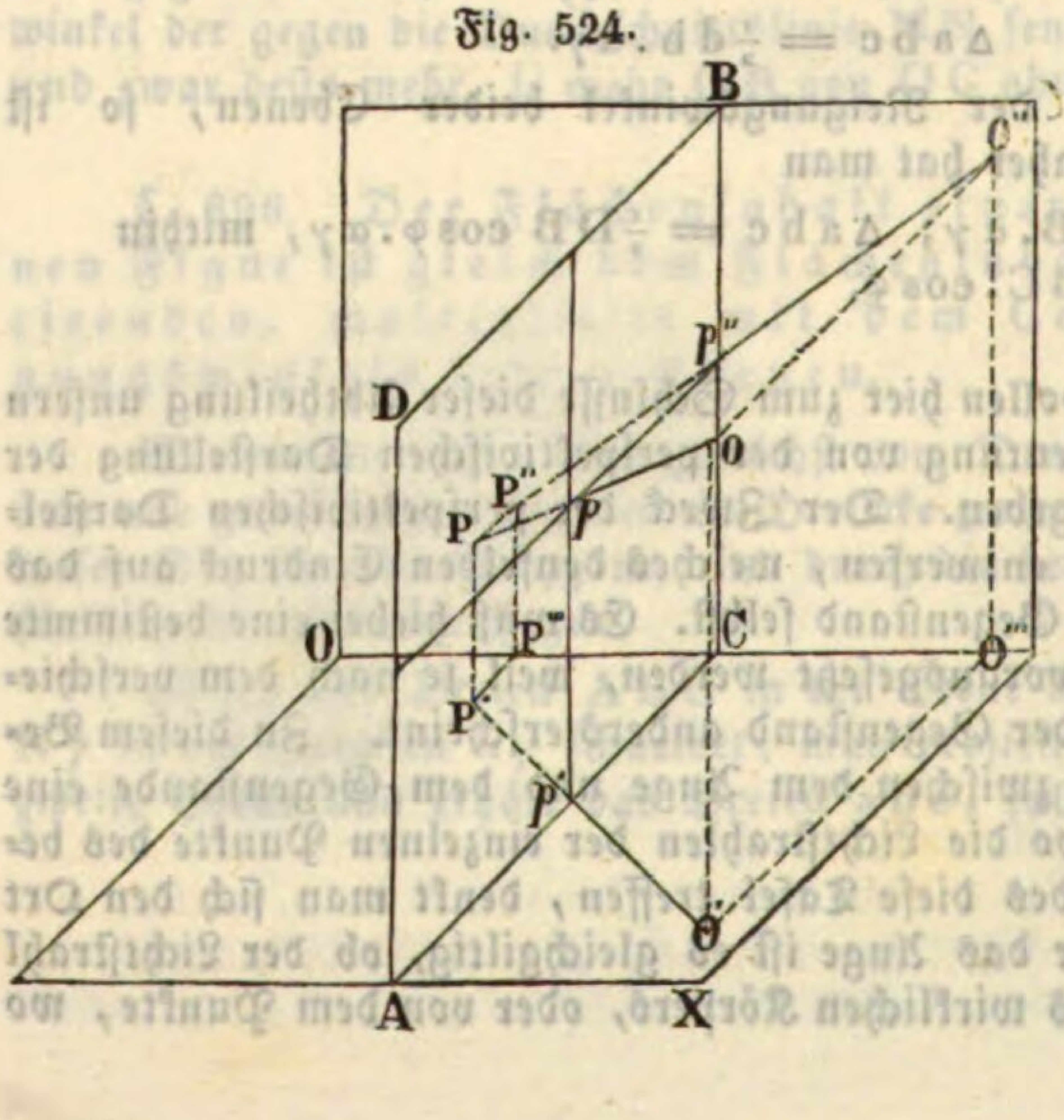
Fig 523.



Es seyen so die Gegenstände A, B, C, D im Raume, in O das Auge, AO, BO, CO, DO die von diesem Punkte ins Auge gesandten Lichtstrahlen, TF eine durchsichtige Tafel, die von den Lichtstrahlen in den Punkten a, b, c, d getroffen wird. Bringt man nun die Punkte a, b, c, d in denselben Entfernungen, die sie hier haben, in einer Zeichnung an, und wird das Auge in dieselbe Entfernung von dieser Zeichnung gebracht, wie hier O von TF ist, so wird diese Zeichnung auf das Auge denselben Eindruck machen, als ob das Auge in O die Gegenstände A, B, C, D anschauet.

Die perspektivische Zeichnung geschieht nur auf einer Ebene, und zwar gewöhnlich auf einer Vertikalebene. Ohne uns in das Einzelne der Theorie einzulassen, wollen wir hier nur zeigen, wie man aus Grundriß und Aufriß eine Figur und der gegebenen Stellung des Auges und der Tafel, auf welcher die Abbildung verlangt wird, die perspektivische Zeichnung entwerfen kann.

Fig. 524.



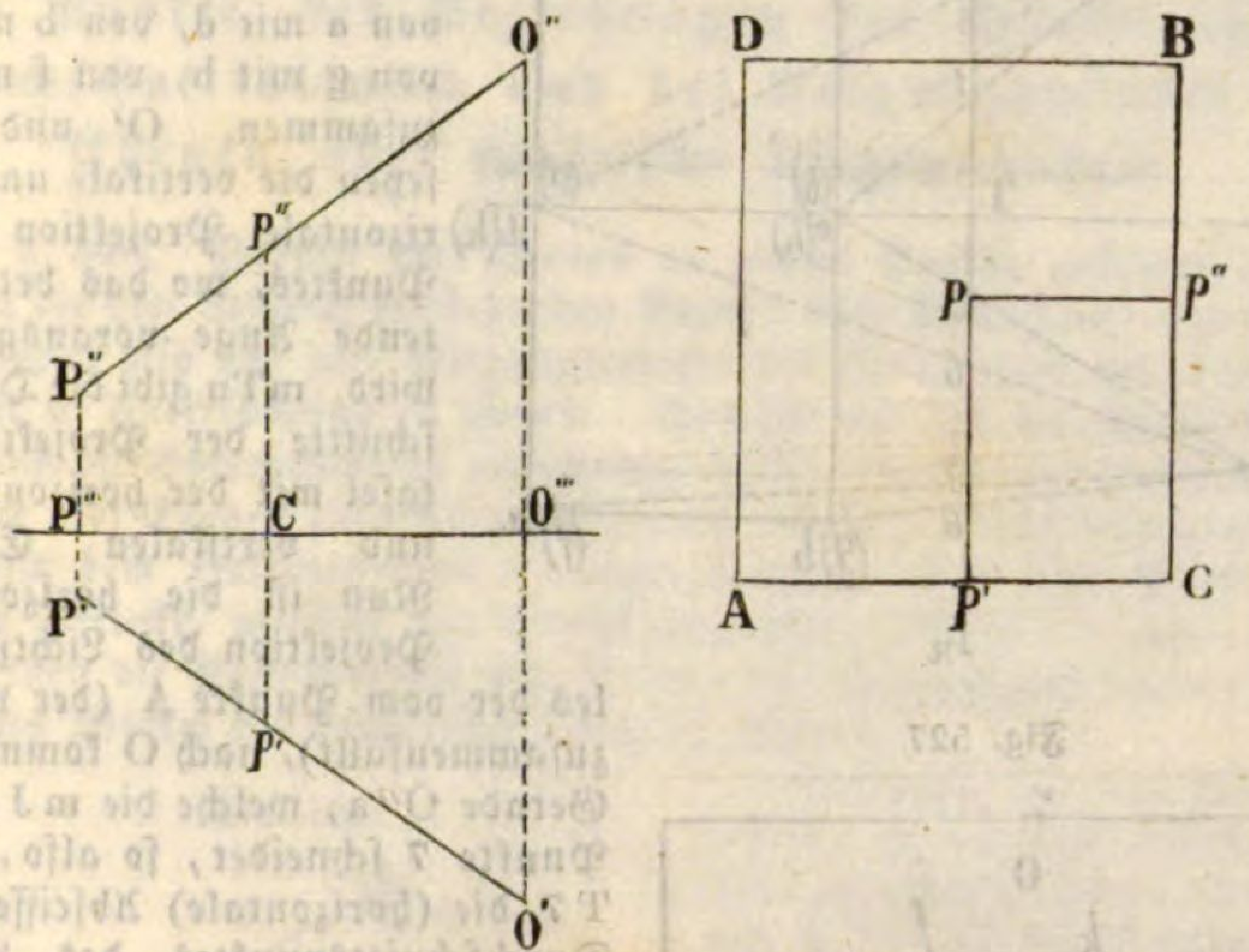
Es sey O das Auge, P der betrachtete Punkt, CD die Tafel, OX die horizontale, OY die Vertikalebene, der Lichtstrahl OP treffe die Tafel CD in p, und diese Tafel sey auf den Ebenen OX und OY

senkrecht, die sie in den Geraden A C und B C schneidet. Es seyen ferner

P′, p′, O′ } die Projektion von P, p, O auf die { Ebene O X
P″, p″, O″ } die Projektion von P, p, O auf die { Ebene O Y,

so liegt begreiflich p′ in der Geraden O′ P′ und p″ in der O″ P″,

Fig 525.

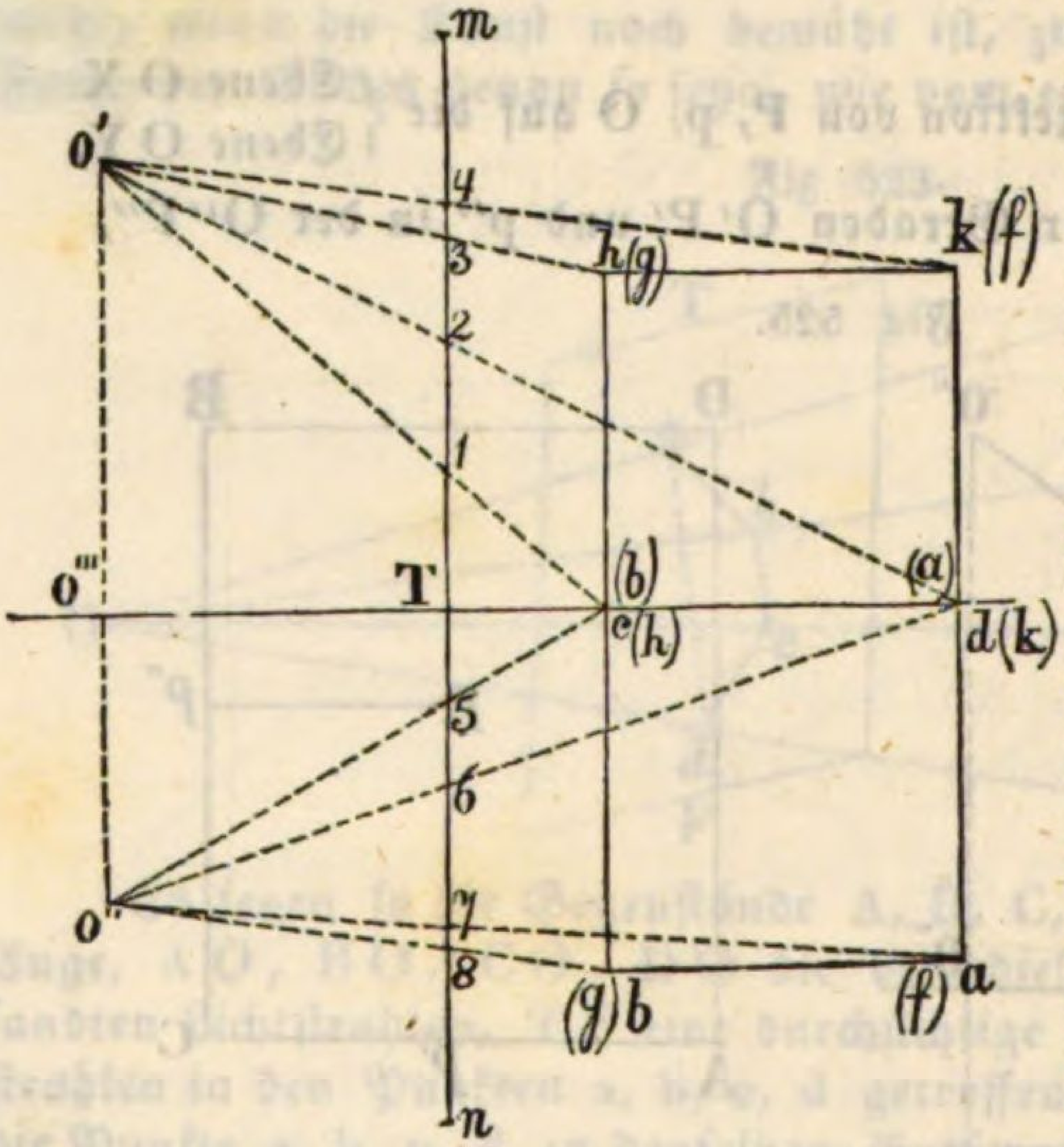


Denkt man sich nun die Tafel A C B D niedergelegt, und betrachtet C als Anfangspunkt, A C als Abscissenachse, C B als Ordinatenachse, so ist die Verzeichnung des Punktes p auf dieser Tafel ermöglichet, sobald wir c p′ und c p″ wissen. Diese zwei Stücke finde ich aber leicht, sobald die Projektionen P′P″, O′ O″ des Punktes P und des Auges O, und C B und C A die Durchschnitte der Tafel mit den Ebenen O X und O Y gegeben sind; wo die Verbindungslinie von O′ und P′ die A C schneidet, ist p′, der Durchschnitt von O″ P″ mit B C ist p″.

Habe ich also Fig. 525 P′O′ im Grundrisse, P″O″ im Aufrisse, das Loth in C als Durchschnitt der Tafel mit den beiden Ebenen, so habe ich p″ C und p′ C als Aufriß und Grundriß des Punktes p in Fig. 524. Nehme ich nun die Tafel (Fig. 525), schneide C p′ von C A und C p″ von C B ab, und ziehe durch p′ und p″ Gleichlaufende mit C B und C A, so gibt ihr Durchschnittspunkt p das perspektivische Bild des P in der oben angenommenen Stellung von O, P und der Tafel.

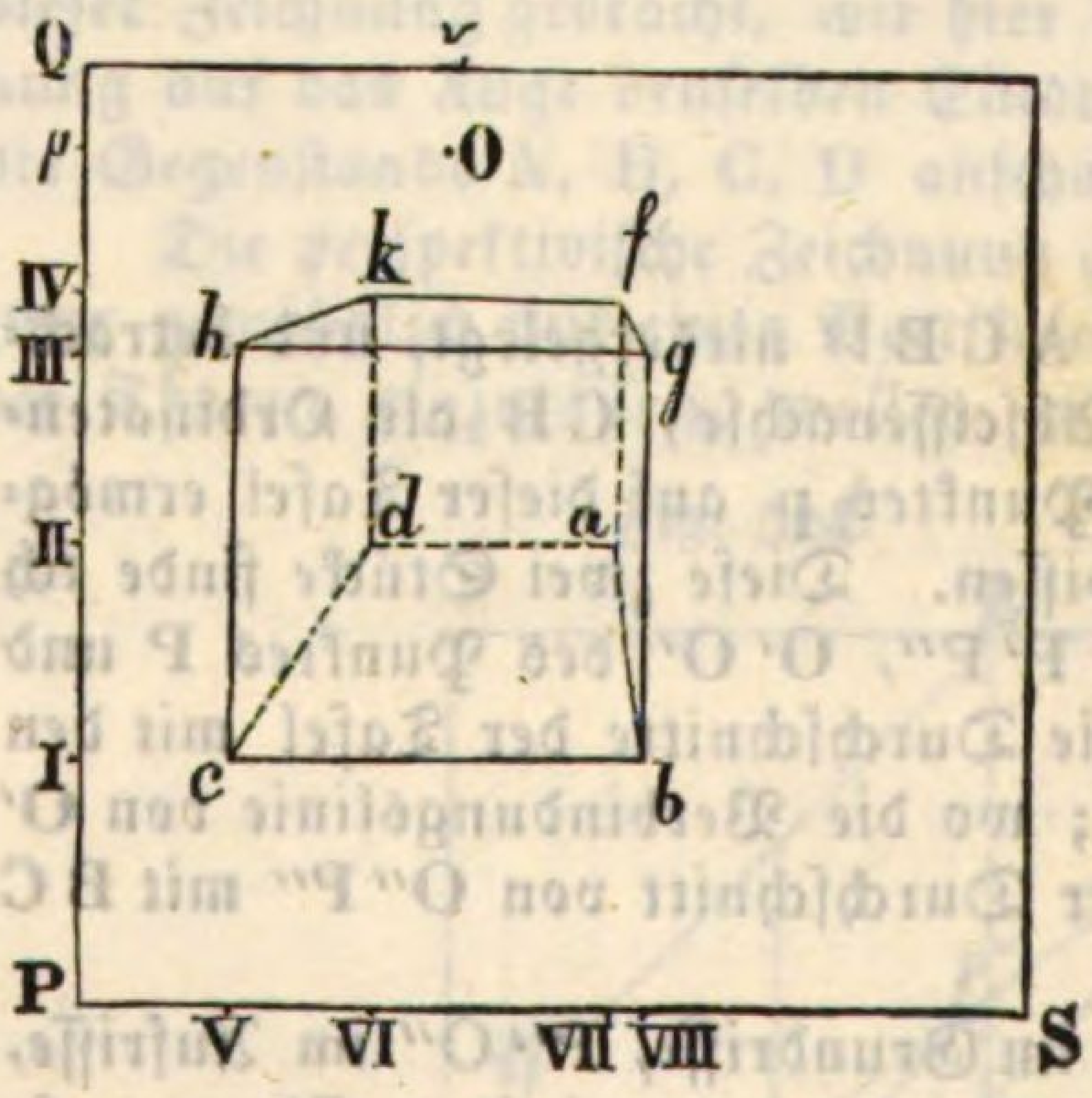
Dieses Verfahren kann auf jeden Punkt einer Figur angewendet, so ihr perspektivisches Bild gezeichnet werden. Wir wollen hier nur zum Schlusse die Perspektive eines Würfels geben. Es sey der Würfel A B C D F G H K, der in der horizontalen Ebene liege, und zwar so, daß A B C D die untere und F G H K die obere Fläche sey; es sey nun

Fig. 526.



a b c d die horizontale und h c d k die vertikale Projektion. Horizontal fällt die Projektion von f mit a, von g mit b, von h mit c, von k mit d zusammen; vertikal fällt die Projektion von a mit d, von b mit c, von g mit h, von f mit k zusammen. O′ und O″ seyen die vertikale und horizontale Projektion des Punktes, wo das betrachtende Auge vorausgesetzt wird. mTn gibt die Durchschnitte der Projektionstafel mit der horizontalen und vertikalen Ebene. Nun ist die horizontale Projektion des Lichtstrahles der vom Punkte A (der mit a zusammenfällt), nach O kommt die Gerade O″a, welche die m J n im Punkte 7 schneidet, so also, daß T 7 die (horizontale) Abscisse des Durchschnittspunktes des Lichtstrahles OA mit der Tafel ist. Eben so ist O′d oder O′(a) die vertikale Projektion desselben Lichtstrahles, daher T 2 gleich der Ordinate des Durchschnittspunktes dieses Lichtstrahles mit der Tafel. Verzeichnet man sich also auf der Seite eine Tafel, wo PS horizontal und PQ vertikal ist, macht PVII = T 7 und PII = T 2, und zieht durch die Punkte VII und II Gleichlaufende mit PQ und PS, so gibt ihr Durchschnittspunkt a das perspektivische Bild von A; macht man eben so

Fig. 527



PVIII = T 8, PI = T 1; und verfährt eben so, so erhält man b
PV = T 5, PI = T 1 » » » » » » c

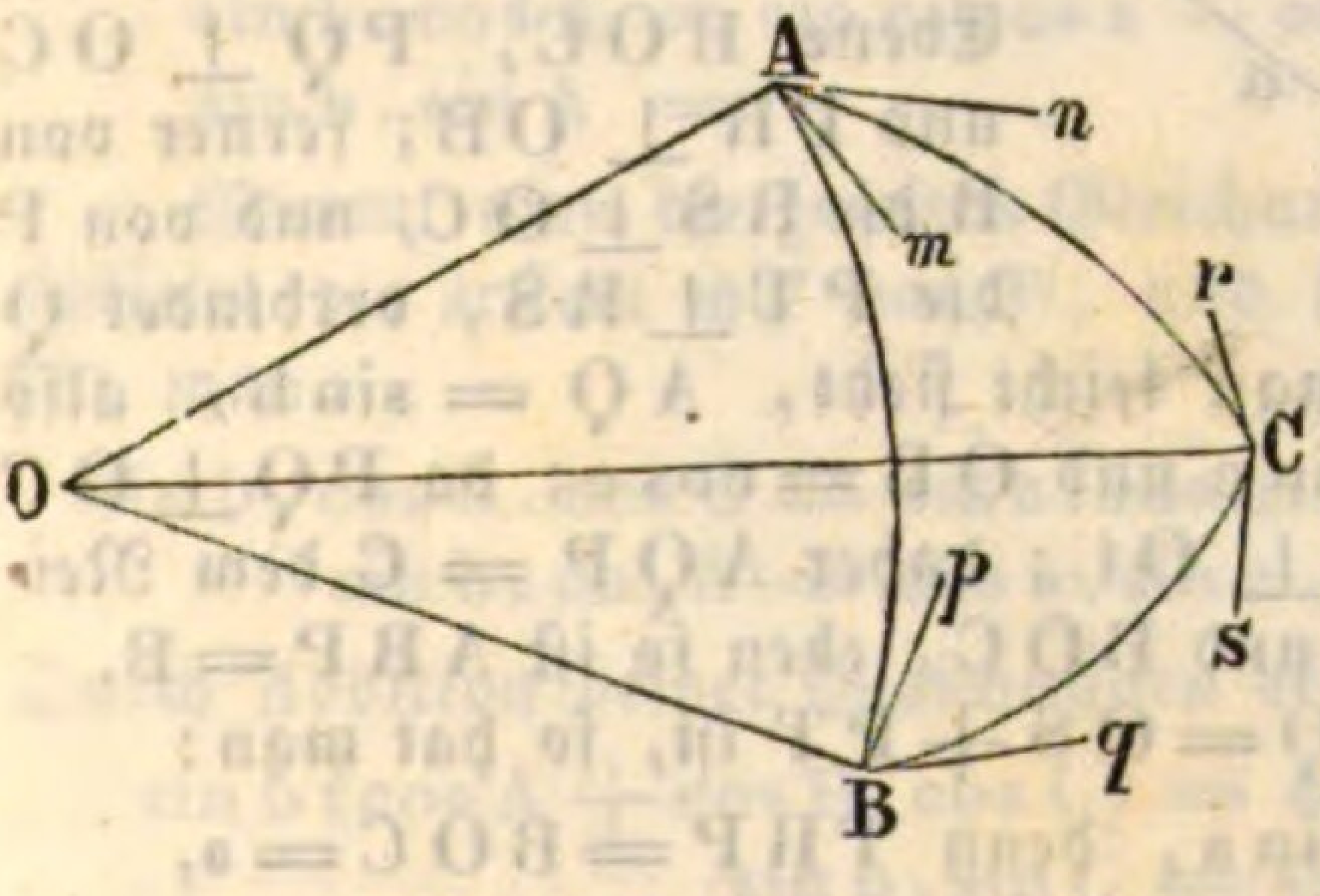
u. s. w. Verbindet man die zugehörigen Punkte, so hat man in der Figur a b c d f g h k das perspektivische Bild des Würfels in der angenommenen Stellung gegen das Auge und die Tafel. Macht man die Projektion des Punktes O (des Auges) auf die zwei Ebenen, nämlich m J = Pμ und n J = Qν, so geben durch μ und ν mit PO

und PQ gleichlaufend gezogene Gerade den Punkt O, den man den Augpunkt der Zeichnung nennt, senkrecht über O in einer Höhe gleich O′m ist der Platz des Auges zu denken, damit der Würfel in der hier gezeichneten Gestalt erscheine.

IV. Das Zusammentreffen dreier Ebenen in einem Punkte, die Beziehungen der Winkel ihrer Durchschnittslinien und der Neigungswinkel der Ebenen, oder **sphärische Trigonometrie.**

§. 398. Stoßen drei Ebenen in einem Punkte zusammen, so bilden die drei dadurch entstehenden Kanten drei Winkel mit einander; wir haben also hier drei Neigungswinkel der Ebenen und drei Kantenwinkel in Untersuchung zu ziehen. Sowohl um sich die Vorstellung, als auch die Sprechweise zu erleichtern, denkt man sich aus dem Punkte, wo die drei Ebenen zusammentreffen, eine Kugel, beschrieben gewöhnlich mit dem Halbmesser = 1; dann erscheinen diese sechs Winkel in einem Dreiecke, welches von Kreisbogenstücken gebildet ist, und zwar erscheinen die Kantenwinkel als Seiten, die Neigungswinkel der Ebenen als Winkel des sphärischen (Kugel) Dreiecks.

Fig. 528



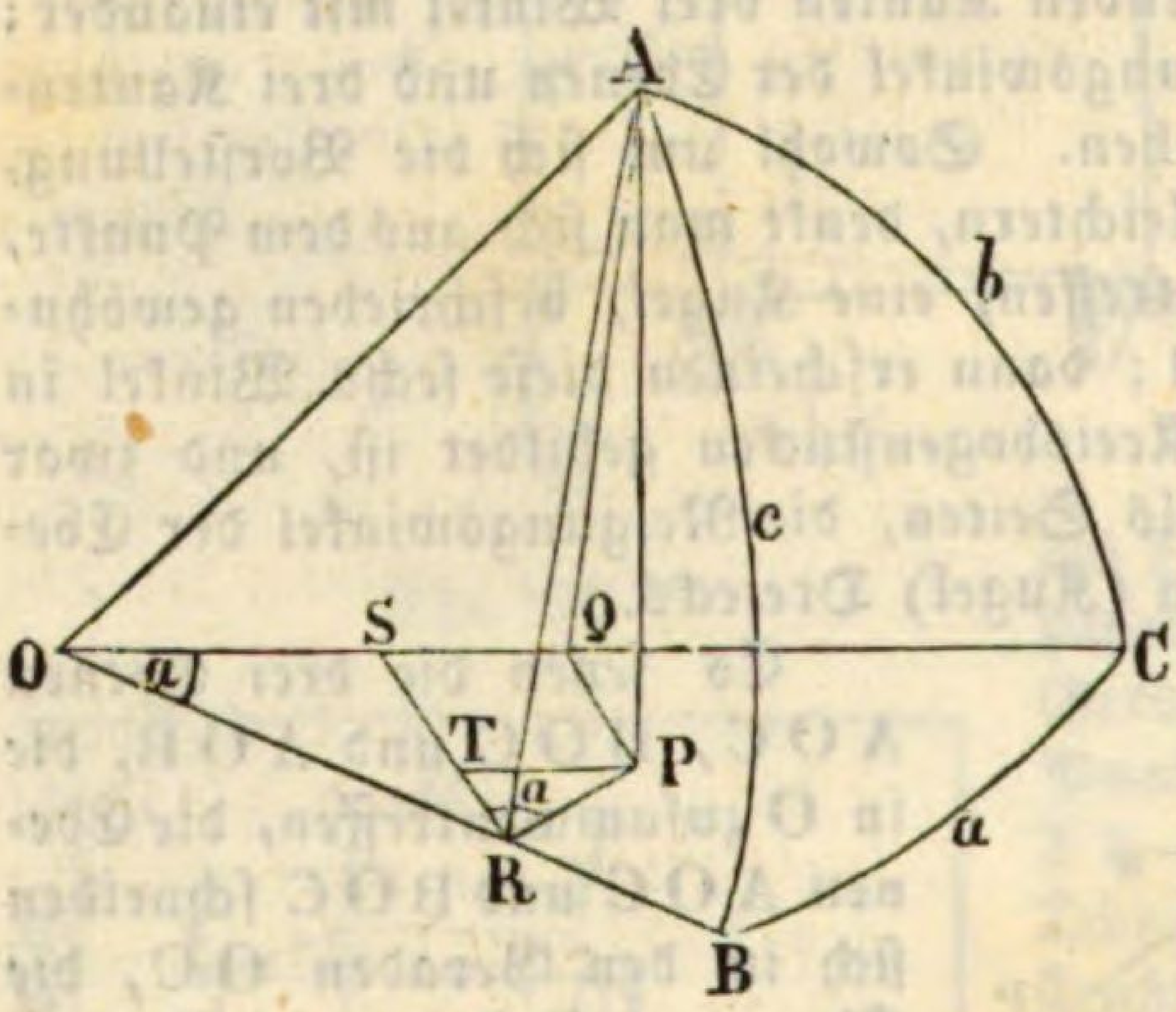
Es seyen die drei Ebenen AOC, BOC und AOB, die in O zusammentreffen, die Ebenen AOC und BOC schneiden sich in den Geraden OC, die Ebenen AOC und AOB in der AO, endlich AOB und BOC in der BO. Denken wir uns nun aus O, als Mittelpunkt mit dem Halbmesser = 1, eine Kugel beschrieben, zugleich aus O mit AO = 1 in der Ebene AOB den Kreisbogen AB, und aus O mit AO = 1 in der Ebene AOC den Kreisbogen AC, endlich aus O mit BO = AO = 1 in der Ebene BOC den Kreisbogen BC beschrieben, so schneiden die drei Kreisbogen AB, BC und AC ein Stück der Kugel ABC aus, welches man ein sphärisches Dreieck nennt.

Die Seite oder der Bogen AB hat genau so viele Grade, Minuten und Sekunden, wie der Winkel AOB; dasselbe findet mit dem Bogen AC und dem Winkel AOC, dem Bogen BC und dem Winkel BOC Statt. Wenn wir den Winkel, den die Ebenen AOB und BOC mit einander bilden, in B messen wollen, so hat man in B in der Ebene AOB die Bp ⊥ OB, und in B in der Ebene BOC die Bq ⊥ OB, und dann ist der Winkel pBq der Neigungswinkel der beiden Ebenen AOB und BOC, d. h. der Ebenen, in denen die Sei-

ten A B und B C liegen. Wenn wir in der Folge diesen Winkel A B C oder kurz B nennen, so ist immer dabei der Winkel p B q zu denken. Eben so wird durch B A C, oder kurz A der Winkel m A n, und durch A C B oder C der Winkel r C s bezeichnet. Die Aufgabe der sphärischen Trigonometrie ist es nun, die Relation zwischen diesen sechs Winkeln, oder wenn statt der Winkel A O B, A O C, B O C ihre Repräsentanten die Bogen A B, A C und B C genommen werden, zwischen den drei Winkeln und drei Seiten zu finden.

§. 399. Es sey das Körpereck A B C O, $AO = BO = CO = 1$, A B C das von der Kugel herausgeschnittene Dreieck. Bezeichnen wir die Winkel, die die Ebenen A O B mit B O C, B O C mit A O C, A O C mit A O B bilden, durch B, C, A die Größe des Bogens A B in Graden, Minuten u. s. w., d. h. die Größe des Winkels A O B bezeichnen wir durch c, eben so B C durch a und A C durch b. Fällen wir vom Punkte A das Loth A P auf die Ebene B O C, und von dem Punkte P in der Ebene B O C, $PQ \perp OC$ und $PR \perp OB$; ferner von R die $RS \perp OC$, und von P die $PT \perp RS$, verbindet Q und R mit A, so ist, wie man leicht sieht, $AQ = \sin b$, also $OQ = \cos b$, eben so $AR = \sin c$ und $OR = \cos c$; da $PQ \perp OC$ und $AP \perp BOC$, so ist $AQ \perp OC$; daher $AQP = C$ dem Neigungswinkel der Ebenen A O C und B O C, eben so ist $ARP = B$.

Fig. 529.



Da nun $OQ = OS + SQ = OS + PT$ ist, so hat man:

$$\cos b = OR \cos a + RP \sin a, \text{ denn } TRP = BOC = a,$$

und weil $OR = \cos c$ und $RP = AR \cos ARP = AR \cos B = \sin c . \cos B$ ist, so hat man:

$$\cos b = \cos c . \cos a + \sin c . \cos B . \sin a$$
$$\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B \quad (1).$$

Eben so ist:

$$PQ = AQ \cos AQP = \sin b . \cos C$$
$$PQ = RS - RT = OR \sin a - RP \cos a$$
$$= \cos c . \sin a - \sin c . \cos B . \cos a,$$

daher
$$\sin b . \cos C = \cos c . \sin a - \sin c . \cos B . \cos a$$
$$\sin b . \cos C = \sin a . \cos c - \cos a . \sin c . \cos B \quad (2).$$

Ferner ist $AP = AR \sin ARP = AQ \sin AQP$, daher

$$\sin c . \sin B = \sin b . \sin C \quad (3).$$

Die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{r} \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B \\ \sin b \,.\, \cos C = \sin a \,.\, \cos c - \cos a \,.\, \sin c \,.\, \cos B \\ \sin b \,.\, \sin C = \qquad\qquad \sin c \,.\, \sin B \end{array}\right\} \quad I$$

bilden die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie; die dritte Gleichung erlaubt auch die Schreibweise:

$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

und heißt in Worte umgesetzt: In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinusse der Seiten, wie die Sinusse der Winkel.

Der Weg unserer Untersuchung und das Ergebniß derselben wäre kein anderer gewesen, wenn der Punkt A, C, der Punkt C hingegen A geheißen hätte, dann würde aber auch statt der Seite a, c und statt c, a kommen; diese Vertauschung von A und C heißt mit andern Worten nichts anderes, als daß man statt von A auf BOC, von C ein Loth AOB fällt u. s. w Statt nun alle diese Verzeichnungen wirklich durchzunehmen, so erhalten wir das Ergebniß derselben, wenn wir in den Formeln von I das A mit C und a mit c vertauschen, und haben somit:

$$\left.\begin{array}{r} \cos b = \cos c \,.\, \cos a + \sin c \,.\, \sin a \,.\, \cos B \\ \sin b \,.\, \cos A = \sin c \,.\, \cos a - \cos c \,.\, \sin a \,.\, \cos B \\ \sin b \,.\, \sin A = \qquad\qquad \sin a \,.\, \sin B \end{array}\right\} \quad I^*$$

Nimmt man die zweiten Gleichungen der Systeme I und I*, multiplicirt die erstere mit cos B, und schreibt die andere darunter, so hat man:

$$\sin b \,.\, \cos B \,.\, \cos C = \sin a \,.\, \cos c \,.\, \cos B - \cos a \,.\, \sin c \,.\, \cos^2 B$$
$$\sin b \,.\, \cos A = \cos a \,.\, \sin c - \sin a \,.\, \cos c \,.\, \cos B.$$

Durch Addition beider Gleichungen ergibt sich:

$$\sin b\,(\cos A + \cos B \,.\, \cos C) = \cos a \,.\, \sin c \,.\, \sin^2 B; \text{ da nun}$$
$$\sin b \,.\, \sin C = \sin c \,.\, \sin B,$$

so erhält man durch Division beider Gleichungen:

$$\frac{\cos A + \cos B \;\; \cos C}{\sin C} = \cos a \,.\, \sin B, \text{ und somit}$$
$$\cos A + \cos B \,.\, \cos C = \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a, \text{ oder}$$
$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a \quad (4).$$

Dasselbe Gesetz muß auf gleiche Weise für die übrigen Seiten und Winkel gelten, daher:

$$\cos B = -\cos A \,.\, \cos C + \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos a.$$

§. 400. Die entwickelten Formeln werden uns die Mittel an die Hand geben, aus drei bekannten Stücken eines sphärischen Dreiecks

die drei andern zu finden. Nehmen wir zuerst die Aufgabe vor, aus den drei Seiten die drei Winkel zu finden. Man hat:

$$\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B, \text{ woraus}$$

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}.$$

Wir wollen diese Gleichung zur Gleichung $1 = 1$, addiren und subtrahiren, so ist

$$1 + \cos B = \frac{\sin a . \sin c + \cos b - \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}$$

$$1 - \cos B = \frac{\sin a . \sin c - \cos b + \cos a . \cos c}{\sin a . \sin c}.$$

Da nun $\cos B = \cos^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{B}{2}$, so ist $1 + \cos B = 2\cos^2\frac{B}{2}$, $1 - \cos B = 2\sin^2\frac{B}{2}$, daher:

$$2\cos^2\frac{B}{2} = \frac{\cos b - \cos(a + c)}{\sin a . \sin c}$$

$$2\sin^2\frac{B}{2} = \frac{\cos(a - c) - \cos b}{\sin a . \sin c}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos\varphi - \cos\psi = 2\sin\frac{\varphi + \psi}{2}\sin\frac{\psi - \varphi}{2}, \text{ so hat man:}$$

$$\cos^2\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{b + a + c}{2}\sin\frac{a + c - b}{2}}{\sin a . \sin c}$$

$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{\sin\frac{a - c + b}{2}\sin\frac{b - a + c}{2}}{\sin a . \sin c}.$$

Nennet man nun $\frac{a + b + c}{2} = s$, so ist $\frac{a + c - b}{2} = s - b$; $\frac{a - c + b}{2} = s - c$; $\frac{b - a + c}{2} = s - a$, und somit:

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - b)}{\sin a . \sin c}}$$

$$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - c)}{\sin a . \sin c}}.$$

Auf dieselbe Art ergibt sich:

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - a)}{\sin b . \sin c}}; \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - b)\sin(s - c)}{\sin b . \sin c}}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s . \sin(s - c)}{\sin a . \sin b}}; \quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s - a)\sin(s - b)}{\sin a . \sin b}}.$$

§. 401 Die Gleichung:

$$\cos A = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a \text{ gibt}$$

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C},$$

daher auf ähnliche Art wie früher:

$$1 + \cos a = \frac{\sin B . \sin C + \cos A + \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

$$1 - \cos a = \frac{\sin B . \sin C - \cos A - \cos B . \cos C}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos A + \cos (B - C)}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{-\cos A - \cos (B + C)}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{2 \cos \frac{A + B - C}{2} . \cos \frac{A - B + C}{2}}{\sin B . \sin C}$$

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{-2 \cos \frac{A + B + C}{2} . \cos \frac{B + C - A}{2}}{\sin B . \sin C}.$$

Nennt man der Kürze halber $\frac{A + B + C}{2} = \Sigma$, so ist

$$\frac{B + C - A}{2} = \Sigma - A; \quad \frac{A - B + C}{2} = \Sigma - B; \quad \frac{A + B - C}{2} = \Sigma - C,$$

daher:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\Sigma - B) \cos (\Sigma - C)}{\sin B . \sin C}}$$

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos \Sigma . \cos (\Sigma - A)}{\sin B . \sin C}}.$$

Auf dieselbe Art ergibt sich:

$$\cos \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\Sigma - A) \cos (\Sigma - C)}{\sin A . \sin C}}; \quad \sin \frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos \Sigma . \cos (\Sigma - B)}{\sin A . \sin C}}$$

$$\cos \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos (\Sigma - A) \cos (\Sigma - B)}{\sin A . \sin B}}; \quad \sin \frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos \Sigma . \cos (\Sigma - C)}{\sin A . \sin B}}.$$

§. 402. Aus den Resultaten des vorletzten Paragraphen ergeben sich folgende Zusammenstellungen:

$$\cos \frac{A}{2} . \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin s}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin (s - a) \sin (s - b)}{\sin a . \sin b}}, \text{ daher}$$

$$\cos \frac{A}{2} . \cos \frac{B}{2} = \frac{\sin s}{\sin c} . \sin \frac{C}{2}; \text{ eben so}$$

$$\sin \frac{A}{2} . \sin \frac{B}{2} = \frac{\sin (s - c)}{\sin c} . \sin \frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A}{2}\,.\cos\frac{B}{2}=\frac{\sin(s-b)}{\sin c}\,.\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2}\,.\sin\frac{B}{2}=\frac{\sin(s-a)}{\sin c}\,.\cos\frac{C}{2}.$$

Addirt und subtrahirt man hier die erste und zweite Gleichung, eben so die dritte und vierte Gleichung, so hat man:

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin s+\sin(s-c)}{\sin c}\,.\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin c}\,.\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin c}\,.\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin(s-b)-\sin(s-a)}{\sin c}\,.\cos\frac{C}{2}.$$

Da aber $\sin\varphi+\sin\psi=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\,.\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$ und $\sin\varphi-\sin\psi=2\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\,.\cos\frac{\varphi+\psi}{2}$ ist, so hat man:

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\left(s-\frac{c}{2}\right).\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}\,.\cos\frac{c}{2}}\,.\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\frac{c}{2}\,.\cos\left(s-\frac{c}{2}\right)}{\sin\frac{c}{2}\,.\cos\frac{c}{2}}\,.\sin\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A+B}{2}=\frac{\sin\left(\frac{s}{2}-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\cos\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}\,.\cos\frac{c}{2}}\,.\cos\frac{C}{2}$$

$$\sin\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}\,.\cos\left(s-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)}{\sin\frac{c}{2}\,.\cos\frac{c}{2}}\,.\cos\frac{C}{2}$$

Da nun $s=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}$ ist, so hat man:

$$\cos\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,.\sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

$$\cos\frac{A+B}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,.\sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

$$\sin\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\cos\frac{C}{2} \quad (3)$$

$$\sin\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.\cos\frac{C}{2} \quad (4).$$

Diese vier Gleichungen heißen nach ihrem Erfinder die Gauß'schen Analogien.

Dividiren wir nun die dritte durch die zweite, die vierte durch die erste; ferner die erste durch die zweite, und die vierte durch die dritte Gleichung, so hat man:

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.\operatorname{cotg}.\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{cotg}.\frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+b}{2}}.\operatorname{tang}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tang}\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.\operatorname{tang}\frac{c}{2}.$$

Diese vier Gleichungen heißen die Neper'schen Analogien, und sie dienen dazu, aus a, b und C das A und B, oder aus A, B und c das a und b zu finden, d. h. aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die zwei andern Winkel, oder aus zwei Winkeln und der anliegenden Seite die beiden andern Seiten zu finden.

§. 403 Wir hatten im Vorhergehenden gefunden:

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B$$

$$\sin b.\cos C = \sin a.\cos c - \cos a.\sin c.\cos B$$

$$\sin b.\cos A = \cos a.\sin c - \sin a.\cos c.\cos B.$$

Auf dieselbe Art muß seyn:

$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos C$$
$$\sin c . \cos A = \cos a . \sin b - \sin a . \cos b . \cos C$$
$$\sin c . \cos B = \sin a . \cos b + \cos a . \sin b . \cos C$$
$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$
$$\sin a . \cos B = \cos b . \sin c - \sin b . \cos c . \cos A$$
$$\sin a . \cos C = \sin b . \cos c - \cos b . \sin c . \cos A.$$

Ferner ist noch:

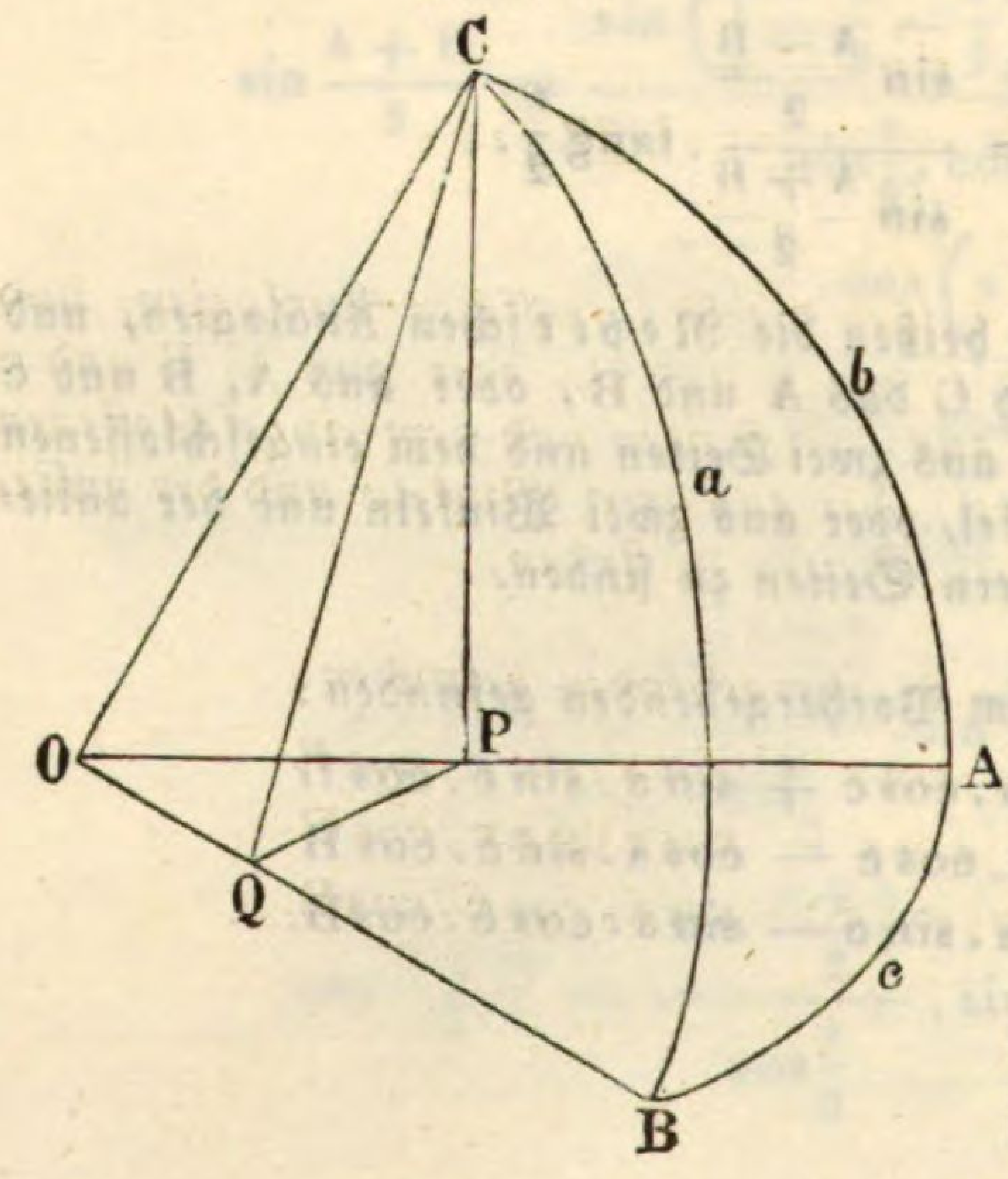
$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \text{ und}$$
$$\cos A = - \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$$
$$\cos B = - \cos A . \cos C + \sin A . \sin C . \cos b$$
$$\cos C = - \cos A . \cos B + \sin A . \sin B . \cos c.$$

Ist nun der Winkel $A = 90$, d. h. das sphärische Dreieck rechtwinklich, wo a die Hypothenuse ist, so hat man, da $\cos A = 0$, $\sin A = 1$ wird, aus den letzten 7 Gleichungen:

$$\cos a = \cos b . \cos c \qquad (1)$$
$$\sin a . \cos B = \cos b . \sin c \qquad (2)$$
$$\sin a \ \cos C = \sin b . \cos c \qquad (3)$$
$$\sin b = \sin a . \sin B \qquad (4)$$
$$\sin c = \sin a . \sin C \qquad (5)$$
$$\cos a = \text{cotg.} B . \text{cotg } C \qquad (6)$$
$$\cos B = \sin C . \cos b \qquad (7)$$
$$\cos C = \sin B . \cos c \qquad (8),$$

welche Gleichungen die Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke darbieten.

Fig 530.



Diese Ergebnisse sind für uns von solcher Wichtigkeit, daß wir sie uns auch durch unmittelbare geometrische Untersuchungen erwerben wollen.

Es sey das in A rechtwinklige Dreieck ABC, in O der Mittelpunkt der Kugel $OA = OB = OC = 1$. Nennt man wie früher AB, BC, CA, nach einander c, a, b, fällt von C das Loth CP auf AOB, welches die AO treffen muß, zieht ferner $CQ \perp OB$, so ist QP die Projektion von CQ und der Winkel $CQP = B$, so hat man:

$$CP = \sin b, \quad OP = \cos b, \quad CQ = \sin a, \quad OQ = \cos a$$
$$OQ = OP . \cos c, \text{ d. h. } \cos a = \cos b . \cos c \qquad (1),$$

d. h. der Cosinus der Hypothenuse gleich dem Produkte der Cosinusse der beiden Katheten.

$$PQ = CQ . \cos B = \sin a . \cos B; \quad PQ = OP . \sin c = \cos b . \sin c,$$
$$\text{daher} \quad \sin a . \cos B = \cos b . \sin c \qquad (2).$$

$$CP = CQ . \sin B = \sin a . \sin B, \text{ daher } \sin b = \sin a . \sin B \qquad (3),$$

d. h. der Sinus einer Kathete ist gleich dem Sinus der Hypothenuse, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Kathete gegenüberstehenden Winkels.

Vertauscht man in den Gleichungen (2) und (3) b mit c und B mit C, so hat man:

$$\sin a \ \cos C = \cos c . \sin b \quad (4); \quad \sin c = \sin a . \sin C \quad (5).$$

Substituirt man den Werth von sin b aus (3) in (4), und eben so den Werth von sin c aus (5) in (2), so hat man:

$$\cos C = \cos c . \sin B \quad (6); \quad \cos B = \cos b . \sin C \quad (7).$$

Die Multiplikation von (6) und (7), mit Rücksicht auf (1) gibt:

$$\cos a = \operatorname{cotg.} B . \operatorname{cotg.} C \qquad (8).$$

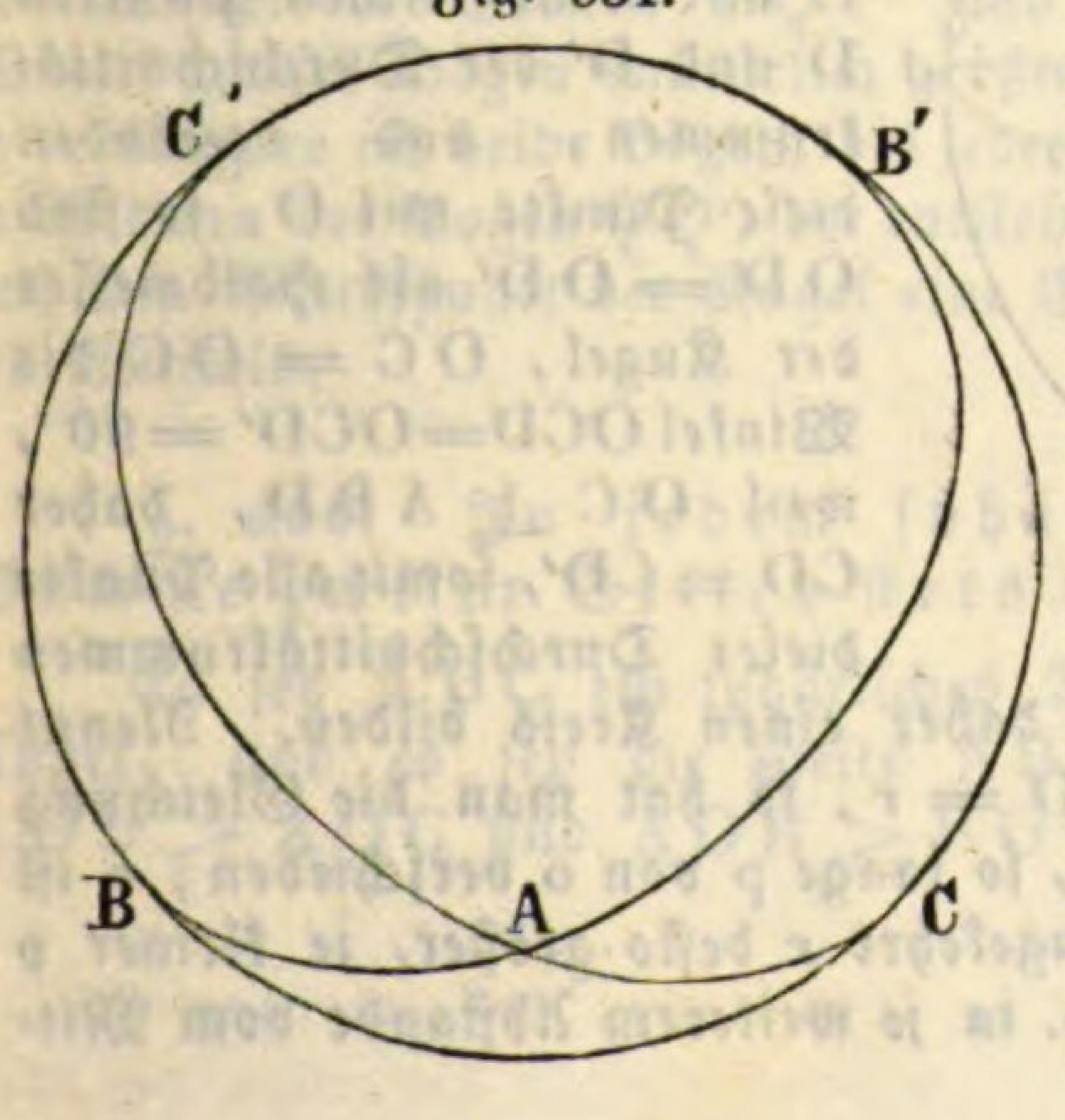
Die Gleichungen (6) und (7) geben:

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B},$$

d. h. der Cosinus einer Kathete ist gleich dem Cosinus des gegenüberliegenden Winkels, dividirt durch den Sinus des anliegenden Winkels.

§. 404. Diese Ergebnisse verschaffen noch anderweitige Belehrung: da cos a = cos b . cos c, wobei A = 90° ist, so sieht man, daß entweder cos b, cos c und cos a alle drei positiv sind, oder daß cos b und cos c negativ, dagegen cos a positiv ist, oder cos b und cos a negativ, dagegen cos c positiv, kurz entweder sind alle drei Cosinus positiv, oder es ist nur einer positiv, d. h. bei einem sphärischen rechtwinkligen Dreiecke sind entweder alle drei Seiten kleiner als 90°, oder es sind zwei größer als 90° und eine kleiner als 90°.

Fig. 531.



Es sey das in A rechtwinklige Dreieck A B C, so ist im Dreiecke A B C sowohl die Hypothenuse, als die Katheten alle kleiner als 90°; im Dreiecke A B C′ ist die Kathete A B < 90°, Kathete A C′ > 90°, die Hypothenuse B C′ > 90°; im Dreiecke A B′ C

ist Kathete AC $<$ 90°, AB′ $>$ 90°, Hypothenuse B′C $>$ 90°, im Dreiecke AB′C′ sind die Katheten AC′ und AB′ beide $>$ 90°, die Hypothenuse B′C′ $<$ 90°.

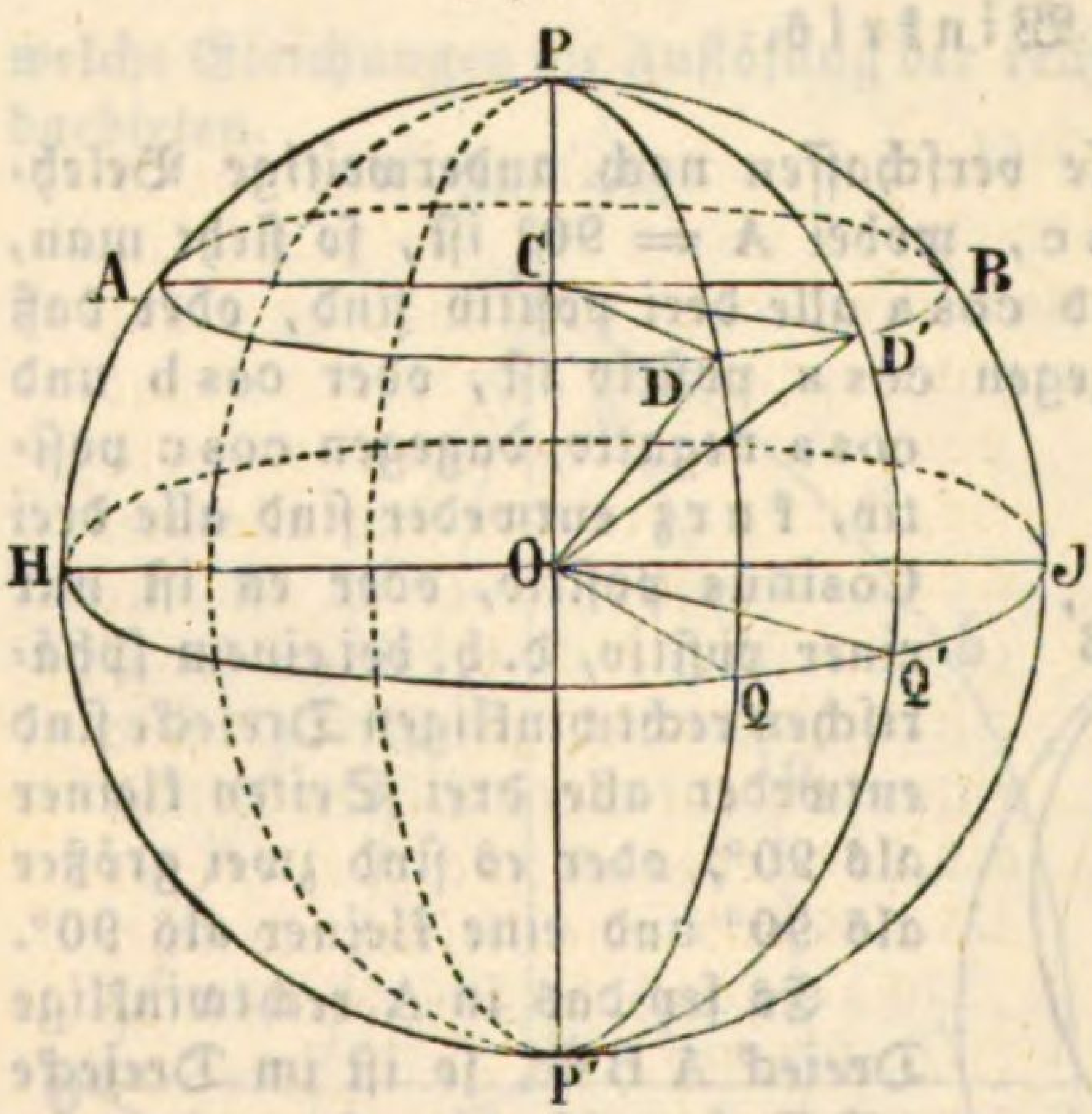
Die Formeln $\cos B = \sin C . \cos b$, $\cos C = \sin B . \cos c$ lehren uns, daß, da sin C stets positiv ist (da wir nur den hohlen Winkel C betrachten), cos B und cos b, eben so cos C und cos c stets dasselbe Zeichen, d. h. daß daher B und b, eben so C und c stets entweder beide $>$ 90°, oder beide $<$ 90° sind. Diese Eigenschaft pflegt man dadurch auszudrücken, daß man sagt: **In einem sphärischen rechtwinkligen Dreiecke ist die Kathete und der ihr gegenüberstehende Winkel stets gleichartig.**

In unserer Figur hier sehen wir, daß der Kathete AB $<$ 90° der Winkel ACB $<$ 90, der Kathete AB′ $>$ 90° der ACB′ $>$ 90° gegenüber steht.

§ 405. Nachdem uns die Untersuchung der Winkel, welche entstehen, wenn drei Ebenen in einem Punkte zusammenstoßen, auf die Kugel geführt, so wollen wir hier noch ein paar Eigenschaften derselben, die wir im Folgenden brauchen, in Untersuchung ziehen.

Die bekannte Eigenschaft der Kugel ist, daß alle Punkte der Oberfläche vom Mittelpunkte gleich weit abstehen. **Schneidet man die Kugel durch irgend eine Ebene, so wird die Durchschnittsfigur jederzeit ein Kreis seyn**

Fig. 532.



Es sey O der Mittelpunkt der Kugel und ADB ein ebener Durchschnitt, welcher begreiflich sicher eine in sich zurückkehrende Krumme liefern wird. Fällen wir von O das Loth OC auf die Ebene ADB, verbinden wir den Fußpunkt C mit willkürlichen Punkten D und D′ der Durchschnittskrummen, und verbinden diese Punkte mit O, so sind OD = OD′ als Halbmesser der Kugel, OC = OC die Winkel OCD = OCD′ = 90°, weil OC $\perp$ ABD, daher CD = CD′, somit alle Punkte dieser Durchschnittskrummen von C gleich weit abstehen, und daher einen Kreis bilden. Nennt man OD = R, OC = p, CD = r, so hat man die Gleichung $r^2 = R^2 - p^2$, daher stets $r < R$, so lange p von o verschieden; r ist desto kleiner, je größer p, und umgekehrt r desto größer, je kleiner p ist, für p = o wird r = R, d. h. in je weiterem Abstande vom Mit-

telpunkte die schneidende Ebene die Kugel trifft, desto kleiner ist der Halbmesser des Durchschnittskreises; je näher hingegen die schneidende Ebene an den Mittelpunkt der Kugel kommt, desto größer ist der Kreis; am größten, wenn die schneidende Ebene durch den Mittelpunkt geht, wo dann der Halbmesser des Durchschnittskreises gleich ist dem Halbmesser der Kugel. Denn geht in unserer Figur die schneidende Ebene HQJ durch den Mittelpunkt O, so muß ja jeder Punkt Q, Q′ der Durchschnittsfigur von O dieselbe Entfernung haben, weil in der Oberfläche der Kugel liegend.

Jeder Kreis in der Kugel, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt der Kugel ist, heißt ein größter Kreis. Jeder andere ein kleinerer Kreis der Kugel. Bei einem sphärischen Dreiecke ist begreiflich nur von Bögen größter Kreise die Rede.

Die Gerade OC, welche auch auf HQJ senkrecht stehen soll, trifft die Kugel in den Punkten P und P′; wenn ich nun durch die Gerade PP′ was immer für eine Ebene (oder Kreis) PQ′P′ oder PQP′ durchlege, so ist sowohl $POQ = P'OQ = 90°$, als $POQ' = P'OQ' = 90°$, daher die Bögen

$$PQ = P'Q = PQ' = P'Q' = 90°.$$

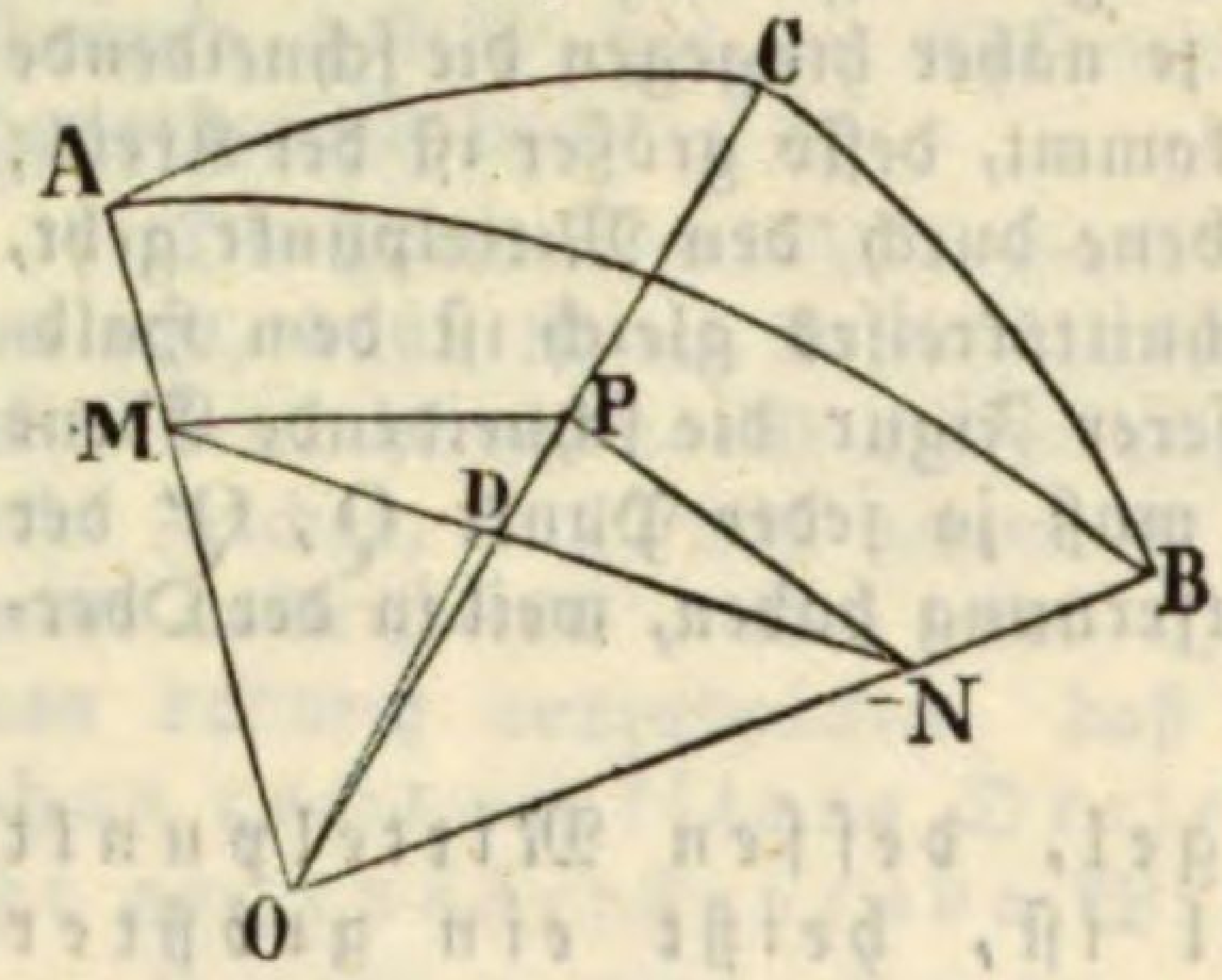
Die Punkte P und P′ heißen die Pole des Kreises HQJ, ihr Abstand von allen Punkten dieses Kreises, auf der Kugel gemessen, ist 90°, die Gerade PP′ selbst heißt die Achse des Kreises HQJ.

Wenn zwei größte Kreise PQP′ und PQ′P′ sich schneiden, so schneiden sie sich stets in einem Durchmesser PP′ der Kugel, daher sich ihre Umfänge stets halbiren. Um den Winkel der Ebenen zweier größten Kreise PQP′ und PQ′P′ zu bestimmen lege ich eine Ebene HQJ senkrecht auf ihren Durchschnittsdurchmesser PP′, so ist dann der Winkel QOQ′ der Winkel ihrer Ebenen; denn da $OP \perp HQJ$, so ist $OP \perp OQ$ und $OP \perp OQ'$, daher der Bogen QQ′ das Maß des Winkels der Ebenen PQP′ und PQ′P′ ist. Will ich also den Winkel zweier Bögen (natürlich größter Kreise) PQ und PD′ messen, so verlängere ich beide Bögen, bis jeder ein Quadrant ist PQ und PQ′, so ist dann der Bogen QQ′, der entsteht, wenn durch die Punkte Q, Q′ und den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene gelegt wird, das Maß dieses Winkels.

§. 406. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe zweier Seiten stets größer als die dritte.

Es sey ABC ein sphärisches Dreieck, O der Mittelpunkt der Kugel, und es sey die Seite AB die größte, d. h. der Winkel $AOB > AOC$ und $AOB > BOC$, so wollen wir beweisen, daß

Fig 533.



$BC + AC > AB$ ist. Ziehen wir in der Ebene AOB die Gerade MN, und machen den Winkel $DON = COB$, machen ferner $OP = OD$, so ist $ON = ON$, $OP = OD$, $DON = PON$, daher $DN = PN$. Da nun

$$MN < MP + PN, \text{ also}$$

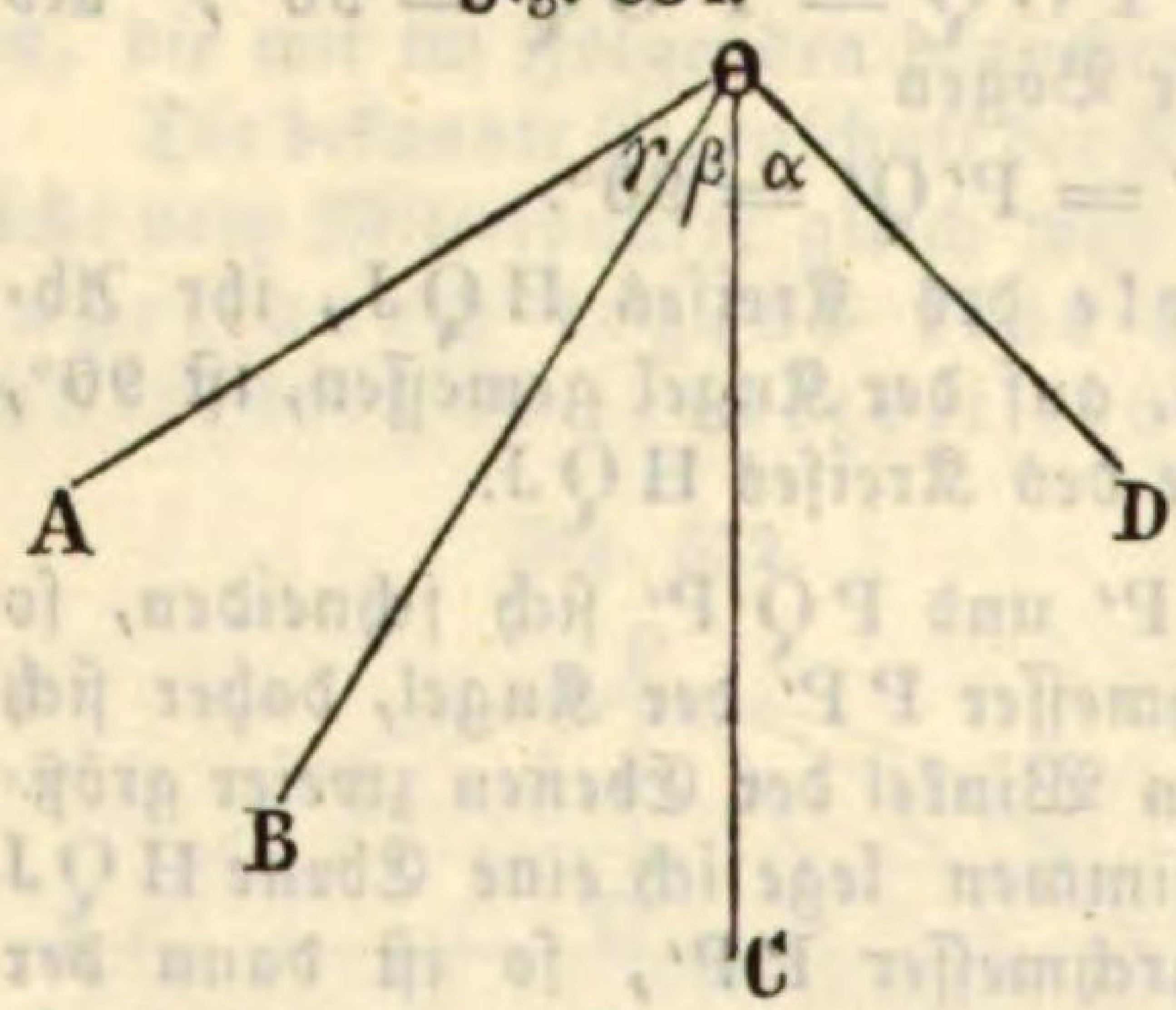
$MN - PN < MP$, d. h. $MD < MP$ ist, zugleich aber $MO = MO$ und $OD = OP$, so muß $MOD < MOP$, daher beiderseits DON hinzuaddirt,

$$MOD + DON < MOP + PON,$$

oder $AOB < AOC + BOC$, und somit $AB < AC + BC$.

Dieser Satz läßt sich noch auf eine andere, vielleicht einleuchtendere Weise nachweisen. Denken wir uns die drei ebenen Winkel, die, in einem Punkte zusammentreffend, das Körpereck bilden, in eine Ebene ausgebreitet.

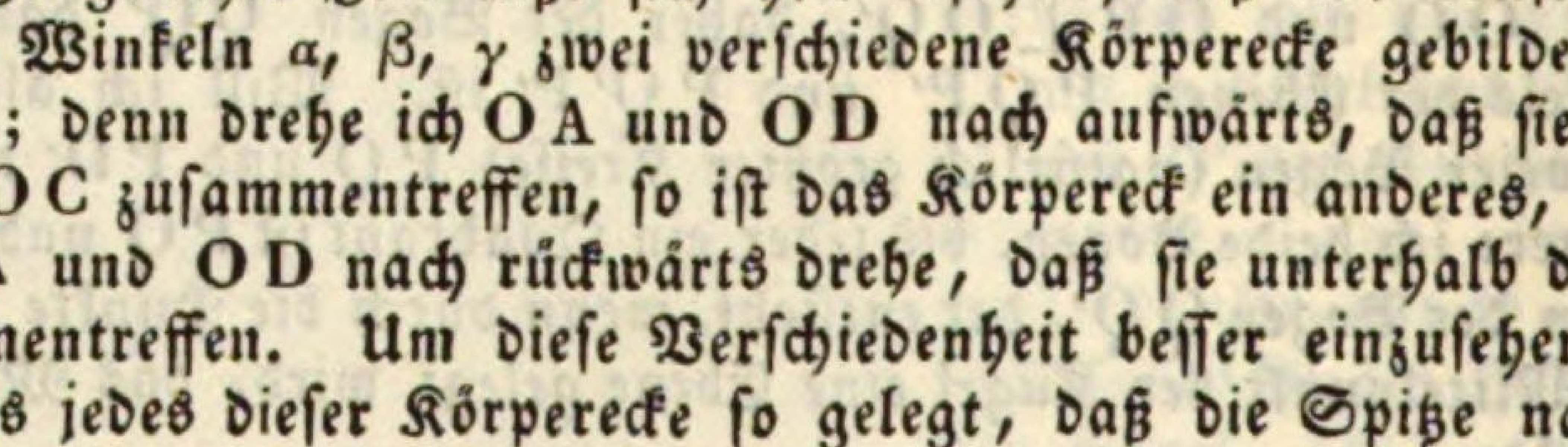
Fig. 534.



Wenn ich nun den Winkel α um die Kante OC, und den Winkel γ um die Kante OB beide gegen einander drehe, und zwar so lange, bis die Kanten OA und OD zusammenfallen, so entsteht das Körpereck. Wäre nun $\alpha + \gamma = \beta$, so würden AO und OD in der Ebene BOC zusammentreffen, und es entstünde kein Körpereck. Wäre $\alpha + \gamma < \beta$, so würden begreiflich OA und OD gar nicht zusammentreffen.

Zu gleicher Zeit läßt sich hier ersehen, daß aus denselben drei ebenen Winkeln α, β, γ zwei verschiedene Körperecke gebildet werden können; denn drehe ich OA und OD nach aufwärts, daß sie oberhalb der BOC zusammentreffen, so ist das Körpereck ein anderes, als wenn ich OA und OD nach rückwärts drehe, daß sie unterhalb der BOC zusammentreffen. Um diese Verschiedenheit besser einzusehen, denken wir uns jedes dieser Körperecke so gelegt, daß die Spitze nach oben, und BOC unten, und OA oben kommt, so ist im ersten Falle α rechts und γ links, im zweiten umgekehrt.

Fig 535.

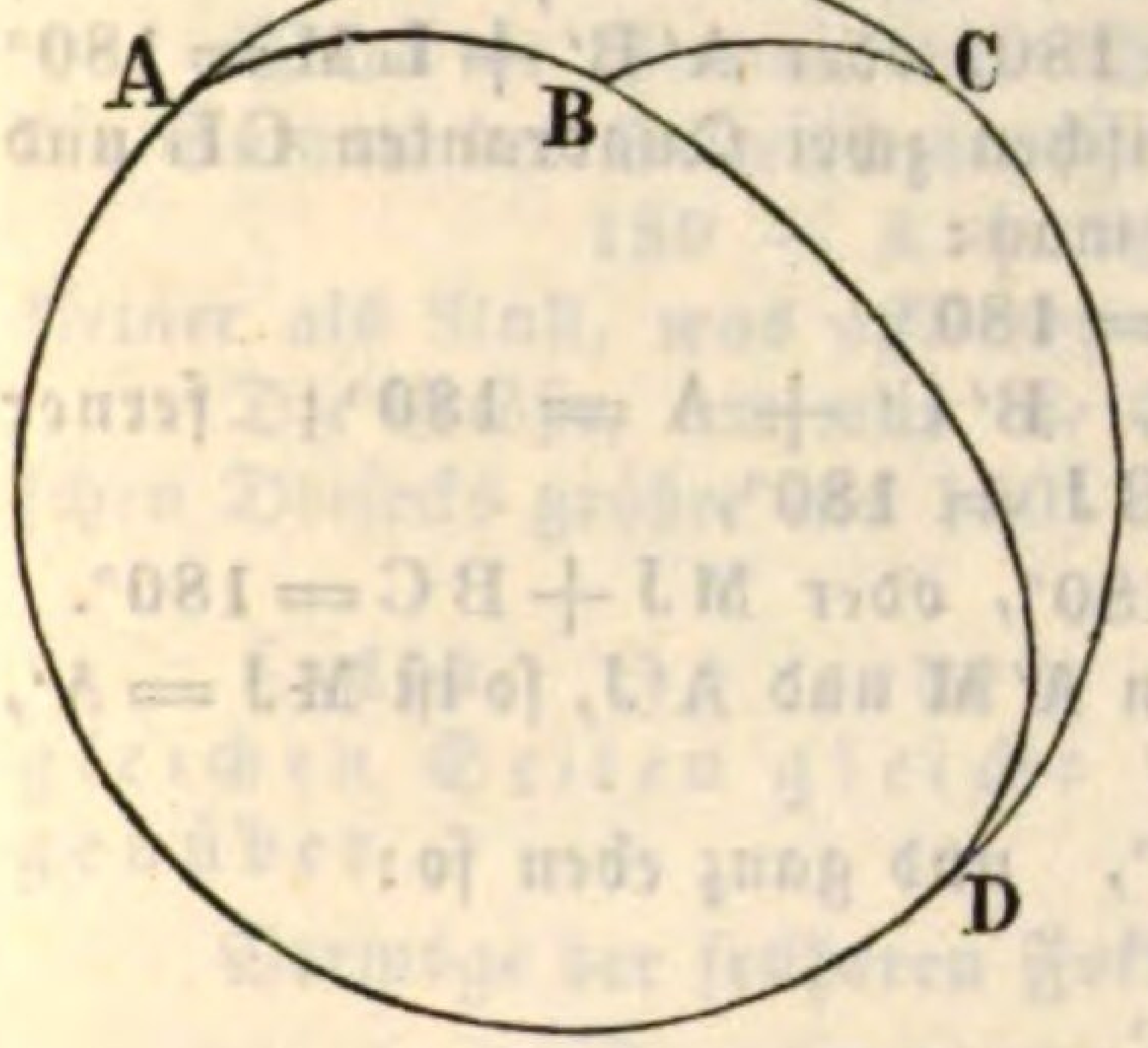


Daraus ersehen wir, daß bei zwei sphärischen Dreiecken die drei

Seiten des einen gleich seyn können den drei Seiten des andern, ohne daß deßhalb die beiden Dreiecke einerlei sind.

§. 407. In jedem sphärischen Dreiecke ist die Summe der drei Seiten stets kleiner, als der Umfang eines größten Kreises.

Fig. 536



Es sey das sphärische Dreieck ABC, verlängern wir AC zum Vollkreis, und AB zum Halbkreis, bis sie sich in D treffen, so ist AD ein Halbkreis, denn zwei größte Kreise schneiden sich immer in Halbkreisen. Im Dreiecke BCD ist $BC < BD + CD$; addirt man nun beiderseits $AB + AC$ hinzu, so hat man:

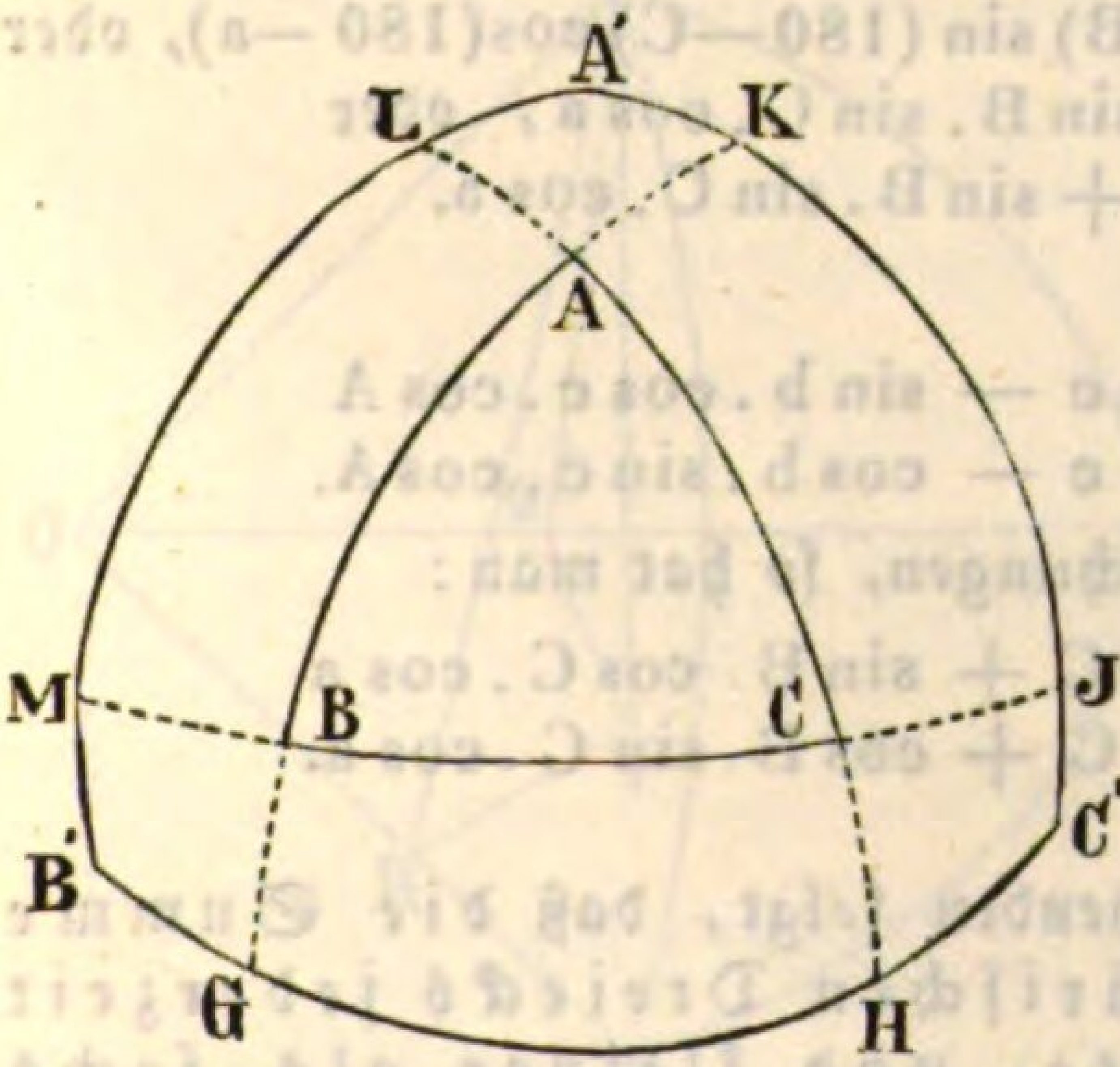
$$AB + AC + BC < BD + CD + AB + AC, \text{ oder}$$
$$AB + AC + BC < (BD + AB) + (AC + CD), \text{ d. h.}$$
$$AB + AC + BC < ACD + ABD,$$

d. h. $AB + AC + BC$ kleiner als der ganze Umfang.

§. 408. Wenn man die drei Eckpunkte eines sphärischen Dreiecks als Pole nimmt, die dazu gehörigen Kreisbögen beschreibt, so bilden diese ein sphärisches Dreieck, dessen Eckpunkte die Pole der Seiten des gegebenen Dreiecks sind.

Es sey ABC das gegebene sphärische Dreieck, ich verlängere die Seiten AB und AC, bis AG und AH beide Quadranten sind, durch G und H lege ich den Bogen GH eines größten Kreises; eben so mache ich $BK = BJ = 90°$, und ziehe KJ, $CL = CM = 90°$, die ML schneide GH in B′ und KJ in A′; ferner treffen sich GH und KJ in C′.

Fig. 537



Weil A der Pol von B′C′ ist, so ist A von B′ 90° entfernt, eben so, weil C der Pol von A′B′, so ist auch C von B′ 90° entfernt, daher B′ sowohl von A, als C um 90° entfernt ist, somit ist B′ der Pol des Bogens AC eben so ist A′ der Pol von BC und C′ der von AB.

Die beiden Dreiecke ABC und A′B′C′ heißen gegen einander Polardreiecke

Jeder Winkel des einen Polardreiecks ist die Ergänzung zu 180° der entgegengesetzten Seite des andern Polardreiecks und umgekehrt.

Da $A'M = 90°$ und $B'L = 90°$, daher $A'M + B'L = 180°$, d. h. $A'L + LM + LM + MB' = 180$, oder $A'B' + LM = 180°$ ist; da ferner der Bogen LM als zwischen zwei Quadranten CL und CM gleich dem Winkel C ist, so hat man:

$$A'B' + C = 180°.$$

Ganz eben so $A'C' + B = 180°$, $B'C' + A = 180°$; ferner $CM = 90°$, $BJ = 90°$, $CM + BJ = 180°$,

d. h. $MB + BC + BC + CJ = 180°$, oder $MJ + BC = 180°$.

Da aber MJ zwischen den Quadranten A′M und A′J, so ist $MJ = A'$, daher hat man:

$$A' + BC = 180°, \text{ und ganz eben so:}$$
$$B' + AC = 180°$$
$$C' + AB = 180°.$$

Diese Eigenschaft der Polardreiecke hat den theoretischen Werth, daß sie ein Hülfsmittel darbietet, die Formeln der sphärischen Trigonometrie leichter im Gedächtnisse zu behalten. Hat nämlich ein sphärisches Dreieck die Seiten a b, c und die Winkel A, B, C, so hat das Polardreieck davon die Seiten $180 - A$, $180 - B$, $180 - C$ und die Winkel $180 - a$, $180 - b$, $180 - c$; daher wird es in jeder Formel der sphärischen Trigonometrie erlaubt seyn, die Seiten mit den Ergänzungen zu 180° von den gegenüberstehenden Winkeln und umgekehrt zu vertauschen. Wir hatten z. B. die Formel:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos A,$$

daher muß auch seyn:

$$\cos(180-A) = \cos(180-B) \,.\, \cos(180-C)$$
$$+ \sin(180-B) \sin(180-C) \cos(180-a), \text{ oder}$$
$$-\cos A = \cos B \,.\, \cos C - \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a, \text{ oder}$$
$$\cos A = -\cos B \,.\, \cos C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos a.$$

Eben so hatten wir die Formeln:

$$\sin a \,.\, \cos B = \cos b \,.\, \sin c - \sin b \,.\, \cos c \,.\, \cos A$$
$$\sin a \,.\, \cos C = \sin b \,.\, \cos c - \cos b \,.\, \sin c \,.\, \cos A.$$

Machen wir hier dieselben Vertauschungen, so hat man:

$$\sin A \,.\, \cos b = \cos B \,.\, \sin C + \sin B \,.\, \cos C \,.\, \cos a$$
$$\sin A \,.\, \cos c = \sin B \,.\, \cos C + \cos B \,.\, \sin C \,.\, \cos a.$$

§. 409. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks jederzeit größer ist, als zwei Rechte, und kleiner als sechs Rechte. Denn sind A, B, C die drei Winkel des Dreiecks, so sind

$180 - A$, $180 - B$, $180 - C$ die drei Seiten des zugehörigen Polardreiecks. Da nun die Seiten eines jeden sphärischen Dreiecks zusammengenommen kleiner als 4 R seyn müssen, so hat man gewiß

$$180 - A + 180 - B + 180 - C < 2.180, \text{ oder}$$
$$3.180 - (A + B + C) < 2.180, \text{ daher}$$
$$A + B + C > 180^{\circ}.$$

Wäre die Summe der Winkel $A + B + C > 3.180$, so wäre die Summe der Seiten des zugehörigen Polardreiecks

$$180 - A + 180 - B + 180 - C$$

kleiner als Null, was offenbar nicht möglich ist.

Die Größe, um was die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks größer als 180° ist, heißt der **sphärische Exceß**.

§. 410. In jedem sphärischen Dreiecke stehen gleichen Seiten gleiche Winkel, und umgekehrt, gegenüber.

Vermöge der früheren Formeln hat man:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\sin a \cdot \sin c}; \ \cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b}.$$

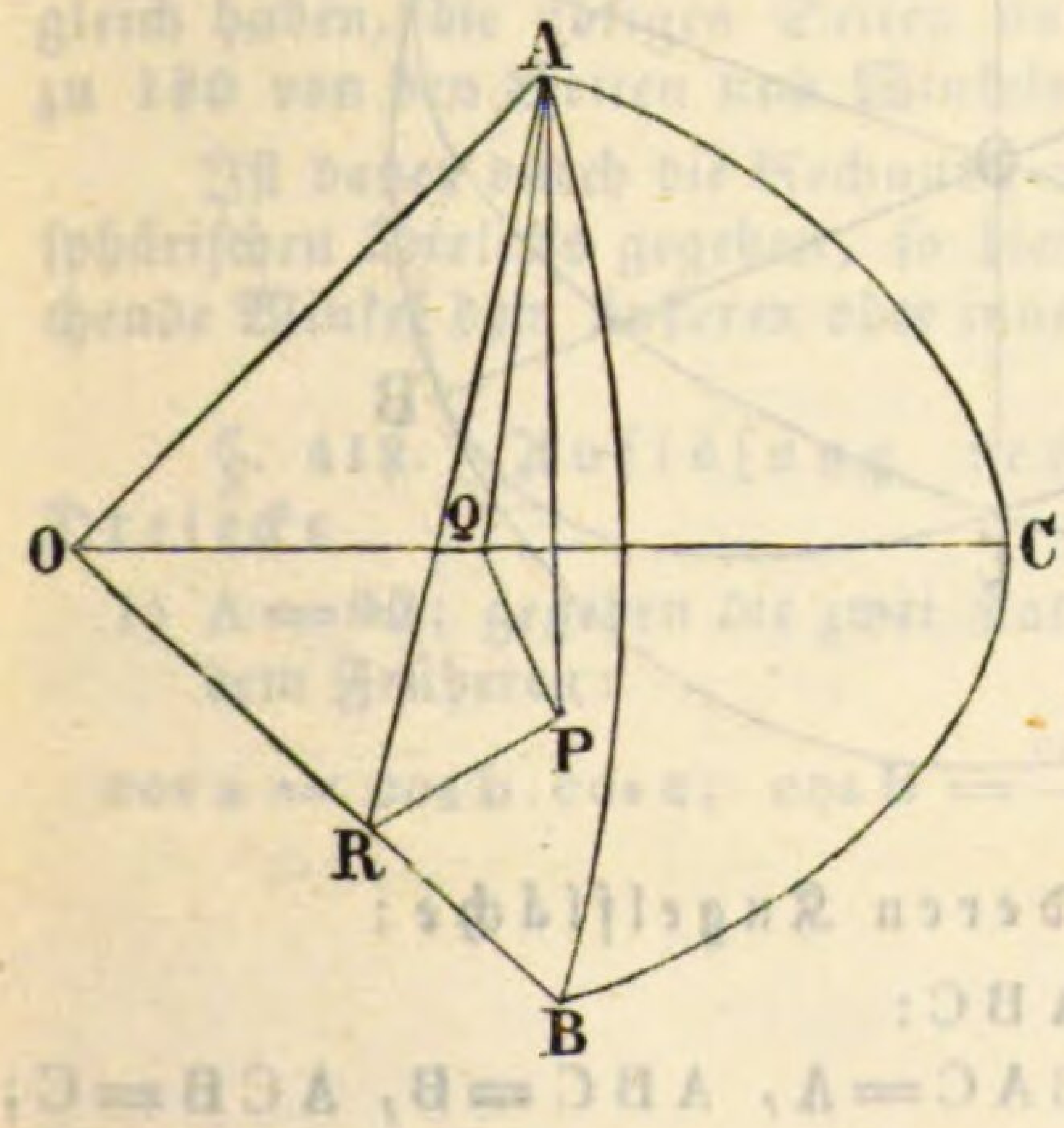
Ist nun $b = c$, so wird offenbar $\cos B = \cos C$, und da sowohl B als C sicher kleiner als 180° sind, so folgt daraus nothwendig $B = C$.

Eben so hat man:

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos A \cdot \cos C}{\sin A \cdot \sin C}; \ \cos c = \frac{\cos C + \cos A \ \cos B}{\sin a \cdot \sin c}.$$

Wie nun $B = C$ ist, so wird natürlich $\cos b = \cos c$, also aus demselben Grunde wie früher $b = c$.

Fig. 538.

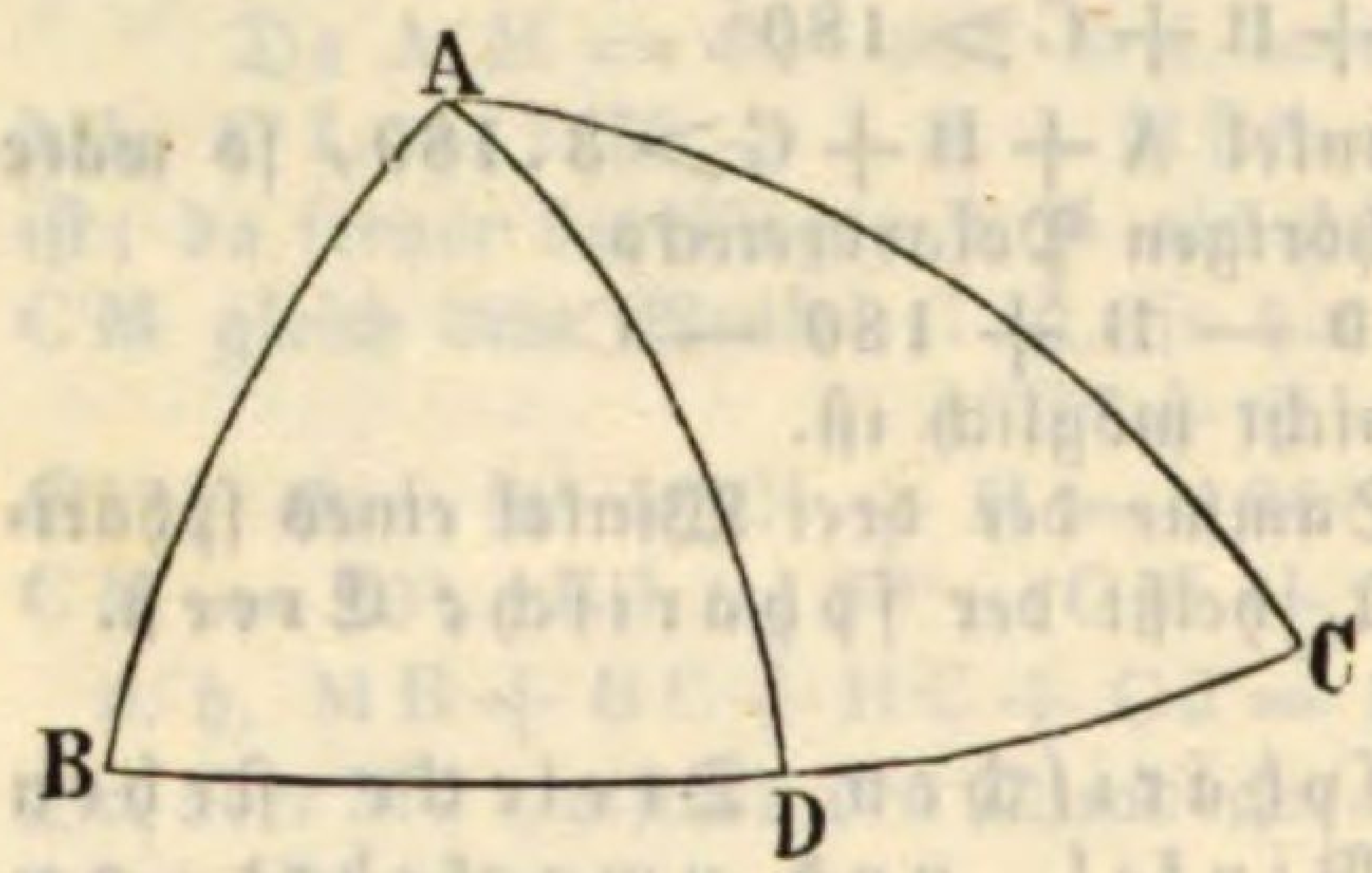


Wir wollen diesen Satz auch rein geometrisch beweisen. Es sey im sphärischen Dreieck ABC die Seiten $AB = AC$ oder $c = b$, d. h. im Köpereck AOBC seyen $AOB = AOC$, so hat man, wenn $AP \perp BOC$, $PR \perp OB$, $PQ \perp OC$, da $AOB = AOC$; $AO = AO$; $ARO = AQO = 90^{\circ}$; $AQ = AR$, und weil $AQ = AR$, $AP = AP$, $APR = APQ = 90^{\circ}$, die Winkel $AQP = ARP$, d. h. $B = C$. Umgekehrt, ist bei derselben Verzeichnungsweise $B = C$, so hat man, da $AP = AP$, $AQP = ARP$, $APQ = APR$ ist, die $AQ = AR$; da nun

A Q = A R, A O = A O und A R O = A Q O = 90° ist, die Winkel A O R = A O Q, d. h. die Bogen A B = A C.

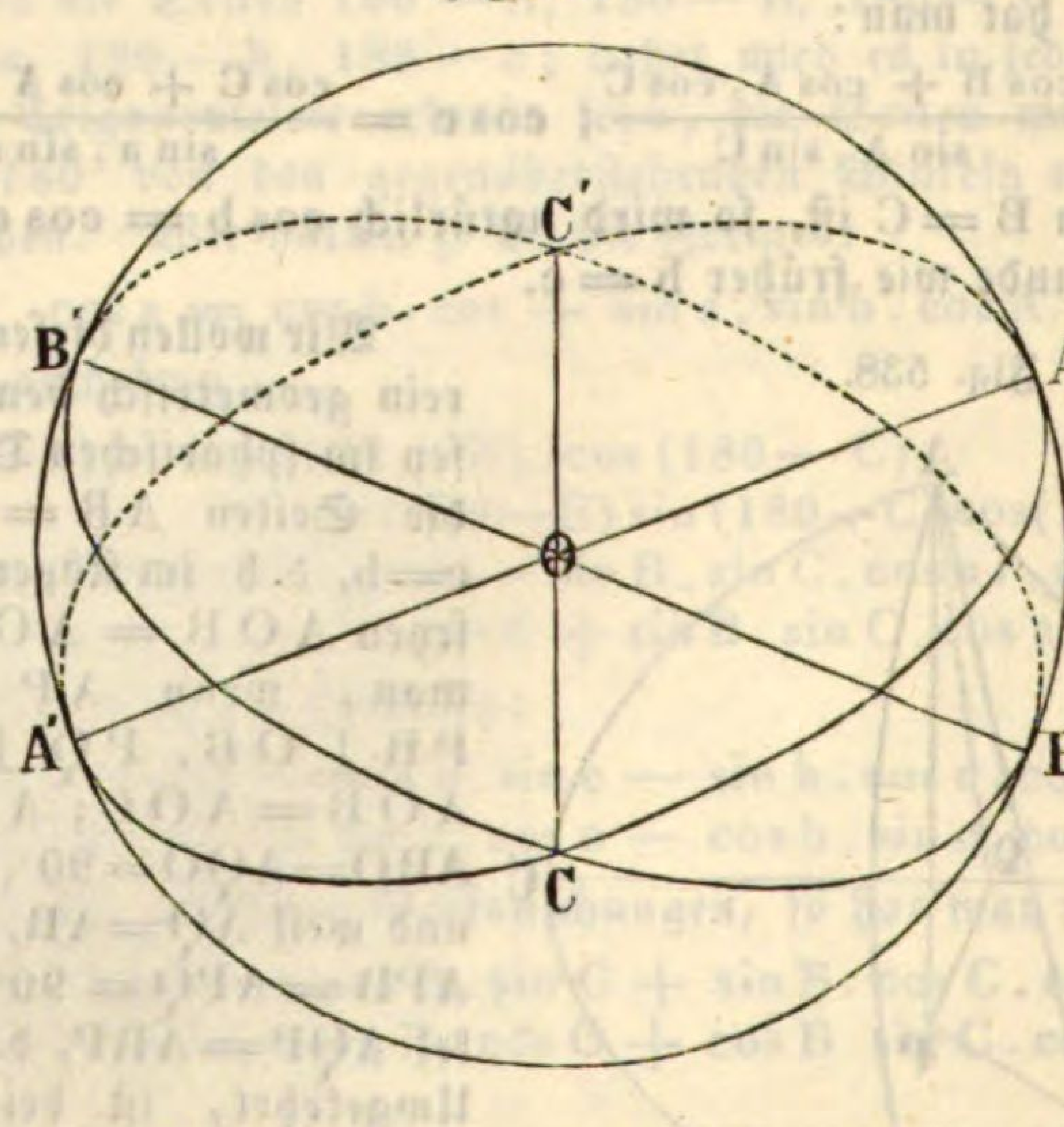
In jedem sphärischen Dreiecke steht dem größeren Winkel eine größere Seite gegenüber. Es sey der Winkel A > B, d. h. BAC > ABC; ich mache daher den Winkel DAB = ABC, so ist dem zufolge BD = AD; da nun AD + DC > AC, folglich BD + DC > AC ist, so hat man BC > AC; daraus ergibt sich nun leicht: **In jedem sphärischen Dreiecke steht der größeren Seite ein größerer Winkel gegenüber.**

Fig. 539.



§. 411. Bei jedem sphärischen Dreiecke (dreiseitigen Körperecke) entstehen zugleich 8 sphärische Dreiecke (dreiseitige Körperecke). Werden nämlich die Seiten AB, AC, BC zu Vollkreisen ausgedehnt, oder die Ebenen AOB, AOC, BOC erweitert, so erhalten wir

Fig. 540.



I. **Auf der vorderen Kugelfläche:**

1) rechts oben das Dreieck ABC:

BC = a, AC = b, AB = c, BAC = A, ABC = B, ACB = C;

2) links oben das Dreieck $AB'C$:

$B'C = \pi - a$, $AC = b$, $AB' = \pi - c$, $B'AC = \pi - A$, $AB'C = B$, $ACB' = \pi - C$;

3) rechts unten das Dreieck $A'BC$:

$BC = a$, $A'C = \pi - b$, $A'B = \pi - c$, $BA'C = A$, $A'BC = \pi - B$, $A'CB = \pi - C$;

4) links unten das Dreieck $A'B'C$:

$B'C = \pi - a$, $A'C = \pi - b$, $A'B' = c$, $B'A'C = \pi - A$, $A'B'C = \pi - B$, $A'CB' = C$.

II. Auf der hinteren Kugelfläche:

5) rechts oben das Dreieck ABC':

$BC' = \pi - a$, $AC' = \pi - b$, $AB = c$, $BAC' = \pi - A$, $ABC = \pi - B$, $AC'B = C$;

6) links oben $AB'C'$:

$B'C' = a$, $AC' = \pi - b$, $AB' = \pi - c$, $B'AC' = A$, $AB'C' = \pi - B$, $AC'B' = \pi - C$;

7) rechts unten $A'BC'$:

$BC' = \pi - a$, $A'C' = b$, $A'B = \pi - c$, $BA'C' = \pi - A$, $A'BC' = B$, $A'C'B = \pi - C$;

8) links unter $A'B'C'$:

$B'C' = a$, $A'C' = b$, $A'B' = c$, $B'A'C' = A$, $A'B'C' = B$, $A'C'B = C$
(wofür überall $\pi = 180$ gesetzt wurde).

Wie man sieht, stimmen die Dreiecke 1 und 8, 2 und 7, 3 und 6, 4 und 5 genau mit einander überein, so also, daß man nur vier verschiedene sphärische Dreiecke hat. Es hat somit jedes sphärische Dreieck ABC drei äußere Dreiecke ABC', $AB'C$, ABC', die mit ihm stets eine Seite und den dieser Seite gegenüberstehenden Winkel gleich haben, die übrigen Seiten und Winkel sind stets Ergänzungen zu 180 von den Seiten und Winkeln des gegebenen Dreiecks.

Ist daher durch die Rechnung nur der Sinus eines Winkels eines sphärischen Dreiecks gegeben, so bleibt es zweifelhaft, ob der entsprechende Winkel dem äußeren oder inneren Dreiecke angehöre.

§. 412. Auflösung rechtwinklicher sphärischer Dreiecke

1) $A = 90$; gegeben die zwei Katheten b und c, so hat man nach dem Früheren:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c; \quad \cos B = \frac{\cos b \ \sin c}{\sin a}; \quad \cos C = \frac{\sin b \,.\, \cos c}{\sin a}.$$

Z. B. $b = 48^\circ 24' 16''$; $c = 59^\circ 38' 27''$

α) $\log \cos 48^\circ 24' = 9{\cdot}822120$ — 2120
38 — 1977

$\log \cos 48^\circ 24' 16'' = 9{\cdot}822082$ — 143
16
143
858
6022,8
38

$\log \cos 59^\circ 38' = 9{\cdot}703749$
97

$\log \cos 59^\circ 38' 27 = 9{\cdot}703652$ — 74 9
53 3
21 6
2 7
151 2
432
583,2
97

$\log \cos b = 9{\cdot}822082$
$\log \cos c = 9{\cdot}703652$
$\log \cos a = 9{\cdot}525734$
$9{\cdot}525630 = \log \cos 70^\circ 24'$

104 — 63 0
60 — 27 5
6240 : 35,5 = 17·5
2690
205

$70^\circ 24' 0''$
$18''$
$a = 70^\circ 23' 42''$.

β) $\log \sin 59^\circ 38' = 9{\cdot}935914$ — 98 8
33 — 91 4
74
$\log \sin c = 9{\cdot}935947$ — 2 7
$\log \cos b = 9{\cdot}822082$ — 51 8
$9{\cdot}758029$ — 148
$\log \sin a = 9{\cdot}974064$ — 199,8
$\log \cos B = 9{\cdot}783965$ — 33
$9{\cdot}783953 = \log 52^\circ 33'$

953 — 12 — 4
788 — 60 — $52^\circ 32' 66''$
165 — 720 : 16 5 = 4·3
60

$B = 52^\circ 32' 56''$.

γ) $\log \cos c = 9{\cdot}703652$
$\log \sin b = 9{\cdot}873814$
$9{\cdot}577466$
$\log \sin a = 9{\cdot}974064$
$\log \cos C = 9{\cdot}603402$
$\ldots 305 \ldots\ldots 66^\circ 21'$
97 305 20
60 017 $66^\circ 20' 40''$
$5820 : 288 = 20$
$C = 66^\circ 20' 40''.$

2) Es sey die Hypothenuse $a = 66^\circ 22'$ und die Kathete $b = 37^\circ 48'$ gegeben, so hat man:

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b};\quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a};\quad \sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$$

α) $\log \cos a = 9{\cdot}600118$
$\log \cos b = 9{\cdot}897712$
$\log \cos c = 9{\cdot}702406$
$\ldots 236 \ldots\ldots 59^\circ 45'$
236
170 19
$10200 : 217 = 47$
1520 $c = 59^\circ 44' 13''$
01

β) $\log \sin b = 9{\cdot}787395$
$\log \sin a = 9{\cdot}961957$
$\log \sin B = 9{\cdot}825438$
$\ldots 371 \ldots\ldots 41^\circ 59'$
67 511
60 371
$4020 : 140 = 28''$
122
10 $B = 41^\circ 59' 28''.$

Da die Kathete und der ihr gegenüberstehende Winkel gleichartig sind, und $b < 90^\circ$, so muß auch $B < 90^\circ$, daher ich hier den Winkel B spitzig nehmen muß.

γ) log sin c = 9·936357
16
9·936373
log sin a = 9·961957
9·974416
...391 . . . . . 70° 31′
25
1500 : 45 = 33″
C = 70° 31′ 33″.

Aus demselben Grunde wie früher B, ist hier auch C spitzig zu nehmen.

3) Es sey die Hypothenuse a = 70° 23′ 42″ und ein Winkel B = 52° 32′ 55″ gegeben, so hat man:

$$\sin b = \sin a \, . \, \sin B; \; \cos c = \frac{\cos a}{\cos b}; \; \sin C = \frac{\sin c}{\sin a}$$

α) log sin a = 9·974032
32
log sin B = 9·899660
89
log sin b = 9·873813
b = 48° 24′ 16″,

weil B < 90, so muß auch b < 90°.

β) log cos a = 9·525734
log cos b = 9·822082
log cos c = 9·703652
c = 59° 38′ 27″

γ) log sin c = 9·935947
log sin a = 9·974064
log sin C = 9·961883 C = 66° 20′ 40″
46
37

4) Es sey eine Kathete und der dieser Kathete anliegende Winkel gegeben.

b = 49° 17′; C = 23° 28′. Man hat:

$$\cos B = \sin C \, . \cos b; \; \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}; \; \cos a = \cos b \, . \cos c.$$

log sin C = 9·600118
log cos b = 9·814460
log cos B = 9·414578 74° 57′
...408
170 4408
60 3938
1020,0 : 47,0 = 21·7
80 B = 74° 56′ 38″
33

$$\begin{aligned}
\log\cos C &= 9{\cdot}962508\\
\log\sin B &= 9{\cdot}984830\\
\hline
\log\cos c &= 9{\cdot}977678\\
c &= 18^\circ\, 12'\, 47''\\
\log\cos b &= 9{\cdot}814460\\
\log\cos c &= 9{\cdot}977678\\
\hline
\log\cos a &= 9{\cdot}792138\\
a &= 51^\circ\, 42'\, 37''.
\end{aligned}$$

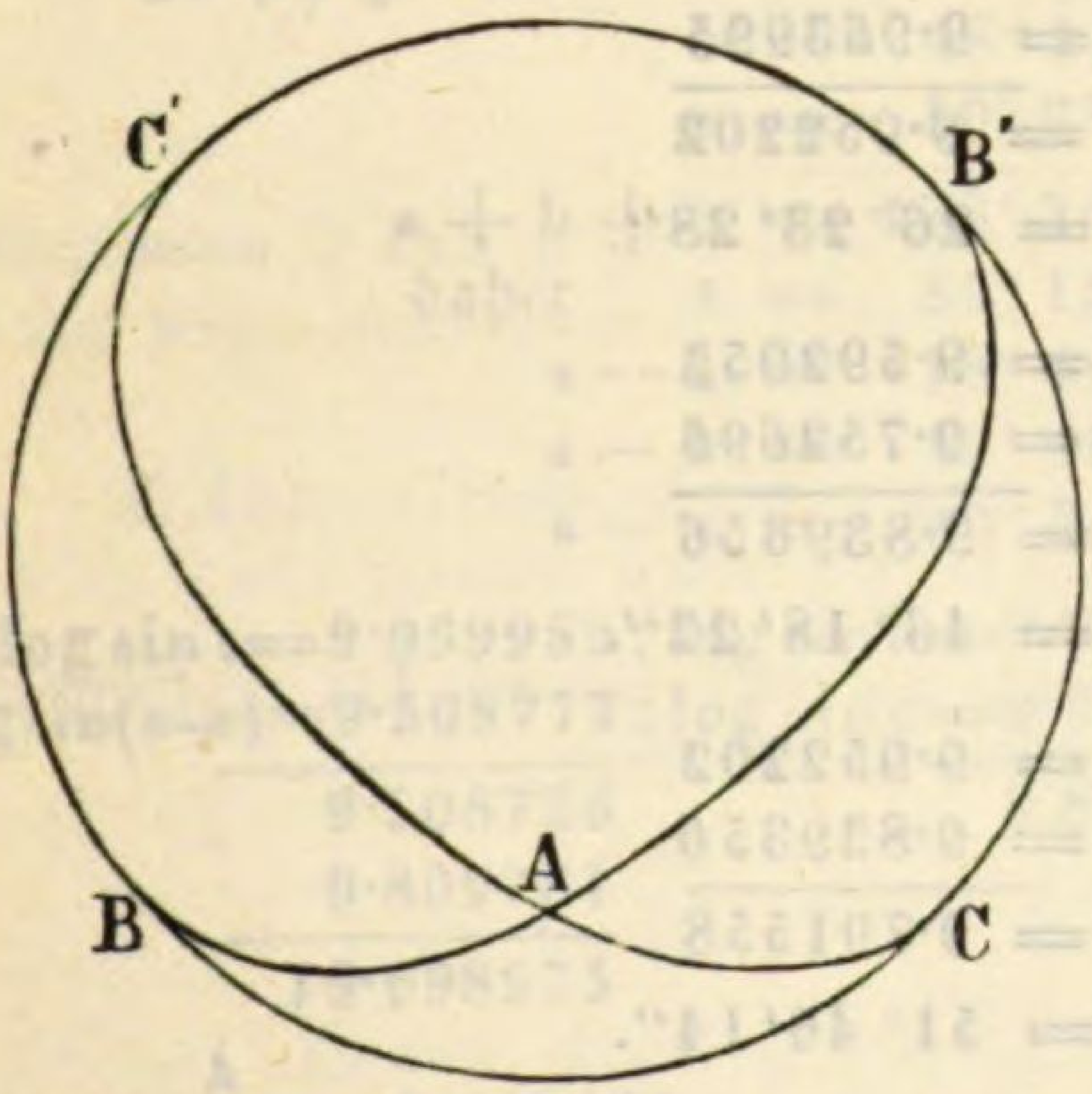
5) Es sey eine Kathete und der dieser Kathete gegenüberstehende Winkel gegeben.

Es sey $b = 29^\circ\, 12'\, 50''$ und $B = 37^\circ\, 26'\, 21''$. Hier hat man:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B};\ \cos c = \frac{\cos a}{\cos b};\ \sin C = \frac{\sin c}{\sin a}.$$

Da hier der Winkel a nur durch seinen Sinus gegeben wird, und da derselbe Sinus zu einem spitzigen und stumpfen Winkel gehört, die sich zu 180° ergänzen, so bleibt es hier im Zweifel, ob ich für a den spitzigen oder stumpfen Winkel, der zu dem Sinus der durch $\frac{\sin b}{\sin B}$ bestimmt ist, gehört. Diese Zweifelhaftigkeit über den Werth des a ist in der Natur der Sache gegründet, denn betrachten wir das in A rechtwinklige Dreieck ABC, verlängern wir die Kathete AB und BC, bis sie sich in B′ treffen, so daß BAB′ und BCB′ jedes 180° ist, weil zwei größte Kreise sich stets halbiren, so haben wir im Dreieck ABC

Fig. 541.



$AC = b;\ ABC = B$,

und im Dreieck AB′C

$AC = b;\ AB'C = B$.

Wir haben also zwei verschiedene rechtwinklige sphärische Dreiecke, welche beide eine Kathete und den dieser Kathete gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

Wenn nicht andere Angaben der Aufgabe näher bestimmen, welches beider Dreiecke zu nehmen sey, so bleibt die Auflösung unbestimmt, und man muß die Aufgabe für beide Werthe von a durchführen. Die Figur zeigt uns, wie die beiden Werthe von b sich zu 180° ergänzen, dieß gilt auch von den beiden Werthen von c und C.

$$\begin{aligned} \log \sin b &= 9{\cdot}688483 \\ \log \sin B &= 9{\cdot}783846 \\ \hline \log \sin a &= 9{\cdot}904637 \end{aligned}$$

a ist entweder = $53^\circ 24' 13''$
oder = $126^\circ 35' 47''$.

$$\begin{aligned} \log \cos a &= 9{\cdot}775373 \quad (\pm) \\ \log \cos b &= 9{\cdot}940917 \\ \hline \log \cos c &= 9{\cdot}834456 \quad (\pm). \end{aligned}$$

Für den Werth von a, der kleiner als 90° ist, ist cos a positiv; für den andern negativ; sobald cos a negativ ist, so ist es auch cos c, was wir hier auch durch die Zeichen ausgedrückt haben.

c ist gleich $46^\circ 55' 2''$
oder $133^\circ 4' 58''$.

6) Es seyen zwei Winkel des rechtwinkligen sphärischen Dreieckes gegeben.

Es sey $B = 34^\circ 27' 39''$; $C = 66^\circ 59' 25''$. Man hat dafür:

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}; \ \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}; \ \cos a = \cos b \,.\, \cos c.$$

$$\begin{aligned} \log \cos B &= 9{\cdot}916197 \\ \log \sin C &= 9{\cdot}963995 \\ \hline \log \cos b &= 9{\cdot}952202 \\ b &= 26^\circ 23' 28''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos C &= 9{\cdot}592052 \\ \log \sin B &= 9{\cdot}752696 \\ \hline \log \cos c &= 9{\cdot}839356 \\ c &= 46^\circ 18' 22''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \cos b &= 9{\cdot}952202 \\ \log \cos c &= 9{\cdot}839356 \\ \hline \log \cos a &= 9{\cdot}791558 \\ a &= 51^\circ 46' 14''. \end{aligned}$$

Zu der so nöthigen Uebung für unsere Leser geben wir die Seiten und Winkel zweier rechtwinkliger sphärischer Dreiecke, sie mögen dann abwechselnd zwei Elemente als bekannt voraussetzen und die übrigen dann durch Rechnung bestimmen

I. $a = 59^\circ 38' 27''$; $b = 48^\circ 24' 16''$; $c = 70^\circ 23' 42''$
$A = 66^\circ 20' 40''$; $B = 52^\circ 32' 55''$; $C = 90^\circ$.

II. $a = 55^\circ 30' 40''$; $b = 30^\circ 27' 30''$; $c = 48^\circ 56' 10''$
$A = 90^\circ$ $B = 37^\circ 57' 9''$; $C = 66^\circ 10' 18''$.

§. 412. **Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke.** Hier ergeben sich sechs verschiedene Fälle in Hinsicht auf die gegebenen Bestimmungsstücke, nämlich:

a) alle drei Seiten,
b) zwei Seiten der eingeschlossene Winkel,
c) zwei Seiten ein gegenüberstehender Winkel,
d) zwei Winkel die anliegende Seite,
e) zwei Winkel eine gegenüberliegende Seite,
f) alle drei Winkel.

I. Fall. **Alle drei Seiten gegeben**, so hat man dem Früheren zu Folge, wenn a, b, c die Seiten sind:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-a)}{\sin b\,.\,\sin c}};\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\,.\,\sin(s-c)}{\sin b\,.\,\sin c}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin c}};\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin c}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-c)}{\sin a\,.\,\sin b}};\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}{\sin a\,.\,\sin b}},$$

wobei $s=\frac{a+b+c}{2}$ ist.

Es sey z. B.

$$\begin{aligned} a &= 70^\circ 23' 42'' \\ b &= 48^\circ 24' 16'' \\ c &= 59^\circ 38' 27'' \\ \hline a+b+c &= 178^\circ 26' 25'', \\ \text{daher}\quad s &= 89^\circ 13' 13'' \\ s-a &= 18^\circ 49' 31'' \\ s-b &= 40^\circ 48' 57'' \\ s-c &= 29^\circ 34' 46'' \end{aligned}$$

log sin s = 9·999959; log sin b = 9·873814; log sin (s − b) = 9·815332
lg sin (s − a) = 9·508777; log sin c = 9·935947; cos sin (s − c) = 9·693401

9·508736	9.809761	9·508733
9·809761		9·809761
19·698975		19·698972

$$\log\cos\frac{A}{2}=9{\cdot}849487 \qquad \log\sin\frac{A}{2}=9{\cdot}849486,$$

$$\text{daher}\quad \frac{A}{2}=45^\circ;\quad A=90^\circ.$$

Auf ähnliche Art findet man $B=52^\circ 32' 56''$, $C=66^\circ 20' 40''$.

Beispiel 2: $a=68^\circ 46' 2''$; $b=43^\circ 37' 38''$; $c=37^\circ 10'$
gibt $A=120^\circ 59' 46''$.

Beispiel 3: $a=108^\circ$; $b=52^\circ 12'$; $c=74^\circ 30'$
gibt $A=151^\circ 43' 52''$.

§. 413. II. Fall. Zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben. Es sey a, b und C gegeben, wir haben nach den Neper'schen Analogien:

$$\tang \frac{A+B}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} . \cotang. \frac{C}{2}$$

$$\tang \frac{A-B}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} . \cotang. \frac{C}{2},$$

wodurch $\frac{A+B}{2}$ und $\frac{A-B}{2}$, und dadurch A und B erhalten; um c zu bekommen, wendet man eine der beiden andern Neper'schen Analogien an und hat:

$$\tang \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} . \tang \frac{a+b}{2}$$

$$\tang \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A-B}{2}} . \tang \frac{a-b}{2}.$$

Will man aber die dritte Seite c aus a, b und C unmittelbar haben, ohne früher A und B zu rechnen, so muß man einen andern Weg einschlagen, man hat nämlich:

$$\cos c = \cos a . \cos b + \sin a . \sin b . \cos C \qquad (\alpha)$$
$$\cos c = \cos a (\cos b + \tang a . \sin b . \cos C).$$

Setzt man nun $\tang a . \cos C = \cotg. \varphi$, wo der Hilfswinkel durch diese Gleichung bestimmt wird, so hat man:

$$\cos c = \cos a \left(\cos b + \sin b . \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}\right)$$

$$\cos c = \frac{\cos a}{\sin \varphi} . (\cos b . \sin \varphi + \sin b . \cos \varphi)$$

$$\cos c = \frac{\cos a \ \ \sin (b+\varphi)}{\sin \varphi}.$$

Durch Einführung des Hilfswinkels φ und Umstaltung der Formel haben wir für cos c statt der einen Formel α, die nicht zur logarithmischen Berechnung sich eignet, folgende zwei Formeln:

$$\tang a . \cos C = \cotg. \varphi; \ \cos c = \frac{\cos a . \sin (b+\varphi)}{\sin \varphi}.$$

Es sey z. B. $a = 38^\circ 30'$; $b = 70^\circ$; $C = 31^\circ 34' 26''$

$$\frac{b+a}{2} = 54^\circ 15; \quad \frac{b-a}{2} = 15^\circ 45'; \quad \frac{C}{2} = 15^\circ 47' 13''.$$

$$\log\cos\frac{b-a}{2} = 9{\cdot}983381; \quad \log\sin\frac{b-a}{2} = 9{\cdot}433675$$

$$\log\operatorname{cotg}\frac{C}{2} = 10{\cdot}548635; \quad \log\operatorname{cotg}.\frac{C}{2} = 10{\cdot}548635$$

$$10{\cdot}532016 \qquad\qquad 9{\cdot}982310$$

$$\log\cos\frac{b+a}{2} = 9{\cdot}766598; \quad \log\sin\frac{b+a}{2} = 9{\cdot}909328$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{B+A}{2} = 10{\cdot}765418; \quad \log\operatorname{tang}\frac{B-a}{2} = 10{\cdot}072982$$

$$\frac{B+A}{2} = 80^\circ 15' 41''; \quad \frac{B-A}{2} = 49^\circ 47' 30''.$$

$$B = 130^\circ 3' 11''; \quad A = 30^\circ 28' 11''$$

$$\log\cos\frac{B+A}{2} = 9{\cdot}228281$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{b+a}{2} = 10{\cdot}142730$$

$$9{\cdot}371011$$

$$\log\cos\frac{B-A}{2} = 9{\cdot}809942$$

$$\log\operatorname{tang}\frac{c}{2} = 9{\cdot}561069$$

$$\frac{c}{2} = 20^\circ; \quad c = 40^\circ.$$

Will man hingegen aus a, b und C unmittelbar das c berechnen, so hat man:

$$\log\operatorname{tang} a = 9{\cdot}900605$$
$$\log\cos C = 9{\cdot}930423$$
$$\log\operatorname{cotg}.\varphi = 9.831028$$
$$\varphi = 55^\circ 52' 30''$$
$$b = 70^\circ$$
$$\varphi + b = 125^\circ 52' 30''$$
$$180 - (\varphi + b) = 54^\circ 7' 30''$$
$$\log\sin(\varphi + b) = 9{\cdot}908645$$
$$\log\cos a = 9\ 893544$$
$$9{\cdot}802189$$
$$\log\sin\varphi = 9{\cdot}917934$$
$$\log\cos c = 9{\cdot}884255; \quad c = 40^\circ.$$

Der Winkel φ ist hier eine bloße Rechnungsgröße; ist tang a oder cos C negativ, so wird cotg. φ auch negativ; es ist dann gleichgiltig, ob ich

nun für φ den negativen Werth $-\varphi$, oder den entsprechenden stumpfen Winkel $180-\varphi$ nehme; denn ich erhalte im ersten Falle, wenn beispielweise cos C negativ und somit cotg. φ negativ ist, im ersten Falle:

$$\cos c = \frac{\cos a . \sin (b - \varphi)}{- \sin \varphi} = - \frac{\cos a . \sin (b - \varphi)}{\sin \varphi},$$

im zweiten Falle:

$$\cos c = \frac{\cos a . \sin (b - \varphi + b)}{\sin (180 - \varphi)} = - \frac{\cos a . \sin (b - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Das Negativnehmen von φ ist in diesem Falle jedenfalls bequemer. Um fortwährend wegen der Zeichen der trigonometrischen Größen volle Beruhigung zu haben, fügt man dieselben den Logarithmen ihre Größen hinten in einer Klammer eingeschlossen nach. Die Logarithmen beziehen sich nur auf die abstrakte Zahl; ob nun die Faktoren und ihr Produkt oder ihr Quotient positiv oder negativ sey, macht man durch die hinten angesetzten Zeichen ersichtlich.

Es sey z. B. $a = 43^{\circ}\,37'\,38''$; $b = 37^{\circ}\,10'$; $C = 120^{\circ}\,59'\,46''$, so hat man:

$$\begin{aligned}
\log \tang a &= 9{\cdot}979181\,(+)\\
\log \cos C &= 9{\cdot}711790\,(-)\\
\hline
\log \operatorname{cotg.} \varphi &= 9{\cdot}690971\,(-)\\
\varphi &= -\,63^{\circ}\,51'\,17''\\
b &= 37^{\circ}\,10'\\
b + \varphi &= -\,26^{\circ}\,41'\,17''\\
\log \sin (b + \varphi) &= 9{\cdot}652375\,(-)\\
\log \cos a &= 9{\cdot}859645\,(+)\\
\hline
&\; 9{\cdot}512020\,(-)\\
\log \sin \varphi &= 9{\cdot}953122\,(-)\\
\hline
\log \cos c &= 9{\cdot}558898\,(+)\\
c &= 68^{\circ}\,46'\,2''
\end{aligned}$$

Weil hier tang a positiv, cos C hingegen negativ ist, was durch die hinten angesetzten Zeichen angedeutet ist, so muß ihr Produkt d. i. hier cotg. φ auch negativ seyn, weil cotg. φ negativ ist, so nehme ich statt dem stumpfen den negativen Winkel. Weil sin $(b + \varphi)$ negativ, cos a aber positiv ist, so muß ihr Produkt negativ seyn; weil nun dieses Dividend negativ, der Divisor sin φ aber auch negativ ist, so muß ihr Quotient cos c positiv seyn.

Beispiel 3. Wenn zwei Seiten gleich $37^{\circ}\,10'$ und $68^{\circ}\,46'\,2''$, und der eingeschlossene Winkel gleich $36^{\circ}\,45'\,28''$ ist, so sind die beiden andern Winkel gleich $33^{\circ}\,45'\,3''$ und $120^{\circ}\,59'\,49''$.

Beispiel 4. $a = 43^{\circ}\,37'\,38''$; $b = 37^{\circ}\,10$; $C = 120^{\circ}\,59'\,46''$ gibt $c = 68^{\circ}\,46'\,2''$.

§. 414. III. Fall. Zwei Seiten und ein gegenüberstehender Winkel gegeben. A, a, b.

Vermöge dem Lehrsatze, daß die Sinus der Seiten sich wie die Sinus der Winkel verhalten, hat man:

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a} . \sin A \quad (1),$$

und vermöge der Neper'schen Analogien:

$$\text{cotg.} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{a-b}{2}} . \text{tang} \frac{A+B}{2}$$

$$\text{tang} \frac{c}{2} = \frac{\cos \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} . \text{tang} \frac{a+b}{2},$$

oder:

$$\text{cotg.} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}} . \text{tang} \frac{A-B}{2}$$

$$\text{tang} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A+B}{2}} . \text{tang} \frac{a-b}{2}.$$

Der vermöge der Gleichung (1) bestimmte Werth von B ist zweifelhaft, d. h. man kann den spitzigen oder den ihn zu 180° ergänzenden stumpfen Nebenwinkel nehmen. In einigen Fällen läßt sich der Werth von B fest bestimmen, die wir nun untersuchen wollen

Die Gleichung $\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ gibt $\frac{\sin a + \sin b}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B}$,

oder $$\frac{\text{tang} \frac{a+b}{2}}{\text{tang} \frac{a-b}{2}} = \frac{\text{tang} \frac{A+B}{2}}{\text{tang} \frac{A-B}{2}}.$$

Da nun vermöge des Satzes, daß der größeren Seite der größere Winkel gegenüber steht und umgekehrt, so haben a — b und A—B stets dasselbe Zeichen, und folglich vermöge der letzten Gleichung haben auch a + b und A + B stets entweder beide > 180 oder beide < 180°. Unterscheiden wir nun die verschiedenen Fälle nach der Größe von a+b.

I. $a + b < 180$, also auch $A + B < 180$, also $B < 180 - A$

α) $A \geqq 90$ nothwendig $B < 90°$

β) $A < 90$, wenn $a > b$, nothwendig $B < 90$, ist aber $a < b$, B unbestimmt.

II. $a + b = 180$, also auch $A + B = 180$, daher $B = 180 - A$.

III. $a+b>180°$, also auch $A+B>180$, daher $B>180°-A$

α) $A\leqq 90°$, nothwendig $B>90°$

β) $A>90°$, wenn $a<b$ nothwendig $B>90$, ist aber $a>b$, B unbestimmt.

Beispiel 1. Es sey $a=80°\,19'$; $b=63°\,50'$; $A=59°\,15'57''$, da der größeren Seite der größere Winkel gegenüber stehen muß, daher weil $a>b$ auch $A>B$ seyn muß, und da A spitzig ist, nothwendig auch B spitzig seyn muß, so ist hier B genau zu bestimmen, und man hat:

$$\log\sin A = 9{\cdot}934270$$
$$\log\sin b = 9{\cdot}953042$$
$$\text{compl.}\log\sin a = 0{\cdot}006232$$
$$\log\sin B = 9{\cdot}893544$$
$$B = 51°\,30',$$

statt hier $\log\sin a = 9{\cdot}993768-10$ abzuziehen, addire ich das Complementum dieses Logarithmus, d. h. $10-9{\cdot}93768=0{\cdot}006232$ hinzu. Bei derlei Rechnungen pflegt man sehr häufig die Subtraktion auf diese Art in eine Addition zu verwandeln. Das Complementum läßt sich sehr leicht rechnen; man ergänzt nämlich jede Ziffer zu 9, die letzte zu 10.

$$\text{compl.}\log\cos\frac{a-b}{2} = 0{\cdot}004508$$
$$\log\cos\frac{a+b}{2} = 9{\cdot}488229$$
$$\log\tan g\frac{A+B}{2} = 10{\cdot}160968$$

daher $$\log\cot g.\frac{C}{2} = 9{\cdot}653705$$
$$\frac{C}{2} = 65°\,44'\,53''$$
$$C = 131°\,29'46'';$$

$$\text{compl.}\log\cos\frac{A-B}{2} = 0{\cdot}000998$$
$$\log\cos\frac{A+B}{2} = 9{\cdot}754415$$
$$\log\tan g\frac{a+b}{2} = 10{\cdot}490162$$

daher $$\log\tan g\frac{c}{2} = 10{\cdot}245575$$
$$\frac{c}{2} = 60°\,23'57''$$
$$c = 120°\,47'54''.$$

Beispiel 2. $a = 40^\circ 36' 37''$; $b = 91^\circ 3' 25''$; $A = 35^\circ 57' 15''$

$$\begin{aligned} \log \sin A &= 9{\cdot}768740 \\ \log \sin b &= 9{\cdot}999926 \\ & 9{\cdot}768666 \\ \log \sin a &= 9{\cdot}813521 \\ \log \sin B &= 9{\cdot}955145. \end{aligned}$$

Da hier der Winkel B größer als A seyn muß, so kann er spitzig oder stumpf seyn, und wir haben:

$$B = \begin{Bmatrix} 64^\circ 24' 19'' \\ 115^\circ 35' 41'' \end{Bmatrix} \text{ oder}$$

es ist $\quad \frac{b+a}{2} = 65^\circ 50' 1''$; $\quad \frac{b-a}{2} = 25^\circ 13' 24''$.

Wir haben I. für B spitzig $\frac{B+A}{2} = 50^\circ 10' 47''$; $\frac{B-A}{2} = 14^\circ 13' 32''$

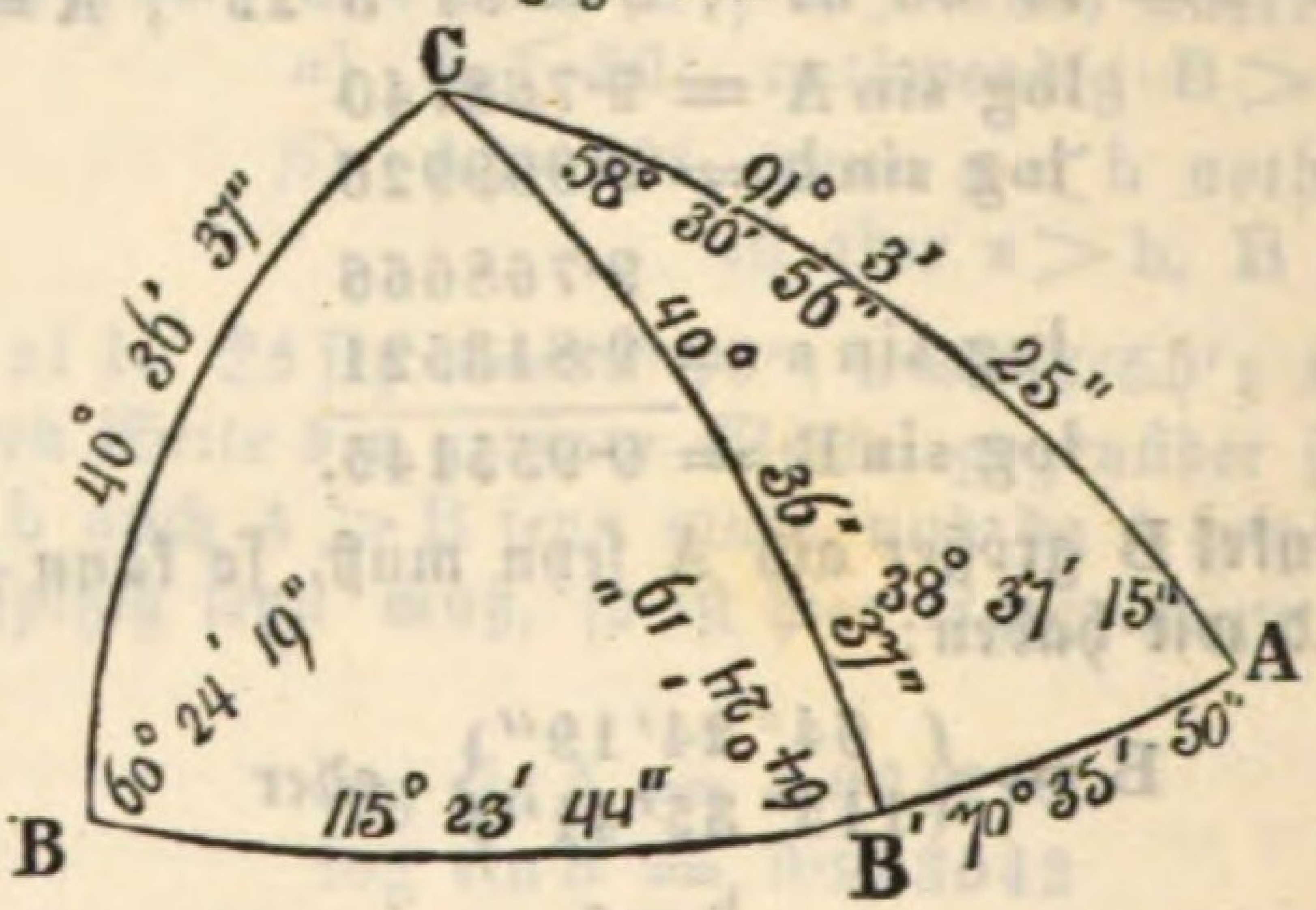
» » II. für B stumpf $\frac{B+A}{2} = 75^\circ 46' 28''$; $\frac{B-A}{2} = 39^\circ 49' 13''$

Wir haben somit:

	für ein stumpfes B:	für ein spitziges B:
$\text{compl.} \log \cos \frac{b-a}{2} =$	$0{\cdot}043518$;	$0{\cdot}043518$
$\log \cos \frac{b+a}{2} =$	$9{\cdot}612135$;	$9{\cdot}612135$
$\log \text{tang} \frac{B+A}{2} =$	$10{\cdot}595998$;	$10{\cdot}078955$
$\log \text{cotg} \frac{C}{2} =$	$10{\cdot}251651$;	$9{\cdot}734608$
	$\frac{C}{2} = 29^\circ 15' 28''$;	$\frac{C}{2} = 61^\circ 30' 32''$
	$C = 58^\circ 30' 56''$;	$C = 123^\circ 1' 4''$;
$\log \text{tang} \frac{a+b}{2} =$	$10{\cdot}348032$;	$10{\cdot}348032$
$\log \cos \frac{B+A}{2} =$	$9{\cdot}390475$;	$9{\cdot}806439$
$\text{compl.} \log \cos \frac{B-A}{2} =$	$0{\cdot}114607$;	$0{\cdot}013526$
$\log \text{tang} \frac{c}{2} =$	$9{\cdot}853114$;	$10{\cdot}167997$
	$\frac{c}{2} = 35^\circ 29' 25''$;	$\frac{c}{2} = 55^\circ 48' 55''$
	$c = 70^\circ 58' 50''$;	$c = 111^\circ 37' 50''$.

Es sind also zwei Dreiecke, die den Angaben der Aufgabe entsprechen, die in der nachfolgenden Figur ersichtlich gemacht sind.

Fig. 542.



I. Dreieck ABC; BC = 40° 36′ 37″; AC = 91° 3′ 25″;
AB = 111° 37′ 50″; A = 35° 57′ 15″;
B = 64° 24′ 19″; ACB = 123° 1′ 4′.

II. Dreieck AB′C; B′C = 40° 36′ 37″; AC = 91° 3′ 25″;
AB′ = 70° 58′ 50″; A = 35° 57′ 15″;
B′ = 115° 55′ 41″; ACB′ = 58° 30′ 56″.

Beispiel 3. Gegeben a = 97° 18′ 39″; b = 86° 53′ 46″; A = 97° 21′ 26″, gibt c = 89° 21′ 37″.

§. 415. **IV. Fall. Zwei Winkel und die anliegende Seite gegeben.** Gegeben A, B und c. Man hat nach den Neper'schen Analogien:

$$\text{tang}\,\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{c}{2}$$

$$\text{tang}\,\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{c}{2},$$

wodurch $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$, und somit a und b erhält; um dann den Winkel C zu finden, hat man wieder nach den Neper'schen Analogien:

$$\text{cotg.}\,\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{A+B}{2}, \text{ oder}$$

$$\text{cotg.}\,\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{A-B}{2}.$$

Will man aber aus den Angaben A, B und c unmittelbar den Winkel C haben, so hat man die Formel:

$$\cos C = -\cos A . \cos B + \sin A . \sin B . \cos c \quad (1);$$

logarithmisch umzugestalten, man hebt cos A als Faktor heraus und hat:

$$\cos C = \cos A (\text{tang}. A . \sin B . \cos c - \cos B).$$

Setzt man nun $\text{tang} A . \cos c = \text{cotg}\ \omega = \frac{\cos \omega}{\sin \omega}$, so ist:

$$\cos C = \cos A . \frac{\cos \omega . \sin B - \sin \omega . \cos B}{\sin \omega}, \text{ oder}$$

$$\cos C = \cos A . \frac{\cos (B - \omega)}{\sin \omega},$$

und man hat daher statt der Formel (1) die beiden Formeln:

$$\text{tang} A . \cos c = \text{cotg}. \omega; \ \cos C = \frac{\cos A . \cos (B - \omega)}{\sin \omega}.$$

Beispiel 1. $A = 39^0\, 23'$; $B = 33^0\, 45'\, 3''$; $c = 68^0\, 46'\, 2''$:

$$\text{compl. log} \cos \frac{A + B}{2} = 0{\cdot}095198$$

$$\log \cos \frac{A - B}{2} = 9{\cdot}999475$$

$$\log \text{tang} \frac{c}{2} = 9{\cdot}835243$$

$$\log \text{tang} \frac{a + b}{2} = 9{\cdot}929916$$

$$\frac{a + b}{2} = 40^0\, 23'\, 49''$$

$$a = 43^0\, 37'\, 37''; \quad b = 37^0\, 10'\, 1'';$$

$$\text{compl. log} \sin \frac{A + B}{2} = 0{\cdot}224926$$

$$\log \sin \frac{A - B}{2} = 8{\cdot}691374$$

$$\log \text{tang} \frac{c}{2} = 9{\cdot}835243$$

$$\log \text{tang} \frac{a - b}{2} = 8{\cdot}751543$$

$$\frac{a - b}{2} = 3^0\, 13'\, 48'';$$

$$\text{compl. log sin}\,\frac{a-b}{2} = 1{\cdot}249150$$

$$\log\sin\frac{a+b}{2} = 9{\cdot}811628$$

$$\log\text{tang}\,\frac{A-B}{2} = 8{\cdot}691899$$

$$\log\text{cotg.}\,\frac{C}{2} = 9{\cdot}752677$$

$$\frac{C}{2} = 60^{\circ}29'53'';\quad C = 120^{\circ}59'46''.$$

Um aus A, B und c unmittelbar das C zu berechnen, hat man:

$$\begin{aligned} \log\text{tang}\,A &= 9{\cdot}914302 & \omega &= 73^{\circ}26'33'' \\ \log\cos c &= 9{\cdot}558898 & B &= 33^{\circ}45'\ 3'' \\ \hline \log\text{cotg.}\,\omega &= 9{\cdot}473300 & \omega - B &= 39^{\circ}41'30'' \\ \omega &= 73^{0}26'33''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\cos A &= 9{\cdot}888134\ (+) \\ \log\sin(B-\omega) &= 9{\cdot}805268\ (-) \\ \text{compl.}\log\sin\omega &= 0{\cdot}018392\ (+) \\ \hline \log\cos C &= 9{\cdot}711794\ (-) \end{aligned}$$

Weil cos C negativ, so hat man nicht den spitzigen Winkel $59^{\circ}0'13''$ zu nehmen, sondern hat:

$$C = 120^{\circ}59'47''.$$

Beispiel 2. $A = 31^{\circ}34'26''$; $B = 30^{\circ}28'12''$; $c = 70^{\circ}2'3''$ gibt $C = 130^{\circ}3'11''$.

Beispiel 3. $A = 51^{\circ}30'$; $B = 131^{\circ}30'$; $c = 80^{\circ}19'12''$ gibt $C = 59^{\circ}15'59''$.

Beispiel 4. $A = 34^{\circ}15'3''$; $B = 42^{\circ}15'13''$; $c = 76^{\circ}35'36''$ gibt $a = 40^{\circ}0^{\circ}10''$; $b = 50^{\circ}10'30''$.

§. 416. **V. Fall. Zwei Winkel und eine gegenüberstehende Seite gegeben.**

Gegeben A, B und a, zuerst haben wir zur Bestimmung von b:

$$\sin b = \sin a\,.\,\frac{\sin B}{\sin A},$$

und zur Bestimmung von C und c nach den Neper'schen Analogien.

$$\text{cotg.}\,\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{A+B}{2}$$

$$\text{tang}\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}\,.\,\text{tang}\,\frac{a+b}{2}\,.$$

Um aus sin b das b zu bestimmen, ob es nämlich spitzig oder stumpf sey, dient uns wieder als Anhaltspunkt, daß stets $A + B$ und $a + b$ beide zugleich größer, oder beide zugleich kleiner als $180°$ seyn müssen.

Ist I. $A + B < 180$, also auch $a + b < 180$, so hat man:

wenn 1) $a \geqq 90°$, ist nothwendig $b < 90°$

2) $a < 90° \begin{cases} \text{wenn } A > B;\ b < 90° \\ \text{wenn } A < B;\ b \text{ unbestimmt.} \end{cases}$

II. $A + B = 180$; also auch $a + b = 180$; $b = 180 - a$.

III. $A + B > 180$; also auch $a + b > 180$, so hat man:

wenn 1) $a \leqq 90$, nothwendig $b > 90°$,

2) $a > 90 \begin{cases} \text{wenn } A < B,\ b > 90 \\ \text{wenn } A > B,\ b \text{ unbestimmt.} \end{cases}$

Beispiel 1. Gegeben $A = 32° 26' 6\tfrac{2}{7}''$; $B = 130° 5' 22''$; $a = 44° 13' 45''$.

$$\begin{aligned} \text{compl. log sin } A &= 0{\cdot}270556 \\ \text{log sin } B &= 9{\cdot}883684 \\ \text{log sin } a &= 9{\cdot}843563 \\ \hline \text{log sin } b &= 9{\cdot}997803 \\ b &= 84° 14' 30'', \text{ oder} \\ &= 95° 45' 30''. \end{aligned}$$

Für den spitzigen Werth von b hat man:

$$\begin{aligned} \text{I. compl. log cos } \frac{B - A}{2} &= 0{\cdot}181554 \\ \text{log cos } \frac{B + A}{2} &= 9{\cdot}181584 \\ \text{log tang } \frac{a + b}{2} &= 10{\cdot}316362 \\ \hline \text{log tang } \frac{c}{2} &= 9{\cdot}679500 \\ \frac{c}{2} &= 25° 33' 5'' \\ c &= 51° 6' 10''. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. compl. log cos } \frac{a - b}{2} &= 0{\cdot}027031 \\ \text{log cos } \frac{a + b}{2} &= 9{\cdot}638164 \\ \text{log tang } \frac{A + B}{2} &= 10{\cdot}813341 \\ \hline \text{log cotg. } \frac{C}{2} &= 10{\cdot}478536 \\ \frac{C}{2} &= 18° 23' 15'' \\ C &= 36° 46' 30''. \end{aligned}$$

Beispiel 2. $A = 103^\circ\,59'\,57\frac{1}{2}''$; $B = 46^\circ 18' 7\frac{1}{4}''$; $a = 42^\circ 8' 48''$ gibt $C = 36^\circ\,7'\,52\frac{1}{2}''$.

Beispiel 3. $A = 17^\circ\,46'\,16\frac{1}{2}''$; $B = 151^\circ\,43'\,52''$; $a = 37^\circ\,0'\,48''$, unter der Voraussetzung, daß man b stumpf nimmt, erhält man $b = 108^\circ$, $c = 74^\circ\,30'$.

§. 417. VI. Fall. Wenn die drei Winkel gegeben sind, die drei Seiten zu finden. Für diesen Fall dienen die früher bewiesenen Formeln:

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\Sigma - B)\,.\cos(\Sigma - C)}{\sin B\,.\sin C}};\quad \sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\Sigma\,.\cos(\Sigma - A)}{\sin B\,.\sin C}}$$

$$\cos\frac{b}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\Sigma - A)\,.\cos(\Sigma - C)}{\sin A\,.\sin C}};\quad \sin\frac{b}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\Sigma\,.\cos(\Sigma - B)}{\sin A\,.\sin C}}$$

$$\cos\frac{c}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\Sigma - A)\,.\cos(\Sigma - B)}{\sin A\,.\sin B}};\quad \sin\frac{c}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\Sigma\,.\cos(\Sigma - C)}{\sin A\,.\sin B}},$$

wobei $\frac{A + B + C}{2} = \Sigma$ ist.

Beispiel 1. $A = 100^\circ$; $B = 80^\circ$; $C = 60^\circ$, daher $\Sigma = 120^\circ$; $\Sigma - A = 20^\circ$; $\Sigma - B = 40^\circ$; $\Sigma - C = 60^\circ$.

$$\begin{array}{rl} \log\cos\Sigma = & 9{\cdot}698970\ (-) \\ \log\cos(\Sigma - A) = & 9{\cdot}972986 \\ \hline & 9{\cdot}671956 \\ & 9{\cdot}930882 \\ \hline & 19{\cdot}741074 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log\sin B = & 9{\cdot}993351 \\ \log\sin C = & 9{\cdot}937531 \\ \hline & 9{\cdot}930882 \end{array}$$

$$\log\sin\frac{a}{2} = 9{\cdot}870537$$

$$\frac{a}{2} = 47^\circ\,55'\,17''$$

$$\begin{array}{rl} \log\cos(\Sigma - B) = & 9{\cdot}884254 \\ \log\cos(\Sigma - C) = & 9{\cdot}698970 \\ \hline & 9{\cdot}583224 \\ & 9{\cdot}930882 \\ \hline & 19{\cdot}652342 \end{array}$$

$$\log\cos\frac{a}{2} = 9{\cdot}826171$$

$$\frac{a}{2} = 47^\circ\,55'\,17''.$$

$$a = 95^\circ\,50'\,34''$$

$$\log\cos\Sigma = 9{\cdot}698970\ (-) \qquad \log\sin A = 9{\cdot}993351$$
$$\log\cos(\Sigma - B) = 9{\cdot}884254 \qquad \log\sin C = 9{\cdot}937531$$
$$9{\cdot}583224 \qquad 9{\cdot}930882$$
$$9{\cdot}930882 \qquad \frac{b}{2} = 42^\circ\,4'\,43''$$
$$19{\cdot}652342 \qquad b = 84^\circ\,9'\,26''$$
$$\log\sin\frac{b}{2} = 9{\cdot}826171$$
$$\log\cos(\Sigma - A) = 9{\cdot}972986$$
$$\log\cos(\Sigma - C) = 9{\cdot}698970$$
$$9{\cdot}671956$$
$$9{\cdot}930882$$
$$19{\cdot}741074$$
$$\log\cos\frac{b}{2} = 9{\cdot}870537$$

$$\log\cos\Sigma = 9{\cdot}698970\ (-) \qquad \log\sin A = 9{\cdot}993351$$
$$\log\cos(\Sigma - C) = 9{\cdot}698970 \qquad \log\sin B = 9{\cdot}993351$$
$$9{\cdot}397940 \qquad 9{\cdot}986702$$
$$9{\cdot}986702 \qquad \frac{c}{2} = 30^\circ\,30'\,42''$$
$$19{\cdot}411238 \qquad c = 61^\circ\,1'\,24''$$
$$\log\sin\frac{c}{2} = 9{\cdot}705619$$
$$\log\cos(\Sigma - A) = 9{\cdot}972986$$
$$\log\cos(\Sigma - B) = 9{\cdot}884254$$
$$9{\cdot}857240$$
$$9{\cdot}986702$$
$$19{\cdot}870538$$
$$\log\cos\frac{c}{2} = 9{\cdot}935269.$$

Weil Σ stets über 90° ist, so ist stets $\cos\Sigma$ negativ, daher die Größe unter dem Wurzelzeichen für $\sin\frac{a}{c}$, $\sin\frac{b}{c}$, $\sin\frac{c}{2}$ positiv.

Beispiel 2. $A = 130^\circ\,3'\,11''$; $B = 31^\circ\,34'\,26''$; $C = 30^\circ\,28'\,12''$ gibt $a = 70^\circ\,2'\,3''$.

Beispiel 3. $A = 103^\circ\,59'\,57''$; $B = 46^\circ\,18'\,7''$; $C = 36^\circ\,7'\,52''$ gibt $a = 42^\circ\,8'\,48''$.

§. 418. Zu der so nothwendigen Uebung in Auflösung sphärischer Dreiecke geben wir hier mehrere ausgerechnete Beispiele, die Leser mögen von den hier gegebenen sechs Bestandstücken je drei andere und andere annehmen, um daraus die übrigen herauszurechnen.

I. $\begin{cases} a = 25^\circ;\ b = 45^\circ;\ c = 37^\circ\,47'\,20'' \\ A = 36^\circ\,40'\,37'';\ B = 92^\circ\,1'\,10'';\ C = 60^\circ. \end{cases}$

II. $\begin{cases} a = 54^\circ 28'; \; b = 123^\circ 48'; \; c = 73^\circ 15' 20'' \\ A = 21^\circ 17' 22''; \; B = 158^\circ 14' 16''; \; C = 25^\circ 17' 34''. \end{cases}$

III. $\begin{cases} a = 38^\circ 30'; \; b = 70^\circ; \; c = 40^\circ \\ A = 30^\circ 28' 11''; \; B = 130^\circ 3' 11''; \; C = 31^\circ 34' 26''. \end{cases}$

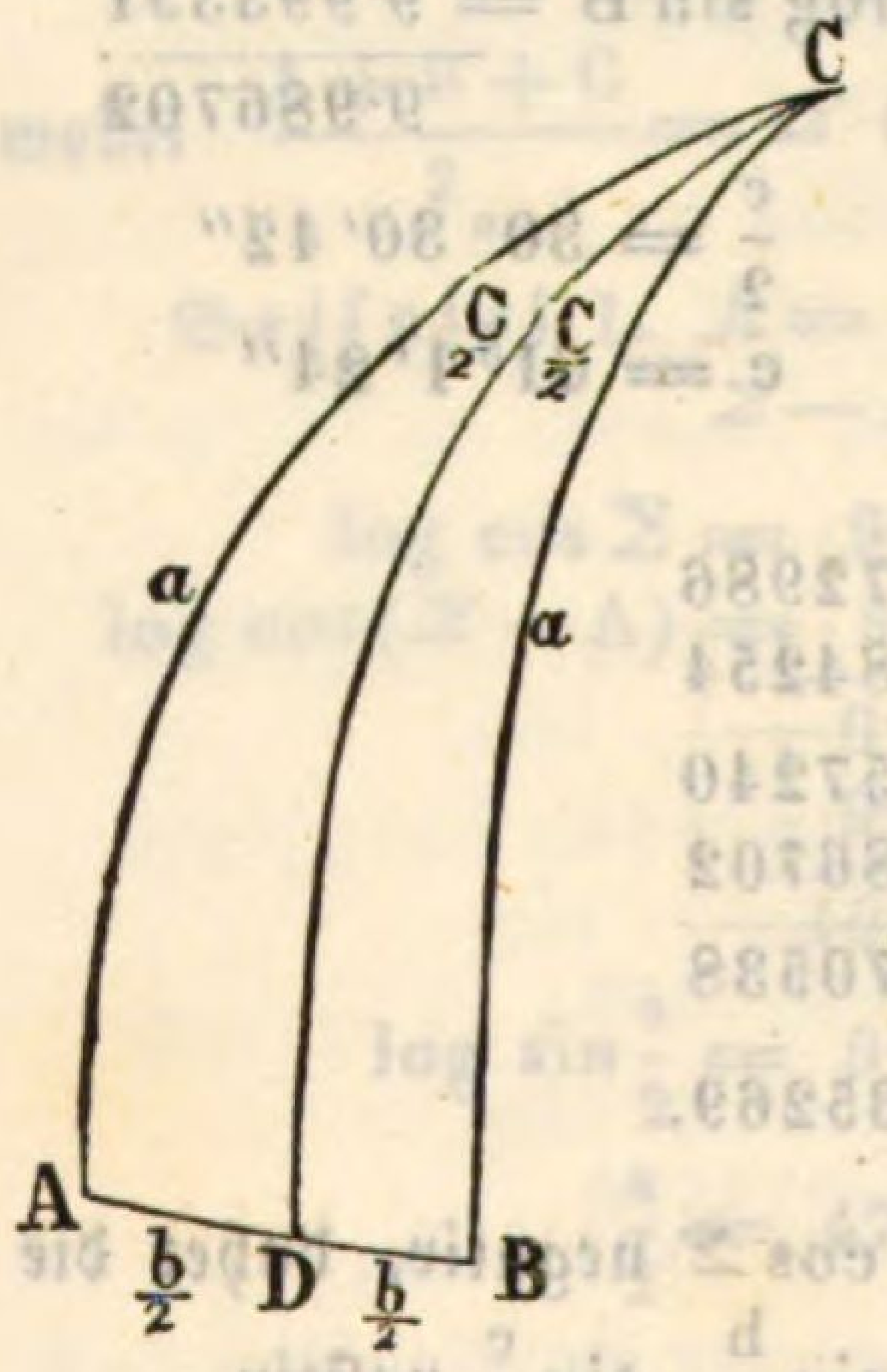
IV. $\begin{cases} a = 40^\circ 18' 29''; \; b = 67^\circ 14' 28''; \; c = 89^\circ 47' 6'' \\ A = 34^\circ 22' 17''; \; B = 53^\circ 35' 15''; \; C = 119^\circ 13' 31''. \end{cases}$

V. $\begin{cases} a = 63^\circ 50'; \; b = 80^\circ 19'; \; c = 120^\circ 47' 54'' \\ A = 51^\circ 30'; \; B = 59^\circ 15' 57''; \; C = 131^\circ 29' 46''. \end{cases}$

§. 419. Auflösung sphärischer Dreiecke in besondern Fällen.

a) Die Auflösung gleichschenkliger sphärischer Dreiecke kann immer auf die rechtwinkliger gebracht werden, indem man von der Spitze desselben einen senkrechten Bogen auf die dritte ungleiche Seite zieht. Es sey das Dreieck ABC, wo AC = BC = a, AB = b, CD = p sey, so hat man, wie man leicht findet:

Fig. 543



$$\sin\frac{b}{2} = \sin a \,.\, \sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{b}{2} = \frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin A}$$

$$\cos a = \text{cotg.}\, A \,.\, \text{cotg.}\,\frac{C}{2}$$

$$\text{tang}\,\frac{b}{2} = \text{tang}\, a \,.\, \cos A,$$

wozu noch $\sin p = \sin a \,.\, \sin A$

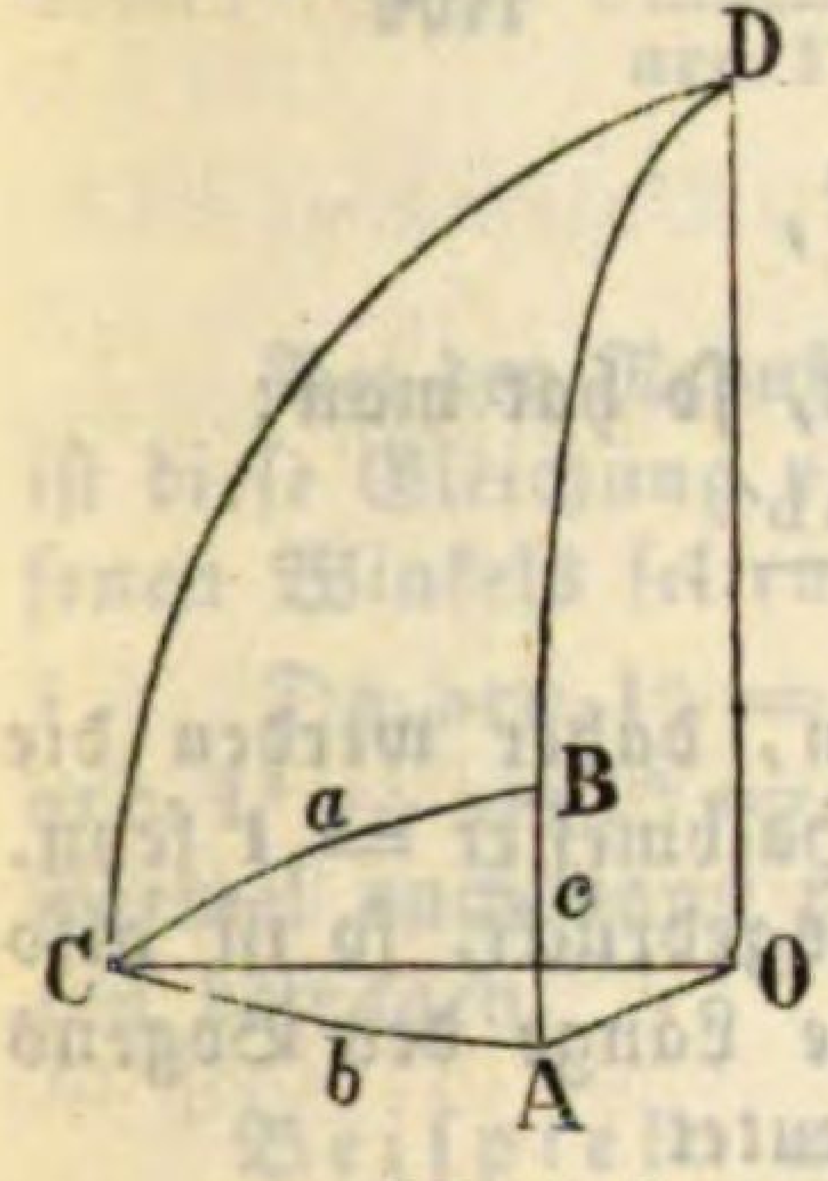
$$\cos p = \frac{\cos A}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\cos a = \cos\frac{b}{2} \,.\, \cos p.$$

b) Die Auflösung der sogenannten Quadrantaldreiecke, d. h. wo eine Seite gleich 90° ist, läßt sich stets auf die vom rechtwinkligen Dreiecke zurückbringen, da nämlich das Polardreieck eines Quadrantaldreiecks stets ein rechtwinkliges Dreieck ist; man braucht also nur dieses Polardreieck aufzulösen und dann die Seiten und Winkel desselben zu 180° ergänzen, so hat man die Winkel und Seiten des gegebenen Dreiecks.

Es läßt sich die Auflösung eines Quadrantaldreiecks noch auf folgende Art auf die eines rechtwinkligen zurückbringen. Es sey das Dreieck BCD, wobei CD = 90°. Verlängern (oder verkürzen nach Umständen) wir die Seite DB, bis DA = 90° ist, und ziehen den

Fig 544.



Bogen A C, so wird der Bogen A C und der Winkel A D C gleich viel Grade haben, weil D der Pol des Bogens A C ist, und D A C und D C A sind = 90°, daher die Auflösung des Dreiecks D C B auf die des Dreiecks A B C zurückgeführt ist. Man hat nämlich:

$$a = BC \qquad BAC = 90^\circ$$
$$b = BDC \qquad ABC = 180^\circ - CBD$$
$$c = 90^\circ - DB \qquad ACB = 90^\circ - DCB.$$

Beispiel 1. $CD = 90^\circ$; $DCB = 54^\circ 43'$; $CDB = 42^\circ 12'$, also $C = 35^\circ 17'$; $b = 42^\circ 12'$.

Man hat nun $\cos B = \sin C \,.\, \cos b$; $\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}$; $\cos a = \cos b \,.\, \cos c$.

$$\log \sin C = 9{\cdot}761642 \qquad \log \cos C = 9{\cdot}911853$$
$$\log \cos b = 9{\cdot}869704 \qquad \log \sin B = 9{\cdot}956084$$
$$\log \cos B = 9{\cdot}631346 \qquad \log \cos c = 9{\cdot}955769$$
$$B = 64^\circ 39' 55'' \qquad c = 25^\circ 25' 20''.$$

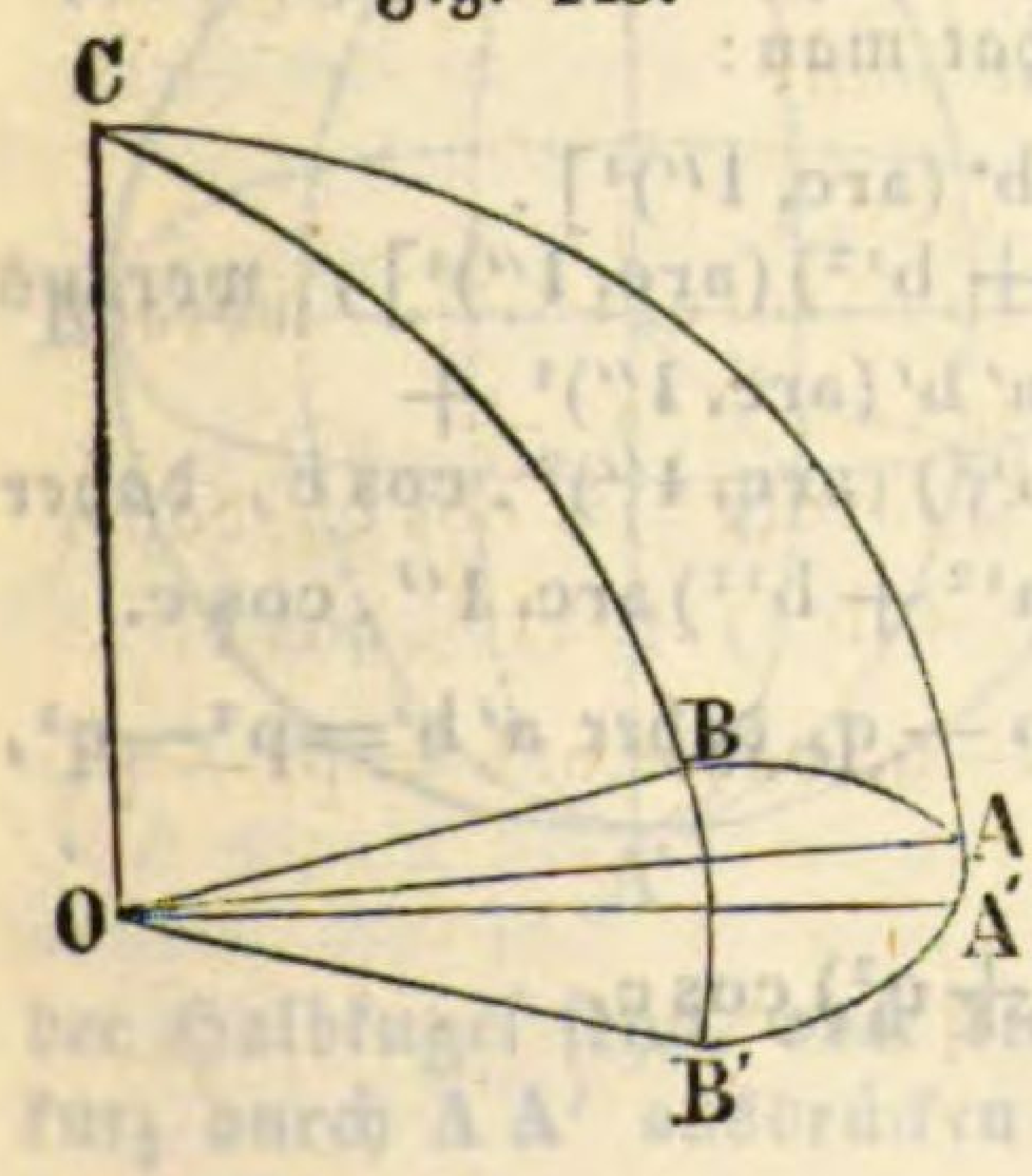
$$\log \cos b = 9{\cdot}869704$$
$$\log \cos c = 9{\cdot}955769$$
$$\log \cos a = 9{\cdot}825473$$
$$a = 48^\circ 0' 17'',$$

daher $DB = 64^\circ 34' 40''$; $CBD = 115^\circ 20' 5''$.

Beispiel 2. $DC = 90^\circ$; $DCB = 112^\circ 2' 9''$; $BC = 67^\circ 3' 14''$; gibt $D = 65^\circ 27' 9''$; $AD = 110^\circ 12' 44''$; $B = 70^\circ 3' 44''$.

§. 420. Ein bei praktischen Vermessungen häufig vorkommender Fall ist die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, wo zwei Seiten nahe 90° ist. Es sey das Dreieck A B C die Seiten A C = b, und B C = a seyen nahe 90°, so daß ihr Unterschied von 90° nur wenige Minuten betrage; denken wir uns die Bögen A C und B C nach A′ und B′ verlängert, so daß A′ C und B′C Quadranten sind, dann hat der Winkel C und der Bogen A′B′ einerlei Maß, d. h. A′B′ = C; sind nun A C und B C wirklich wenig von 90° verschieden, so werden auch die Bogen AB und A′B′ nur wenig von einander abweichen. Da nun

Fig. 445.



$A'B' = C$ und $AB = c$, so wird, wenn wir $c = C - x$ setzen, das x nur eine kleine Größe seyn. Da man nun hat:

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cdot \cos b}{\sin a \cdot \sin b},$$

und man $a = 90^\circ - a'$, und $b = 90^\circ - b'$ setzet, so hat man:

$$\cos(c + x) = \frac{\cos c - \sin a' \cdot \sin b'}{\cos a' \cdot \cos b'};$$

a' und b' betragen höchstens nur wenige Minuten, daher werden die Sinusse derselben sehr nahe ihren Bögen für den Halbmesser $= 1$ seyn. Denken wir uns nun a' und b' in Sekunden ausgedrückt, so ist also $\sin a'$ sehr nahe $= a' \cdot \text{arc. } 1''$, wobei arc. $1''$ die Länge des Bogens von einer Sekunde für den Halbmesser $= 1$ bedeutet ($\text{arc.} 1'' = 0{\cdot}0000048481$); $\cos a' = \sqrt{1 - \sin^2 a'} = 1 - \frac{\sin^2 a'}{2} - \frac{\sin^4 a'}{8}$, was man erhält, wenn man die Quadratwurzelausziehung auf gewöhnliche Art vornimmt. Da nun $\sin a'$ bereits sehr klein, also $\sin^2 a'$ noch kleiner, und um so mehr $\frac{\sin^4 a'}{8}$ u. s. w., so hat man sehr nahe $\cos a' = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 a'$, oder $\cos a' = 1 - \frac{1}{2} a'^2 (\text{arc. } 1'')^2$; eben so ist $\sin x = x \text{ arc. } 1''$; $\cos x = 1 - \frac{x^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2}{2}$, daher $\cos(c + x) = \cos c \cdot \cos x - \sin c \cdot \sin x = \cos c - \cos c \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2 - \sin c \cdot x \cdot \text{arc. } 1''$ Der mittlere Ausdruck kann hier annäherungsweise weggelassen werden, da schon $x^2 (\text{arc. } 1'')^2$ sehr klein ist, und nun noch mit $\cos c < 1$ multiplicirt hier erscheint:

$$\cos a' \cdot \cos b' = [1 - \tfrac{1}{2} a'^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2] [1 - \tfrac{1}{2} b'^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2]$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} a'^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2 - \tfrac{1}{2} b'^2 \cdot (\text{arc. } 1'')^2 + \tfrac{1}{4} a'^2 b'^2 (\text{arc. } 1'')^4,$$

wobei wir hier den letzten Ausdruck aus denselben Gründen weglassen, wir haben so:

$$\cos c - x \cdot \text{arc. } 1'' \cdot \sin c = \frac{\cos c - a' b' (\text{arc } 1'')^2}{1 - \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2)(\text{arc. } 1'')^2}.$$

Multipliciren wir Zähler und Nenner mit $1 + \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2)(\text{arc.} 1'')^2$ und lassen die vierten Potenzen weg, so hat man:

$$\cos c - x \cdot \text{arc. } 1'' \cdot \sin c = [\cos c - a' b' (\text{arc. } 1'')^2] \cdot$$
$$\cdot [1 + \tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2)(\text{arc. } 1'')^2],$$ woraus
$$\cos c - x \cdot \text{arc. } 1'' \cdot \sin c = \cos c - a' b' (\text{arc. } 1'')^2 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2)(\text{arc. } 1'')^2 \cdot \cos c,$$ daher
$$x \cdot \sin c = a' b' \text{ arc } 1'' - \tfrac{1}{2}(a'^2 + b'^2) \text{ arc. } 1'' \cdot \cos c.$$

Setzet man nun $a' = p + q$, $b' = p - q$, daher $a'b' = p^2 - q^2$, $a'^2 + b'^2 = 2(p^2 + q^2)$, so hat man:

$$\frac{x \sin c}{\text{arc } 1''} = (p^2 - q^2) - (p^2 + q^2) \cos c,$$

oder $\frac{x \sin c}{arc. 1''} = p^2 (1 - \cos c) - q^2 (1 + \cos c)$

$$x = \left(p^2 . \tang \frac{c}{2} - q^2 . \cotg. \frac{c}{2}\right) arc. 1''.$$

Bei der Reduktion der Winkel auf den Horizont in der Geodäsie ist diese Gleichung von häufigem Gebrauche, da die Ebene des gemessenen Winkels selten bedeutend von der horizontalen abweicht.

Da arc. $1^0 = 0{\cdot}0174533$ und $\sin 1^0 = 0{\cdot}0174524$ ist, daher arc. $1^0 - \sin 1^0 = 0{\cdot}0000009$ ist, so sieht man, daß die entwickelte Formel auch dann noch brauchbar ist, wenn a' und b' mehrere Minuten betragen.

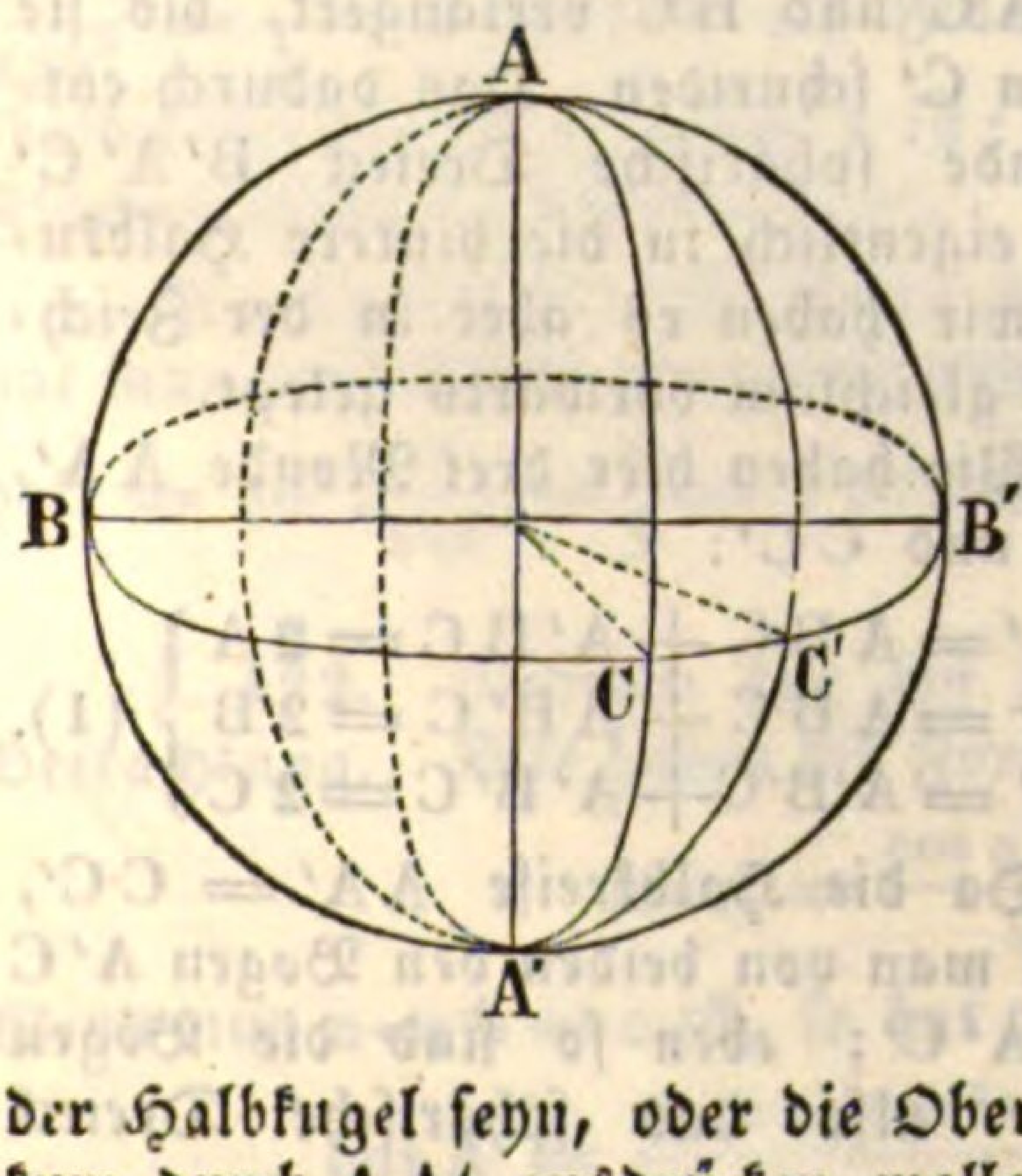
Beispiel: $a = 89^0 58' 13''$; $b = 90^0 7' 33''$; $c = 75^0 18' 46''$,
daher $a' = 1' 47'' = 107''$; $b' = -7' 33'' = -453''$,
mithin $p = -173''$; $q = 280''$.

$2 \log 173 = 4{\cdot}476092$	$2 \log 280 = 4{\cdot}894316$
$\log \tang \frac{c}{2} = 9{\cdot}887433 - 10$	$\log \cotg. \frac{c}{2} = 0{\cdot}112567$
$\log arc. 1'' = 4{\cdot}685575 - 10$	$\log arc. 1'' = 4{\cdot}685575 - 10$
$9{\cdot}049100 - 10$	$9{\cdot}692458 - 10,$
daher erster Theil $= 0{\cdot}'''1119$,	zweiter Theil $= 0{\cdot}'''4925$,

somit $x = 0{\cdot}'''1119 - 0{\cdot}'''4925$
$x = -0{\cdot}'''381$.
folglich $C = 75^0 18' 46{\cdot}'''38$.

§. 421. **Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks.** Um den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks zu finden, betrachten wir zuerst die Oberfläche der Kugelfläche, die zwischen den beiden größten Halbkreisen A C A' und A C' A' enthalten ist. Man nennt ein solches Stück der Oberfläche der Kugel einen **Mond**. Zu diesem Behufe legen wir durch den Mittelpunkt der Kugel eine Ebene, welche auf A A' senkrecht ist, und die die Kugel im Kreise B C C' B' schneidet, so sind A und A' die Pole dieses Kreises, und der Bogen C C' hat dasselbe Maß, wie der Winkel C A C' oder C A' C'. Es ist nun leicht begreiflich, der sovielte Theil der Bogen C C' vom Halbkreise B B' ist, der sovielte Theil wird die Oberfläche des Mondes C A C' A' von der Halbkugel seyn, oder die Oberfläche des Mondes C A C' A' (die wir kurz durch A A' ausdrücken wollen) wird sich zur ganzen Kugelober-

Fig 546.



fläche verhalten, wie der Bogen CC′ zum ganzen Kreisumfange, daher:

$$AA' = \frac{CC'}{2\pi r} . \text{Kugeloberfläche, wobei } CC' \text{ die Bogenlänge ist,}$$

oder $AA' = \frac{CAC'}{360}$. Kugeloberfläche, wobei CAC′ in Grade, Minuten und Sekunden ausgedrückt ist.

Nehmen wir ferner den Halbmesser der Kugel wie früher gleich 1 an, und da, wie wir später beweisen werden, die Oberfläche der Kugel für den Halbmesser r gleich $4\pi r^2$, also für den Halbmesser 1 gleich 4π ist, so hat man:

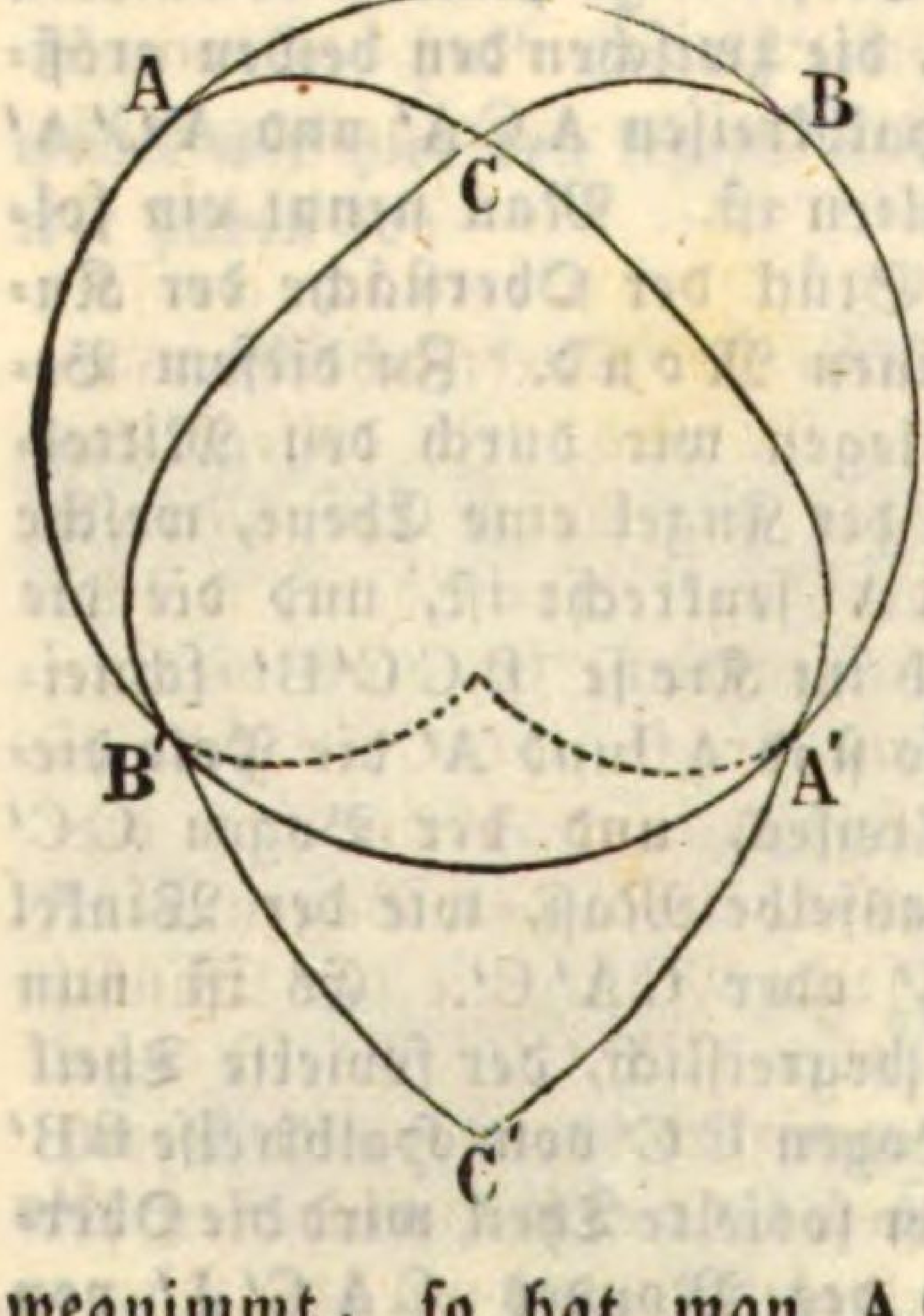
$$AA' = \frac{CC'}{2\pi} . 4\pi = 2CC',$$

oder für den Halbmesser r:

$$AA' = \frac{CC'}{2\pi r} . 4\pi r^2 = CC' . 2r,$$

wobei CC′ die Bogenlänge oder $AA' = \frac{CAC'}{360^0} . 4\pi r^2 = \frac{CAC'}{90^0} . \pi r^2$ bedeutet, d. h. die Oberfläche eines Mondes der Kugeloberfläche ist gleich dem Bogen des Polarkreises beider Spitzen, multiplicirt mit dem Durchmesser der Kugel. Eben so hat man auch $AA' = \frac{CAC'}{360^0} . 4\pi = \frac{CC'}{90^0} . \pi$, wo CC′ in Graden und Minuten ausgedrückt ist.

Fig. 547.



Es sey nun das sphärische Dreieck ABC, denken wir uns nun die Seiten BA und BC verlängert, bis sie sich in B′, die Seiten AC und AB verlängert, bis sie sich in A′, und die Seiten AC und BC verlängert, bis sie sich in C′ schneiden. Das dadurch entstehende sphärische Dreieck B′A′C′ fällt eigentlich in die hintere Halbkugel, wir haben es aber in der Zeichnung gleichsam vorwärts gelegt.

Wir haben hier drei Monde AA′, BB′ und CC′:

$$\left.\begin{aligned} AA' &= ABC + A'BC = 2A \\ BB' &= ABC + AB'C = 2B \\ CC' &= A'B'C + A'B'C = 2C \end{aligned}\right\} (1).$$

Da die Halbkreise AA′ = CC′, wenn man von beiden den Bogen A′C wegnimmt, so hat man AC = A′C′; eben so sind die Bögen B′C′ = BC und A′B′ = AB, also das sphärische Dreieck

$A'B'C' = ABC$, so gibt uns die Addition der obigen Gleichungen in (1):

$$ABC + A'BC + AB'C + A'B'C + 2ABC = 2(A + B + C).$$

Die vier ersten Ausdrücke hier machen die Halbkugel $= 2\pi$ aus, daher hat man:

$$(2)\ldots.2\pi + 2ABC = 2(A + B + C), \text{ oder}$$
$$(3)\ldots.\triangle ABC = A + B + C - \pi,$$

wobei die drei Winkel A, B und C in Bogenlängen zu nehmen sind, und wobei der Halbmesser der Kugel gleich 1 ist.

Nimmt man aber A, B und C in Gradmaß, und den Halbmesser gleich r, so hat man in den Gleichungen (1) statt 2A, 2B, 2C.... $\frac{A}{90^\circ}\pi r^2$, $\frac{B}{90^\circ}\pi r^2$, $\frac{C}{90^\circ}\pi r^2$ zu setzen; in der Gleichung (2) kommt statt 2π dann $2\pi r^2$ zu setzen, und man erhält sofort:

$$\triangle ABC = (A + B + C - 180)\frac{\pi r^2}{180^\circ},$$

oder für $r = 1$:

$$(4)\ldots.\triangle ABC = (A + B + C - 180)\frac{\pi}{180^\circ}.$$

Verrichtet man hier die Multiplikation, so geht die Gleichung (4) in die Gleichung (3) über. Man hat somit den Satz: der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks ist gleich dem sphärischen Excesse im Bogenmaße, wenn der Halbmesser der Kugel gleich 1 ist; ist der Halbmesser $= r$, so hat man diesen Ausdruck mit r^2 zu multipliciren.

Beispiel 1: Es seyen die drei Winkel eines sphärischen Dreiecks gleich 70°, 80°, 90°, so hat man sphärischen Exceß $= 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$, dieses in Bogenmaß verwandelt, gibt $\frac{60.\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3} = 1{\cdot}047197$ als Flächeninhalt des Dreiecks, wenn der Halbmesser der Kugel gleich 1 ist; wäre er hingegen r, so ist dann der Flächeninhalt $= 1{\cdot}047197.r^2$.

Beispiel 2: Es seyen die drei Winkel jeder gleich 90°, so hat man sphärischen Exceß $= 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ$, also Flächeninhalt $= 90^\circ.\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2} = 1{\cdot}570796$.

§. 422. Nehmen wir ein gleichseitiges sphärisches Dreieck in Betrachtung. Wir haben die Formel:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Wenn nun $a = b = c$ ist, so hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos^2 a}{1 - \cos^2 a} = \frac{\cos a}{1 + \cos a}, \text{ woraus}$$

$$1 - \cos A = \frac{1}{1 + \cos a}, \text{ oder}$$

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1}{4\cos^2\frac{a}{2}}, \text{ woraus}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{a}{2}} \quad (1).$$

Damit $\sin\frac{A}{2}$ möglich bleibe, ist nothwendig, daß $2\cos\frac{a}{2} > 1$, oder $\cos\frac{a}{2} > \frac{1}{2}$ sey; da nun $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, so muß also $\cos\frac{a}{2} > \cos 60^\circ$, also $\frac{a}{2} < 60^\circ$, d. h. $a < 120^\circ$ seyn, begreiflicher Weise, weil die drei Seiten eines sphärischen Dreiecks zusammengenommen kleiner als 360° seyn müssen. Dieselbe Gleichung gibt uns:

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$$

Es muß daher $2\sin\frac{A}{2} > 1$; $\sin\frac{A}{2} > \frac{1}{2}$; $\sin\frac{A}{2} > \sin 30^\circ$, daher $\frac{A}{2} > 30^\circ$, $A > 60^\circ$ ebenfalls ganz übereinstimmend mit unseren früheren Untersuchungen, da die Summe der drei Winkel eines sphärischen Dreiecks größer als 180° seyn muß. Die Gleichung (1) zeigt uns, je kleiner die Seiten des Dreiecks sind, d. h. je kleiner a ist, folglich je näher $\cos\frac{a}{2}$ an 1 kommt, desto mehr nähert sich $\frac{A}{2}$ dem Winkel von 30°, also A dem Winkel von 60°. In einem ebenen Dreiecke ist die Summe der drei Winkel 180°, also in einem ebenen gleichseitigen Dreiecke jeder Winkel gleich 60°; je kleiner die Seiten eines sphärischen Dreiecks sind, desto mehr nähert es sich einem ebenen Dreiecke, daher begreiflich bei einem gleichseitigen sphärischen Dreiecke sich ein Winkel desto mehr 60° nähern wird, je kleiner die Seiten sind.

Es sey z. B. jede Seite des sphärischen Dreiecks gleich 10°, folglich jede Seite = arc. 10° = 0·1745329, so ist:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2\cos 5^\circ}$$

$$\log\cos 5 = 9{\cdot}998344$$
$$\log 2 = 0{\cdot}301030$$
$$\overline{\quad 0\ 299374}$$

$$\log\sin\frac{A}{2} = 9{\cdot}700626$$

$$\frac{A}{2} = 30^\circ\, 7'\, 36''$$

$$A = 60^\circ\, 15'\, 12'',$$

daher die Summe aller drei Winkel 180° 45′ 36″, mithin der sphärische Exceß = 45′ 36″; dieß in Bogenlänge verwandelt, gibt 0·013265 als Flächeninhalt des Dreiecks.

Denken wir uns nun ein ebenes gleichseitiges Dreieck, wo jede Seite a = 0·174533 der Seite dieses sphärischen Dreiecks gleich sey, so ist der Flächeninhalt davon gleich $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; nun ist:

$$\log\frac{a}{2} = 8{\cdot}940847$$

$$\log\frac{a^2}{4} = 7{\cdot}881694$$

$$\log\sqrt{3} = 0{\cdot}238560$$

$$\log\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 8{\cdot}120254,$$

$$\text{daher } \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 0{\cdot}013190.$$

Es ist daher der Flächeninhalt des ebenen gleichseitigen Dreiecks 0·013190 von dem Flächeninhalte des gleichseitigen sphärischen Dreiecks mit eben so großen Seiten, d. i. 0·013265 nur um 0·000075 verschieden. Dieser Unterschied wird desto kleiner, je kleiner wir die Seiten annehmen.

Nehmen wir eine Seite des sphär. Dreiecks gleich 1° = 0·0174533 an, so erhält man:

$$\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{2\cos 30'}, \text{ woraus } \frac{A}{2} = 30^\circ\, 0'\, 4''.5,$$

$$\text{also } A = 60^\circ\, 0'\, 9'', \text{ mithin sphär. Exceß} = 27'',$$

$$\text{daher Flächeninhalt} = \text{arc. } 27'' = 0{\cdot}00013090.$$

Rechnet man den Flächeninhalt eines ebenen gleichseitigen Dreiecks, deren jede Seite gleich 0·0174533 ist, so erhält man 0·00013090.

Wir sehen also, sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein, was bei den auf unserer Erde vermessenen Dreiecken stets der Fall seyn wird, so ist der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks sehr nahe derselbe, als wenn man den Flächeninhalt des Dreiecks als ebenen rechnet. Dieß gibt uns das Mittel an die Hand, aus dem Flächeninhalte den sphärischen Exceß zu bestimmen. Theilt man den sphärischen Exceß in drei Theile, so ist dieß der Betrag, um welchen ein Winkel des sphärischen Dreiecks größer ist als der Winkel des mit ihm gleichseitigen ebenen Dreiecks. Sind die Seiten eines sphärischen Dreiecks gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein, so nimmt man den dritten Theil des sphär. Excesses, und zieht ihn von jedem der drei Winkel des sphär. Dreiecks ab, so hat man dann ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten, wie das sphärische, welches diese drei Winkel als Winkel hat. Was wir hier nur für das gleichseitige Dreieck betrachtet haben, läßt sich auf die andern Dreiecke auch ausdehnen.

§. 423. Um aber diese Verallgemeinerung zu vollführen, bedürfen wir eines Ausdruckes des Sinus und Cosinus durch ihren Bogen.

Wir wissen, je kleiner ein Bogen ist, desto mehr nähert sich sein Sinus diesem Bogen, doch wird der Sinus stets kleiner seyn als sein Bogen, wir werden also haben $\sin x = x +$ Etwas, das stets kleiner wird, je kleiner als x wird, das also von x abhängt, das also x als Faktor enthält; es wird aber nicht x in der ersten Potenz seyn, denn wäre dieses Etwas z. B. ax, so hätten wir $\sin x = x + ax = (1+a)x$, dann würde bei dem Immerkleinerwerden des x sich der Sinus x nicht dem x, sondern dem $(a+1)x$ nähern. Es wird dieses Etwas, was zu x hinzukommt, nicht die zweite Potenz von x seyn, denn hätte man

$$\sin x = x + ax^2, \text{ so wäre } \sin(-x) = -x + ax^2,$$

und doch muß $\sin(-x) = -\sin x$ seyn, daher wird dieses Etwas das x in der dritten Potenz enthalten, und wir haben:

$$\sin x = x + Ax^3 + A'x^5 + \ldots$$

Es können hier nur ungerade Potenzen von x erscheinen, weil mit dem Zeichenwechsel von x auch $\sin x$ ein entgegengesetztes Zeichen erhalten muß.

Suchen wir einen ähnlichen Ausdruck für den Cosinus von x, so wissen wir, daß sich $\cos x$ ohne Ende der Einheit nähert, je kleiner als x ist, und daß, weil $\cos(-x) = \cos(+x)$ ist, der Ausdruck beim Zeichenwechsel des x unverändert bleiben muß, daher nur gerade Potenzen von x enthalten kann. Man hat somit:

$$\cos x = 1 + Bx^2 + Cx^4 + \ldots$$

Wir wollen bei der Voraussetzung stehen bleiben, daß x nur klein sey, so daß man, weil x in Theilen des Halbmessers ausgedrückt, nur ein kleiner Decimalbruch ist, die höheren Potenzen als die vierte vernachläßigen kann, so hat man:

$$\cos x = 1 + Bx^2 + Cx^4$$
$$\sin x = x + Ax^3,$$

woraus

$$\cos^2 x = 1 + 2Bx^2 + 2Cx^4 + B^2x^4$$
$$\sin^2 x = x^2 + 2Ax^4,$$

daher

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 + (2B+1)x^2 + (2C+2A+B^2)x^4$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x = 1 + (2B-1)x^2 + (2C-2A+B^2)x^4.$$

Da nun $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$; $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = 1 + B(2x)^2 + C(2x)^4$ ist, so hat man:

$$1 = 1 + (2B+1)x^2 + (2C+2A+B^2)x^4$$
$$1 + 4Bx^2 + 16Cx^4 = 1 + (2B-1)x^2 + (2C-2A+B^2)x^4,$$

oder

$$(2B+1)x^2 + (2C+2A+B^2)x^4 = 0$$
$$-(2B+1)x^2 + (-14C-2A+B^2)x^4 = 0.$$

Da nun diese zwei Gleichungen gelten müssen für jeden kleinen Werth von x, welche Gleichheit aber nur dann Statt finden kann für jeden Werth von x, wenn die Coefficienten von x^2 und x^4 für sich

gleich Null sind, so hat man zur Bestimmung von A, B, C folgende Bedingungsgleichungen:

$$2B + 1 = 0 \begin{cases} B^2 + 2A + 2C = 0 \\ B^2 - 2A - 14C = 0, \end{cases}$$

woraus $B = -\frac{1}{2}$; $A = -\frac{1}{6}$; $C = \frac{1}{24}$, daher

$$\text{I.} \begin{cases} \sin x = x - \frac{x^3}{6} \\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \end{cases}$$

Die Fortsetzung dieser Untersuchungen, wenn man nämlich die fünften und höheren Potenzen von x nicht vernachläßigen würde, gibt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots.$$

Zu unserem Zwecke reichen eben die Gleichungen I. hin.

Als Beispiel für die Formeln in I. berechnen wir den Sinus und Cosinus von 10°.

Man hat $x = \text{arc. } 10^0 = 0{\cdot}1745329$, daher

$x = 0{\cdot}1745329$	$1 = 1{\cdot}0000000$
$\frac{x^3}{6} = 0{\cdot}0008861$	$\frac{x^4}{24} = 0{\cdot}0000386$
$\sin x = 0{\cdot}1736468$	$1{\cdot}0000386$
	$\frac{x^2}{2} = 0{\cdot}0152308$
	$\cos x = 0{\cdot}9848078$

Nun ist $\sin 10^0 = 0{\cdot}1736482$, $\cos 10^0 = 0{\cdot}9848078$. Würde man nach $\frac{x^5}{120}$ rechnen, so würde sin 10° ganz genau herauskommen. Wir sehen also, bei 10° ist das Resultat bis in die sechste Stelle genau.

§. 424. Betrachten wir nun ein sphärisches Dreieck, wo die Seiten a, b, c sehr klein gegen den Halbmesser der Kugel seyen, so hat man:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b . \cos c}{\sin b . \sin c}.$$

Unter der Voraussetzung also, daß a, b, c mindestens kleiner als 10° sind, hat man:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}; \ \sin a = a - \frac{a^3}{6},$$

und eben so bei den übrigen, daher:

$$\cos A = \frac{1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - \left(1 - \frac{b^2}{2} + \frac{b^4}{24}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2} + \frac{c^4}{24}\right)}{\left(b - \frac{b^3}{6}\right)\left(c - \frac{c^3}{6}\right)}$$

$$= \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{1}{24}(a^4 - b^4 - c^4 - 6\,b^2 c^2)}{b\,c\left(1 - \frac{b^2 + c^2}{6}\right)}.$$

Multipliciren wir hier Zähler und Nenner mit $1 + \frac{b^2 + c^2}{6}$, so erhält man im Nenner $bc\left[1 - \left(\frac{b^2 + c^2}{6}\right)^2\right] = b\,c - \frac{b\,c\,(b^2 + c^2)^2}{36}$, wobei der zweite Theil, wo sechste Potenzen der ohnehin kleinen Größen b und c, als verschwindend klein weggelassen werden kann, und wir somit haben:

$$\cos A = \left[\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} + \frac{1}{24\,b\,c}(a^4 - b^4 - c^4 - 6\,b^2 c^2)\right]\left(1 + \frac{b^2 + c^2}{6}\right),$$

und wenn man wieder die Größen über die vierte Ordnung wegläßt:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2\,a^2 b^2 - 2\,b^2 c^2 - 2a^2 c^2}{24\,b\,c}.$$

Denken wir uns nun ein ebenes Dreieck, dessen Seiten a, b, c und die ihnen gegenüberstehenden Winkel in derselben Ordnung A′ B′ und C′ setzen, so hat man:

$$\cos A' = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}, \text{ daher } \sin^2 A' = \frac{4\,b^2 c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4\,b^2 c^2}$$

$$\sin^2 A' = \frac{2\,b^2 c^2 + 2\,a^2 b^2 + 2\,a^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4\,b^2 c^2}.$$

Man hat somit:

$$\cos A = \cos A' - \frac{b\,c}{6} \sin^2 A'.$$

Bezeichnen wir nun den Flächeninhalt dieses Dreiecks mit Δ, so hat man, da $\frac{b\,c}{2} \sin A' = \Delta$ ist:

$$\cos A = \cos A' - \frac{\Delta}{3} \sin A'.$$

Da nun $A - A'$, das wir durch θ ausdrücken wollen, jedenfalls eine kleine Größe ist, so hat man

$\cos A = \cos(A' + \theta) = \cos A' - \theta \,.\, \sin A'$, und somit $\theta = \frac{\Delta}{3}$, folglich

$$A = A' + \frac{\Delta}{3};\ B = B' + \frac{\Delta}{3};\ C = C' + \frac{\Delta}{3}.$$

Da nun der sphärische Exceß $\Sigma = A + B + C - \pi$ im Bogenmaße ausgedrückt, den Flächeninhalt des Dreiecks gibt, so hat man:

$$A' = A - \frac{\Sigma}{3};\ B' = B - \frac{\Sigma}{3};\ C' = C - \frac{\Sigma}{3},$$

d. h. ein sphärisches Dreieck, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind, kann als ein ebenes Dreieck mit denselben Seiten betrachtet werden, wo die Winkel den Winkeln des sphärischen Dreiecks gleich sind, wenn man von jedem den dritten Theil des sphärischen Excesses abzieht. Man nennt diesen Satz nach seinem Urheber den Legendre'schen. Sind also drei Stücke eines solchen sphärischen Dreiecks gegeben, so kann man die drei andern mittelst ebener Trigonometrie bestimmen.

Beispiel 1: Eines der größten auf der Erde gemessenen sphärischen Dreiecke ist folgendes:

$$\begin{aligned} A &= 59^\circ\, 50'\, 53''\cdot 18 \\ B &= 78^\circ\ \ 4'\ \ 9''\cdot 47 \\ C &= 42^\circ\ \ 5'\, 36''\cdot 38 \\ \hline A + B + C &= 180^\circ\ \ 0'\, 39''\cdot 03 \end{aligned};\ c = AB\ 56559\ \text{Toisen}$$

Um nun die zwei andern Seiten a und b zu bestimmen, hat man:

$$A' = A - \frac{\Sigma}{3};\ B' = B - \frac{\Sigma}{3};\ C' = C - \frac{\Sigma}{3},\ \text{wobei}\ \Sigma = 13''\cdot 01,$$

daher $A' = 59^\circ\, 50'\, 40''\cdot 17$; $B' = 78^\circ\, 3'\, 56''\cdot 46$; $C' = 42^\circ\, 5'\, 23''\cdot 37$.

$$b = c\,.\,\frac{\sin B'}{\sin C'};\ a = c\,.\,\frac{\sin A'}{\sin C'}$$

$$\begin{aligned} \log \sin B' &= 9\cdot 9905099 \\ \log c &= 4\cdot 7525017 \\ \hline & \ \ \ \ 4\cdot 7430116 \\ \log \sin C' &= 9\cdot 8262659 \\ \hline \log b &= 4\cdot 9167457 \\ b &= 82555\cdot 44\ \text{Toisen}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \sin A' &= 9\cdot 9368479 \\ \log c &= 4\cdot 7525017 \\ \hline & \ \ \ \ 4\cdot 6893496 \\ \log \sin C' &= 9\cdot 8262659 \\ \hline & \ \ \ \ 4\cdot 8630837 \\ a &= 72959\cdot 82\ \text{Toisen}. \end{aligned}$$

Um den Vortheil des Legendre'schen Satzes einzusehen, lösen wir dieses Beispiel nach den strengen Formeln auf, suchen wir aus den drei gegebenen Winkeln die drei Seiten zu berechnen, so hat man:

$$\Sigma = \frac{A + B + C}{2} = 90^\circ\ 0'\ 19''\cdot 515.$$

Da $\cos \Sigma = -\sin 19''\cdot52$, so verfährt man am kürzesten, da bei kleinen Bögen die Sinus ihrer Bögen ganz proportional sind, wenn man $\sin 19''\cdot52 = 19\cdot52 \,.\, \sin 1''$:

$$\log \sin 1'' = 4\cdot6855749$$
$$\log 19\cdot515 = 1\cdot2903686$$
$$\log \sin 19''\cdot515 = 5\cdot9759435.$$

$$\log \sin B = 9\cdot9905158$$
$$\log \sin C = 9\cdot8262962$$
$$9\cdot8168120$$

$$\log \cos \Sigma = 5\cdot9759435$$
$$\log \cos (\Sigma - A) = 9\cdot9368400$$
$$5\cdot9127835$$
$$9\cdot8168120$$
$$16\cdot0959715$$
$$\log \sin \frac{a}{2} = 8\cdot0479857$$
$$\log \sin 1'' = 4\cdot6855749$$
$$3\cdot3624108$$
$$\frac{a}{2} = 2303''\cdot62 = 38'\,23''\cdot62$$
$$a = 1^\circ\,16'\,47''\cdot24.$$

$$\log \sin A = 9\cdot9368639$$
$$\log \sin B = 9\cdot9905158$$
$$9\cdot9273797$$

$$\log \cos \Sigma = 5\cdot9759435$$
$$\log \cos (\Sigma - C) = 9\cdot8262508$$
$$5\cdot8021943$$
$$9\cdot9273797$$
$$15\cdot8748146$$
$$\log \sin \frac{c}{2} = 7\cdot9374073$$
$$\log \sin 1'' = 4\cdot6855749$$
$$3\cdot2518324$$
$$\frac{c}{2} = 1785''\cdot80 = 29'\,45''.8$$
$$c = 59'\,31''\cdot6.$$

$$\log \sin A = 9.9368639$$
$$\log \sin C = 9\cdot8262962$$
$$9\cdot7631601$$

$$\log \cos \Sigma = 5\cdot9759435$$
$$\log \cos (\Sigma - B) = 9\cdot9905070$$
$$5\cdot9664505$$
$$9\cdot7631601$$
$$16\cdot2032904$$
$$\log \sin \frac{b}{2} = 8\cdot1016452$$
$$\log \sin 1'' = 4\cdot6855749$$
$$3\cdot4160703$$
$$\frac{b}{2} = 2606''\cdot58 = 43'\,26''\cdot58$$
$$b = 1^\circ\,26'\,53''\cdot16.$$

Da nun $c = 56559$ Toisen ist, so hat man:

$$b = c \cdot \frac{2606 \cdot 58}{1785 \cdot 80}; \quad a = c \cdot \frac{2303 \cdot 62}{1785 \cdot 80},$$

woraus $b = 82554 \cdot 3$; $a = 72959$.

Nachdem die Angaben dieser Aufgabe auf wirklichen Messungen beruhen, so können wir diese Gelegenheit benützen, daraus die Größe eines Grades der Erdkugel und den Halbmesser zu berechnen.

Nachdem die Seite c eine Länge von 56559 Toisen, und zugleich $= 2 \cdot 1785'' \cdot 8 = 3571'' 6$ hat, so ist also ein Bogen der Erde

$$\text{von } 1'' = \frac{56559}{3571 \cdot 6} \text{ Toisen, daher ein Bogen von}$$

$$1^\circ = 3600 \cdot \frac{56559}{3571 \cdot 6} \text{ Toisen,}$$

$$\text{arc } 1^\circ = 57008 \cdot 72 \text{ Toisen.}$$

Da nun der halbe Erdumfang $\pi r = 180 \cdot 57008^t \cdot 72$ seyn wird, so hat man:

$$r = \frac{180}{\pi}\, 57008^t \cdot 72, \text{ oder}$$

$$r = 3266359 \text{ Toisen.}$$

Beispiel 2. Es sey ein Dreieck einer Seite $= 72959 \cdot 8^t$, und die anliegenden Winkel gleich $79^\circ\, 4'\, 9'' \cdot 47$ und $42^\circ\, 5'\, 36'' \cdot 58$. Da der Flächeninhalt des Dreiecks für den Halbmesser 1 gleich ist dem sphärischen Excesse im Bogen, so suche ich zuerst den Flächeninhalt des Dreiecks aus den Angaben, dividire diesen durch R^2 (das Quadrat des Erdhalbmessers), so habe ich den sphärischen Exceß im Längenmaße des Bogens; dividire ich dieses durch sin 1'', so habe ich den sphärischen Exceß in Sekunden, den dritten Theil davon, subtrahire von den zwei gegebenen Winkeln des Dreiecks, so habe ich zwei Winkel des ebenen Dreiecks.

Die Rechnung gibt Exceß	$= 38'' \cdot 991$
und für die Winkel	$78^\circ\, 3'\, 56'' \cdot 47$
	$42^\circ\, 5'\, 23'' \cdot 38$
daher der dritte Winkel	$= 59^\circ\, 50'\, 40'' \cdot 15$
dazu	13
dritter sphärischer Winkel	$59^\circ\, 50'\, 53''$.

Hiebei ist $\log R = 6 \cdot 514300$ genommen.

§. 425. **Den Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks oder den sphärischen Exceß durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ausdrücken.**

Man hat:

$$E = A + B + C - 180^\circ; \quad \frac{E}{2} = \Sigma - 90; \quad \text{cotg.} \frac{E}{2} = -\text{tang}\, \Sigma$$

$$\tang\frac{\Sigma}{2}=\tang\tfrac{1}{2}(A+B+C)=\frac{\tang\frac{1}{2}(A+B)+\tang\frac{1}{2}C}{1-\tang\frac{1}{2}(A+B)\,.\,\tang\frac{1}{2}C}$$ (siehe p 225).

Nach der Neper'schen Analogie aber ist:

$$\tang\tfrac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,.\,\cotg.\tfrac{1}{2}C,\ \text{daher}$$

$$\tang\frac{\Sigma}{2}=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,.\,\cotg.\frac{1}{2}C+\tang\dfrac{C}{2}}{1-\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,.\,\dfrac{1+\cos C}{\sin C}+\dfrac{1-\cos C}{\sin C}}{1-\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}}$$

$$=\frac{1}{\sin C}\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}a\,.\,\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b\,.\,\cos C}{-\sin\frac{1}{2}a\,.\,\sin\frac{1}{2}b}.$$

$$\cotg.\frac{E}{2}=\frac{1}{\sin C}(\cotg.\tfrac{1}{2}a\,.\,\cotg.\tfrac{1}{2}b+\cos C)$$

$$=\cotg.C\left(\frac{\cotg.\frac{1}{2}a\,.\,\cotg\frac{1}{2}b}{\cos C}+1\right).$$

Den sphärischen Exceß durch die drei Seiten auszudrücken. Wir haben:

$$\tang\frac{E}{4}=\tang\tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}(A+B)-\tfrac{1}{2}(180^\circ-C)\right].$$

Aus den Formeln Seite 223 unten ergibt sich durch Division:

$$\tang\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\cos\varphi+\cos\psi};$$

dieß hier angewandt, gibt:

$$\tang\frac{E}{4}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)-\sin\frac{1}{2}(180-C)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(180-C)},$$

woraus durch Anwendung der Gauß'schen Analogien:

$$\tang\frac{E}{4}=\frac{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,.\,\cos\frac{1}{2}C-\cos\frac{1}{2}C}{\dfrac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}\,.\,\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}C}$$

$$\tang\frac{E}{4}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}c}\,.\,\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}C}$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{4}(a+c-b)\,.\,\sin\frac{1}{4}(b+c-a)}{\cos\frac{1}{4}(a+b+c)\,.\,\cos\frac{1}{4}(a+b-c)}\,.\,\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-c)}{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}},$$

wobei $\frac{1}{2}(a+b+c)=s$ ist, daher:

$$\text{tang}\,\frac{E}{4} = \frac{\sin\frac{1}{2}(s-b)\,.\,\sin\frac{1}{2}(s-a)}{\cos\frac{1}{2}s\,.\cos\frac{1}{2}(s-c)}\,.\sqrt{\frac{\sin s\,.\,\sin(s-c)}{\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)}}$$

$$\text{tang}\,\frac{E}{4} = \sqrt{\text{tang}\,\frac{1}{2}s\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(s-a)\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(s-b)\,.\,\text{tang}\,\frac{1}{2}(s-c)},$$

welchen Ausdruck man nach seinem Urheber den L'huilier'schen nennt.

Beispiel: $a = 50^\circ$; $b = 40^\circ$; $c = 30^\circ$, daher $s = 60^\circ$; $\frac{1}{2}(s-a) = 5^\circ$; $\frac{1}{2}(s-b) = 10^\circ$; $\frac{1}{2}(s-c) = 15^\circ$; $\frac{1}{2}s = 30^\circ$.

$$\begin{aligned}
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s-a) &= 8{\cdot}941952\\
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s-b) &= 9{\cdot}246319\\
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(s-c) &= 9{\cdot}428052\\
\log \text{tang}\,\tfrac{1}{2}s \quad &= 9{\cdot}761439\\
\hline
&\;\;\; 7{\cdot}377762\\
\log \text{tang}\,\frac{E}{4} &= 8{\cdot}688881\\
\frac{E}{4} &= 2^\circ\,47'\,48''{\cdot}4\\
E &= 11^\circ\,11'\,13''{\cdot}6.
\end{aligned}$$

Dieß in Bogenmaß verwandelt:

$$\begin{aligned}
11^\circ &= 0{\cdot}191986\\
11' &= 0{\cdot}003200\\
13'' &= 0{\cdot}000063\\
0''{\cdot}6 &= 0{\cdot}000003\\
\hline
\text{Flächeninhalt} &= 0{\cdot}195252\,.\,R^2,
\end{aligned}$$

wobei R der Halbmesser der Kugel ist.

§. 426. **Von den Beziehungen der Veränderungen einzelner Theile eines sphärischen Dreiecks, und zwar zuerst beim rechtwinkligen Dreieck.**

Wir wollen hier untersuchen, was eine kleine Aenderung einer Seite oder eines Winkels auf die andern Theile für einen Einfluß hat. Diese Untersuchung ist um so wichtiger, weil bei keiner praktischen Vermessung weder ein Winkel, noch eine Linie vollkommen fehlerlos bestimmt werden kann. Die Formeln nun, die wir entwickeln wollen, belehren uns über die Größe des Einflusses solcher kleiner Fehler auf die Bestimmung der andern Stücke der Dreiecke.

Bei dem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke hat man, wenn a die Hypothenuse, b und c die Katheten, $A = 90^\circ$, B und C die gegenüberstehenden Winkel sind:

$$\sin b = \sin a\,.\,\sin B \qquad (1).$$

Aendern wir nun a und B sehr wenig, und nennen wir diese Aenderungen Δa und ΔB, so wird man auch nicht das wahre b erhalten, sondern ein geändertes b, das wir durch $b + \Delta b$ ausdrücken wollen; wir haben dann:

$$\sin(b + \Delta b) = \sin(a + \Delta a)\,.\,\sin(B + \Delta B).$$

Da wir nun diese Aenderungen als sehr klein betrachten, so werden wir $\sin \Delta b = \Delta b$, $\cos \Delta b = 1$ setzen, und so auch bei den übrigen; man hat somit:

$$\sin b + \cos b \,.\, \Delta b = (\sin a + \cos a \,.\, \Delta a) \,.\, (\sin B + \cos B \,.\, \Delta B),$$

woraus mit Rücksicht auf die Gleichung (1), wenn man die Produkte der Aenderungen als verschwindend klein wegläßt:

$$\Delta b = \frac{1}{\cos b} (\cos a \,.\, \sin B \,.\, \Delta a + \sin a \,.\, \cos B \,\, \Delta B),$$

woraus man sieht, daß in dem Falle, wenn b nahe an 90° kommt, dann selbst kleine Fehler in a und B bedeutende Fehler in b herbeiführen können. Wäre B fehlerlos bestimmt, d. h. $\Delta B = 0$, so hätte man:

$$\Delta b = \frac{\cos a \,.\, \sin B}{\cos b} \,.\, \Delta a.$$

Um aus den zwei schiefen Winkeln B und C die dem ersteren gegenüberstehende Kathete zu finden, hat man:

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C} \qquad (2).$$

Sind aber B und C um ΔB und ΔC geändert, so hat man:

$$\cos(b + \Delta b) = \frac{\cos(B + \Delta B)}{\sin(C + \Delta C)}, \text{ oder}$$

$$\cos b - \sin b \,.\, \Delta b = \frac{\cos B - \sin B \,\Delta B}{\sin C + \cos C \,\Delta C}, \text{ daher}$$

$$\sin b \,.\, \Delta b = \frac{\cos B \,.\, \cos C \,.\, \Delta C + \sin B \,.\, \sin C \,.\, \Delta B}{\sin C (\sin C + \Delta C \,.\, \cos C)},$$

wofür man annäherungsweise setzen kann:

$$\sin b \,.\, \Delta b = \frac{\cos B \,.\, \cos C \,.\, \Delta C + \sin B \,\, \sin C \,.\, \Delta B}{\sin^2 C}, \text{ daher:}$$

$$\sin b \,.\, \Delta b = \frac{\cos B \,.\, \text{cotg.}\, C}{\sin C} \,.\, \Delta C + \frac{\sin B}{\sin C} \,.\, \Delta B.$$

Man sieht, daß die Formel (2) unsicher im Gebrauche wird, wenn der Winkel C sehr klein wird, weil cotg. C sehr groß wird, dann noch besonders durch sin C dividirt wird, also kleine Fehler in C und B bedeutendere in b nach sich ziehen können. Wäre B fehlerlos, also $\Delta B = 0$, so hätte man:

$$\sin b \,.\, \Delta b = \frac{\cos B \,.\, \text{cotg.}\, C}{\sin C} \,.\, \Delta C, \text{ oder } \Delta b = \text{cotg}\, b \,.\, \text{cotg.}\, C \,.\, \Delta C.$$

§. 427. Einfluß der kleinen Aenderungen der Seiten und Winkel in sphärischen Dreiecken allgemein betrachtet. Wir hatten die allgemeine Beziehung

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A.$$

Lassen wir nun alle diese Größen ändern, und zwar nur sehr wenig, so hat man zuerst:

$$\cos(a + \Delta a) = \cos(b + \Delta b) . \cos(c + \Delta c)$$
$$+ \sin(b + \Delta b) . \sin(c + \Delta c) . \cos(A + \Delta A),$$ woraus:
$$\cos a - \sin a . \Delta a = (\cos b - \sin b . \Delta b)(\cos c - \sin c . \Delta c)$$
$$+ (\sin b + \cos b . \Delta b)(\sin c + \cos c . \Delta c)(\cos A - \sin A . \Delta A),$$
welches bei gehöriger Vernachläßigung:
$$\sin a . \Delta a = (\sin b . \cos c - \cos b . \sin c . \cos A) \Delta b$$
$$+ (\cos b . \sin c - \sin b . \cos c . \cos A) \Delta c + \sin b . \sin c . \sin A . \Delta A$$
wird, was mit Rücksicht auf die Entwicklungen S. 547.
$$\sin a . \Delta a = \sin a . \cos C \Delta b + \sin a . \cos B \Delta c + \sin b . \sin c . \sin A . \Delta A$$
und somit erhalten wir:

$$\Delta a = \cos C . \Delta b + \cos B . \Delta c + \sin c . \sin B . \Delta A. \quad \text{I.}$$

Vertauschen wir hier zuerst a und b, A und B, dann a und c und A und C, so wird:

$$\Delta b = \cos C . \Delta a + \cos A . \Delta c + \sin c . \sin A . \Delta B$$
$$\Delta c = \cos A . \Delta b + \cos B . \Delta a + \sin a . \sin B . \Delta C$$

Ordnet man diese Gleichungen anders, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} \sin c . \sin B . \Delta A &= + \Delta a - \cos C \Delta b - \cos B . \Delta c \\ \sin c . \sin A . \Delta B &= - \cos C . \Delta a + \Delta b - \cos A . \Delta c \\ \sin a . \sin B . \Delta C &= - \cos B . \Delta a - \cos A . \Delta b + \Delta c \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Vertauschen wir hier A mit 180 — a, B mit 180 — b, C mit 180 — c, a mit 180 — A u. s. w., d. h. nehmen wir dieselben Beziehungen beim Polardreiecke, so ist: da $\Delta(180 - A) = - \Delta A$, weil um was 180 — A größer wird, sicher A kleiner wird.

$$\left.\begin{aligned} \sin C . \sin b . \Delta a &= \Delta A + \cos c . \Delta B + \cos b . \Delta C \\ \sin C . \sin a . \Delta b &= \cos c . \Delta A + \Delta B + \cos a . \Delta C \\ \sin A . \sin b . \Delta c &= \cos b . \Delta A + \cos a . \Delta B + \Delta C \end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Aus den Formeln I. sieht man, daß, wenn man aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die dritte Seite rechnet, ein Fehler im Winkel nicht so bedeutend einwirkt, als ein Fehler in einer Seite, weil der Fehler des Winkels, z. B. ΔA, mit $\sin c . \sin B$, d. h. mit Größen, die kleiner als 1 sind, multiplicirt erscheint, während der Fehler in einer Seite, z. B. Δb, bloß mit einer solchen Größe $\cos C$ multiplicirt erscheint. Wenn man aus den drei Seiten die drei Winkel zu bestimmen hat, so zeigen die Formeln II, daß selbst ein kleiner Fehler bedeutender werden kann, weil die Fehlersumme durch ein Produkt $\sin c . \sin B$ z. B. zu dividiren ist.

Sind zwei Elemente, z. B. b und c, fehlerfrei, also $\Delta b = \Delta c = 0$, so geben die Gleichungen II.:

$$\sin c . \sin B . \Delta A = \Delta a$$
$$\sin c . \sin A . \Delta B = - \cos C . \Delta a$$
$$\sin a . \sin B . \Delta C = - \cos B . \Delta a,$$ woraus:

$$\frac{\Delta A}{\Delta a}=\frac{1}{\sin c\,.\,\sin B};\ \frac{\Delta B}{\Delta a}=-\frac{\cos C}{\sin c\,.\,\sin A}=-\frac{\cos C}{\sin C\,.\,\sin a}=-\frac{\operatorname{cotg}.C}{\sin a}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta a}=-\frac{1}{\operatorname{tang}.B\,.\,\sin a};\ \frac{\Delta B}{\Delta A}=-\frac{\cos C\ \sin B}{\sin A}=-\frac{\cos C\ \sin b}{\sin a}$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta A}=-\frac{\cos B\ .\ \sin c}{\sin a}=-\frac{\cos B\ \sin C}{\sin A}.$$

Auf ähnliche Art kann man verfahren, wenn ΔA und ΔC gleich Null sind u. s. w.

§. 428. (Oberfläche eines sphärischen Vielecks). Nimmt man auf der Kugel im Innern des Vielecks einen willkürlichen Punkt, und zieht durch diesen Punkt, durch den Mittelpunkt der Kugel und durch alle Winkel des Vielecks eine Reihe von Ebenen, so theilen diese Ebenen das Vieleck in eben so viele sphärische Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat. Die Summe der Flächen dieser Dreiecke ist nach dem Vorhergehenden gleich der Summe aller innern Winkel dieser Dreiecke, weniger $180^0.n$, wenn n die Anzahl der Seiten des Vielecks ist. Aber die Summe der innern Winkel der Dreiecke besteht erstens aus der Summe aller inneren Winkel des Vielecks, und zweitens aus der Summe der Winkel, die um den willkürlichen Punkt beschrieben werden, welche letztere gleich 360 Graden sind; daraus folgt: die Fläche eines sphärischen Vielecks ist gleich der Summe aller inneren Winkel des Vielecks weniger $(n-2).180^0$ (wobei hier alles im Bogen zu verstehen, und auf die Kugel, deren Halbmesser 1, zu beziehen ist.

§. 429. Wir wollen nun untersuchen, auf wie viele Arten sich die Oberfläche einer Kugel mit gleichen und regelmäßigen sphärischen Vielecken vollständig bedecken läßt.

Es sey x die Anzahl der Seiten eines dieser Vielecke,
y die Anzahl der Winkel, die um einen Punkt liegen,
z die Anzahl der Vielecke selbst.

Nennt man nun noch S die Summe der inneren Winkel eines dieser Vielecke, so hat man nach dem vorhergehenden Satze: die Fläche eines dieser Vielecke $= S-(x-2)\pi$, und da z solcher Vielecke sind, so hat man die Summe aller Flächeninhalte dieser Vielecke gleich $z[S-(x-2)\pi]$, und da diese Summe die Oberfläche der ganzen Kugel gibt, die gleich 4π ist, so hat man:

$$z[S-(x-2)\pi]=4\pi,\quad \text{daher}$$

$$S=\frac{4\pi}{z}+(x-2)\pi.$$

Da aber in jedem solchen Vielecke x gleiche Winkel sind, deren Summe gleich S, so hat man:

Größe eines einzelnen Winkels der Vielecke $= \frac{4\pi}{xz} + \frac{(x-2)\pi}{x}$. Da aber um jeden Eckpunkt y solche Winkel zusammenstoßen, deren Summe gleich vier Rechten oder 2π ist, so ist die Größe eines solchen Winkels auch $\frac{2\pi}{y}$ gleich, und somit hat man folgende Gleichung:

$$\frac{4\pi}{xz} + \frac{(x-2)\pi}{x} = \frac{2\pi}{y}, \text{ oder}$$

$$4y + yz(x-2) = 2xz, \text{ woraus:}$$

$$z = \frac{4y}{2x - y(x-2)},$$

wobei zu bemerken kommt, daß der Natur der Aufgabe nach sowohl x, y, als z jedes nie kleiner seyn kann als 3; da nun gewiß z positiv seyn muß, so folgt mit Nothwendigkeit, daß

$$2x > y(x-2),$$

$$\text{daher} \quad y < \frac{2x}{x-2}$$

seyn muß. Da nun der kleinste Werth, den x haben kann, 3 ist, so muß $y < 6$ seyn, daher y nur die Werthe 3, 4 und 5 haben kann, d. h. unter der Bedingung, daß die Kugel durchaus mit gleichwinkligen und gleichseitigen Vielecken bedeckt seyn soll, können in einem Punkte nur 3 oder 4, oder 5 Winkel zusammenstoßen.

Erster Fall. $y = 3$. Es stoßen drei Winkel in einem Punkte zusammen, jeder Winkel gleich 120°, so hat man:

$$z = \frac{12}{6-x},$$

wobei x also die Werthe 3, 4 und 5 haben kann, wodurch denn z gleich 4, 6, 12 wird, d. h. die Kugel wird durch 4 Dreiecke, oder 6 Vierecke, oder 12 Fünfecke bedeckt, so daß je drei in einem Punkte zusammenstoßen.

Zweiter Fall. $y = 4$; $z = \frac{8}{4-x}$,

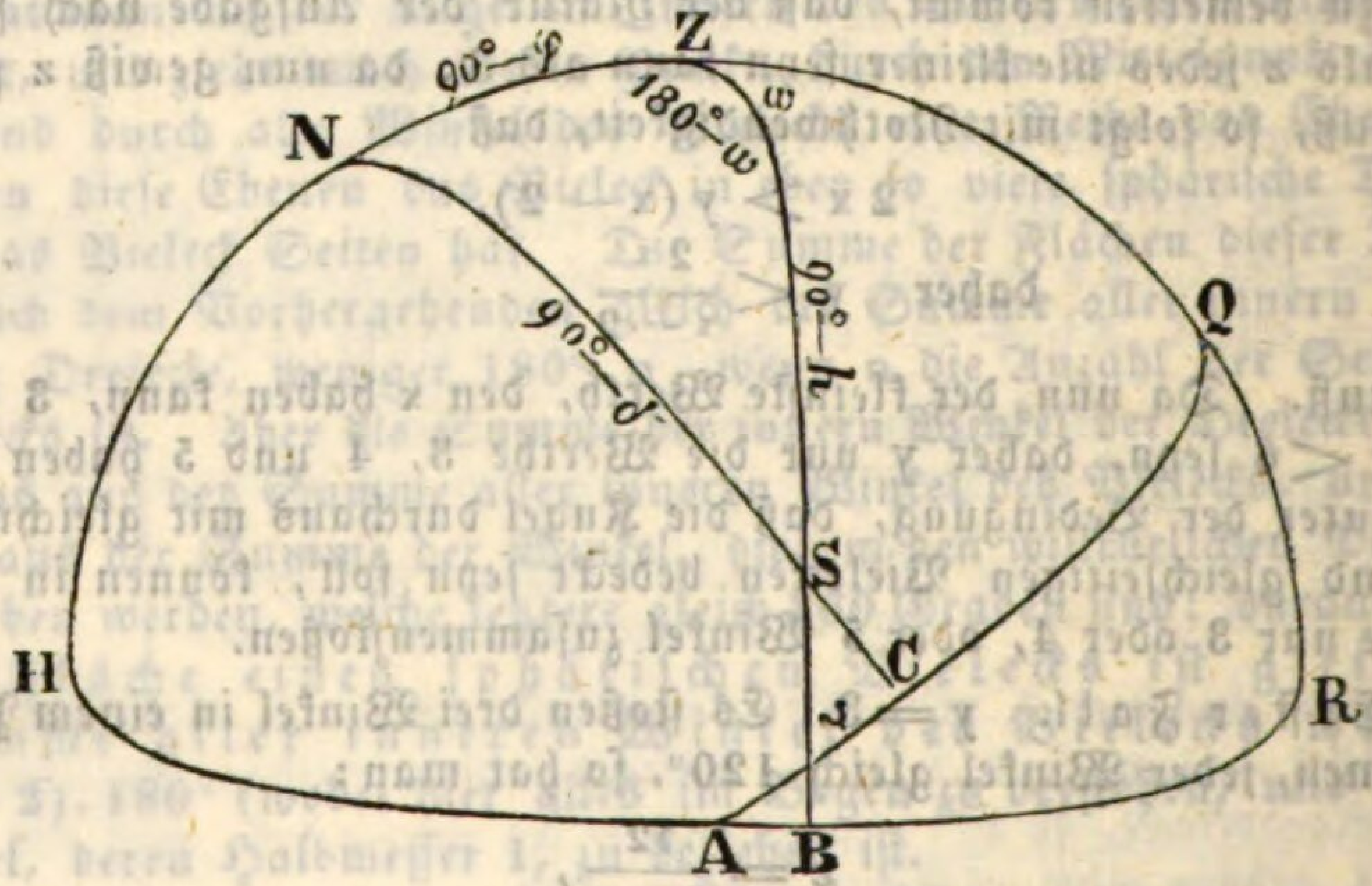
wobei x bloß gleich 3, also z gleich 8 seyn kann, d. h. wenn 4 Winkel in einem Punkte zusammentreffen sollen, und die Kugel durchaus mit regelmäßigen Vielecken bedeckt seyn soll, so kann dieß nur auf eine Art geschehen, nämlich mit Dreiecken, deren Anzahl dann 8 ist.

Dritter Fall. $y = 5$, wo dann $z = \frac{20}{10-3x}$ ist.

Hier kann x nur 3 gleich, also $z = 20$ seyn; man hat also mit 20 gleichseitigen Dreiecken die Kugel bedeckt, wo immer 5 in einem Eckpunkte zusammentreffen. Das Ergebniß der ganzen Untersuchung also ist, daß eine Kugel nur auf fünf verschiedene Arten durchaus mit gleichseitigen, gleichwinkligen und gleichen Vielecken bedeckt werden kann, nämlich mit 4, 8 oder 20 Dreiecken, mit 6 Vierecken, oder mit 12 Fünfecken.

§. 430. Eine der vorzüglichsten Anwendungen der sphärischen Trigonometrie ist die in der Astronomie. Man denkt sich die Himmelskugel, deren Mittelpunkt die Erde einnimmt, durch mehrere größte Kreise getheilt. Der oberste Punkt ober uns heißt Zenith in der Figur durch Z bezeichnet. Der größte Kreis, der durch das Zenith Z und den Nordpol N durchgeht, heißt Meridian, dessen Hälfte hier durch HNZR bezeichnet ist, während HABR den Horizont darstellt; der größte Kreis am Himmel, der vom Nord- und Südpol gleich weit absteht, heißt Aequator, von dem hier das Stück AVCQ dargestellt ist.

Fig. 548.



Ein größter Kreis durch den Nordpol N und einen Stern S heißt sein Deklinationskreis, und zwar das Stück SC zwischen dem Sterne und dem Aequator die Deklination des Sternes. Der Punkt V des Aequators (wo er von der Ekliptik geschnitten wird) heißt der Frühlingspunkt, weil die Sonne am 21. März dort ist. Das Stück VC des Aequators zwischen dem Frühlingspunkte und dem Deklinationskreise des Sternes S heißt die gerade Aufsteigung (rectascension) des Sternes S. Ein größter Kreis durch das Zenith Z und durch den Stern S heißt sein Höhenkreis, und zwar das Stück SB zwischen dem Sterne S und dem Horizonte die Höhe des Sternes S. Das Stück des Meridians HN zwischen dem Nordpole N und dem Horizonte des Beobachters heißt die Polhöhe des Beobachtungsortes. Der Winkel, den der Deklinationskreis des Sternes S mit dem Meridian bildet, d. h. der Winkel QNC heißt der Stundenwinkel des Sternes; der Winkel, den der Meridian des Ortes mit dem Höhenkreise des Sternes, d h. der Winkel RZB, heißt das Azimuth des Sternes S. Ist der Stern S ein Fixstern, d. h. hat er keine andere Bewegung als die tägliche des Himmels, so bleibt seine Deklination und Rectascension stets dieselbe; allein sein Stundenwinkel, Höhe und Azimuth ist stets anders. Ist der Stern im

Meridian, so ist sein Stundenwinkel und Azimuth gleich Null. Ist der Stern im Horizonte, d. h. im Auf- oder Untergange, so ist seine Höhe gleich Null Für jeden Beobachtungsort sind Deklination und Rectascension eines Gestirnes in demselben Augenblicke dieselben, aber Höhe und Azimuth verschieden. Die Höhe wird durch ein vertikales und das Azimuth durch ein horizontales Winkelinstrument bestimmt.

Nennen wir nun die Höhe des Sternes $SB = h$
das Azimuth $RZB = \omega$
die Deklination $SC = \delta$
die Rectascension $VC = \alpha$
den Stundenwinkel $CNQ = s$
die Polhöhe $HN = \varphi$,

und betrachten wir das sphärische Dreieck NZS, so hat man

$NZ = 90^\circ - \varphi$; $NS = 90^\circ - \delta$; $ZS = 90 - h$; $ZNS = s$; $NZS = 180 - \omega$.

Wir können nun aus den zwei Seiten NZ und ZS und dem eingeschlossenen Winkel NZS die dritte Seite NS berechnen, d. h. aus der Höhe, dem Azimuthe eines Sternes und der Polhöhe eines Ortes läßt sich die Deklination desselben bestimmen. Man hat nämlich:

$$\cos(90^\circ - \delta) = \cos(90^\circ - \varphi)\ \cos(90^\circ - h) + \sin(90^\circ - \varphi) . \sin(90^\circ - h) . \cos(180 - \omega),$$

oder $\sin\delta = \sin\varphi . \sin h - \cos\varphi . \cos h . \cos\omega$,

welche Formel, wie wir aus dem Früheren wissen, eine logarithmische Einrichtung erlaubt.

Wollte man aus φ, δ und s das h bestimmen, so hat man:

$$\cos(90^\circ - h) = \cos(90^\circ - \varphi) . \cos(90^\circ - \delta) + \sin(90^\circ - \varphi) . \sin(90 - \delta) . \cos s,$$

oder $\sin h = \sin\varphi . \sin\delta + \cos\varphi . \cos\delta . \cos s$.

Im Momente des Auf- oder Unterganges des Sternes ist $h = o$, daher $\cos s = -\tan\varphi . \tan\delta$ (1).

Der Stundenwinkel s wird nicht nur am Nordpole als QNC, sondern auch im Aequator als Bogen CQ gemessen. Der Stern S wird in seinem Parallelkreise genau so viele Grade, Minuten und Sekunden beschreiben, als der ihm zugehörige Punkt C im Aequator; daher wird das s aus der Gleichung (1) uns den halben Tagbogen des Sternes (d. h. die Hälfte des Bogens, den der Stern über dem Horizonte beschreibt) geben.

Ist das Gestirn S die Sonne selbst, so gibt der Stundenwinkel derselben, dividirt durch 15, stets den Zeitpunkt der Beobachtung an, denn da der Punkt C dann in 24 Stunden 360° durchläuft, folglich in einer Stunde 15°, in der Zeitminute 15 Raumminuten, in einer Zeitsekunde 15 Raumsekunden, so brauche ich nur den in Graden, Minuten u. s. w. ausgedrückten Stundenwinkel durch 15 zu dividiren, um die Zeit zu haben, die verflossen, seit die Sonne und der Punkt C den Meridian verlassen. Der Stundenwinkel der Sonne im Momente

des Unterganges, dividirt durch 15, ist der Zeitpunkt des Unterganges.

Beispiel 1. Man suche den Zeitpunkt des Unterganges der Sonne am 22. Dezember zu Berlin:
für den 22. Dezember ist das δ der Sonne $= - 23^\circ 28'$
die Polhöhe von Berlin aber $\varphi = 52^\circ 30' 16''$.
Da hier tang δ selbst negativ, also cos s positiv wird, so ist $s < 90^\circ$.

$$\log \text{tang}\,\delta = 9{\cdot}637611$$
$$\log \text{tang}\,\varphi = 0{\cdot}115020$$
$$70$$
$$\log \cos s = 9{\cdot}752701$$
$$s = 55^\circ 32' 9''$$
$$\frac{s}{15} = 3^h 42' 9''.$$

Die Sonne geht unter um 3 Uhr 42 Minuten 9 Sek.

Um die Zeit des Aufganges zu erhalten, brauche ich dieß nur von 12 Stunden abzuziehen, und erhalte $8^{St} 17' 51''$.

Beispiel 2. Wenn geht die Sonne in Petersburg am 22. Juni unter? Hier ist $\delta = 23^\circ 28'$; $\varphi = 59^\circ 56'$.

Hier ist cos s natürlich negativ, daher man denn die Ergänzung zu 180° nehmen muß:

$$\log \text{tang}\,\delta = 9{\cdot}637611$$
$$\log \text{tang}\,\varphi = 0{\cdot}237394$$
$$9{\cdot}875005 = \log \cos 41^\circ 25',$$

daher $s = 138^\circ 35'$
$$\frac{s}{15} = 9^{St} 14'.$$

Die Sonne geht also um 9 Uhr 14 Minuten unter, und um 2 Uhr 46' auf. Am kürzesten Tage hingegen ist in Petersburg:

$$s = 41^\circ 25'$$
$$\frac{s}{15} = 2^{St} 45'.$$

Es geht die Sonne um 2 Uhr 45' unter und um $9^{St} 15'$ auf.

Das Dreieck N Z S gibt uns auch die Auflösung aus Höhe, Polhöhe und Deklination den Stundenwinkel zu finden. Setzet man $90^\circ - h = a$; $90^\circ - \varphi = b$; $90^\circ - \delta = c$, also $A = s$, so hat man nach den Formeln:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\ \sin(s-c)}{\sin b \,.\, \sin c}}\,;\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \,.\, \sin(s-a)}{\sin b \,.\, \sin c}},$$

wo hier in den letzten Formeln $s = \frac{a+b+c}{2} = 135^\circ - \frac{h+\varphi+\delta}{2}$ ist, daher:

$$\sin^2\frac{s}{2} = \frac{\sin\left(45^\circ - \frac{h-\varphi+\delta}{2}\right).\sin\left(45^\circ - \frac{h+\varphi-\delta}{2}\right)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}$$

$$\cos^2\frac{s}{2} = \frac{\sin\left(45^\circ + \frac{h+\varphi+\delta}{2}\right).\sin\left(45^\circ - \frac{\varphi+\delta-h}{2}\right)}{\cos\varphi\,.\cos\delta}$$

wo hier s den Stundenwinkel bedeutet; ist das beobachtete Gestirn die Sonne selbst, so ist $\frac{s}{15}$ die Zeit der Beobachtung.

Beispiel: Am 17. Juni 1810 wurde in Kasan ($\varphi = 55^\circ\,47'\,39''$) die Höhe der Sonne $= 29^\circ\,58'\,2''$ beobachtet; die Deklination der Sonne an diesem Tage war $\delta = 23^\circ\,23'\,24''$. Man hat also:

$$\begin{aligned}
a &= 60^\circ\ \ 1'\,58''\\
b &= 34^\circ\,12'\,21''\\
c &= 66^\circ\,36'\,36''\\
\hline
&\ \ 160^\circ\,50'\,55''\\
s &= 80^\circ\,25'\,27''\cdot5\\
s - b &= 46^\circ\,13'\,6''\cdot5\\
s - c &= 13^\circ\,48'\,51''\cdot5
\end{aligned}$$

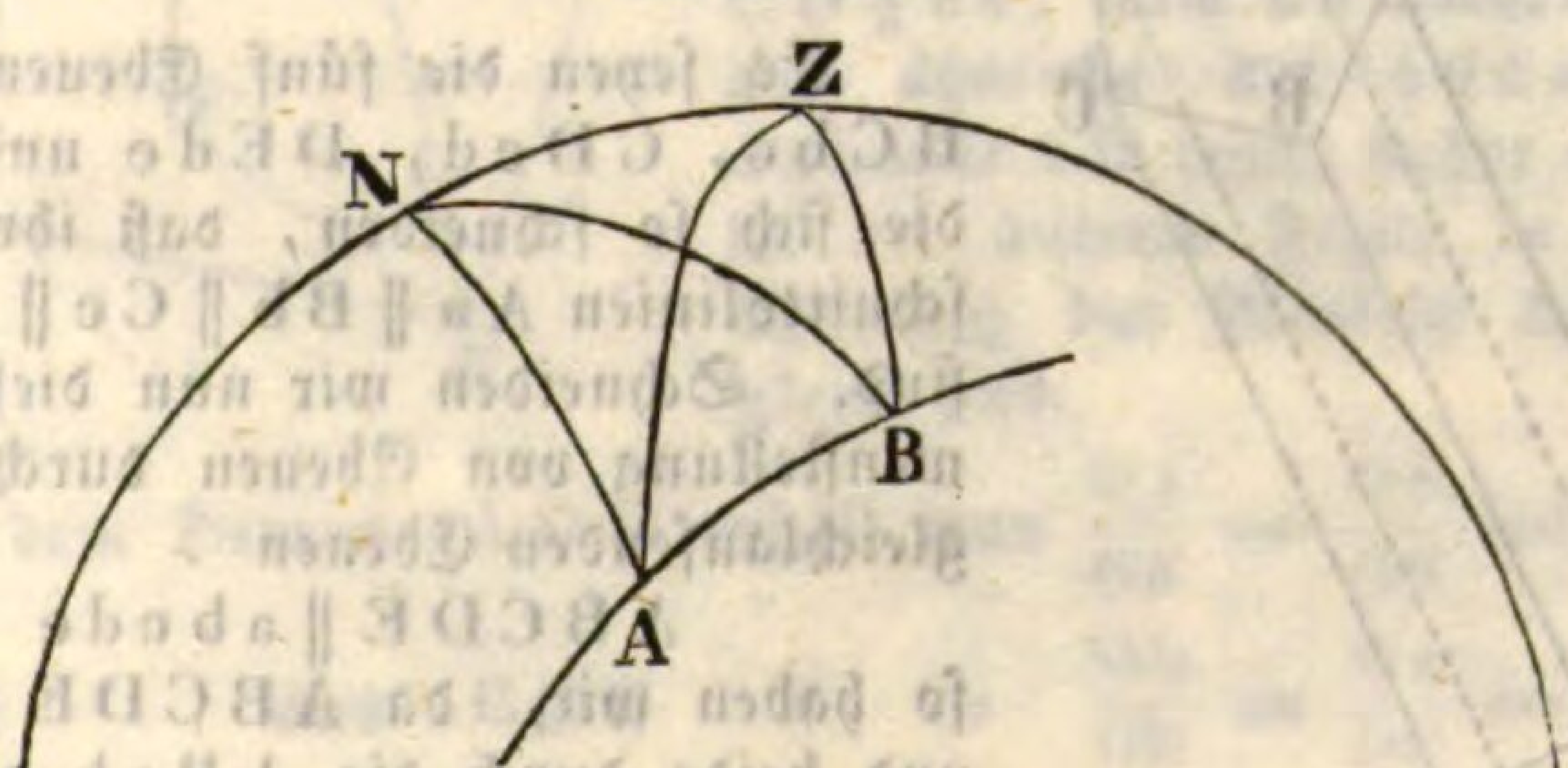
$$\log\sin(s-b) = 9\cdot858527;\quad \log\sin b = 9\cdot749866$$
$$\log\sin(s-c) = 9\cdot377991;\quad \log\sin c = 9\cdot962759$$
$$9\cdot236518 \qquad\qquad 9\cdot712625$$
$$9\cdot712625$$
$$9\cdot523893$$

$$\log\sin\frac{A}{2} = 9\cdot761946;\quad \frac{A}{2} = 35^\circ\,18'\,28''$$

$A = 70^\circ\,36'\,56''$, daher $s = 70^\circ\,36'\,56''$,

also $\frac{s}{15} = 4$ Uhr $42'\,27''$ als Zeitpunkt der Beobachtung.

Fig 549.



Es werde die Höhe eines und desselben Sternes in zwei verschiedenen Orten A und B beobachtet. Es sey ferner die Zwischenzeit beider Beobachtungen bekannt, eben so wie seine Deklination, so kann

man daraus die Polhöhe und die Zeit bestimmen. Durch die Zwischenzeit ist der Unterschied der beiden Stundenwinkel, oder der Winkel ANB bekannt. Da nun $NA = NB = 90^\circ - \delta$, so kann man aus dem Dreiecke NAB die dritte Seite AB berechnen, und den Winkel NAB. Es sind somit in dem Dreiecke ZAB alle drei Seiten, nämlich durch das vorige Dreieck AB, und ZA und ZB als Ergänzungen der beobachteten Höhen gegeben, wodurch der Winkel ZAB und dadurch der Winkel NAZ = NAB — ZAB bestimmt werden kann; dadurch hat man im Dreiecke NAZ den Winkel NAZ, die Seite NA und Az, und dadurch ANZ die Stundenwinkel, und die Polhöhe NZ zur Bestimmung gebracht.

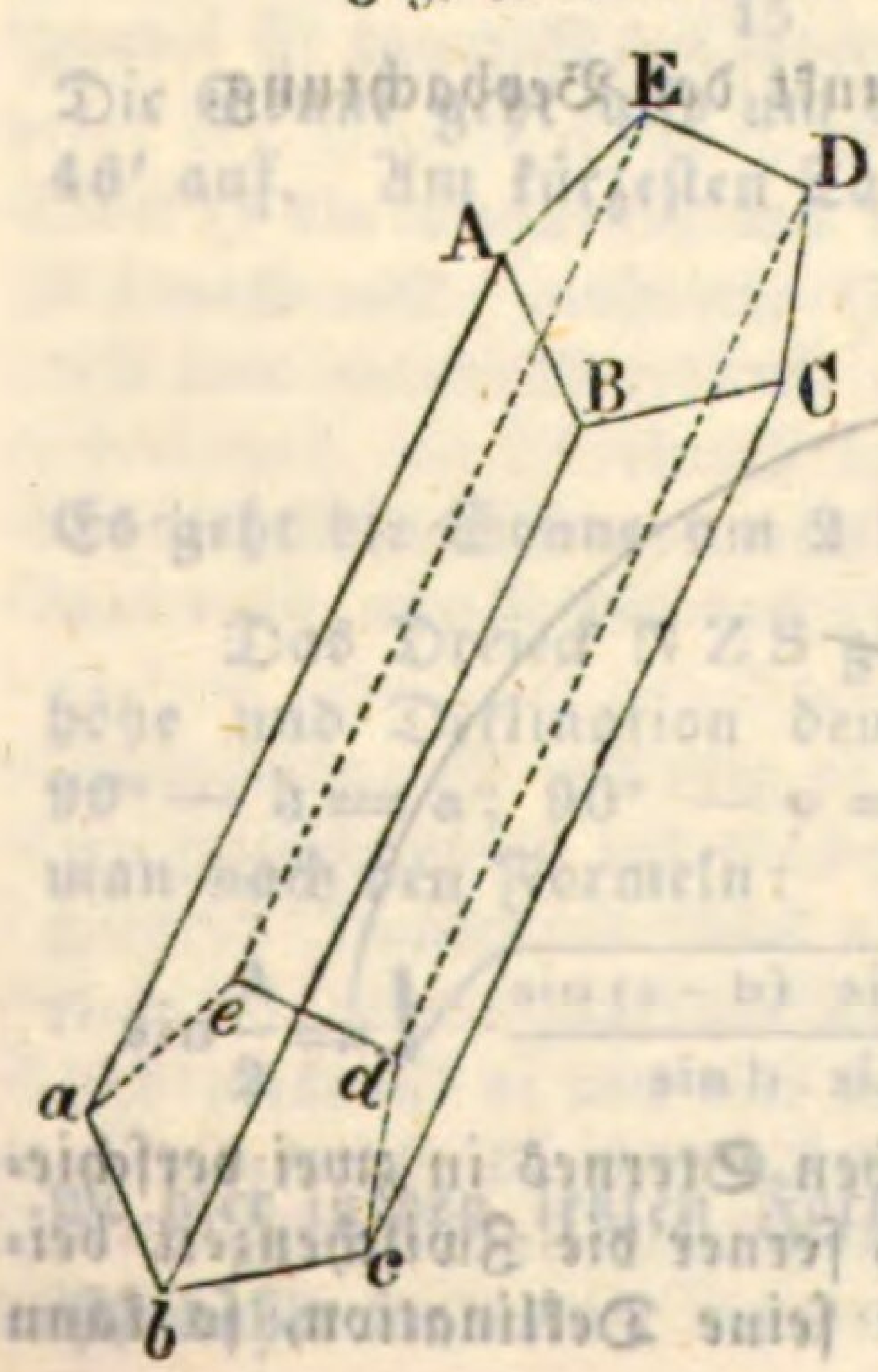
V. Das Zusammentreffen mehrerer Ebenen. Prismatische nnd pyramidale Zusammenstellungen der Ebenen. Uebergang auf die krummen Flächen.

§. 431. Die Zusammenstellungen von mehr als drei Ebenen können die verschiedensten seyn; wir wollen hier zunächst zwei Arten in's Auge fassen, die wegen ihrer Wichtigkeit besondere Beachtung verdienen.

Wenn mehrere Ebenen so zusammentreffen, daß je zwei auf einanderfolgende sich in zu einander gleichlaufenden Geraden schneiden, so heißt eine solche Zusammenstellung eine **prismatische** (eckſäulenförmige). Wenn drei oder mehrere Ebenen in einem Punkte zusammentreffen, so heißt diese Zusammenstellung eine **pyramidale** (spitzſäulenförmige).

§. 432. **Wenn man eine prismatische Zusammenstellung von Ebenen durch zwei gleichlaufende Ebenen schneidet, so sind diese Durchschnittsfiguren jederzeit mit einander einerlei.**

Fig. 550.



Es seyen die fünf Ebenen ABab, BCbc, CDcd, DEde und EAea, die sich so schneiden, daß ihre Durchschnittslinien Aa ‖ Bb ‖ Cc ‖ Dd ‖ Ee sind. Schneiden wir nun diese Zusammenstellung von Ebenen durch die zwei gleichlaufenden Ebenen

ABCDE ‖ abcde

so haben wir, da ABCDE ‖ abcde und beide durch die ABab geschnitten werden, ihre Durchschnittslinien AB ‖ ab. Eben so, da ABCDE ‖ abcde und beide durch die Ebene BCbc geschnitten werden, BC ‖ bc u. s. w. Da nun

AB ∥ ab und Bb ∥ Aa, so ist ABab ein Gleicheck, daher AB = ab; eben so leicht beweiset man, daß BC = bc, CD = cd u. s. w. ist. Da nun AB ∥ ab und BC ∥ bc, so ist der Winkel ABC = abc, und auf dieselbe Art BCD = bcd u. s. w. Daher die Figur ABCDE in allen Theilen und in derselben Ordnung vollkommen einerlei mit der Figur abcde.

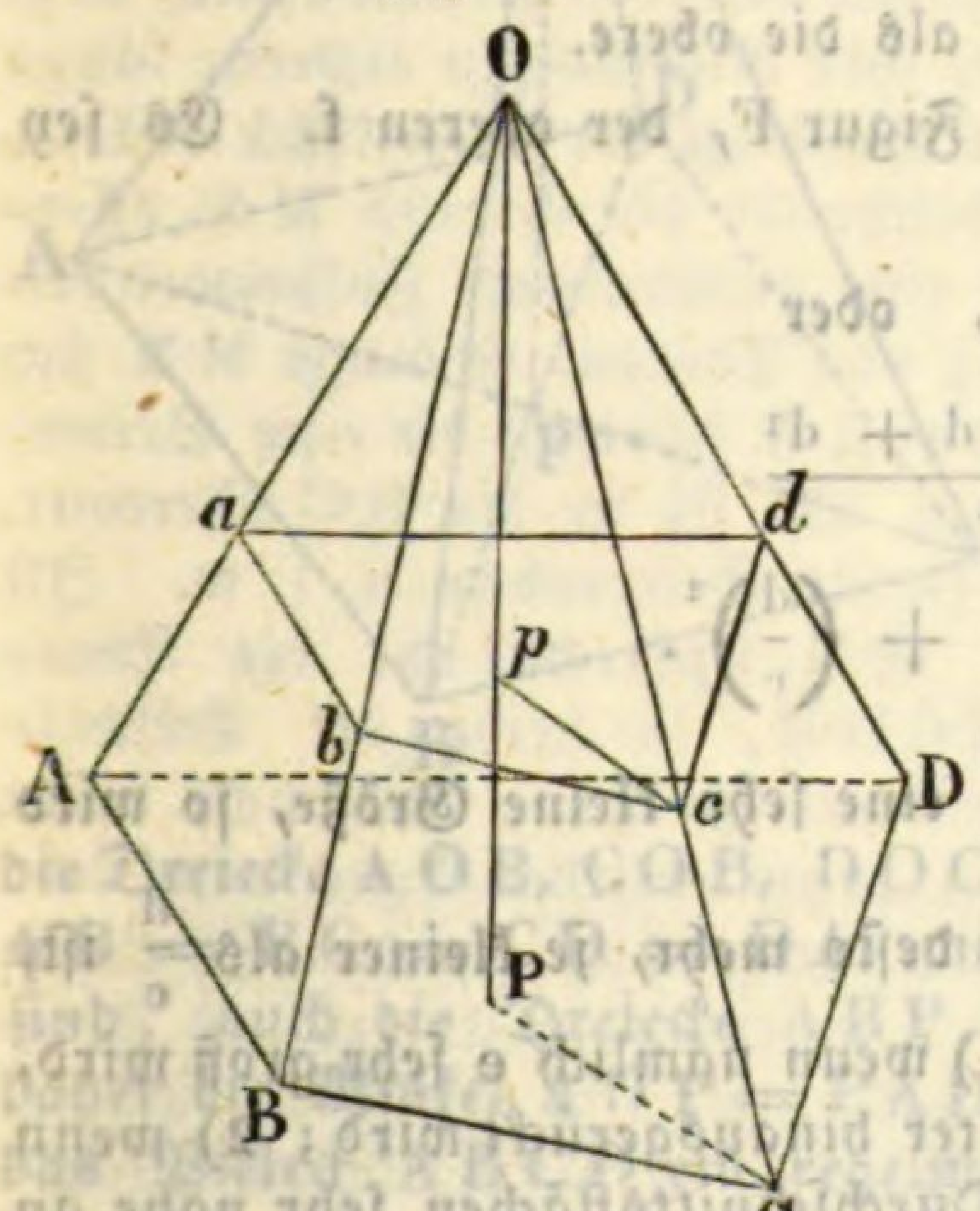
Der auf diese Art eingeschlossene Raum oder Körper heißt ein **Prisma** oder eine **Ecksäule**. Wie man sieht, sind also die Seitenflächen eines Prisma Gleichecke, und die beiden Grundflächen mit einander einerlei.

Das Prisma heißt gerade, wenn die Seitenkanten Aa, Bb... auf den Grundflächen senkrecht stehen, sonst schief.

§. 433. **Wenn eine pyramidale Zusammenstellung von Ebenen von zwei gleichlaufenden Ebenen geschnitten wird, so sind die Durchschnittsfiguren mit einander ähnlich, und ihre Flächeninhalte verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Entfernungen vom Scheitel.**

Es sey eine pyramidale Zusammenstellung von vier Ebenen, die sich in O schneiden, und diese werden durch die Ebenen ABCD ∥ abcd geschnitten. Da ABCD ∥ abcd und beide durch die Ebene ABO geschnitten werden, so muß ab ∥ AB, eben so, da ABCD ∥ abcd und beide durch BCO geschnitten werden, so muß bc ∥ BC; auf dieselbe Art beweiset man, daß cd ∥ CD, da ∥ DA ist.

Fig. 551



Weil nun ab ∥ AB und bc ∥ BC, so müssen die Winkel abc = ABC, und eben so, da bc ∥ BC und CD ∥ cd, auch bcd = BCD, und auf ähnliche Art adc = ADC, dab = DAB seyn, daher alle Winkel der unteren Figur in derselben Ordnung den Winkeln der oberen gleich sind.

Aus dem Dreiecke AOB erhält man $\frac{Oa}{OA} = \frac{Ob}{OB} = \frac{ab}{AB}$

aus BOC » » $\frac{Ob}{OB} = \frac{Oc}{OC} = \frac{bc}{BC}$

aus COD » » $\frac{Oc}{OC} = \frac{Od}{OD} = \frac{cd}{CD}$

aus DOA » » $\frac{Od}{OD} = \frac{Oa}{OA} = \frac{ad}{AD}$

$$\text{mithin } \frac{ab}{AB} = \frac{bc}{BC} = \frac{cd}{CD} = \frac{da}{DA},$$

daher mit dem oberen zusammen daraus folgt, daß die beiden Figuren ABCD und abcd mit einander ähnlich sind.

Nun verhalten sich bekanntlich die Flächeninhalte der ähnlichen Figuren, wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten, daher:

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{bc}^2} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{oc}^2}.$$

Fällen wir nun vom Scheitel O auf die gleichlaufenden Ebenen ABCD und abcd das Loth OP, welches die obere Ebene in p trifft, und legen durch OP und OC eine Ebene, welche die gleichlaufende abcd und ABCD in pc ∥ PC trifft, daher:

$$\frac{OC}{oc} = \frac{OP}{op}, \text{ also } \frac{\overline{OC}^2}{\overline{oc}^2} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{ob}^2}, \text{ und somit:}$$

$$\frac{ABCD}{abcd} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{op}^2}.$$

Ist also die untere Durchschnittsfigur vom Scheitel O
2, 3, 4, 5.... nmal so weit als die obere, so ist die untere
4, 9, 16, 25.... n^2mal so groß als die obere.

Es sey der Flächeninhalt der unteren Figur F, der oberen f. Es sey Pp = d, Op = e:

$$\frac{F}{f} = \frac{(c+d)^2}{c^2}, \text{ oder}$$

$$\frac{F}{f} = \frac{c^2 + 2cd + d^2}{c^2}$$

$$\frac{F}{f} = 1 + 2\frac{d}{c} + \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

Ist nun d gegen c sehr klein, also $\frac{d}{c}$ eine sehr kleine Größe, so wird sich $\frac{F}{f}$ der Einheit nähern, und zwar desto mehr, je kleiner als $\frac{d}{c}$ ist, was auf doppelte Weise seyn kann, 1) wenn nämlich e sehr groß wird, d. h. wenn der Scheitel O immer weiter hinausgerückt wird; 2) wenn d sehr klein wird, d. h. wenn die Durchschnittsflächen sehr nahe an einander kommen; das erste lehret uns, daß wir die Prismen als Pyramiden betrachten können, deren Scheitel unendlich weit entfernt ist. Das zweite zeigt uns, daß unendlich nahe gleichlaufende Durchschnittsflächen bei einer Pyramide sich der Einerleiheit nähern.

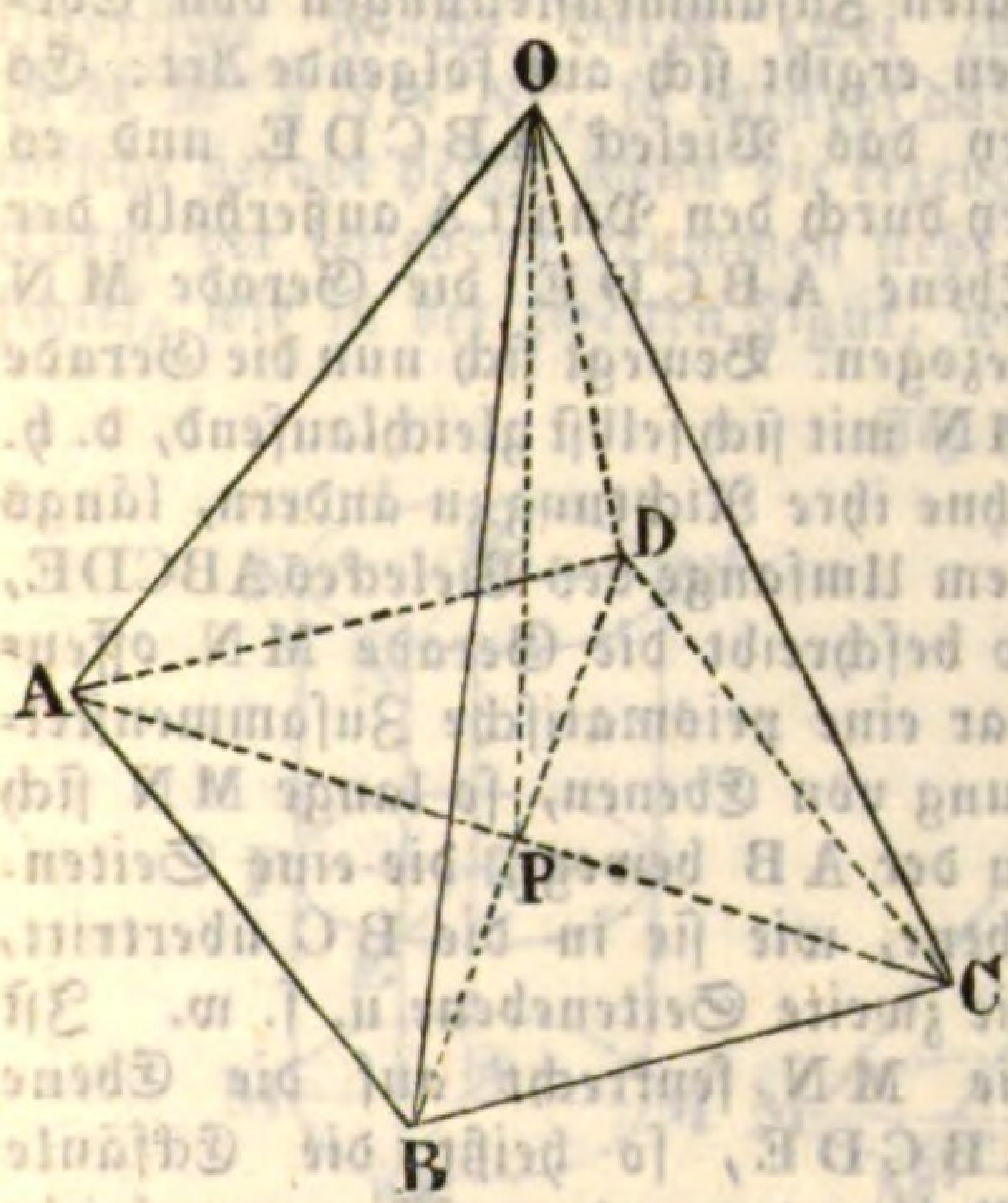
§. 434. Schließt man eine pyramidale Zusammenstellung von Ebenen durch eine Ebene, so heißt der geschlossene Raum oder Körper Pyramide oder Spitzsäule, die schließende Figur heißt die Grundfläche derselben. Die Kanten, welche im Scheitel zusammen-

treffen, heißen die **Scheitelkanten**, zum Unterschiede der Kanten der Grundfläche oder **Grundkanten**.

Bilden die Scheitelkanten mit einer durch den Scheitel gehenden Geraden durchaus gleiche Winkel, und sind auch die Winkel, die je zwei auf einander folgende Scheitelkanten mit einander bilden, einander gleich, so heißt die pyramidale Zusammenstellung eine **gerade**; die gerade Linie, mit welcher die Scheitelkanten gleiche Winkel bilden, heißt die **Achse der pyramidalen Zusammenstellung**; wird diese durch eine auf die Achse senkrechte Ebene geschlossen, so heißt diese Pyramide dann eine **gerade**.

Die Seitenflächen einer geraden Pyramide sind einerlei gleichschenklige Dreiecke, die Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck.

Fig 552.



Weil die Pyramide eine gerade ist, so hat man:

$$AOP = BOP = COP = DOP,$$

weil $ABCD \perp OP$, so hat man:

$$APO = BPO = CPO = DPO = 90^\circ;$$

da nun noch die Seite OP allen Dreiecken AOP, BOP, COP, DOP gemeinschaftlich ist, so sind alle diese Dreiecke einerlei, daher AO, BO, CO, DO, also alle Seitendreiecke gleichschenklig; eben so sind aber auch aus derselben Einerleiheit der Dreiecke

$$AP = BP = CP = DP.$$

Weil die Pyramide eine gerade ist, so folgt ferner, daß die Winkel $AOB = BOC = COD = DOA$, daher, weil nach dem Früheren $AO = BO = CO = DO$, so sind die Dreiecke AOB, COB, DOC, DAO mit einander einerlei; somit $AB = BC = CD = DA$, mithin, weil $AP = BP = CP = DP$ sind, auch die Dreiecke ABP, APD, BPC und CPD einerlei, daher die Winkel $ADP = PAD = PAB = ABP$ u. s. w.; daher das Vieleck ABCD ein regelmäßiges, wo P der Mittelpunkt desselben ist.

Um sich also in Gedanken eine gerade Pyramide zu erzeugen, denke man sich so viele einerlei rechtwinklige Dreiecke, als die Pyramide Seiten haben soll, so an einander gestellt, daß sie alle eine Kathete gemeinschaftlich haben, und daß je zwei Hypothenusen neben einander gleiche Winkel bilden.

Anmerkung. Schneidet man ein Prisma oder eine Pyramide durch eine Ebene, die nicht gleichlaufend ist mit der Grundfläche, so ist die dadurch entstehende Figur zwar nicht ähnlich mit der Grund-

fläche, allein sie steht mit der Grundfläche in einer Verwandtschaft, die, wie mein junger Freund und ehemaliger Schüler, Hr. S. Spitzer, gezeigt, die der Affinität beim Prisma, die der Kollineation bei der Pyramide ist, geometrische Verwandtschaften, die die neueren Geometer auf ziemlich umständliche Art erklären. Es erscheint daher gerathen, zwei Figuren in der Verwandtschaft der Affinität zu erklären, wenn sie in demselben Prisma liegen können, in der der Kollineation, wenn dieß in derselben Pyramide Statt finden kann. Wie der Schnitt gleichlaufend mit der Grundfläche wird, geht Affinität in Einerleiheit und Kollineation in Aehnlichkeit über.

Fig. 553.

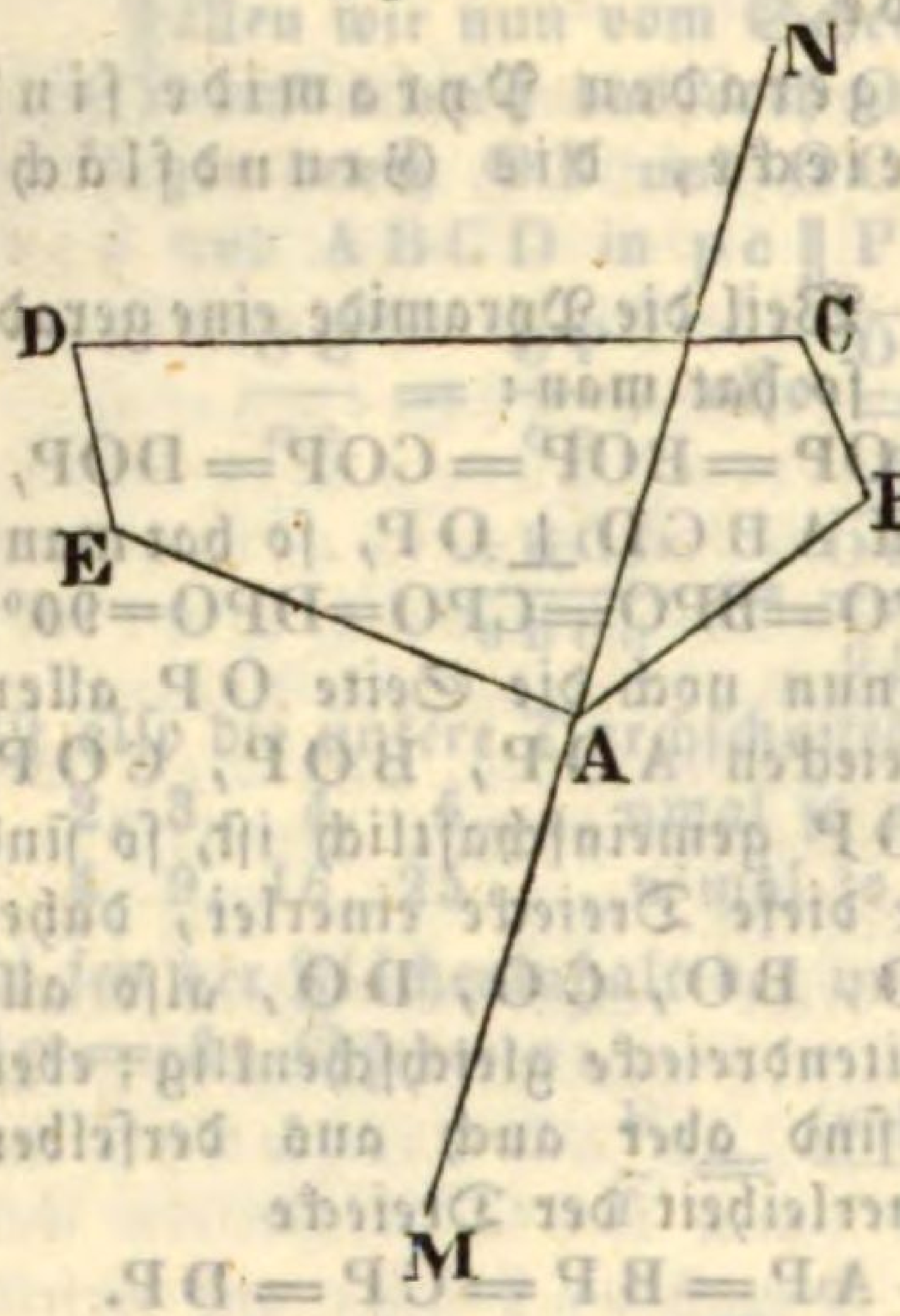
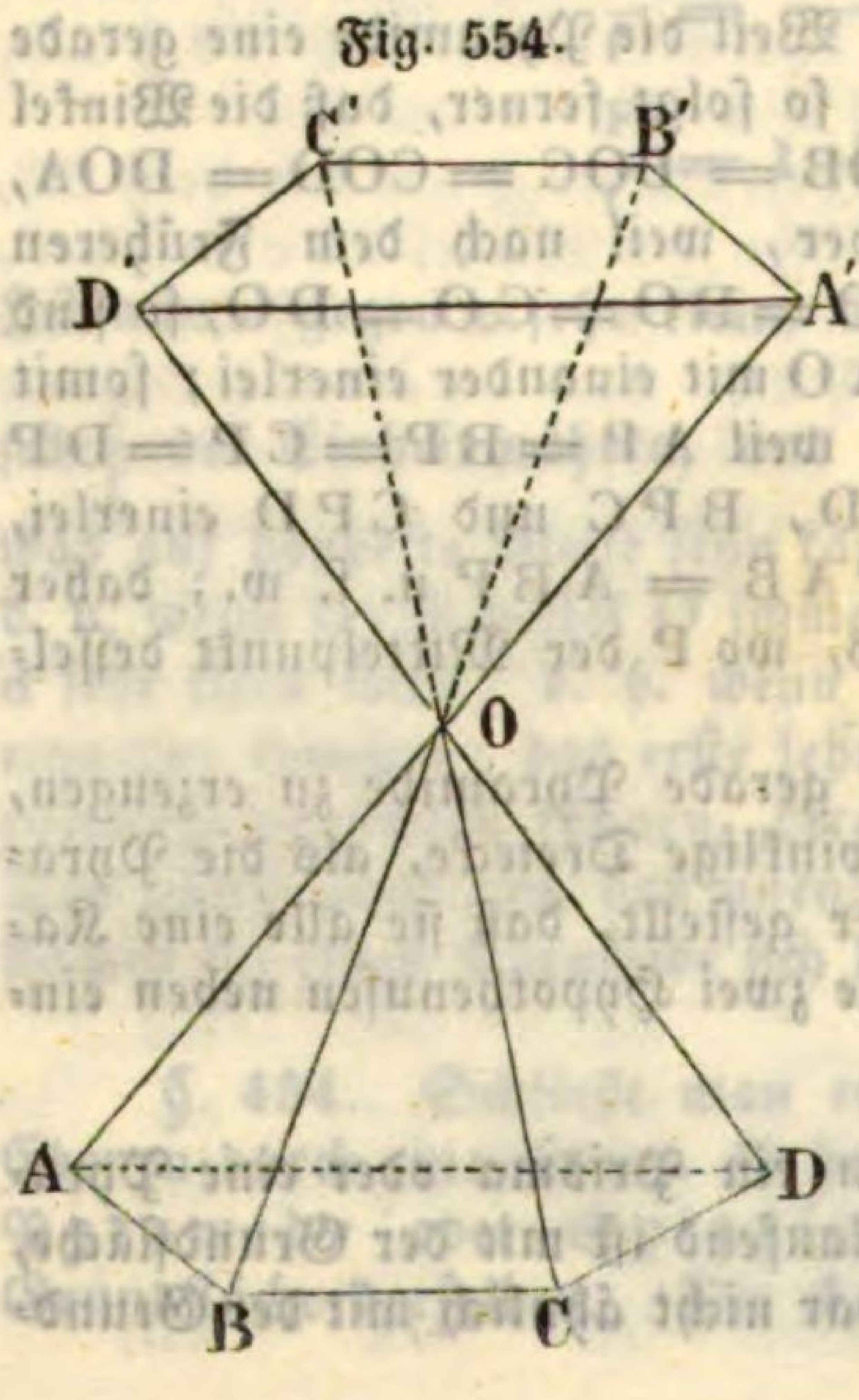


Fig. 554.



§. 435. Eine zweite Entstehungsweise der prismatischen und pyramidalen Zusammenstellungen von Ebenen ergibt sich auf folgende Art: Es sey das Vieleck ABCDE und es sey durch den Punkt A außerhalb der Ebene ABCDE die Gerade MN gezogen. Bewegt sich nun die Gerade MN mit sich selbst gleichlaufend, d. h. ohne ihre Richtung zu ändern, längs dem Umfange des Vieleckes ABCDE, so beschreibt die Gerade MN offenbar eine prismatische Zusammenstellung von Ebenen, so lange MN sich in der AB bewegt, die eine Seitenebene, wie sie in die BC übertritt, die zweite Seitenebene u. s. w. Ist die MN senkrecht auf die Ebene ABCDE, so heißt die Ecksäule (Prisma) gerade. Wie man leicht sieht, begründet die Benennung von gerade und schief bei den Prismen keinen wesentlichen Unterschied denn jedes Prisma ist gegen die Ebene, auf welcher die beschreibende Gerade MN senkrecht steht, gerade.

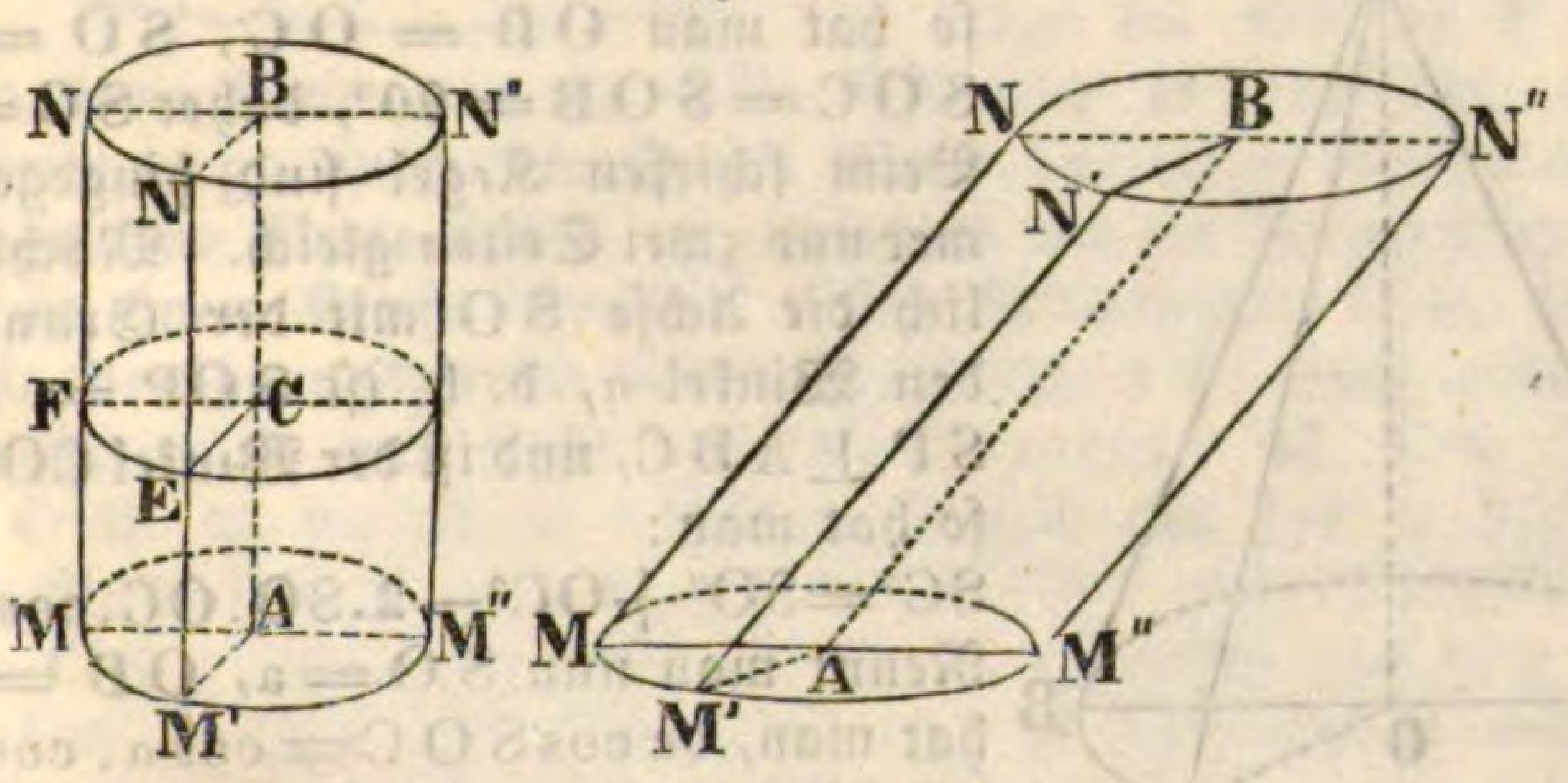
Würde die Gerade MN statt in unveränderter Richtung, stets durch einen Punkt außerhalb ABCDE längs dem Umfange von ABCDE sich bewegen, so entstünde dadurch eine Pyramide, wobei wir uns aber der Allgemeinheit wegen die Scheitelkanten über die Scheitel hinaus verlän-

gert denken müssen, so daß also eigentlich eine Doppelpyramide zu denken kommt.

§. 436. Wenn die erzeugende oder beschreibende Gerade MN des vorhergehenden Paragraphes sich längs dem Umfange einer krummen Linie stets gleichlaufend mit sich selbst bewegt, so werden, statt einer Reihe von ebenen Streifen, stätige krumme Flächen entstehen, welche man cylindrische Flächen nennet, deren es so viele Arten gibt, als man krumme Linien annehmen kann, längs denen die erzeugende Gerade sich bewegt. Ist die leitende Krumme ein Kreis, so heißt die entstehende krumme Fläche ein Cylinder schlechthin, oder Walze.

Ist so die leitende Krumme der Kreis MM′M″, und MN die erzeugende Gerade, und wir schneiden die dadurch entstehende cylindrische Fläche durch zwei zu einander gleichlaufende Ebenen MM′M″ ‖ NN′N″, so entsteht dadurch der Cylinder MM′M″NN′N″, welche gerade heißt, wenn die erzeugende Gerade MN senkrecht auf der Ebene der leitenden krummen steht, wie in der ersten Figur, dagegen schief, wie in der zweiten Figur, wenn MN eine schiefe Richtung hat.

Fig. 555.



Schon aus unserer früheren Untersuchung über prismatische Zusammenstellungen von Ebenen folgt, daß die Kreise MM′M″ und N′N′N″ mit einander einerlei seyn müssen. Es läßt sich dieß aber auch hier aus sich selbst beweisen. Es seyen MN, M′N′, M″N″ verschiedene Stellungen unserer erzeugenden Geraden MN; da gleichlaufende Gerade zwischen gleichlaufenden Ebenen einander gleich seyn müssen, so hat man MN = M′N′ = M″N″. Zieht man nun durch den Mittelpunkt A die AB ‖ MN, so muß natürlich auch AB = MN; daraus folgt BN ⧣ AM; N′B ⧣ AM′, so daß, in welcher Lage auch M′N′ seyn wird, während ihrer Bewegung stets BN′ = AM′, daher also N′ sich ebenfalls im Umfange eines Kreises bewegen wird, dessen Halbmesser BN = AM ist. Jeder Schnitt FEC gleichlaufend mit MM′M″ gibt wieder einen Kreis desselben Halbmessers. Ist die leitende Krumme eine Ellipse, Hyperbel, Parabel, Cycloide u. s. f., so

werden die Durchschnittsfiguren gleichlaufend mit der Ebene der leitenden Krummen ganz genau dieselbe Krumme geben; mag nun die erzeugende Gerade senkrecht oder schief gegen diese Ebene stehen, denn man kann sich jede Krumme als ein Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten vorstellen, daher jede cylindrische Fläche als eine prismatische Zusammenstellung von Ebenen, die unendlich schmal sind, betrachtet werden kann.

§. 437. Wenn sich eine Gerade stets längs dem Umfange einer Krummen und zugleich durch einen Punkt außerhalb der Ebene dieser Krummen bewegt, so beschreibt sie eine krumme Fläche, welche man eine **Kegelfläche** nennt. Der einfachste und gewöhnlichste Fall ist der, wenn die leitende Krumme ein Kreis ist. Hier kommen zwei Fälle zu unterscheiden. Verbindet man nämlich den Scheitel mit dem Mittelpunkte der Grundfläche, welche Verbindungslinie die Achse des Kegels heißt, so kann diese senkrecht oder schief auf der Grundfläche seyn; im ersten Falle heißt der Kegel ein **gerader**, sonst ein **schiefer**.

Fig. 556.

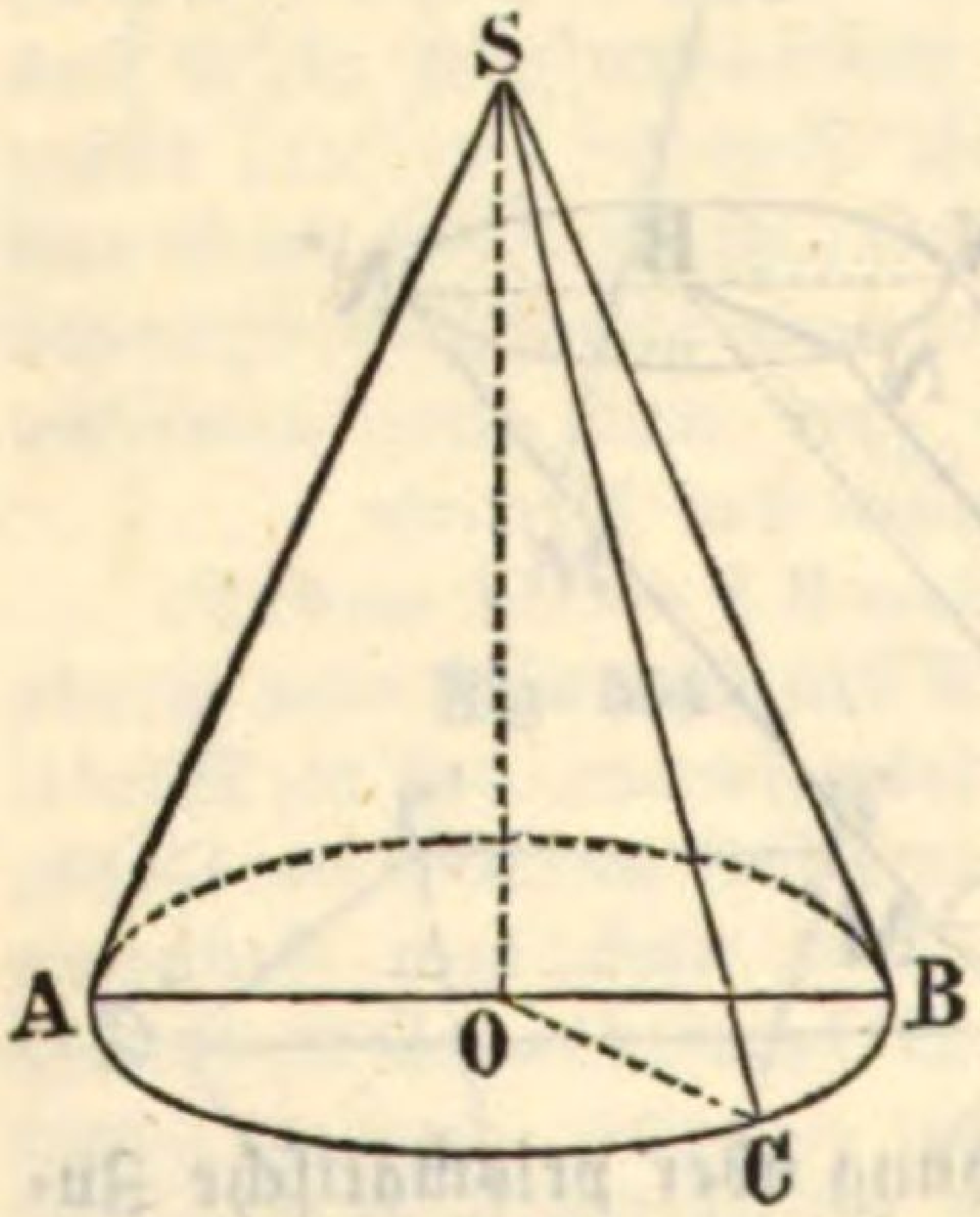
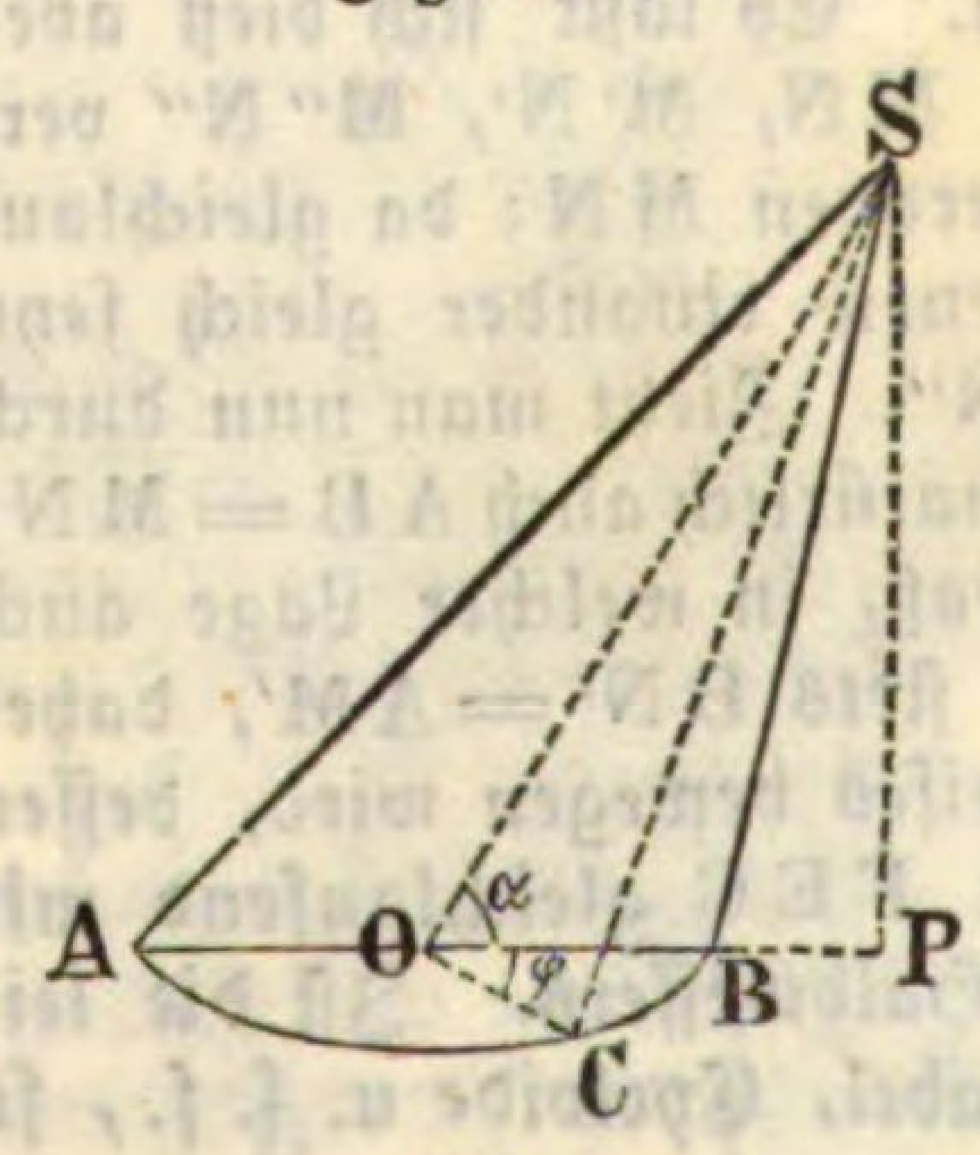


Fig. 557.



Beim geraden Kegel sind alle Seitenkanten einander gleich. Es sey SC eine der Lagen der erzeugenden Geraden, so hat man $OB = OC$, $SO = SO$, $SOC = SOB = 90°$, daher $SC = SB$. Beim schiefen Kegel sind hingegen immer nur zwei Seiten gleich. Macht nämlich die Achse SO mit der Grundfläche den Winkel α, d. h. ist $SOP = \alpha$, wo $SP \perp ABC$, und ist der Winkel $COB = \varphi$, so hat man:

$$SC^2 = SO^2 + OC^2 - 2.SO.OC.\cos SOC.$$

Nennt man nun $SO = a$, $OB = r$, so hat man, da $\cos SOC = \cos\alpha . \cos\varphi$ ist:

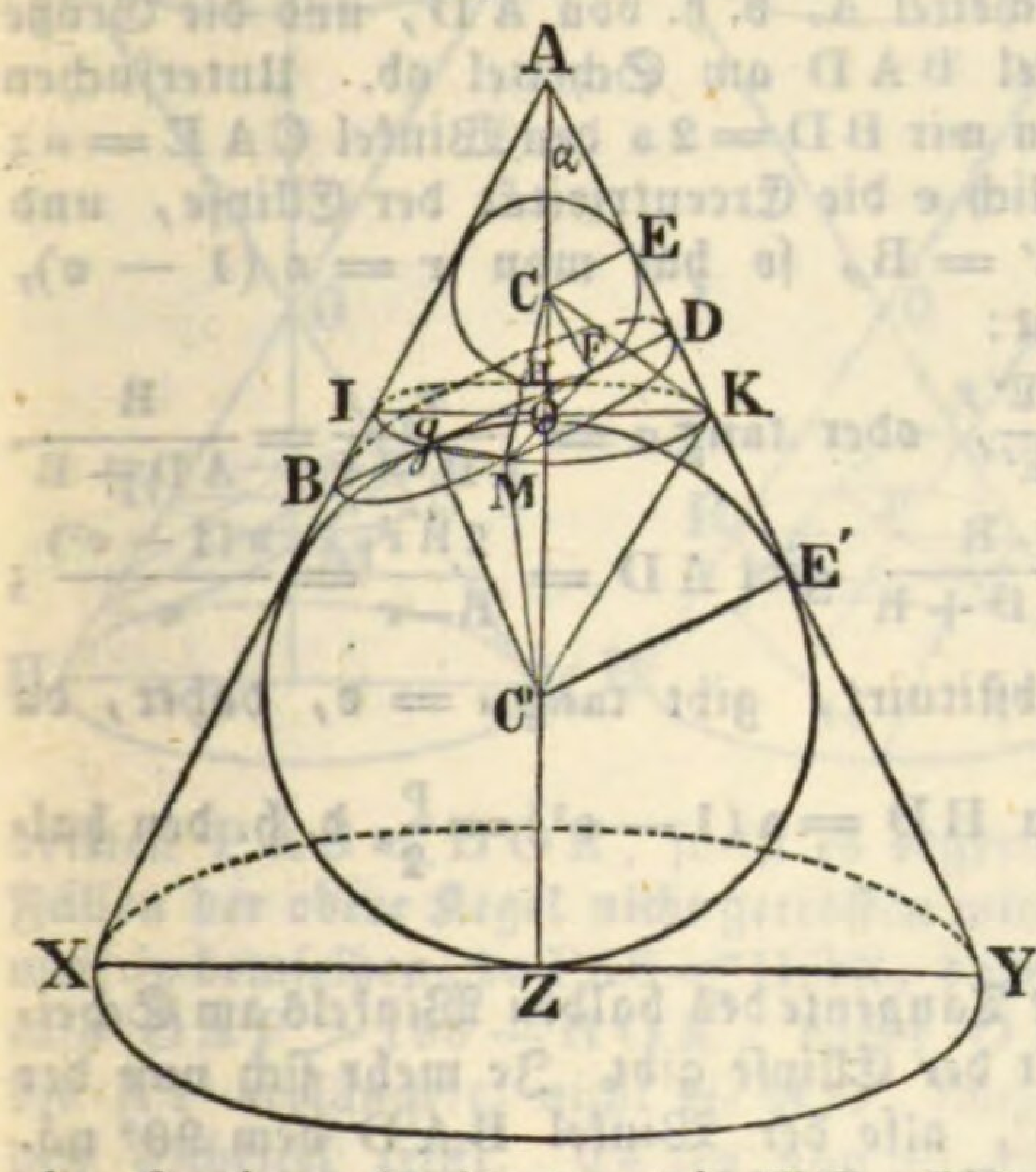
$$SC^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos\alpha . \cos\varphi,$$

welcher Werth am kleinsten ist für $\varphi = 0$, am größten für $\varphi = 180°$, und für $+\varphi$ und $-\varphi$ dasselbe Resultat gibt.

Da ich jede Kegelfläche als eine Pyramide mit unendlich vielen und unendlich kleinen Seitenflächen betrachten kann, so wird auch jeder Durchschnitt einer Kegelfläche gleichlaufend mit der Ebene der leitenden Kurve eine dieser ähnliche Krumme geben, d. h. eine Krumme derselben Gattung aber nicht derselben Abmessungen. Die Flächeninhalte dieser Figuren werden sich immer wie die Quadrate der Entfernungen vom Scheitel verhalten.

§. 438. Wir wollen die verschiedenen Durchschnitte eines geraden Kegels einer näheren Untersuchung unterziehen. Es sey der gerade Kegel A X Y, und zwar sey das Dreieck A X Y der Durchschnitt, der entsteht, wenn man durch die Achse A Z eine Ebene legt. Ziehen wir nun die Gerade B D ⊥ A Y in dieser Ebene. Wenn man nun durch die Gerade B D eine Ebene senkrecht auf A X Y errichtet, so handelt es sich darum: in was für einer Krummen wird die Kegelfläche dadurch geschnitten. Um nun zu untersuchen, von welcher Art die Krumme B M D sey; denken wir uns dem Dreiecke B A D einen Kreis eingeschrieben, dessen Mittelpunkt C ist, und der die B D in F berührt,

Fig. 558.



eben so einen Kreis, der die X B, B D und D Y berührt, und zwar die zweite in g; durch den Punkt M der fraglichen Krummen B M D legt man eine Ebene J M K gleichlaufend mit der Grundfläche, die den Kegel in einem Kreise schneidet, dessen Mittelpunkt O ist, E und E′ sind die Berührungspunkte beider Kreise mit A Y; man ziehe nun die Halbmesser C E und C′E′ und die Geraden C M, C K, C g und C′K, C′M, da die Ebene A B D ⊥ B D M und C F ⊥ B D, daher C F ⊥ Ebene B D M, und da eben so X B D Y ⊥ B D M und C′g ⊥ B D, mithin C′g ⊥ Ebene B D M, so ist C F ⊥ F M und C′g ⊥ G M, daher sind die Dreiecke C F M und C′g M in F und g rechtwinklig. Die Geraden C M und C K sind einander gleich, denn würde ich O mit M verbinden, so würde ich C O K ≡ C O M erhalten, wie man leicht sieht; ganz auf dieselbe Art ist C′M = C′K. Vergleicht man nun die Dreiecke C F M und E C K, so findet man:

C F = C E, C M = C K, C F M = C E K, daher C F M ≡ C K E,

folglich F M = E K; eben so geben die Dreiecke C′g M und C′K E′: C′g = C′E′, C′M = C′K, C′g M = C′E′K, daher C′g M ≡ C′K′E, mithin g M = E′K, und somit F M + g M = E K + E′K = E E′. Da aber der Punkt M in der Krummen B M D ganz willkürlich gewählt wurde, also alles, was von ihm gilt, von jedem andern Punkte der Krummen gilt, so ist die Krumme B M D eine solche, wo die Summe die Abstände jedes Punktes M von zwei Punkten F und g stets dieselbe ist; daher ist B M D eine Ellipse, deren große Achse B D = E E′ ist. Wie man leicht sieht, kann man sich aus den Mittelpunkten C

und C′ Kugeln mit den Halbmessern CE und C′E′ denken, welche die Kegelfläche und die Ebene der Ellipse, und zwar letztere in den Brennpunkten berührt. Die Größe der großen Achse hängt offenbar von der Entfernung der BD vom Scheitel A, d. h. von AD, und die Größe der Excentricität vom Winkel BAD am Scheitel ab. Untersuchen wir diese Abhängigkeit, nennen wir $BD = 2a$ den Winkel $CAE = \alpha$; bezeichnet nun, wie gewöhnlich e die Excentricität der Ellipse, und nennt man $CE = r$, $C'E' = R$, so hat man $r = a(1 - e)$, $R = a(1 + e)$, und man hat:

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{HD}{AD} = \frac{CE}{AE} = \frac{C'E'}{AE'}, \text{ oder } \text{tang}\,\alpha = \frac{r}{AD - r} = \frac{R}{AD + R}.$$

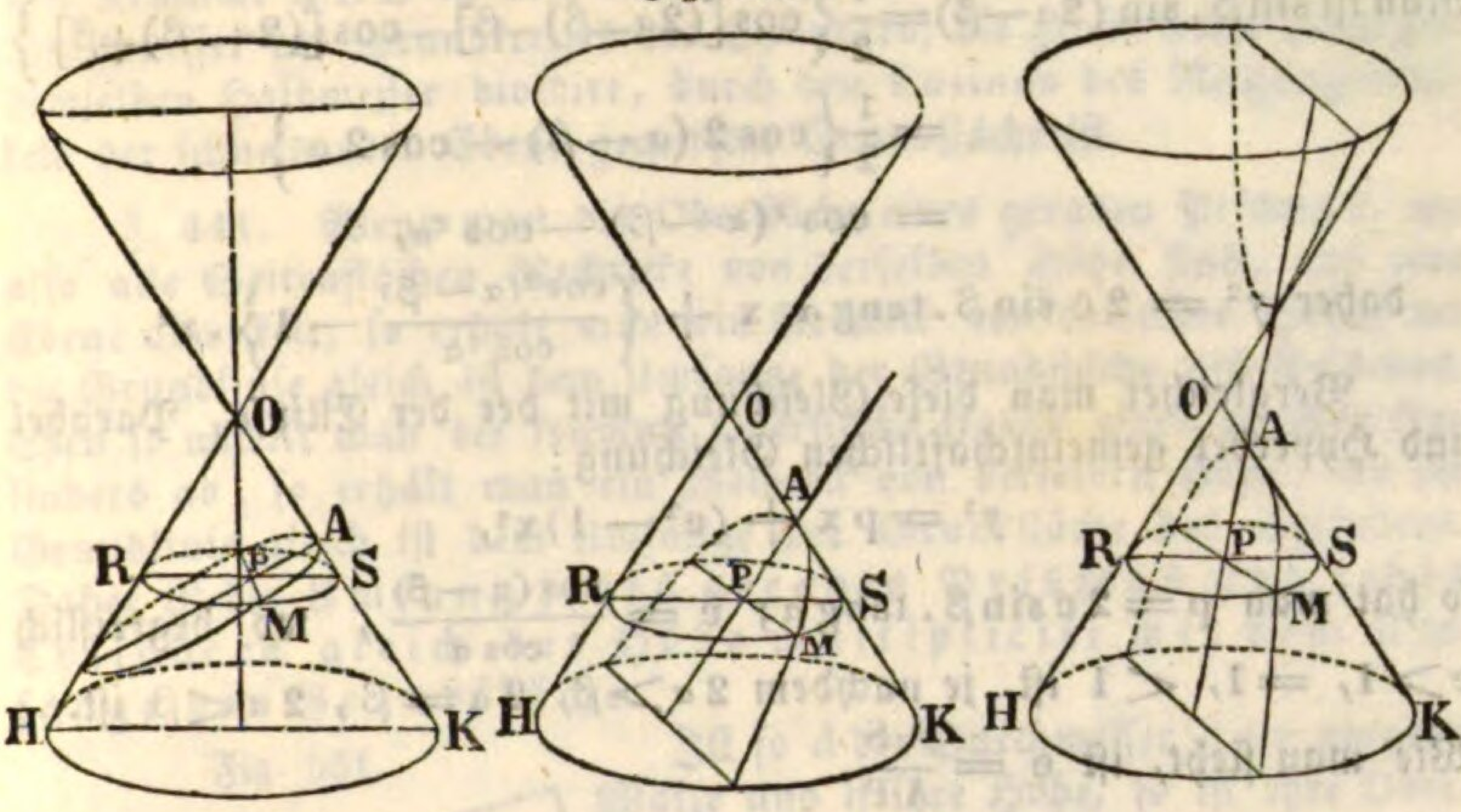
Die Gleichung $\frac{r}{AD - r} = \frac{R}{AD + R}$ gibt $AD = \frac{2Rr}{R - r} = \frac{a(1 - e^2)}{e}$; Dieß in $\text{tang}\,\alpha = \frac{r}{AD - r}$ substituirt, gibt $\text{tang}\,\alpha = e$, daher, da $HD = AD \,.\, \text{tang}\,\alpha$, hat man $HD = a(1 - e^2) = \frac{p}{2}$, d. h. den halben Parameter.

Man sieht also, daß die Tangente des halben Winkels am Scheitel die Größe der Excentricität der Ellipse gibt. Je mehr sich nun der Winkel α dem Winkel von 45°, also der Winkel BAD dem 90° nähert, desto mehr nähert sich e der Einheit; für $\alpha = 45°$, also $BAD = 90°$, wird $e = 1$, d. h. geht die Ellipse in eine Parabel über; in diesem Falle aber ist dann die schneidende Ebene BMD gleichlaufend mit der Seite AB, und dadurch wird der Durchschnittspunkt B, oder der zweite Scheitel der Ellipse ins Unendliche hinausgeschoben.

Wird $\alpha > 45°$, also $BAD > 90°$, so wird die Ebene BMD die Seite AX gar nicht, wohl aber ihre Verlängerung über den Scheitel hinaus treffen, d. h. die schneidende Ebene wird den Doppelkegel oberhalb A, den man sich stets mit diesem Kegel vereinigt denken sollte, treffen, und es werden zwei Aeste der Krummen entstehen, d. h. wir haben dann die Hyperbel, da $e > 1$ ist.

§. 439. Wir haben im vorhergehenden Paragraphe gesehen, wie ein auf die Seite des Kegels senkrechter Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel gibt, je nachdem der Winkel an der Kegelspitze ein spitziger, rechter oder stumpfer ist. Wir wollen nun nachweisen, daß man bei jedem geraden Kegel, je nachdem man die schneidende Ebene in verschiedener Richtung führt, alle diese drei Krummen erhalten kann. Denken wir uns zur Vollständigkeit jedenfalls einen Doppelkegel. Es sey die schneidende Ebene APM stets senkrecht auf den Durchschnitt HOK, und zwar seyen die Schnitte so, daß in der ersten Figur $PAS > HOK$, in der zweiten Figur $PAS = HOK$, in der

Fig. 559.



dritten $PAS < HOK$, so ist es begreiflich, daß in den zwei ersten Fällen der obere Kegel nicht getroffen wird, wohl aber im dritten Falle, weil in demselben, da $PAS < HOK$, daher $180^0 - PAS > 180 - HOK$, also $OAP > 180 - HOK$, daher $OAP + HOK > 180$, somit die AP verlängert, nicht die HO, sondern ihre Verlängerung über den Scheitel trifft. Es sey nun in allen drei Figuren $OA = c$, $HOK = 2\alpha$, $PAS = \beta$ (in der zweiten Figur ist $\beta = 2\alpha$). Legen wir nun die Ebene RMS senkrecht auf HOK und gleichlaufend mit der Grundfläche, so daß PM der Durchschnitt der Ebenen RMS und APM sey.

Nennen wir nun $AP = x$, $PM = y$, indem wir A als Anfangspunkt und AP als die Achse der x annehmen, so hat man, da RMS ein Kreis ist $y^2 = RP . PS$.

$$\text{Nun ist } \frac{AS}{x} = \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos\alpha}; \quad \frac{PS}{x} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha};$$

$$OS = c + AS = c + \frac{x\cos(\beta - \alpha)}{\cos\alpha};$$

$$RS = 2OS\sin\alpha = 2c\sin\alpha + 2x . \frac{\sin\alpha\cos(\beta - \alpha)}{\cos\alpha};$$

$$RP = RS - PS = 2c\sin\alpha + \frac{x}{\cos\alpha}[2\sin\alpha\cos(\beta - \alpha) - \sin\beta].$$

$$\text{Nun ist } 2\sin\alpha\cos(\beta - \alpha) = \sin\beta + \sin(2\alpha - \beta),$$

$$\text{daher } RP = 2c\sin\alpha + \frac{x\sin(2\alpha - \beta)}{\cos\alpha},$$

$$\text{mithin } y^2 = 2c\sin\beta . \tang\alpha . x + \frac{\sin\beta . \sin(2\alpha - \beta)}{\cos^2\alpha} . x^2.$$

Nun ist $\sin\beta \,.\, \sin(2\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\left\{\cos[(2\alpha-\beta)-\beta] - \cos[(2\alpha-\beta)+\beta]\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left\{\cos 2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\right\}$$

$$= \cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2\alpha,$$

daher $y^2 = 2c\sin\beta \,.\, \tang\alpha \; x + \left\{\frac{\cos^2(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha} - 1\right\} . x^2$.

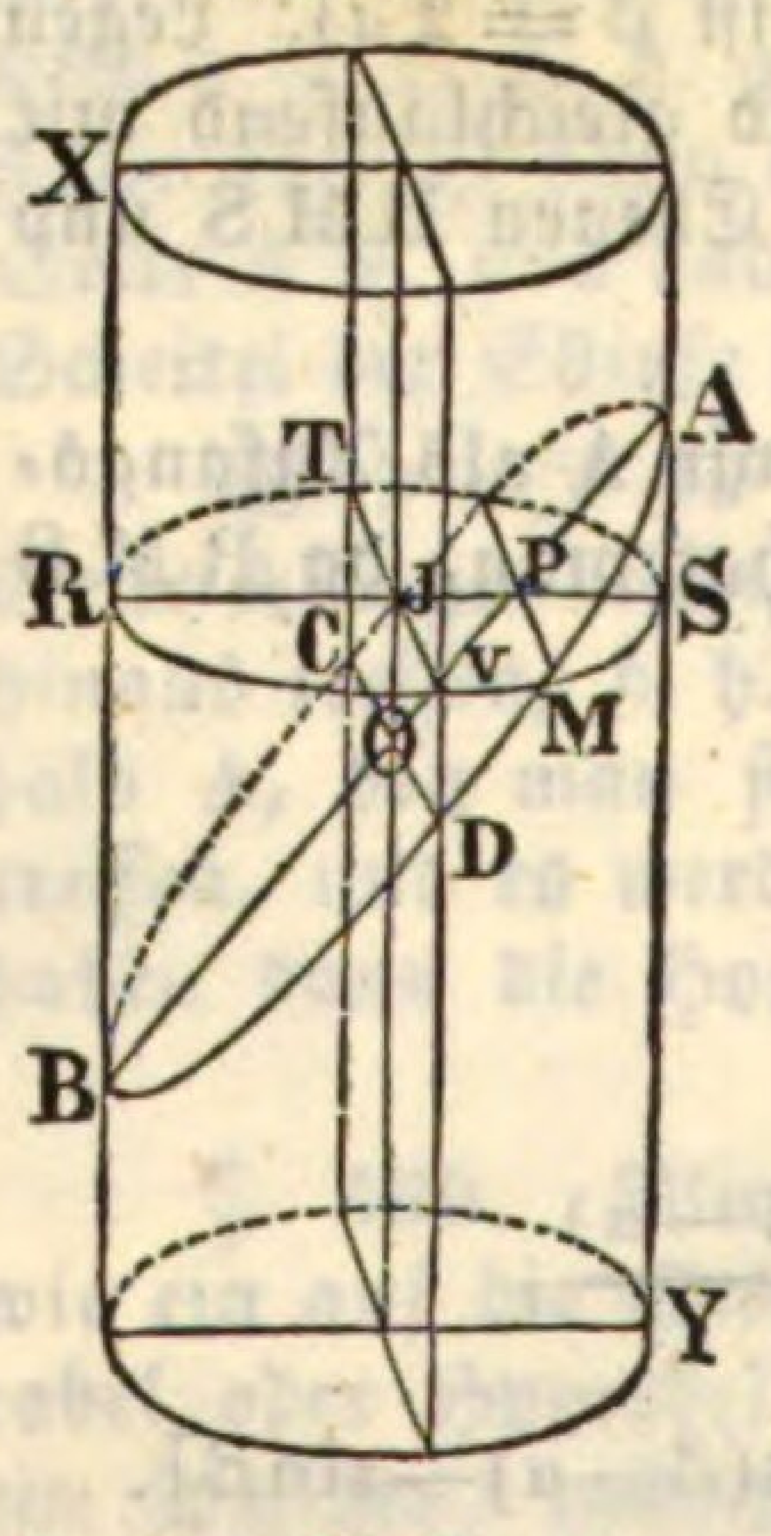
Vergleichet man diese Gleichung mit der der Ellipse, Parabel und Hyperbel gemeinschaftlichen Gleichung:

$$y^2 = px + (e^2 - 1)x^2,$$

so hat man $p = 2c\sin\beta \,.\, \tang\alpha$; $e = \frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}$, wo begreiflich $e > 1$, $= 1$, < 1 ist, je nachdem $2\alpha > \beta$, $2\alpha = \beta$, $2\alpha < \beta$ ist. Wie man sieht, ist $e = \frac{AS}{AP}$.

§. 440. Daß ein schiefer Schnitt eines geraden Cylinders eine Ellipse gibt, ist zwar schon aus dem Vorhergehenden zu ersehen, da ich einen Cylinder als einen Kegel mit unendlich weit entferntem Scheitel betrachten kann. Zur näheren Würdigung wollen wir dieß noch insbesondere betrachten. Wir schneiden den geraden Cylinder XY durch die Ebene ABD, wodurch auf der krummen Oberfläche die Krumme AMDB entsteht; legen wir durch den willkürlichen Punkt M die Ebene RMS gleichlaufend mit der Grundfläche, wobei wir sowohl die Ebene ABD, als RMS beide auf die Durchschnittsebene XY senkrecht annehmen, wodurch ihre Durchschnittslinie PM ⊥ Ebene ARS ist; durch den Mittelpunkt J des Kreises RMS legt man die Ebene CTDV ∥ PM, welche die Ebene ABD in der CD schneidet, woraus CD ∥ PM, also CD ∥ TV folgt. Da nun das Stück der Achse OJ ∥ RB, so ist RB ∥ CVDT, daher CT ∥ VD, mithin CTVD ein Gleicheck, also TV = CD oder OD = JV = r, wenn wir mit r den Halbmesser des Grundkreises bezeichnen. Es sey nun O der Anfangspunkt, OA die Achse der x, OP = x, MP = y, so hat man $y^2 = RP \,.\, PS$. Nennt man aber den Winkel $APS = \alpha$, so hat man, da $RP = r + JP$ und $PS = r - JP$, also $y^2 = r^2 - JP^2$ ist, und $JP = OP \,.\, \cos\alpha = x\cos\alpha$ die Gleichung $y^2 = r^2 - x^2\cos^2\alpha$ oder

Fig. 560.

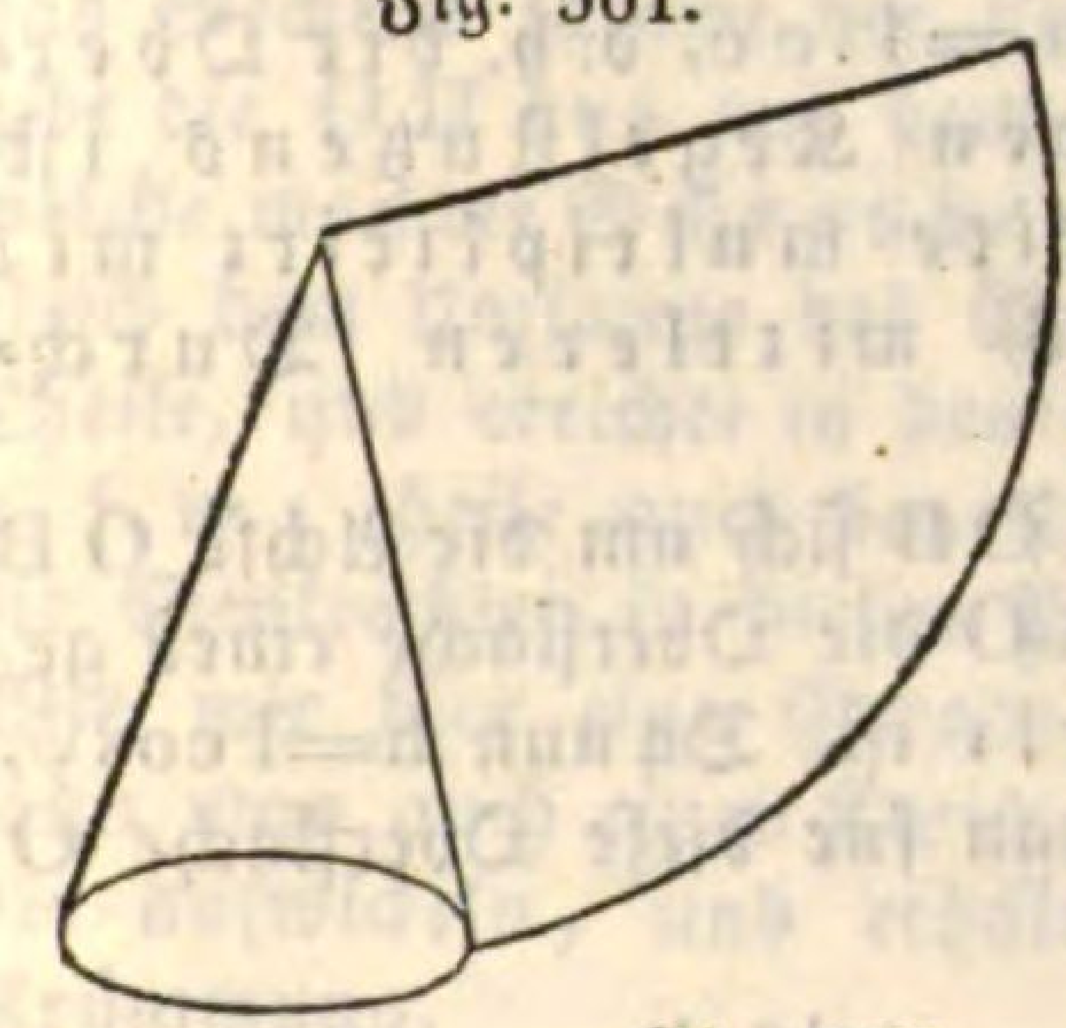


$$\frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^2} = 1.$$

Die Krumme ABD ist also eine Ellipse, wo stets die kleine Achse dem Durchmesser des Grundkreises des Cylinders, die große Achse hingegen demselben Halbmesser dividirt, durch den Cosinus des Neigungswinkels der schneidenden Ebene gegen die Grundfläche ist.

§. 441. Wenn man die Oberfläche eines geraden Prisma's, wo also alle Seitenflächen Rechtecke von derselben Höhe sind, auf eine Ebene abwickelt, so erhält man ein Rechteck von derselben Höhe, wo die Grundlinie gleich ist dem Umfange der Grundfläche des Prismas. Eben so wickelt man die krumme Oberfläche irgend eines geraden Cylinders ab, so erhält man ein Rechteck von derselben Höhe, wo die Grundlinie gleich ist dem Umfange der Grundfläche des Cylinders. Daher ist der Umfang jedes geraden Prismas und jedes Cylinders gleich der Höhe multiplicirt mit dem Umfange der Grundfläche.

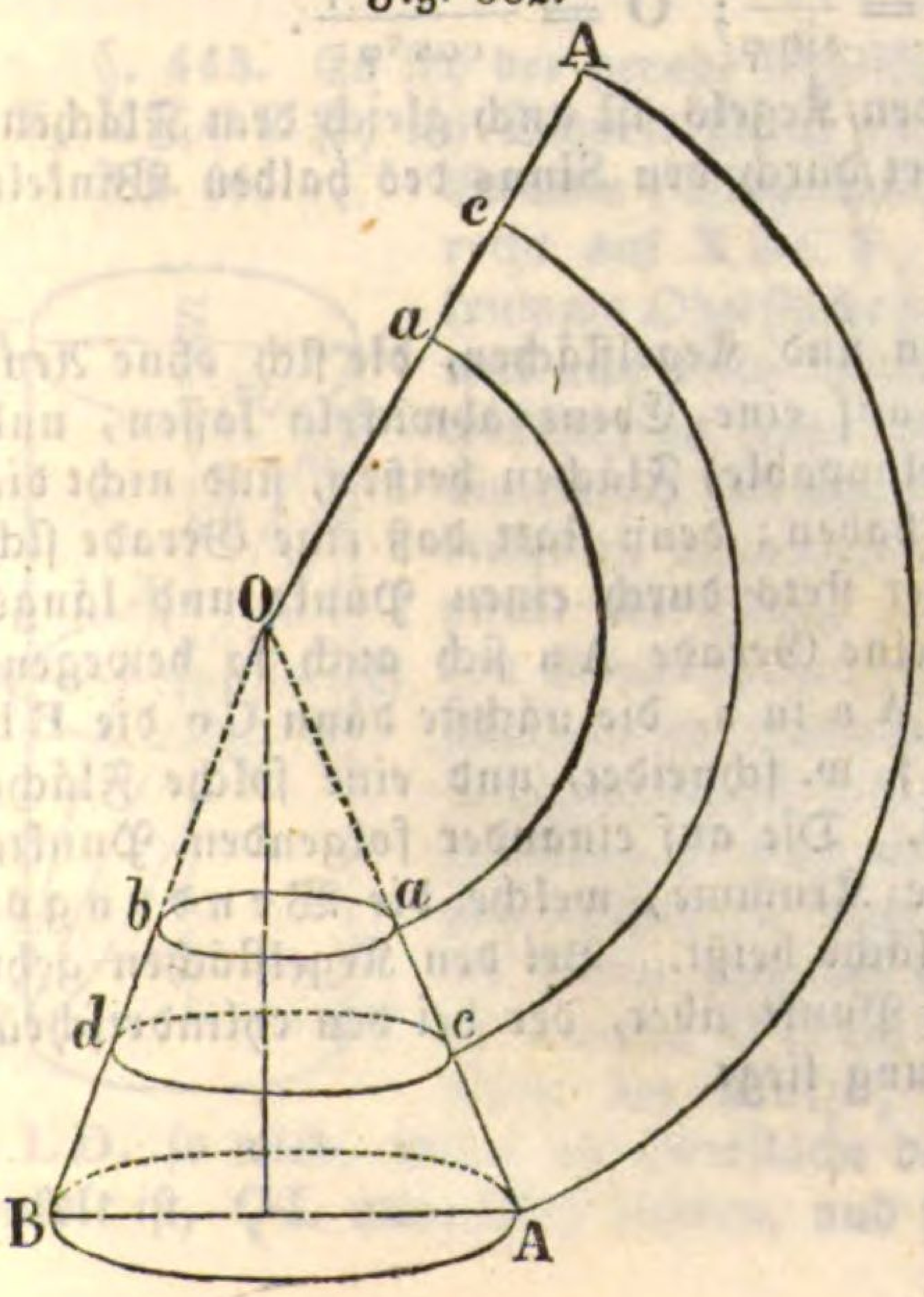
Fig. 561.



Ist so d der Durchmesser einer geraden Walze und h ihre Höhe, so ist ihre Oberfläche gleich $\pi d h$.

Wickelt man die krumme Oberfläche eines geraden Kegels auf eine Ebene ab, so gibt sie einen Kreisausschnitt, wo der Halbmesser desselben gleich der Seite des geraden Kegels, und der Bogen der Umfang des Grundkreises ist. Daher ist die krumme Oberfläche eines geraden Kegels gleich dem Umfange des Grundkreises, multiplicirt mit der halben Seite des Kegels.

Fig. 562.



Die Oberfläche eines abgestutzten geraden Kegels abAB, wo die schneidende Ebene ab gleichlaufend mit der Grundfläche ist, gibt abgewickelt das Stück aaAA, welches von den 2 koncentrischen Kreisbögen aa und AA und den Geraden Aa und Bb, die im Mittelpunkte O beider Kreisbögen sich vereinigen, eingeschlossen ist. Nennet man nun die Seite des Kegelstutzens $Aa = l$, den Halbmesser der obern Grundfläche r, den untern R, so ist der Bogen $aa = 2\pi r$, der Bogen $AA = 2\pi R$. Nennet man nun $oa = x$, so hat man Kreisausschnitt $Oaa = \pi r x$,

Kreisausschnitt $OAA = \pi R\,(l+x)$, daher $aaAA = \pi[Rl+(R-r)x]$. Da nun $\frac{Oa}{OA} = \frac{aa}{AA} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}$, daher $\frac{x}{x+l} = \frac{r}{R}$, woraus $x = \frac{rl}{R-r}$, so hat man Oberfläche des Kegelstutzens

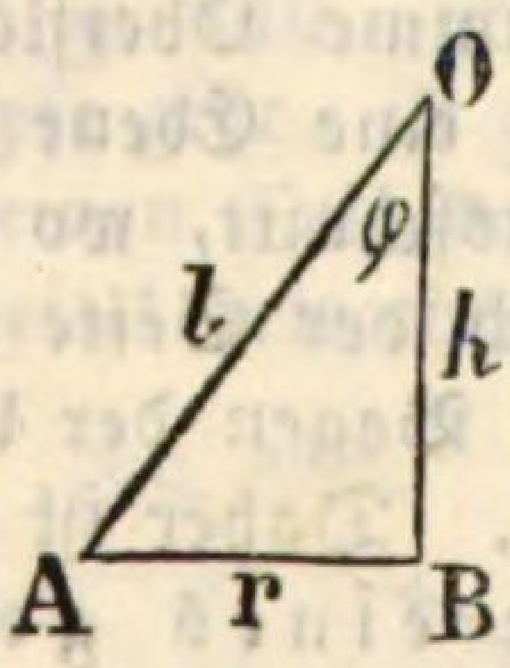
$$= aaAA = l\pi(R+r),\ \text{oder}\ \frac{l}{2}(2\pi R + 2\pi r),$$

d. h. die Oberfläche eines geraden Kegelstutzens ist gleich der halben Seite multiplicirt mit der Summe der Umfänge der Grundflächen. Ist Aa in c halbirt, und ist cc der Umfang des Kreises cc abgewickelt, so hat man:

$$\frac{cc}{aa} = \frac{x+\frac{l}{2}}{x};\quad \frac{cc}{AA} = \frac{x+\frac{l}{2}}{x+l},$$

woraus $AA + aa = 2cc$, daher $2\pi(R+r) = 2.cc$, und somit: Oberfläche des geraden Kegelstutzens $AA\alpha a = l.cc$, d. h. die Oberfläche eines geraden Kegelstutzens ist auch gleich der Seite multiplicirt mit dem Umfange des mittleren Durchschnittes.

Fig. 563.



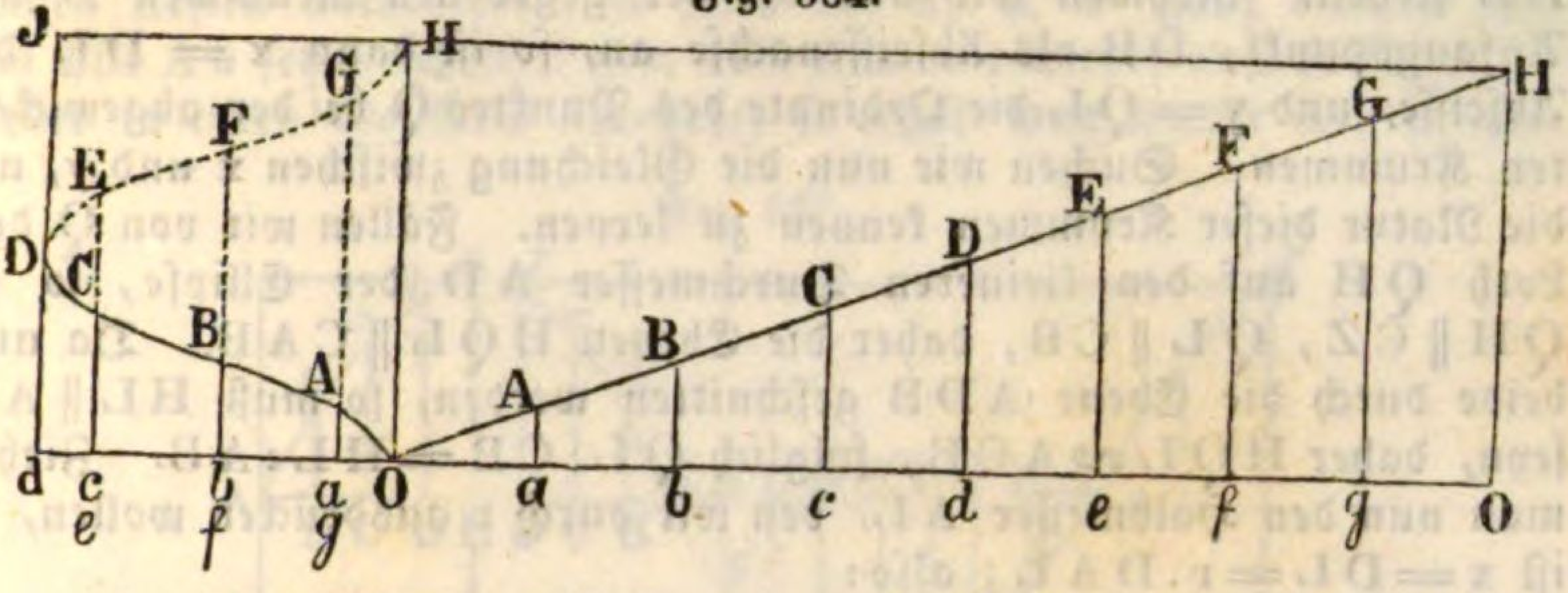
Wenn das Dreieck AOB sich um die Achse OB dreht, so beschreibt die AO die Oberfläche eines geraden Kegels, die gleich $\pi l r$ ist. Da nun $h = l\cos\varphi$, $r = l\sin\varphi$ ist, so hat man für diese Oberfläche O folgende Ausdrücke:

$$O = \pi l^2 \sin\varphi;\quad O = \frac{\pi r^2}{\sin\varphi};\quad O = \frac{\pi h^2 \sin\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Die Oberfläche also eines geraden Kegels ist auch gleich dem Flächeninhalte des Grundkreises dividirt durch den Sinus des halben Winkels am Scheitel.

§. 442. Die cylindrischen und Kegelflächen, die sich ohne Aenderung ihres Flächeninhaltes auf eine Ebene abwickeln lassen, und deßhalb abwickelbare (developpable) Flächen heißen, sind nicht die einzigen, die diese Eigenschäft haben; denn statt daß eine Gerade sich stets mit sich gleichlaufend, oder stets durch einen Punkt und längs einer Krummen bewegt, kann eine Gerade Aa sich auch so bewegen, daß ihre nächste Lage Bb, die Aa in a, die nächste dann Cc die Bb in b, die Dd die Cc in c u. s. w. schneidet, und eine solche Fläche ist dann ebenfalls developpabel. Die auf einander folgenden Punkte a, b, c .... bilden dann eine Krumme, welche die Wendungskrumme der developpablen Fläche heißt. Bei den Kegelflächen geht die Wendungskrumme in einen Punkt über, der bei den cylindrischen Flächen in unendlicher Entfernung liegt.

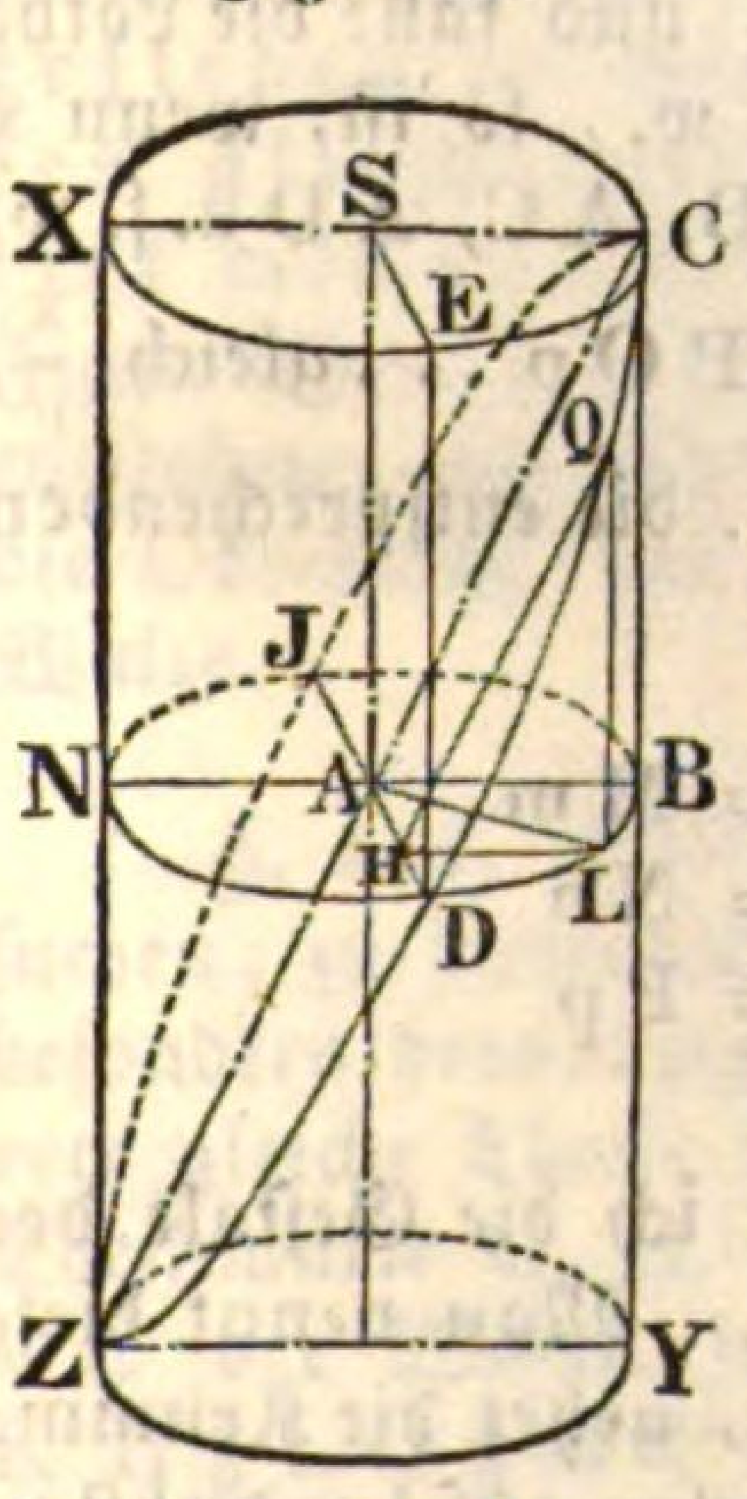
Fig. 564.



Die abwickelbaren Flächen geben uns Gelegenheit, hier eine sogenannte Krumme von doppelter Krümmung zu besprechen. Wenn man die Oberfläche des Cylinders JHOd abwickelt, wodurch man das Rechteck HHOO erhält, und ziehet die Winkellinie OH, und wickelt das Rechteck sammt der Linie OH wieder auf dem Cylinder auf, so gibt die OH uns auf dem Cylinder die Krumme OABCDEFGH, welche man die Schraubenlinie nennt. Um diese zu zeichnen, ist OO gleich dem Umfange des Grundkreises; ich theile OO in acht gleiche Theile, und errichte in den Theilungspunkten die Lothe Aa, Bb, Cc u. s. w.; theile auch den Umfang in acht gleiche Theile, und mache die Senkrechten in diesen Punkten Aa = Aa, Bb = Bb u. s. w. Wie wir hier eine Gerade auf den Cylinder aufgewickelt haben, so kann man auch einen Kreis, Parabel, Hyperbel u. s. w. auf den Cylinder aufwickeln, und erhält so verschiedene Krumme von doppelter Krümmung.

§. 443. Es sey der gerade kreisförmige Cylinder oder die Walze XY, XZCY sey ein Schnitt durch die Achse; lege ich nun durch die Ecklinie (Diagonale) CZ eine Ebene DCZ senkrecht auf XZCY, so schneidet diese Ebene die krumme Oberfläche der Walze in einer Ellipse. Ich will nun diese krumme Fläche auf eine Ebene abwickeln; es frägt sich, in was für eine krumme Linie wird sich dann die Ellipse verwandeln. Um dieses zu untersuchen, legen wir durch den Mittelpunkt der Ellipse A eine Ebene gleichlaufend mit den Grundflächen also senkrecht auf die Seiten der Walzen, es schneidet diese Ebene die Oberfläche in einem Kreise BLD. Wird nun die Walze abgewickelt, so geht dieser Kreis in eine Gerade über, auf welcher die nach einander abgewickelten Seiten der Walze senkrecht stehen. Ist nun Q ein Punkt der Ellipse, QL ein Stück einer durch Q gehenden Seite der Walze, also senkrecht auf der Ebene BLD, so wird, wenn die Oberfläche der Walze auf der Ebene abgewickelt ist, QL unverkürzt bleiben, und senkrecht auf die dann Gerade

Fig. 565.



DL stehen. Nehmen wir nun bei der gegebenen Krummen D als Anfangspunkt, DB als Abscissenachse an, so ist dann $x = DL$ die Abscisse, und $y = QL$ die Ordinate des Punktes Q bei der abgewickelten Krummen. Suchen wir nun die Gleichung zwischen x und y, um die Natur dieser Krummen kennen zu lernen. Fällen wir von Q das Loth QH auf den kleineren Durchmesser AD der Ellipse, so ist $QH \parallel CZ$, $QL \parallel CB$, daher die Ebenen $HQL \parallel CAB$. Da nun beide durch die Ebene ADB geschnitten werden, so muß $HL \parallel AB$ seyn, daher $HQL \sim ACB$, folglich $QL : CB = HL : AB$. Ziehet man nun den Halbmesser AL, den wir durch r ausdrücken wollen, so ist $x = DL = r . DAL$; also:

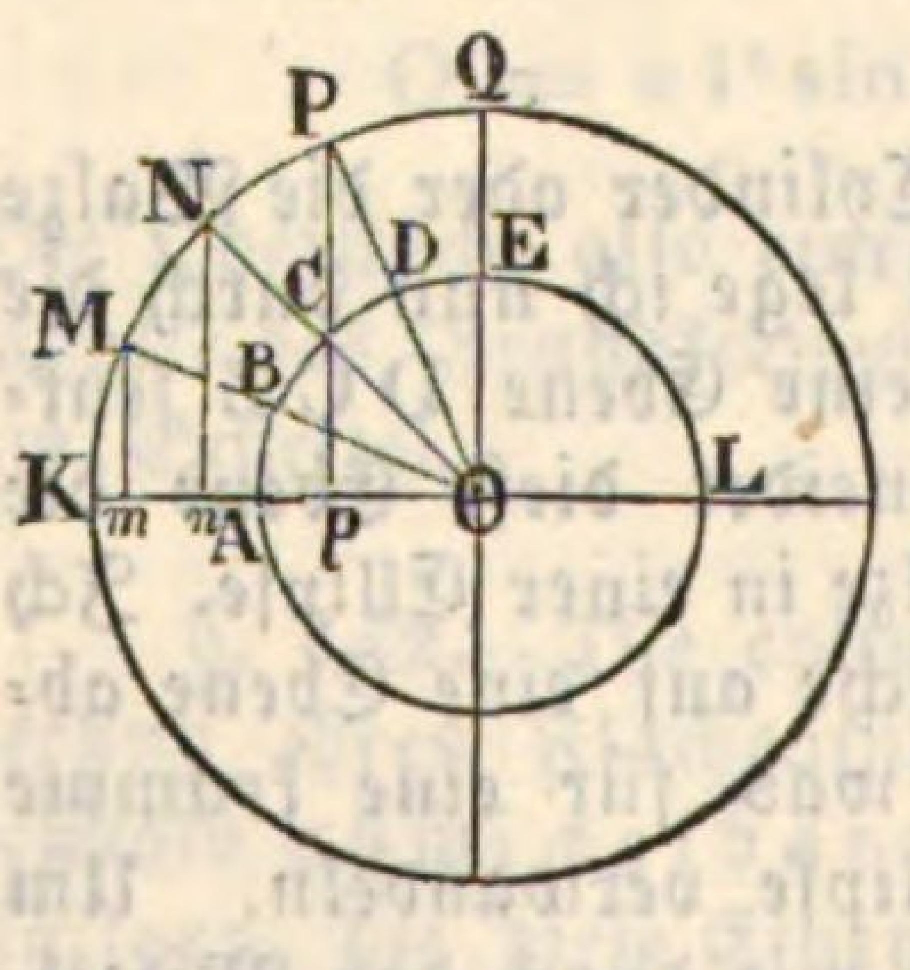
$$DAL = \frac{x}{r}, \text{ und } HL = AL \sin DAL = r \sin \frac{x}{r}.$$

Nennet man nun noch $CB = h$, so gibt obige Proportion:

$$y : h = r \sin \frac{x}{r} : r, \text{ daher } y = h \sin \frac{x}{r}$$

die Gleichung der Krummen, welche aus der Ellipse durch Abwicklung der Walzenoberfläche entsteht. Wir wollen uns nun diese Krumme vorzeichnen. Zu diesem Behufe beschreibe ich aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser $OA = r$ und $OK = h$ Kreise, ziehe mir auf der Seite eine Gerade $AA'A''$ gleich dem Umfange des Kreises mit dem Halbmesser r; es reicht hin, $AA'' = 3\,AL + \frac{1}{5} AE$ zu machen. Ich theile sowohl den Umfang von AL, als AA'' in gleich viel, z. B. in 16 gleiche Theile, so daß der Bogen AB gleich dem geraden Stücke AB, $\widehat{BC} = BC$, $\widehat{CD} = CD$ u. s. w. Verlängert man nun die Halbmesser OB, OC, OD... nach M, N, P..., und fällt die Lothe Mm, Nn, Pp, QO u. s. w., so ist, wenn x nach einander die Werthe AB, AC, AD u. s. w. annimmt, MOm, NOn, POp ... gleich $\frac{x}{r}$, daher die Mm, Nn, Pp... die entsprechenden Werthe von $h \sin \frac{x}{r}$ vorstellen. Mache ich also:

Fig. 566.

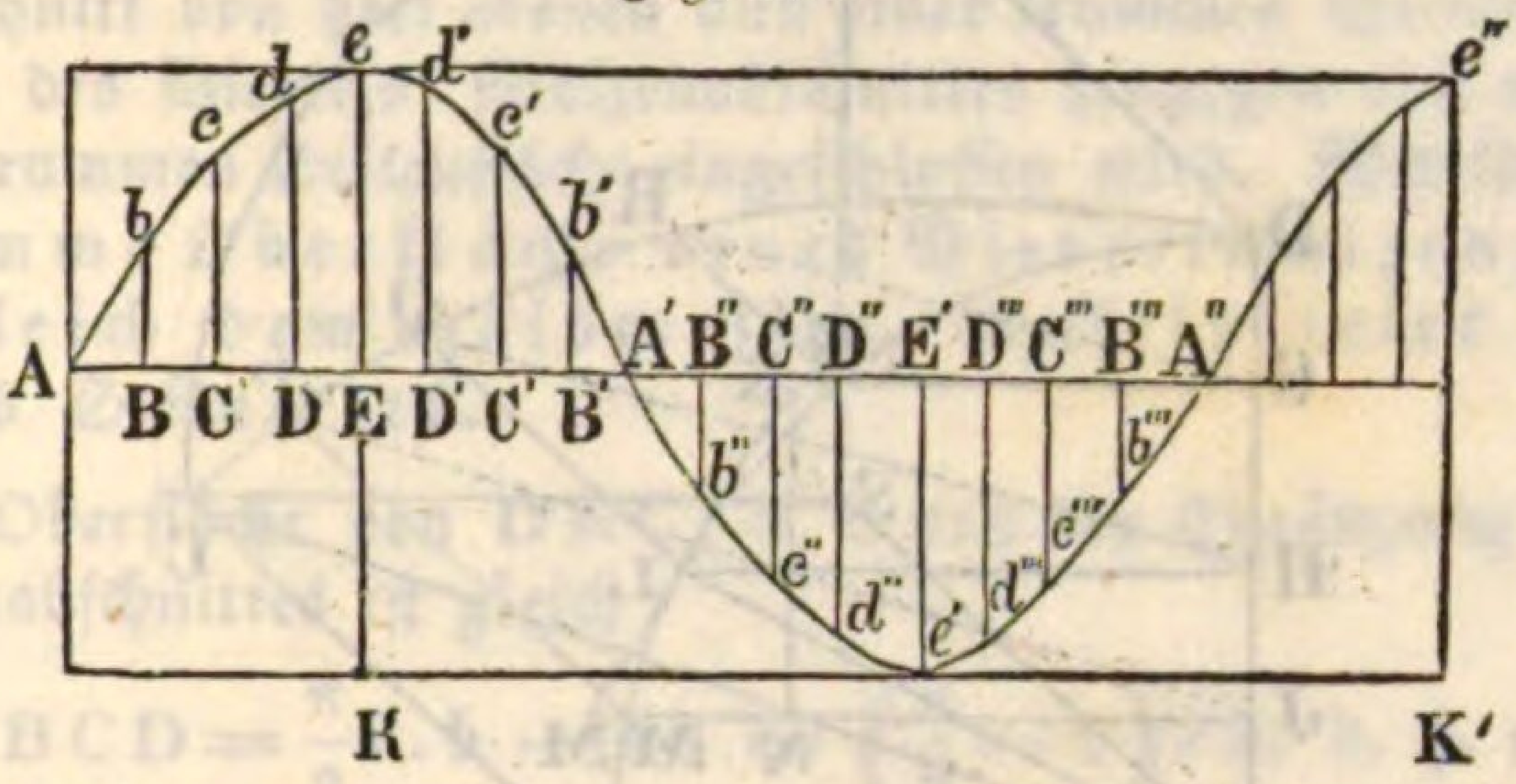


$$\begin{aligned}
Bb &= B'b' = B''b' = B'''b''' = Mm \\
Cc &= C'c' = C''c'' = C'''c''' = Nn \\
Dd &= D'd' = D''d'' = D'''d''' = Pp \\
Ee &= E''e'' = QO,
\end{aligned}$$

und verbinde die Punkte A b c d e d'..., so habe ich die Gestalt der durch Abwicklung der Ellipse erhaltenen Krummen. Man nennt diese Krumme die Sinuslinie. Wie man leicht sieht, gehet die Krumme wieder in A'' aufwärts, und wird sich in unendlich vielen auf- und abstei-

genden Aesten wiederholen, so wird der Ast A″e″ ganz einerlei mit dem Aste A e seyn. Wickelt man diese Krumme wieder auf, so daß A A″ wieder in einen Vollkreis übergeht, so erhält man wieder eine Ellipse.

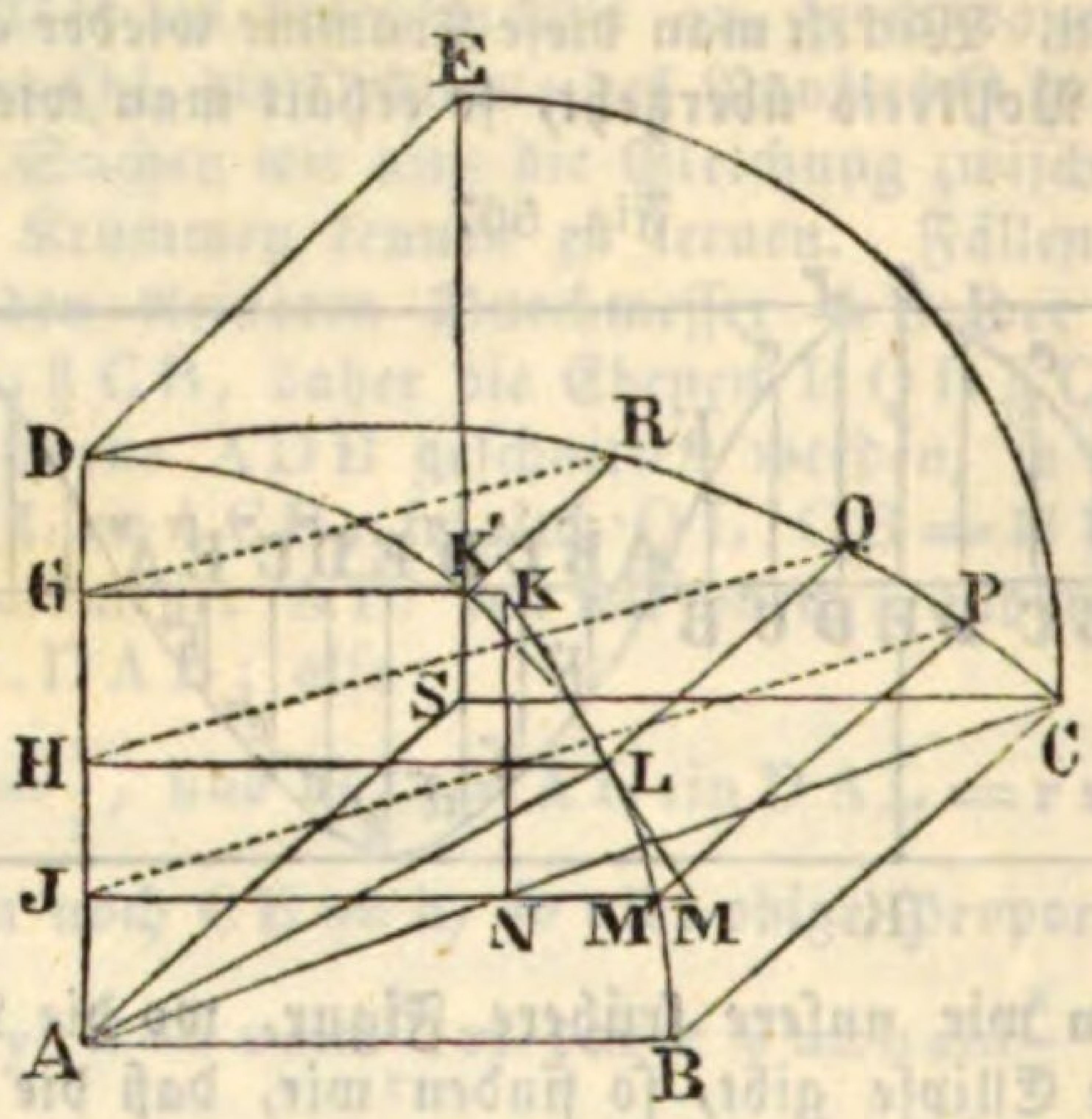
Fig. 567



Vergleichen wir unsere frühere Figur, wo die Walze in C D Z geschnitten, eine Ellipse gibt, so finden wir, daß die gebogene Figur D B C, dort abgewickelt, uns eine Gestalt wie A E e in dieser Figur gibt; eben so gibt die gebogene Figur B C J uns hier eine Gestalt wie e E A′, daher gibt die ganze Figur D C J B uns A e A′, auf dieselbe Art gibt der untere Theil J N Z D, A′e′A″. Man sieht nun leicht ein, daß der Theil der Oberfläche der Walze, der zwischen der Ellipse und dem unteren Grundkreise liegt, d. h. das vordere Z C y sowohl als das hintere C Z y zusammen uns abgewickelt eine Figur geben, die zwischen e e″ und der Krummen e A′e′A″e″ liegt. Nun findet man leicht, daß dieser Raum die Hälfte des Rechteckes e e″K K′, d. h. $= \frac{1}{2} 2h . 2\pi r$, wo $h = Ee$ in dieser oder $= BC$ in der früheren Figur ist, und wobei $r = AD$ der früheren Figur. Den Körper, der zwischen der Ellipse und der durch den Scheitel Z gezogenen Grundfläche liegt, nennt man einen **Walzenhuf**. **Wie man nun ersieht, ist die krumme Oberfläche eines Walzenhufes gleich dem Umfange der Grundfläche multiplicirt mit der halben Höhe.** Eine aufmerksame Betrachtung der Figur lehrt, daß die beiden Walzenhufe, die durch den Schnitt C D Z entstehen, mit einander einerlei sind, daher es auch begreiflich, wie die Oberfläche des einen gleich der Hälfte der Oberfläche der ganzen Walze.

§. 444. Wir wollen nun die Größe der gebogenen Fläche B C D suchen; zu diesem Behufe wollen wir uns die Viertelwalze A D B E C S besonders herauszeichnen. Theilen wir den Halbmesser A D in mehrere gleiche Theile $DG = GH = HJ =$ u. s. w., legen wir durch die Theilpunkte G, H, J Ebenen, gleichlaufend mit den Seiten B C oder D E der Walze, so wird die krumme Oberfläche in den Geraden $K'R \parallel LQ \parallel M'P \parallel BC$ geschnitten; ich ziehe durch L die K M berührend zum Quadranten D L B, bis die Berührende von der Geraden G K′ und J M′ in K und M geschnitten wird. In je mehr Theile ich

Fig. 568.



den Halbmesser AD theile, je näher also die Theilpunkte kommen, folglich auch die Geraden K'R, LQ, M'P, so mehr werden K und K' und M und M', das Berührungsstück KM und der Bogen KM' einander näher kommen, und um desto mehr wird erlaubt seyn, das gebogene Flächenstück K'RM'P als ein Trapez anzusehen, dessen Flächeninhalt gleich K'M'.LQ oder KM.LQ ist. Nun sind aber die Dreiecke KMN und HAL mit einander ähnlich, weil ihre Seiten auf einander senkrecht stehen, daher:

$$KM : KN = AL : HL, \text{ oder } KM : GJ = AB : HL;$$

da aber die Dreiecke HLQ und BAC mit einander ähnlich sind, so hat man $AB : HL = BC : LQ$, folglich in Verbindung mit der früheren Proportion $KM : GJ = BC : LQ$, daher $KM . LQ = BC . GJ$, mithin ist der Flächeninhalt eines unendlich dünnen Streifens, wie K'RM'P an unserer Walze annäherungsweise vorstellen soll, gleich BC (was wir die Höhe des Schnittes nennen wollen) multiplicirt mit GJ (Höhe des unendlich dünnen Streifens). Da uns nun nichts hindert, den Halbmesser AD in so viele gleiche Theile zu theilen, als wir nur wollen, also die Streifen wie hier K'RM'P so dünn zu machen, als wir nur wollen, und da der angeführte Satz für jeden einzelnen Streifen gilt, so gilt er auch für jede Summe derselben, daher wird, wenn auch K'R und M'P nicht unendlich nahe an einander liegen, doch die Oberfläche davon gleich GJ.BC; denn würden wir diesen Streifen in 1000 Streifen zerlegen, so würde die Fläche jedes einzelnen gleich der Höhe des Schnittes multiplicirt mit der Höhe jedes einzelnen Streifens seyn, daher natürlich die Summe aller dieser einzelnen Streifen gleich der Höhe des Schnittes multiplicirt mit der Summe der einzelnen Höhen der Streifen, d. h. mit der meßbaren Höhe des Streifens ist, daher ist die Oberfläche von DBC gleich AD.BC. Wir wollen den Körper, dessen vier Eckpunkte A, B, C

und D sind, **Viertelswalzen-Abschnitt** nennen; um ihn aber von dem Körper, dessen Eckpunkte A, S, C, D und E sind, und den wir **Ergänzung des Viertels-Walzenabschnittes** nennen wollen, zu unterscheiden, bemerken wir nur, daß der Viertels-Walzenabschnitt von drei ebenen und einer krummen Seitenfläche, die Ergänzung des Viertels-Walzenabschnittes hingegen von vier ebenen und einer krummen Seitenfläche eingeschlossen wird. Wir sagen somit: **Die krumme Oberfläche eines Viertelwalzenabschnittes ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit der Höhe des Schnittes.**

Die Oberfläche von DEC, d. i. von der Ergänzung des Viertel-Walzenabschnittes ist gleich

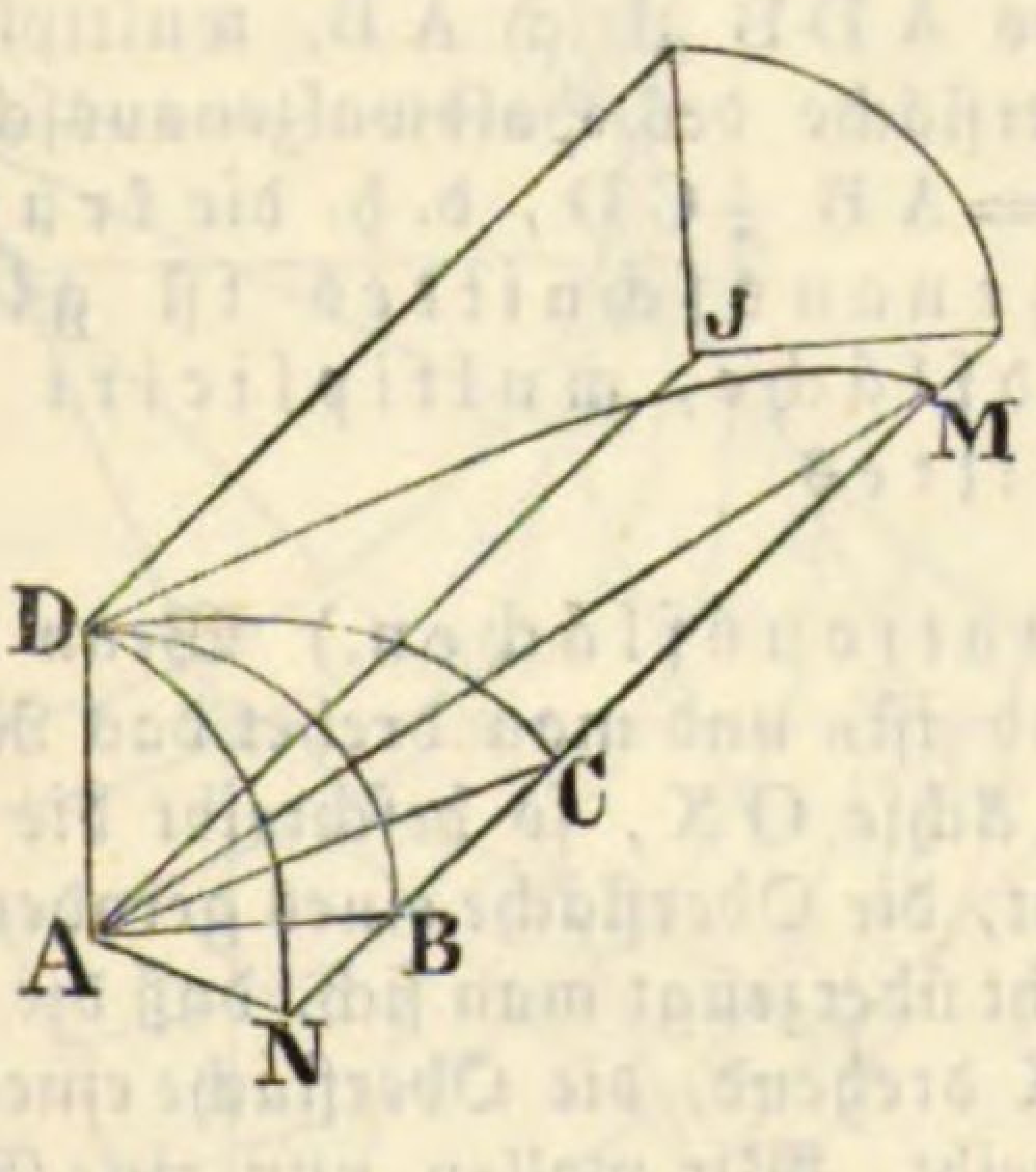
$$BCDE - BCD = \frac{\pi}{2} r.h - rh = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) rh, \text{ d. h. nahe } \frac{4}{7} rh,$$

oder genauer $\frac{129}{226}$ rh, oder auch die krumme Oberfläche der Ergänzung des Viertels-Walzenabschnittes gleich

$$BC.BD - BC.AB = BC(BD - AB),$$

d. h. **die krumme Oberfläche der Ergänzung des Viertels-Walzenabschnittes ist gleich der Weite des Schnittes, multiplicirt mit der Länge des Quadranten weniger dem Halbmesser.**

Fig. 569.

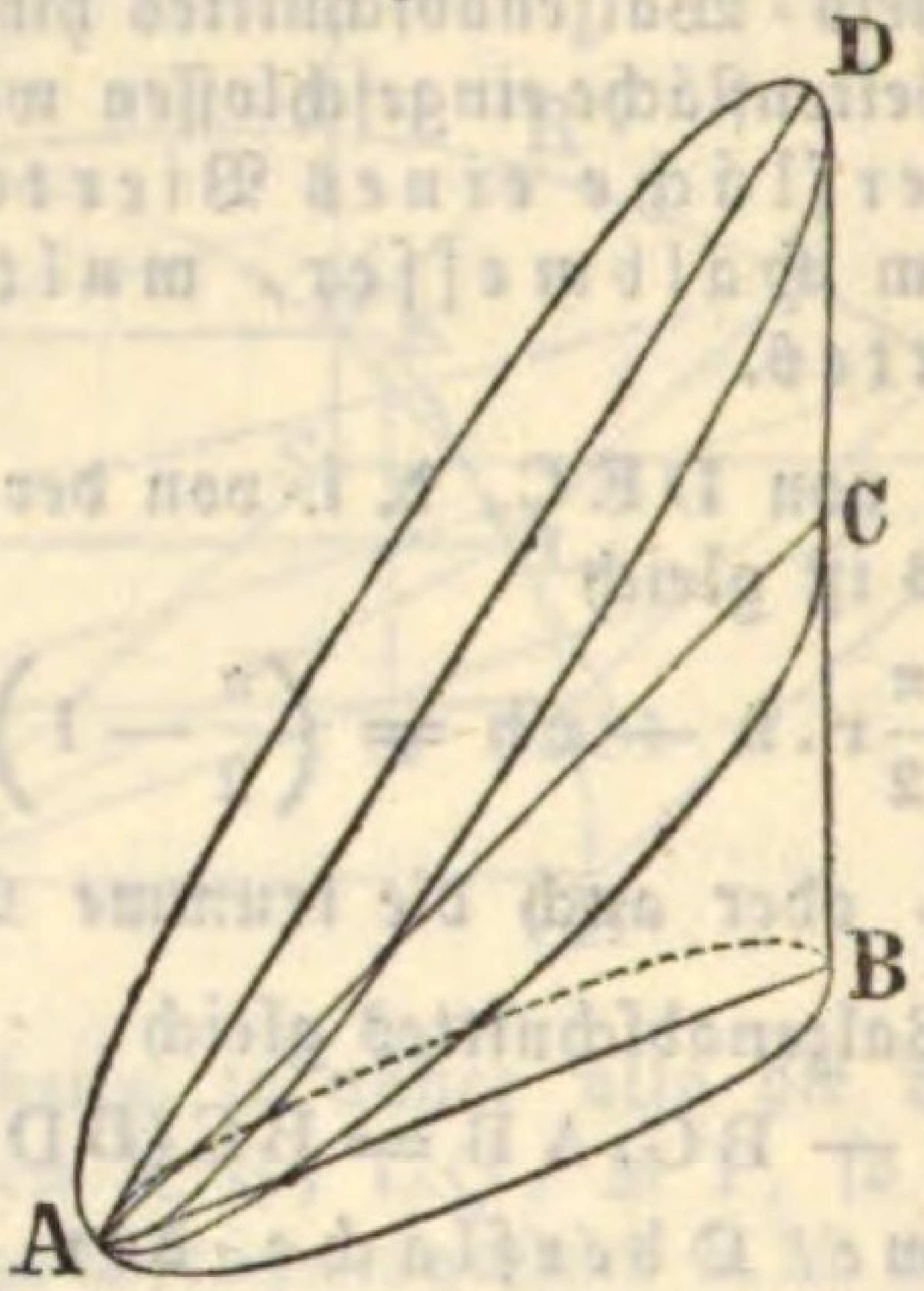


§. 445. Wird die Viertelwalze DABJ durch die Ebenen DAN, DAC, DAM geschnitten, die sämmtlich durch den Halbmesser DA durchgelegt sind, so wollen wir die Walzenstücke ADNC, ACDM **Viertels-Walzenausschnitte** nennen. Nun ist:

$$NDC = DNB + DBC = AD.NB + AD.BC = AD.NC$$
$$CDM = DBM - DBC = AD.BM - AD.BC = AD.CM,$$

daher die gebogene Fläche eines Viertels-Walzenausschnittes ist gleich dem Halbmesser, multiplicirt mit der Weite des Schnittes (dem Stücke der Walzenseite, was in diesem Viertels-Walzenausschnitte liegt).

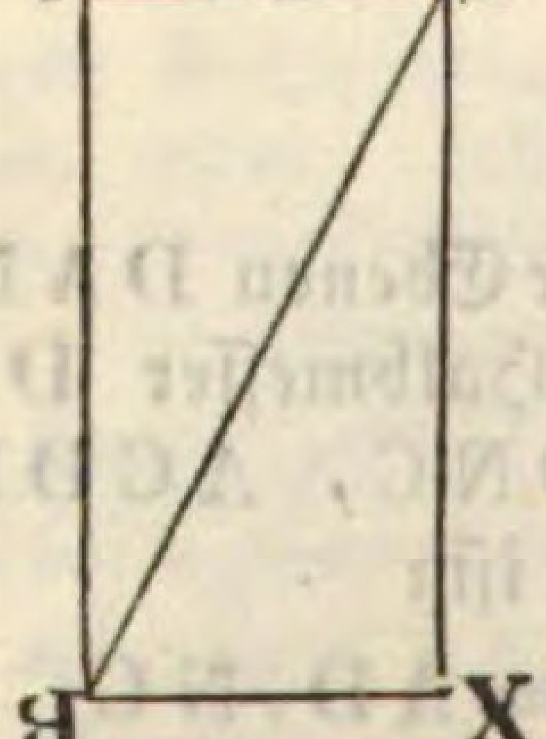
Fig. 570.



Ist AB der Durchmesser der Grundfläche einer geraden Walze, und sind AC und AD die halben Umfänge schiefer Schnitte, so ist ABC die Oberfläche eines Halbwalzenabschnittes, der als die Hälfte eines Walzenhufes gleich ist dem halben Umfange AB mit der halben Höhe, die mit $\frac{1}{2}$BC; eben so ist die gebogene Fläche des Halbwalzenabschnittes ADB gleich AB, multiplicirt mit $\frac{1}{2}$BD, daher die krumme Oberfläche des Halbwalzenausschnittes ADC gleich $AB . \frac{1}{2}(BD - BC) = AB \frac{1}{2} CD$, d. h. die krumme Oberfläche eines Halbwalzenausschnittes ist gleich dem Halbkreise der Grundfläche, multiplicirt mit der halben Weite des Schnittes

§. 446. (Rotationsflächen.) Wenn die Gerade AB mit der OX gleichlaufend ist, und man drehet das Rechteck ABXO um die Achse OX, so beschreibt die AB, wie man leicht sieht, die Oberfläche eines geraden Cylinders; eben so leicht überzeugt man sich, daß die Gerade OB, sich um OX drehend, die Oberfläche eines geraden Kegels beschreibt. Wir wollen nun eine Gerade um eine Achse drehen, die mit ihr nicht in derselben Ebene liegt.

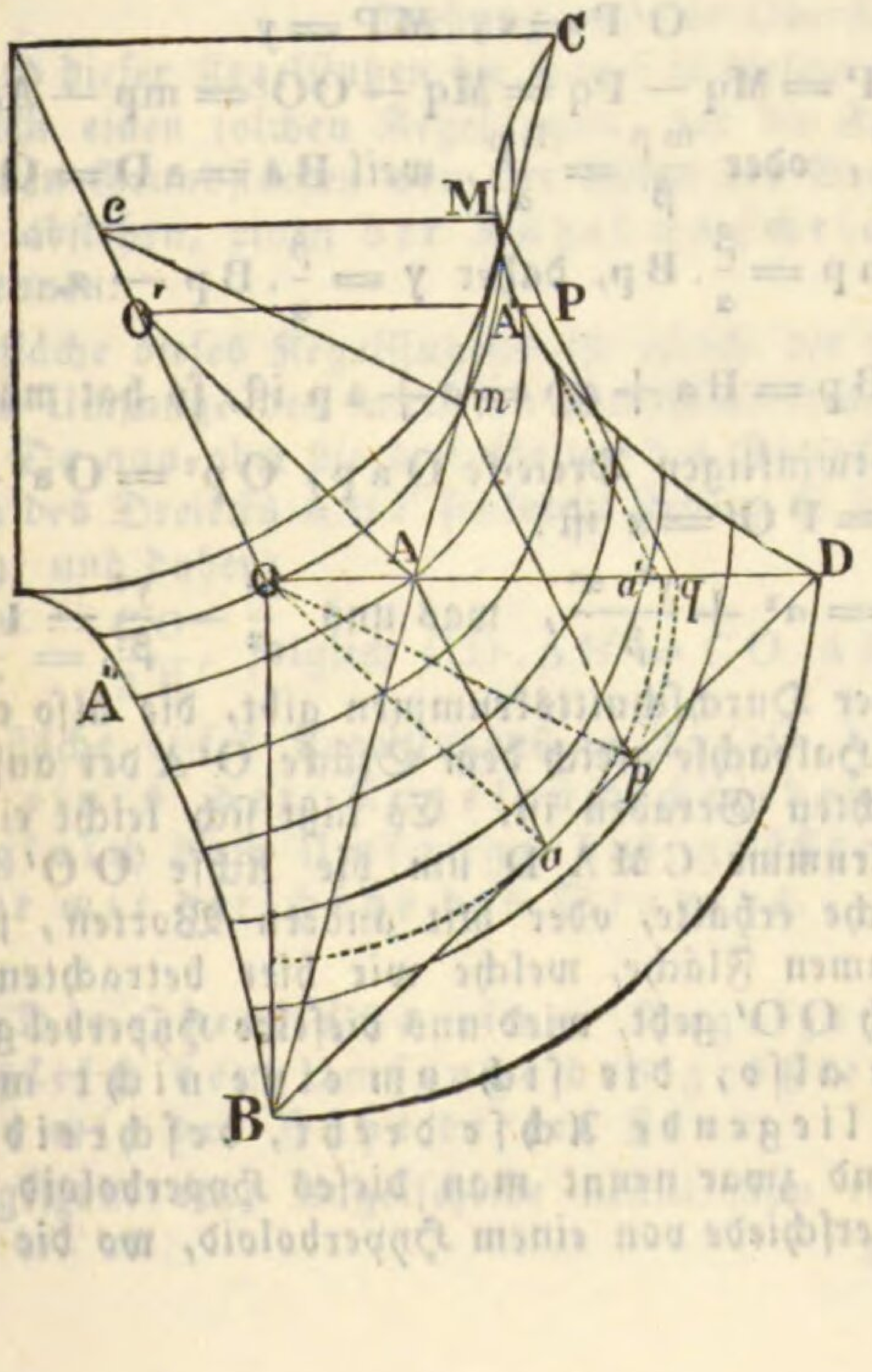
Fig. 571.



Es drehe sich die Gerade BC um die Gerade OO′, die mit ihr nicht in derselben Ebene liegt; denken wir uns die Ebene BOD senkrecht auf OO′, die BC treffe diese Ebene in B; wir denken uns ferner durch die Gerade BC eine Ebene BCD gleichlaufend mit OO′, welche Ebene die Ebene BOD in BD schneidet, so daß die BD die Projektion der BC auf BOD ist. Ich fälle vom Punkte O

ein Loth O a auf B D, endlich sey die Ebene C D O sowohl auf B O D als B O O′ senkrecht, und die Stellung der zwei senkrechten Ebenen B O O′ und C O D sey zwar so, daß B O a = a O D = 45° sey, jedenfalls wird eine solche Stellung dieser zwei auf einander und auf B O D senkrechten Ebenen möglich seyn. Wenn sich nun die Gerade B C um die Achse O O′ dreht, so beschreibt jeder Punkt derselben einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der O O′, und den ich finde, wenn ich von diesem Punkte ein Loth auf O O′ fälle. Errichtet man in a ein Loth auf B O D, welches die B C in A trifft, und ich will wissen, welchen Weg der Punkt beschreibt während der Drehung der B C um O O′, so fälle ich ein Loth O′A auf O O′, oder ich ziehe O′A ∥ O a, so beschreibt der Punkt A einen Kreis, dessen Mittelpunkt O′ ist, und welcher Kreis in einer Ebene O A A′ liegt, die gleichlaufend mit B O D ist; in der Figur hier ist der Viertelskreis A′A″ gezeichnet, wobei A′ und A″ die Punkte sind, die zugleich in den Ebenen C O D und B O O′ liegen. Haben wir eben so den Punkt m der B C, welcher die Höhe m p über B O D hat, so finde ich den Weg, den der Punkt m während der Drehung um O O′ beschreibt, wenn ich die c m ∥ O p ziehe, der Punkt c, wo diese Gleichlaufende die Achse O O′ trifft, ist der Mittelpunkt, und c m der Halbmesser des Kreises, den der Punkt m beschreibt, so kann

Fig. 572.



ich die Wege jedes einzelnen Punktes verzeichnen. Um aber die Natur dieser so entstehenden krummen Fläche näher kennen zu lernen, untersuchen wir, in was für einer krummen Linie die Ebene COD von dieser Fläche geschnitten wird. Wir werden zu diesem Behufe den Weg, den jeder Punkt der BC während der Drehung beschreibt, verfolgen, bis er in der Ebene COD ankommt; um den Ort in der Ebene COD, den jeder Punkt der BC nach der Bewegung in der Ebene COD erreicht, zu finden, verfahre ich folgendermaßen: Das Rechteck O O′Aa dreht sich um OO′, und wenn dieses Rechteck in die Ebene COD hineinfällt, habe ich die fragliche Lage von A; ich werde also Oa′ = Oa von der OD abschneiden, in a′ die A′a′ ‡ OO′, so ist A′ der Punkt, den das A durch die Drehung der BC um OO′ in der COD erreicht; mache ich eben so Oq = Op, wo p der Fußpunkt des Punktes m in der BOD ist, ferner Mq ‡ Oc ‡ mp, so ist M der Ort, den der Punkt m einnimmt, in der COD, wenn BC um OO′ sich dreht.

Verfolge ich so jeden einzelnen Punkt der BC, bis er in der COD eintrifft, so bildet die Aufeinanderfolge dieser Punkte die Krumme, wo die ganze Fläche die durch die angezeigte Bewegung der BC die Ebene COD schneidet. Um die Natur dieser krummen Linie kennen zu lernen, sey $Oa = \alpha$, $Aa = \beta$; ferner O′ der Anfangspunkt, O′A′ die Achse der x, welche durch Mq in P geschnitten wird, daher:

$$O'P = x, \quad MP = y.$$

Nun ist $y = MP = Mq - Pq = Mq - OO' = mp - Aa = mp - \beta$, aber $\frac{mp}{Aa} = \frac{Bp}{Ba}$, oder $\frac{mp}{\beta} = \frac{Bp}{\alpha}$, weil $Ba = aD = Oa$ ist, daher:

$$mp = \frac{\beta}{\alpha} . Bp, \text{ daher } y = \frac{\beta}{\alpha} . Bp - \alpha.$$

Da nun $Bp = Ba + ap = \alpha + ap$ ist, so hat man $y = \frac{\beta . ap}{\alpha}$. Nun ist im rechtwinkligen Dreiecke Oap, $Op^2 = Oa^2 + ap^2$, oder da $Op = Oq = PO' = x$ ist:

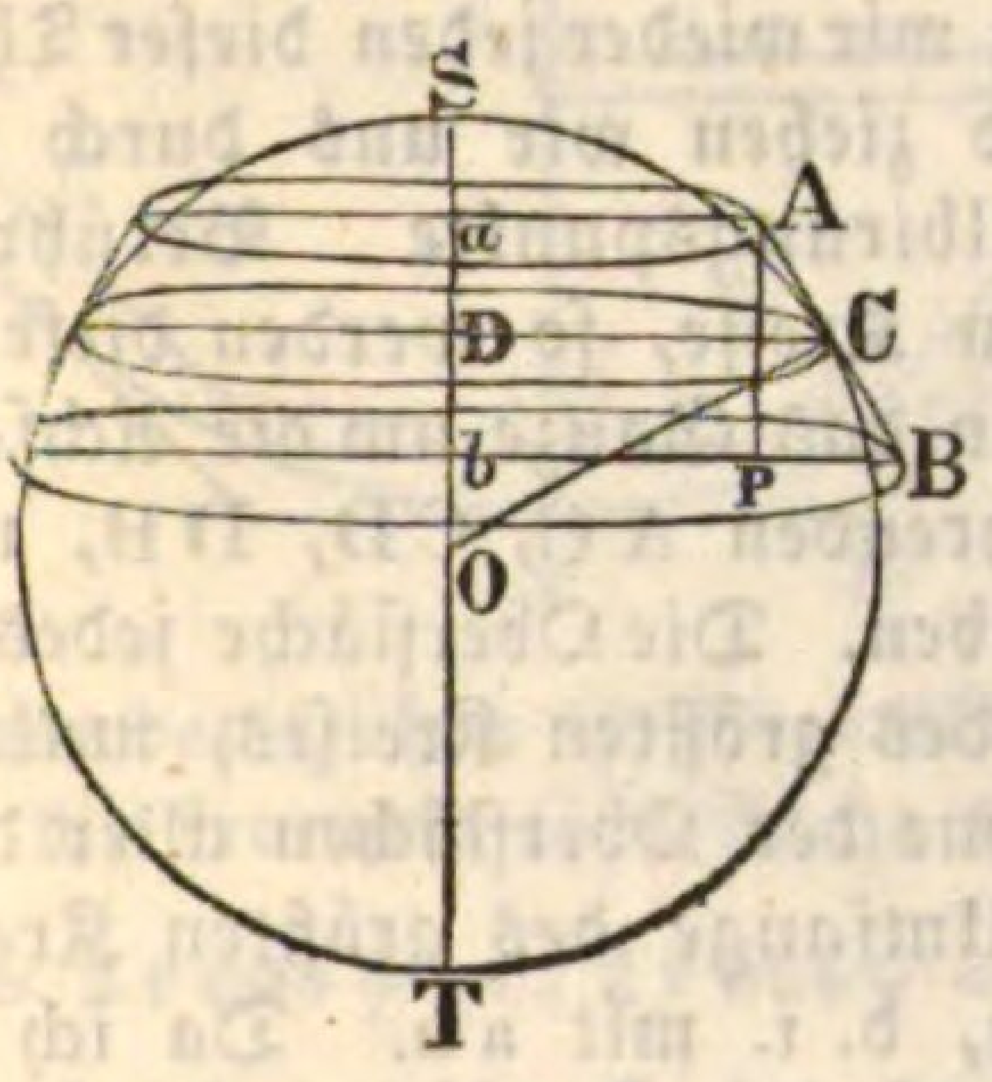
$$x^2 = \alpha^2 + \frac{y^2 . \alpha^2}{\beta^2}, \text{ was uns } \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$$

als Gleichung der Durchschnittskrummen gibt, die also eine Hyperbel ist, deren reelle Halbachse gleich dem Stücke O′A der auf beide OO′ und BC senkrechten Geraden ist. Es läßt sich leicht einsehen, daß, wenn ich die Krumme CMA′D um die Achse OO′ herumdrehe, ich dieselbe Fläche erhalte, oder mit andern Worten, jeder Durchschnitt der krummen Fläche, welche wir hier betrachten, durch eine Ebene, die durch OO′ geht, wird uns dieselbe Hyperbel geben. *Eine gerade Linie also, die sich um eine nicht mit ihr in einer Ebene liegende Achse dreht, beschreibt ein Hyperboloid*, und zwar nennt man dieses Hyperboloid ein kreisförmiges, zum Unterschiede von einem Hyperboloid, wo die gleichlaufen-

den Schnitte in A′A′ oder BD nicht Kreise, sondern Ellipsen sind Man nennt ferner dieses Hyperboloid einfächerig, zum Unterschiede desjenigen Hyperboloides, welches entsteht, wenn die Hyperbel sich um ihre reelle Achse dreht, wo dann zwei Fächer entstehen. Wie man sieht, entsteht das hier gezeichnete Hyperboloid, wovon nur ein Viertel zur Erscheinung gebracht ist, durch Drehung der Hyperbel CMD um die imaginäre Achse OO′.

§. 447 Es sey im Punkte C zum Kreise eine Berührende AB gezogen, und zwar sey AC = BC; fällen wir von A, C und B Lothe auf den Halbmesser OS. Drehen wir nun den Halbkreis SCT sammt der Berührenden AB um den Durchmesser ST, so wird nach einem vollen Umlaufe der Halbkreis eine Kugel, und die AB die Oberfläche eines geraden Kegelstutzens beschreiben, und zwar werden die Punkte A, C und B Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte a, D und b sind. Da der Punkt C im Kreise, also während der ganzen Umdrehung auf der Oberfläche der Kugel liegt, so wird dieser Kegelstutzen die Kugel in diesem Kreise berühren. Wir wollen einen solchen Kegelstutzen, der die Kugel berührt, und wo die beiden Grundflächen von der Ebene des Berührungskreises gleich weit abstehen, einen der Kugel umschriebenen Kegelstutzen nennen.

Fig. 573.



Die Oberfläche dieses Kegelstutzens ist gleich der Seite, multiplicirt mit dem Umfange des mittleren Durchschnittes, daher gleich $2\pi CD . AB$. Da nun aber die drei Seiten des Dreiecks CDO auf den drei Seiten des Dreiecks ABP senkrecht stehen, so sind diese zwei Dreiecke ähnlich und daher:

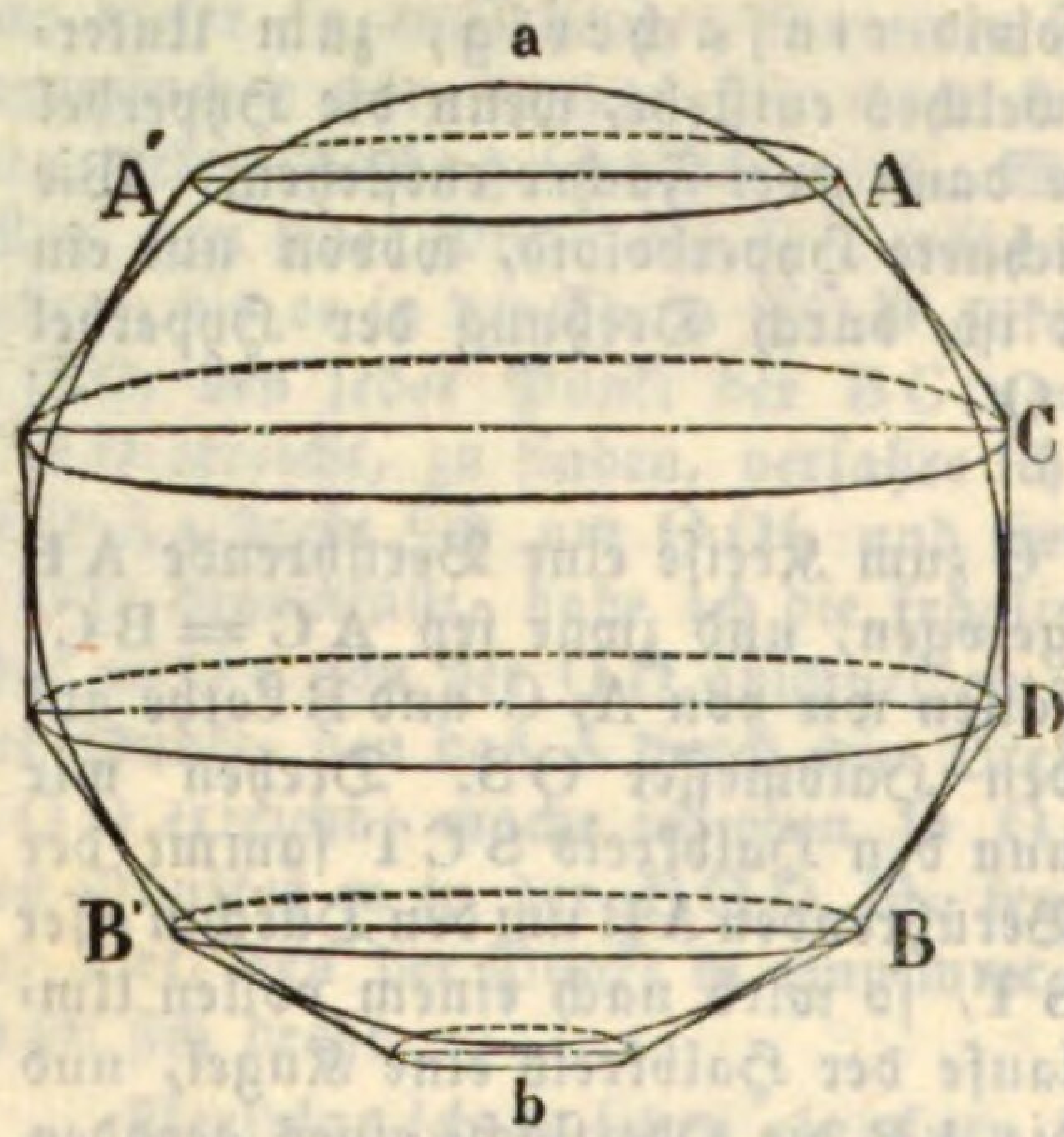
$$\frac{CD}{AP} = \frac{CO}{AB}, \text{ folglich } CD . AB = CO . AP,$$

daher die Oberfläche dieses Kegelstutzens $= 2\pi CO . AP$, d. h. die Oberfläche eines der Kugel umschriebenen Kegelstutzens ist gleich dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit der Höhe des Stutzens.

§. 448. Die Oberfläche einer Kugelzone (Kugelscheibe) ist gleich dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit der Höhe dieser Zone.

Eine Kugelzone oder Kugelscheibe nennt man ein Stück der

Fig. 574.



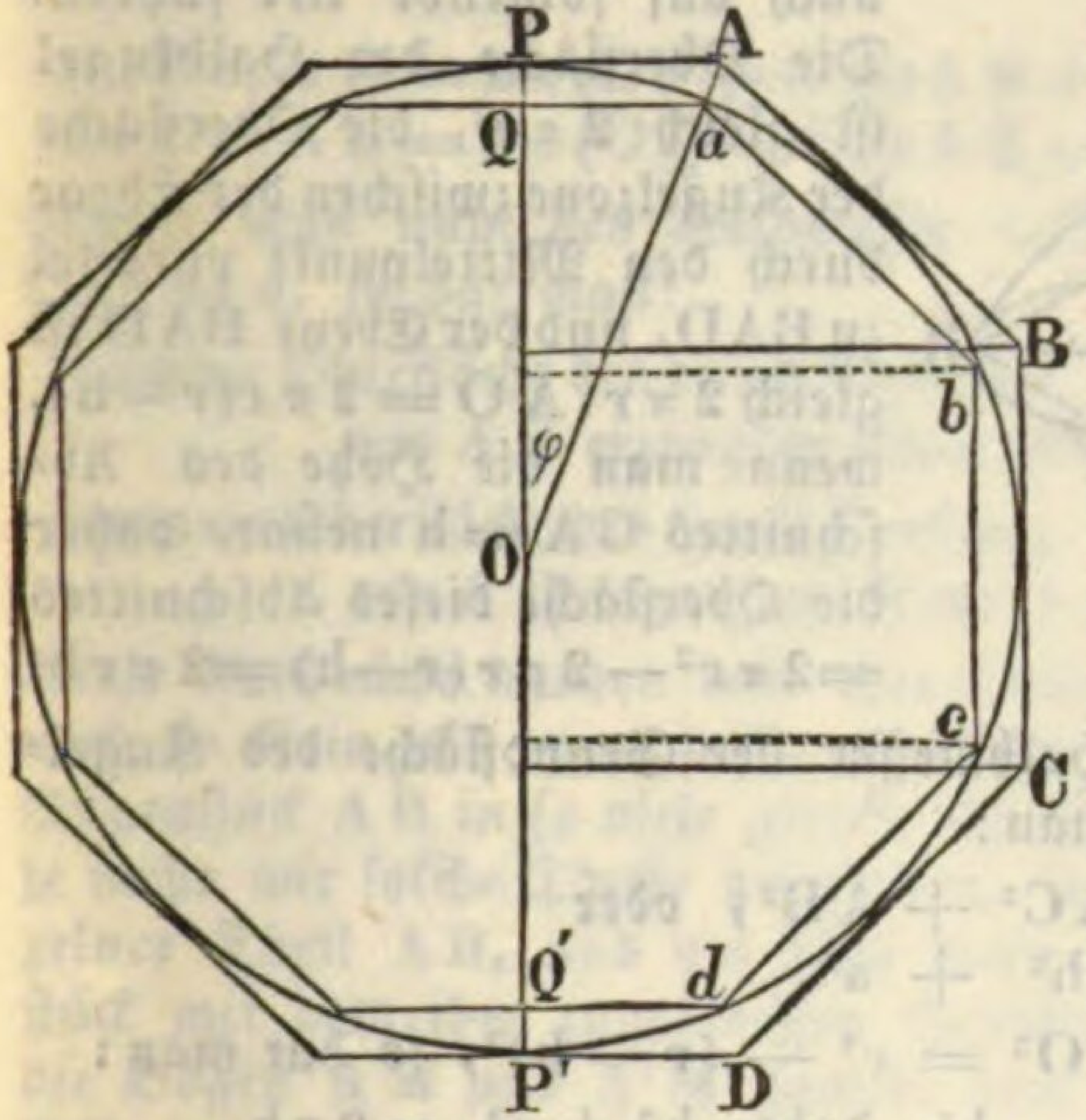
Kugel, die durch zwei gleichlaufende Ebenen abgeschnitten ist. Es sey A A′ B B′ eine solche Kugelscheibe. Denken wir uns die Ebene des größten Kreises A A′ B B′ senkrecht auf die gleichlaufenden Ebenen, wodurch der Bogen A B dieses größten Kreises abgeschnitten wird, theilen wir uns diesen Bogen in mehrere gleiche Theile (in der Figur hier in 3); halbiren wir wieder jeden dieser Theile, und ziehen wir uns durch diese Halbirungspunkte Berührende zum Kreise, so werden diese Beman das Ganze um die Achse a b rührenden A C, C D, D B, wenn dreht, umschriebene Kegelstutzen beschreiben. Die Oberfläche jedes dieser Kegelstutzen ist gleich dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit seiner Höhe, daher die Summe der Oberflächen aller dieser umschriebenen Kegelstutzen gleich dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit der Summe der Höhen, d. i. mit a b. Da ich nun den Bogen A B in beliebig viele gleiche Theile theilen kann, so kann ich hier so viele Kegelstutzen erzeugen, als ich nur will, und stets wird die Summe ihrer Oberflächen dieselbe seyn. Je mehr ich aber solcher Kegelstutzen annehme, desto mehr und mehr nähere ich mich der Oberfläche der Kugelzone. Da ich nun die Vermehrung der Kegelstutzen ins Unendliche vermehren kann, so ergibt sich, daß die Oberfläche einer Kugelzone gleich ist dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit der Höhe desselben.

§. 449. Dehne ich diese Betrachtungen über die ganze Kugel aus, so ergibt sich die Oberfläche der Kugel gleich dem Umfange des größten Kreises, multiplicirt mit dem Durchmesser.

Ist r der Halbmesser der Kugel, also $2r\pi$ der Umfang eines größten Kreises, so ist $2\pi r \cdot 2r = 4\pi r^2$ die Größe der Gesammtoberfläche der Kugel, d. h. die Oberfläche der Kugel ist viermal so groß, als der Flächeninhalt eines größten Kreises.

Um diesen Gegenstand einer nochmaligen Untersuchung zu unterziehen, denken wir uns einen Kreis, dem ein regelmäßiges Vieleck von gerader Seitenzahl ein- und umgeschrieben ist; denken wir uns alle drei um den Durchmesser P P′ gedreht. Es sey n die Anzahl der Seiten, daher der Winkel $\varphi = AOP = \frac{\pi}{n}$ ist. Die durch die Dre-

Fig. 575.



hung entstehenden Körper haben eine krumme Oberfläche, welche aus lauter der Kugel ein- und umschriebenen Kegelstutzen besteht, und oben und unten 2 ebene Flächen, nämlich Kreise, deren Halbmesser aQ und AP oben, und die eben so großen dQ′ und DP′ unten sind. Der eine dieser Körper ist der Kugel vom Halbmesser P O eingeschrieben, der andere umgeschrieben.

Die krumme Oberfläche des eingeschriebenen Körpers ist gleich dem Umfange des Kreises, dessen Halbmesser OQ, multiplicirt mit der Summe der Höhen $QQ' = 2OQ$. Nun ist $OQ = aO\cos\varphi = r\cos\varphi$, daher die krumme Oberfläche des eingeschriebenen Körpers

$$= 2r\cos\varphi . \pi . 2r\cos\varphi = 4\pi r^2 . \cos^2\varphi = 4\pi r^2 . \cos\frac{2\pi}{n}.$$

Nun die ebene Oberfläche oben und unten hinzugegeben, hat man:

Gesammtoberfläche des eingeschriebenen Körpers

$$= 4\pi r^2\left(\cos\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$= 4\pi r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right).$$

Die krumme] Oberfläche des umgeschriebenen Körpers gleich dem Umfange des Kreises vom Halbmesser $OP = r$, multiplicirt mit der Höhe $PP' = 2r$, daher $= 2r\pi . 2r = 4r^2\pi$; dagegen die ebene Oberfläche] von oben und unten, d. h die zwei Kreise, deren Halbmesser A P und D P′, oder $r\,\mathrm{tang}\,\varphi$, daher $r^2\,\mathrm{tang}\frac{2\pi}{n}$ sind, so hat man:

Gesammtoberfläche des umschrieb. Körpers $= 4\pi r^2\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{tang}\frac{2\pi}{n}\right)$.

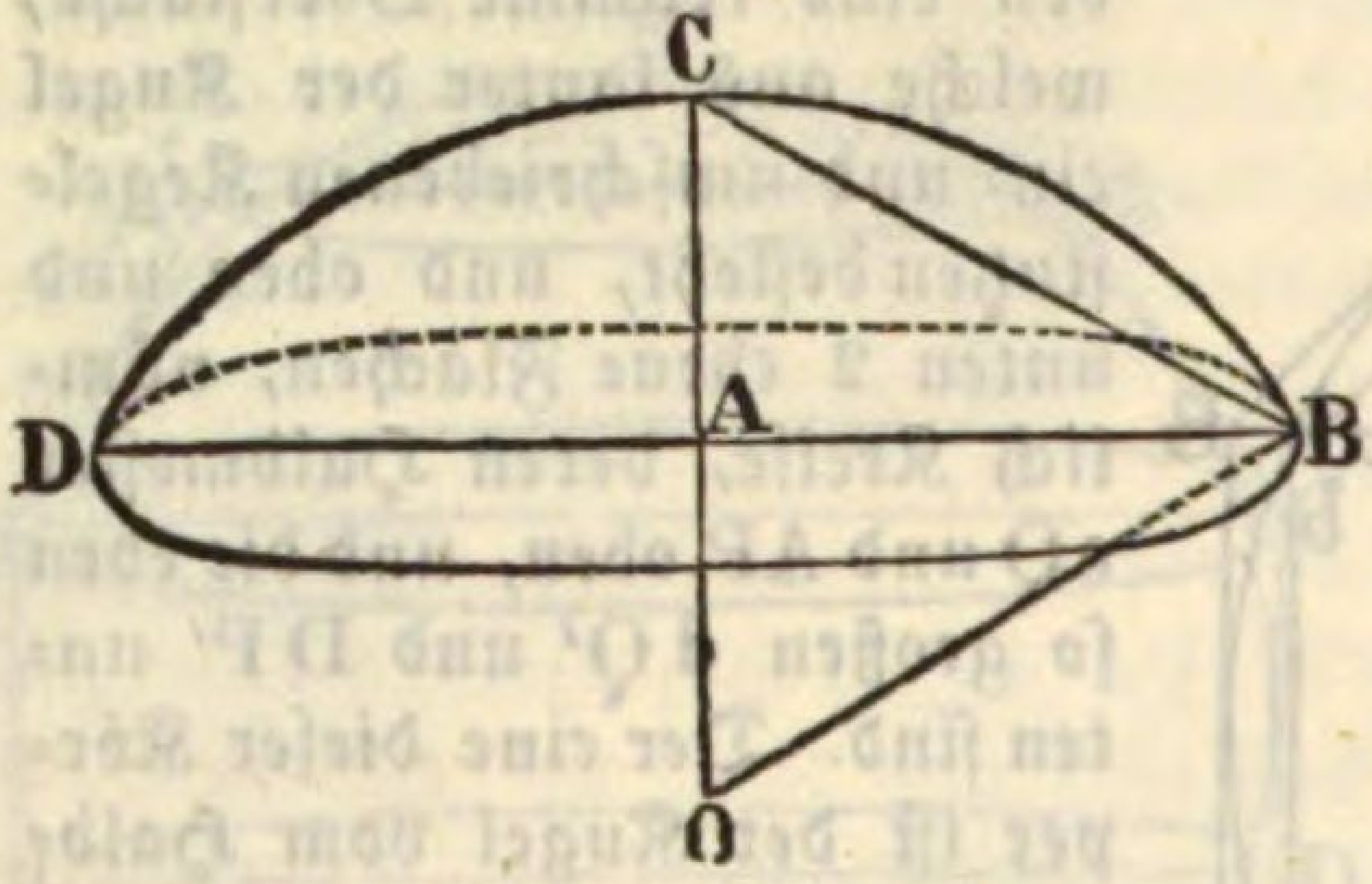
Da nun die Oberfläche der Kugel stets zwischen

$$4\pi r^2\left(1 - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right) \text{ und } 4\pi r^2\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{tang}\frac{2\pi}{n}\right)$$

enthalten ist; n mag noch so groß seyn, so folgt daraus, daß die Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$ ist.

§. 450. Schon aus dem Vorhergehenden ergibt sich, daß **die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich ist dem Umfange eines größten Kreises, multiplicirt mit der Höhe des Abschnittes.** Der Nachweis darüber läßt sich aber

Fig. 576



auch auf folgende Art führen. Die Oberfläche der Halbkugel ist gleich $2\pi r^2$, die Oberfläche der Kugelzone zwischen der Ebene durch den Mittelpunkt parallel zu BAD, und der Ebene BAD ist gleich $2\pi r . AO = 2\pi r(r-h)$, wenn man die Höhe des Abschnittes $CA = h$ nennt, daher die Oberfläche dieses Abschnittes $= 2\pi r^2 - 2\pi r(r-h) = 2\pi rh$.

Nennen wir nun den Halbmesser der Grundfläche des Kugelabschnittes $AB = a$, so hat man:

$$CB^2 = AC^2 + AB^2, \text{ oder}$$
$$CB^2 = h^2 + a^2.$$

Da aber $AB^2 = OB^2 - AO^2 = r^2 - (r-h)^2$, so hat man:

$$AB^2 \text{ oder } a^2 = 2rh - h^2, \text{ daher } h^2 + a^2 = 2rh,$$

und somit Oberfläche des Kugelabschnittes

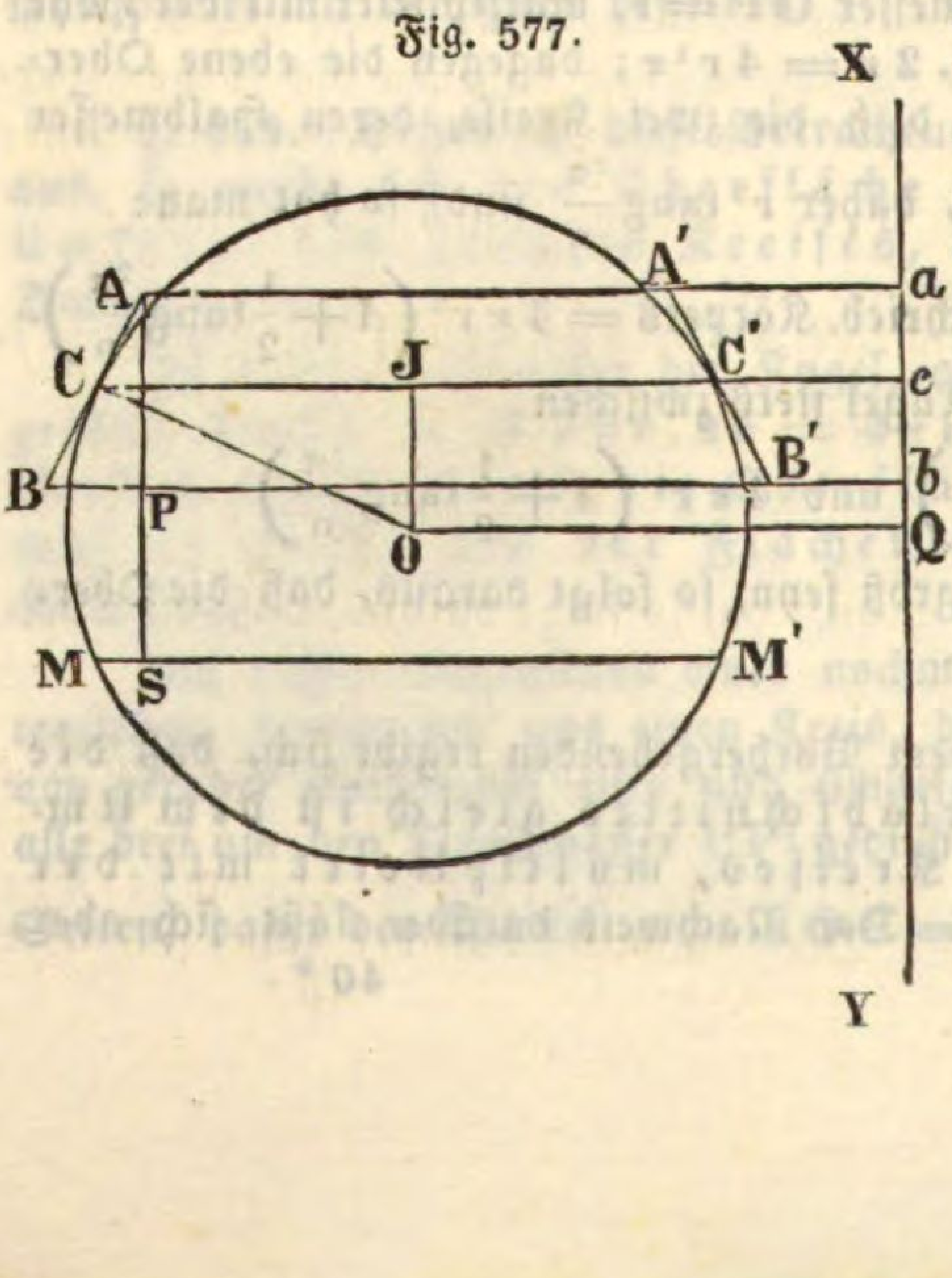
$$= \pi(h^2 + a^2) \text{ oder } = \pi . CB^2,$$

d. h. die Oberfläche eines Kugelabschnittes ist dem Flächeninhalte eines Kreises, dessen Halbmesser die Gerade ist, die vom obersten Punkte des Kugelabschnittes zum Rande der Grundfläche geführt wird, oder auch die Oberfläche eines Kugelabschnittes gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche mehr dem Flächeninhalte eines Kreises, dessen Halbmesser die Höhe dieses Kugelabschnittes ist.

§. 451. Es sey der Kreis mit dem Halbmesser CO; denken wir uns in den Punkten C und C′ Berührende AB und A′B′ zu diesem Kreise, und zwar:

$AC = CB$ und $A'C' = B'C'$; denken wir uns nun den Kreis sammt den zwei Berührungsstücken AB und A′B′ um die Achse XY gedreht, wobei $XY \perp CC'$, so handelt es sich um die Größe der durch AB und A′B′ beschriebenen krummen Oberfläche. Die durch AB beschriebene krumme Oberfläche ist $= 2\pi Cc . AB$. Eben so die durch A′B′ beschriebene krumme Oberfläche ist gleich $2\pi C'c . A'B'$. Fällt

Fig. 577.



man nun $AP \perp BB'$ und $JO \perp CC'$, so hat man $AB.CJ = AP.CO$, daher:

$$2\pi Cc.AB = 2\pi(CJ + OQ)AB = 2\pi CO.AP + 2\pi OQ.AB$$
$$2\pi C'c.AB = 2\pi(OQ - CJ)AB = 2\pi OQ.AB - 2\pi CO.AP.$$

Nennt man nun den Halbmesser $CO = r$, und die Entfernung $OQ = d$, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l}\text{krumme Oberfläche des durch Drehung}\\ \qquad\text{von AB erzeugten Körpers} = 2\pi d.AB + 2\pi r.AP\\ \text{krumme Oberfläche des durch Drehung}\\ \qquad\text{von A'B' erzeugten Körpers} = 2\pi d.AB - 2\pi r.AP\end{array}\right\} 1.$$

Diese Ausdrücke werden nun ihre Giltigkeit behalten, man mag AB noch so klein als man will, annehmen. Wir können uns nun das Bogenstück AB in so viele gleiche Theile theilen, als wir nur wollen; je mehr wir solche Theile annehmen, desto kleiner wird ein solcher einzelner Theil AB, und um desto mehr verschmilzt ein solches Bogenstück mit dem ihm zugehörigen Berührungsstücke. Drehen wir nun die Bögen AM und A'M' sammt dem ganzen Kreise um die Gerade XY, so kann ich mir die beiden dadurch entstehenden krummen Flächen als eine Summe von unendlich vielen und unendlich dünnen Kegelstutzenflächen, wie die eben betrachteten, durch Drehung von AB und A'B' entstandenen, vorstellen. Nenne ich die Bogenstückchen und die ihnen immer mehr und mehr gleich geltenden Berührungsstückchen AB, BD, DE... auf der einen Seite A'B', B'D', D'E' u. s. w., auf der andern Seite, wobei wir $AB + BD + DE + \ldots = AM$, und eben so $A'B' + B'D' + D'E' + \ldots = A'M'$ voraussetzen wollen, eben so die Höhen AP, PP', P'P'', P''P'''..., wobei

$$AP + PP' + P'P'' + \ldots = AS \text{ ist,}$$

so hat man:

krumme Oberfläche des durch Drehung des Bogens AM um die Achse XY entstehenden Körpers
$$= 2\pi d.AB + 2\pi r.AP$$
$$+ 2\pi d.BD + 2\pi r.PP'$$
$$+ 2\pi d.ED + 2\pi r.P'P''$$
$$+ \ldots$$
$$= 2\pi d.AM + 2\pi r.AS,$$

und eben so: krumme Oberfläche des durch Drehung des Bogens A'M, um XY entstehenden Körpers

$$= 2\pi d.AM - 2\pi r.AS,$$

oder Oberfläche $= 2\pi d.b \pm 2\pi r.p$, wobei b die Bogenlänge, p die Projektion derselben auf die Drehungsachse ist. Drücken wir diese Ergebnisse mit Worten aus:

Der Flächeninhalt einer durch Drehung eines Kreisbogens um eine Gerade außerhalb des Kreises, zu dem dieser Bogen gehört, entstehenden krummen Fläche ist gleich der Länge dieses Bogens, multiplicirt mit dem Umfange des Kreises, den der Mittel-

punkt dieses Bogens um diese Gerade beschreibt, mehr oder weniger (je nachdem der Bogen hohl oder erhaben gegen die Drehungsachse ist) dem Umfange des Kreises, zu dem der Bogen gehört, multiplicirt mit der Projektion des Bogens auf die Drehungsachse (Abstand der Lothe der beiden Endpunkte des Bogens auf die Achse).

Dreht sich der ganze Kreis um die Achse XY, so wird der Bogen $AM = \pi r$ und $AS = 2r$, und man hat Oberfläche des durch Drehung des hohlen Halbkreises entstandenen krummen Fläche

$$= 2\pi d . \pi r + 2\pi r . 2r.$$

Oberfläche der durch Drehung des erhabenen Halbkreises entstandenen krummen Fläche

$$= 2\pi d . \pi r - 2\pi r . 2r.$$

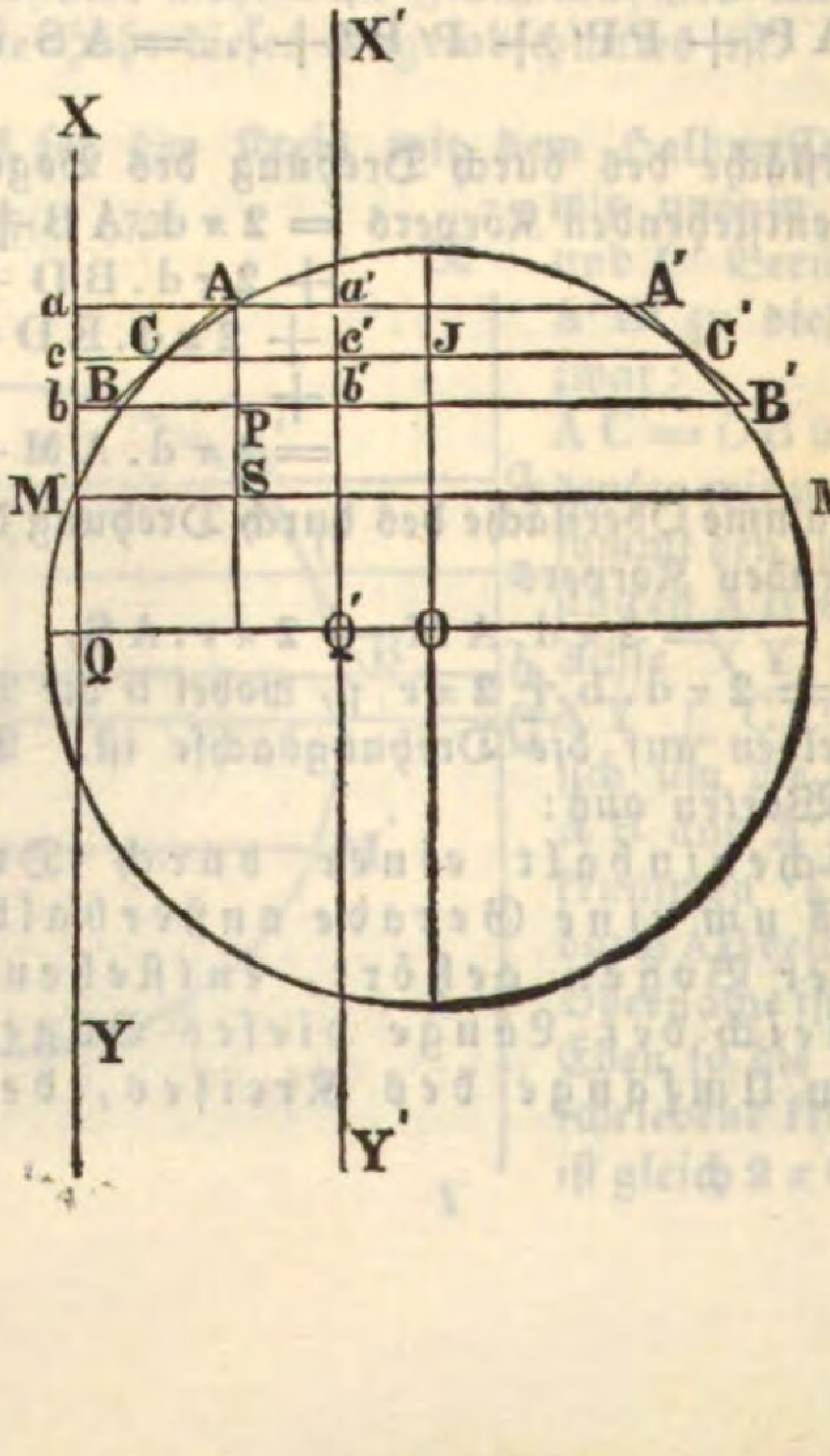
Daher Gesammtoberfläche des durch Drehung des Kreises um XY entstandenen ringförmigen Körpers

$$= 2\pi d . 2\pi r,$$

d. h. die Oberfläche des durch Drehung eines Kreises um eine Gerade entstehenden Ringes ist gleich dem Umfange des erzeugenden Kreises, multiplicirt mit dem Umfange, den der Mittelpunkt des Kreises beschreibt.

Ist aber die Drehungsachse innerhalb des Kreises, so kommen zwei Fälle zu unterscheiden: entweder liegen Mittelpunkt und Bogen auf derselben Seite der Drehungsachse, oder sie liegen auf verschiedenen Seiten derselben.

Fig. 578.



Für den ersten Fall sey AM der drehende Bogen und XY die Drehungsachse, so gibt die Drehung des Berührungsstückes AB um die Achse XY als krumme Oberfläche:

$$\text{I.} = 2\pi AB . Cc = 2\pi AB(OQ - CJ) = 2\pi AB . OQ - 2\pi AB . CJ,$$

und die Drehung des A'B' um XY:

$$\text{II.} = 2\pi AB . C'c = 2\pi AB(OQ + CJ) = 2\pi AB . OQ + 2\pi AB . CJ,$$

oder $\text{I.} = 2\pi OQ\ AB - 2\pi . CO . AP = 2\pi d . AB - 2\pi r . AP$

$$\text{II.} = 2\pi OQ . AB + 2\pi . CO . AP = 2\pi d . AB + 2\pi r . AP;$$

folglich, wenn ich den Bogen AM durchaus in lauter solche unendlich kleine Berührungsstückchen zerlege:

Fläche durch Drehung von AM um XY $= 2\pi d . b - 2\pi r . p$

» » » » A'M' um XY $= 2\pi d . b + 2\pi r . p$,

wo hier b die Bogenlänge von AM, und $p = AS$ die Projektion des Bogens auf die Achse ist. Wir erhalten also dieselben Ausdrücke, wie in der früheren Untersuchung.

Ist aber die Drehungsachse zwischen den beiden drehenden Bögen AM und A'M', ist sie z. B. X'Y', so hat man:

Fläche durch Drehung der AB um X'Y' erzeugt

$$= 2\pi AB . Cc' = 2\pi AB(CJ + OQ') = 2\pi AB . CJ - 2\pi OQ' . AB$$
$$= 2\pi OC . AP - 2\pi OQ' . AB,$$

Fläche durch Drehung der A'B' und X'Y' erzeugt

$$= 2\pi AB . C'c' = 2\pi AB(CJ - OQ') = 2\pi AB . CJ + 2\pi OQ' . AB$$
$$= 2\pi OC . AP + 2\pi OQ' . AB.$$

Diese Betrachtungen auf die ganzen Bögen AM und A'M' ausgedehnt:

Fläche durch Drehung von AM um X'Y' erzeugt $= 2\pi r . p - 2\pi d . b$

» » » » A'M' » » » $= 2\pi r . p + 2\pi d . b$.

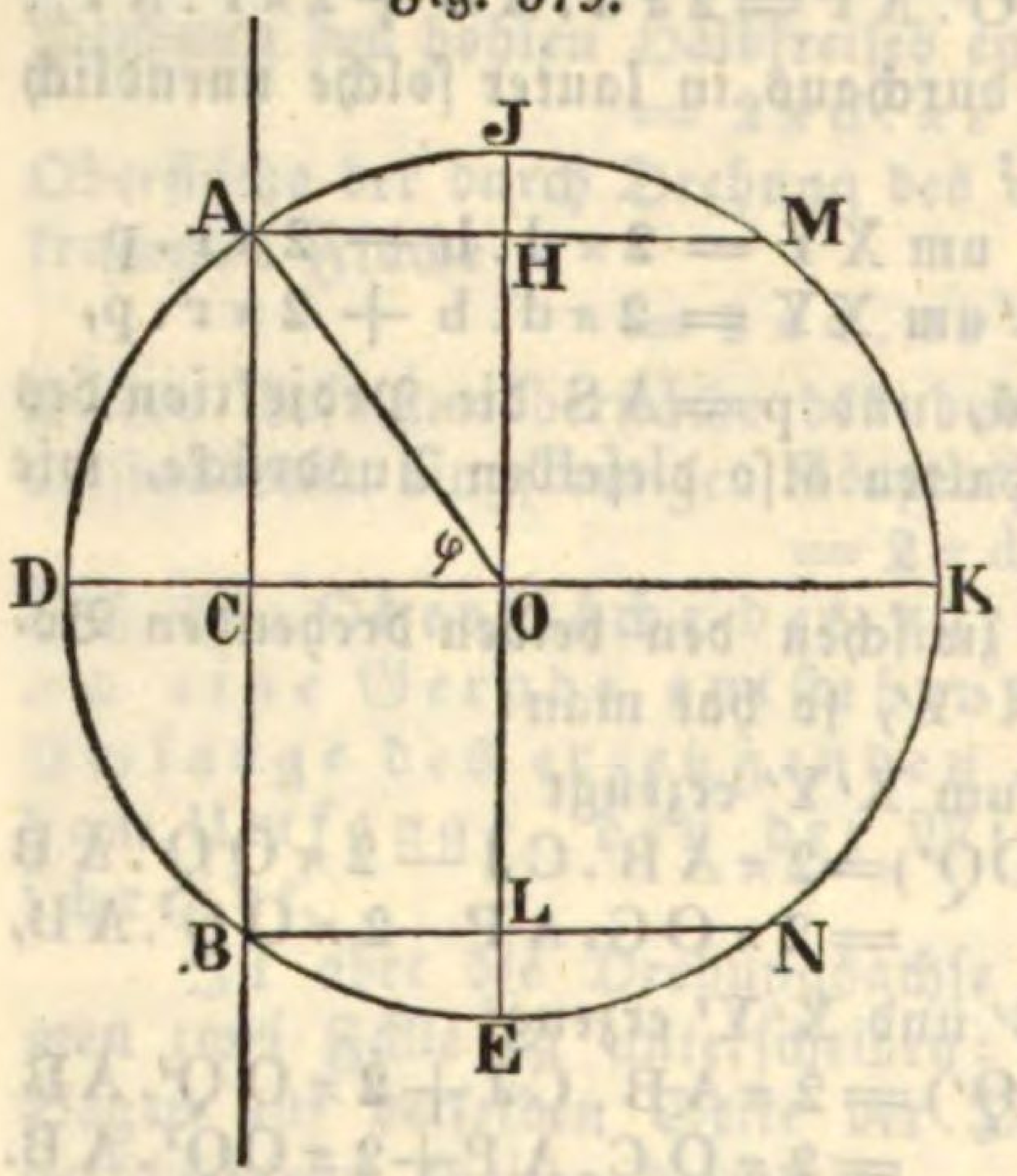
wo b die Bogenlänge von AM und p die Projektion derselben auf die Achse ist. Um alle diese Fälle zu übersehen, hat man unter der Voraussetzung, daß r, b, p, d ihre Bedeutungen behalten: a) Ist der Bogen gegen die Drehungsachse erhaben $2\pi d . b - 2\pi r . p$. b) Ist der Bogen gegen die Drehungsachse hohl, liegt aber mit dem Mittelpunkte auf derselben Seite der Drehungsachse $2\pi db + 2\pi r . p$. c) Ist der Bogen gegen die Drehungsachse hohl, liegt aber mit dem Mittelpunkte auf verschiedener Seite der Drehungsachse $2\pi r . p - 2\pi db$ für die Größe der entstehenden krummen Fläche. Da hier im ersten und dritten Falle dasselbe Zahlenresultat nur mit verschiedenen Zeichen herauskommt, so kann man $2\pi d . b \pm 2\pi r . p$ als allgemeines Resultat ansehen und sagen:

Die krumme Oberfläche, die durch die Drehung eines Kreisbogens um eine Gerade entsteht, ist gleich dem Umfange des Kreises, den der Mittelpunkt des Bogens beschreibt, multiplicirt mit der Bogenlänge **mehr** oder **weniger** dem Umfange des Kreises (zu dem

dieser Bogen gehört), multiplicirt mit der Projektion des Bogens auf die Achse, je nachdem der Mittelpunkt **zwischen** Drehungsachse und Bogen, oder **auf derselben Seite** von beiden liegt.

§. 452. Wir wollen nun den Kreis AJMKNEBDA um die Sehne AB drehen; der Kreisabschnitt ABD beschreibt bei dieser Drehung einen Körper, den man sphärische Spindel (Kreisspindel) nennt. Der Kreisabschnitt AJMKNEB beschreibt einen apfelförmigen Körper, den wir kurz Apfel nennen wollen.

Fig. 579.



Die Oberfläche der Kreisspindel ist gleich $2\pi r . p - 2\pi d . b$, wobei $p = AB$; $r = AO$; $d = OC$; $b =$ Bogen ADB ist.

Die Oberfläche, die durch Drehung der MN um die Achse AB entsteht, ist gleich $2\pi r . p + 2\pi d . b$, wo p, r, d, b dieselben Bedeutungen haben.

Die Summe der durch die Drehungen der Bögen AB und MN um die Sehne AB erzeugten Flächen ist gleich $2\pi r . 2p = 2\pi r . 2AB$, also doppelt so groß als die Oberfläche eines Cylinders, der den gegebenen Kreis zu seiner Grundfläche und die Sehne zur Höhe hat.

Um die ganze Oberfläche des Apfels zu erhalten, brauchen wir noch die durch Drehung der Bögen AJM und BEN erzeugten Flächen, die einander gleich sind. Die durch AJM erzeugte Fläche zerfällt in zwei, in die durch Drehung des AJ und die durch Drehung des Bogens JM erzeugte Fläche.

Die durch Drehung von JM erzeugte Fläche gibt $2\pi d . \overset{\frown}{JM} + 2\pi r . JH$
» » » » AJ » » ist $= 2\pi d . \overset{\frown}{AJ} - 2\pi r . JH$,
wo das Zeichen über JM und AJ ausdrücken soll, daß man darunter den Bogen versteht. Beide zusammen oder die Fläche, die durch Drehung des Bogens AJM entsteht, ist

$$= 2\pi d . (\overset{\frown}{JM} + \overset{\frown}{AJ}) = 2\pi d . \overset{\frown}{AM}.$$

Man hat daher für die Oberfläche des Apfels die Summe folgender Ausdrücke:

$$2\pi d . \overset{\frown}{AM}$$

$$2\pi d . \overset{\frown}{MN} + 2\pi r . AB$$

$$2\pi d . \overset{\frown}{BN};$$

daher Oberfläche des Apfels $= 2\pi d \cdot$ Bogen $AKB + 2\pi r \cdot AB$,
während Oberfl. der Spindel $= 2\pi d \cdot$ Bogen $AB - 2\pi r \cdot AB$,

daher die Summe beider Oberflächen $= 2\pi d \cdot 2pr$. Dieß ist derselbe Ausdruck wie früher, wo wir einen Kreis um eine Gerade außer ihm gedreht haben.

Nennt man den Winkel $AOD = \varphi$, so hat man $AC = r \sin\varphi$, $CO = d = r\cos\varphi$,

mithin Oberfläche der Spindel $= 4\pi r^2 (\varphi \cos\varphi - \sin\varphi)$.
» des Apfels $= 4\pi r^2 (\cos\varphi - \varphi\cos\varphi + \sin\varphi)$,
also ihre Summe $= 4\pi r^2 \cos\varphi$.

Dreht sich nun ein Kreisbogen, dessen Sehne $= 2a$, und die Höhe der Mitte $= h$ um die Sehne, und man will die Oberfläche der so entstehenden Kreisspindel haben, so hat man:

$$r^2 = a^2 + (r-h)^2; \quad \text{daher } r = \frac{a^2+h^2}{2h},$$

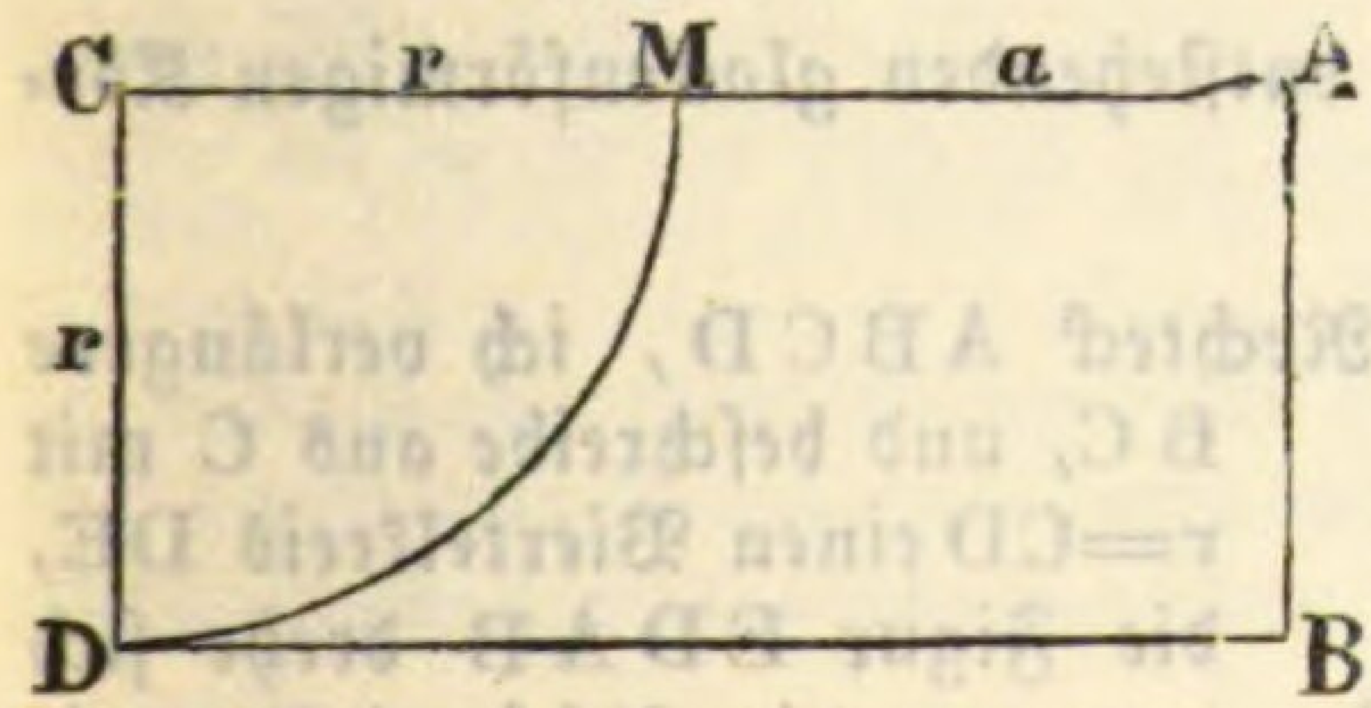
und da $\sin\varphi = \frac{2ah}{a^2+h^2}$, wodurch man die Werthe von φ und r hat, die man in die Formel

$$4\pi r^2 (\varphi\cos\varphi - \sin\varphi)$$

zu substituiren hat.

Beispiel 1. Es sey das Rechteck $ABCD$, aus C mit $CD = r$ beschreibe ich den Viertelkreis CMD, es drehe sich nun die Figur $AMDB$ um die Achse AB, wie groß wird der Inhalt der dadurch entstehenden krummen Fläche seyn? Der Bogen und Mittelpunkt sind auf einer Seite der Drehungsachse, daher $2\pi(r+a)$ der Umfang des Kreises, den C beschreibt, multiplicirt mit dem Bogen $MD = \frac{r\pi}{2}$ weniger dem Umfange des Kreises $2\pi r$ mit der Projektion des Bogens, d. i. mit r. Man hat somit

Fig. 580



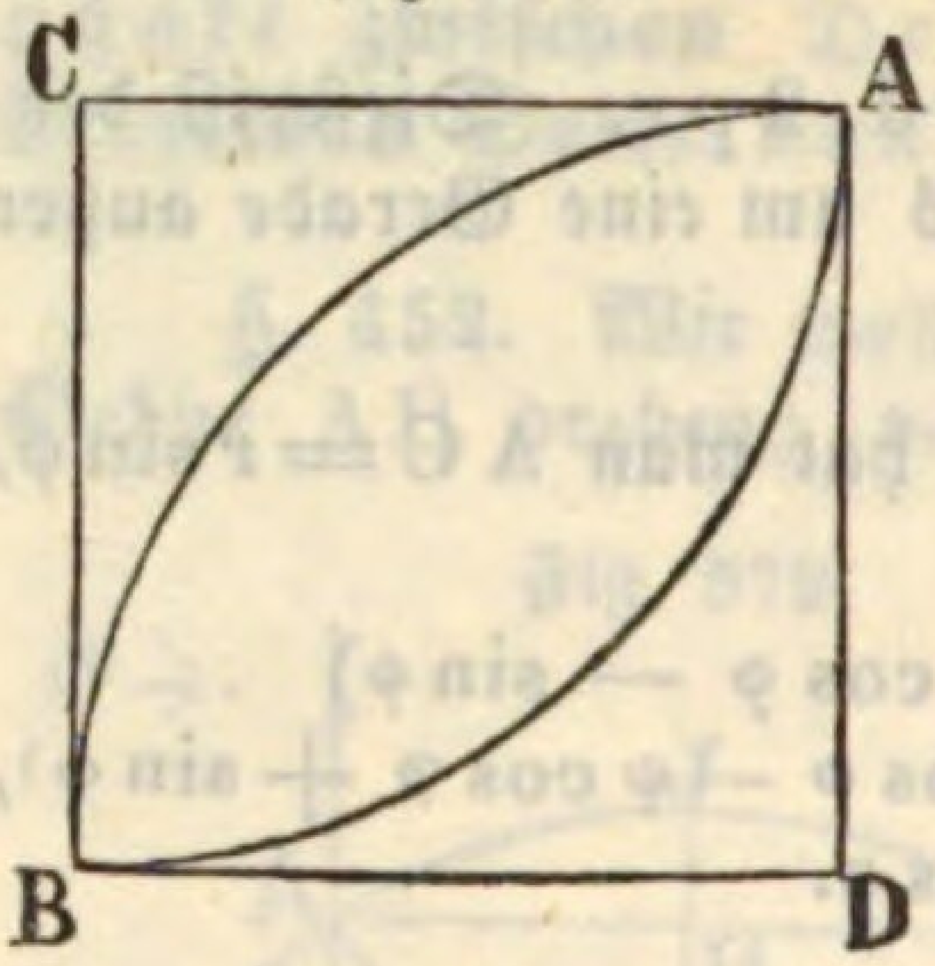
$$2\pi(r+a) \cdot \frac{r\pi}{2} - 2\pi r^2 = r\pi(\pi r + \pi a - 2r).$$

Dreht sich aber die Figur um die Achse BD, und man will die Größe der durch MD erzeugten Fläche erfahren, so hat man:

$$2\pi r \cdot \frac{\pi r}{2} - 2\pi r \cdot r = \pi^2 r^2 - 2\pi r^2.$$

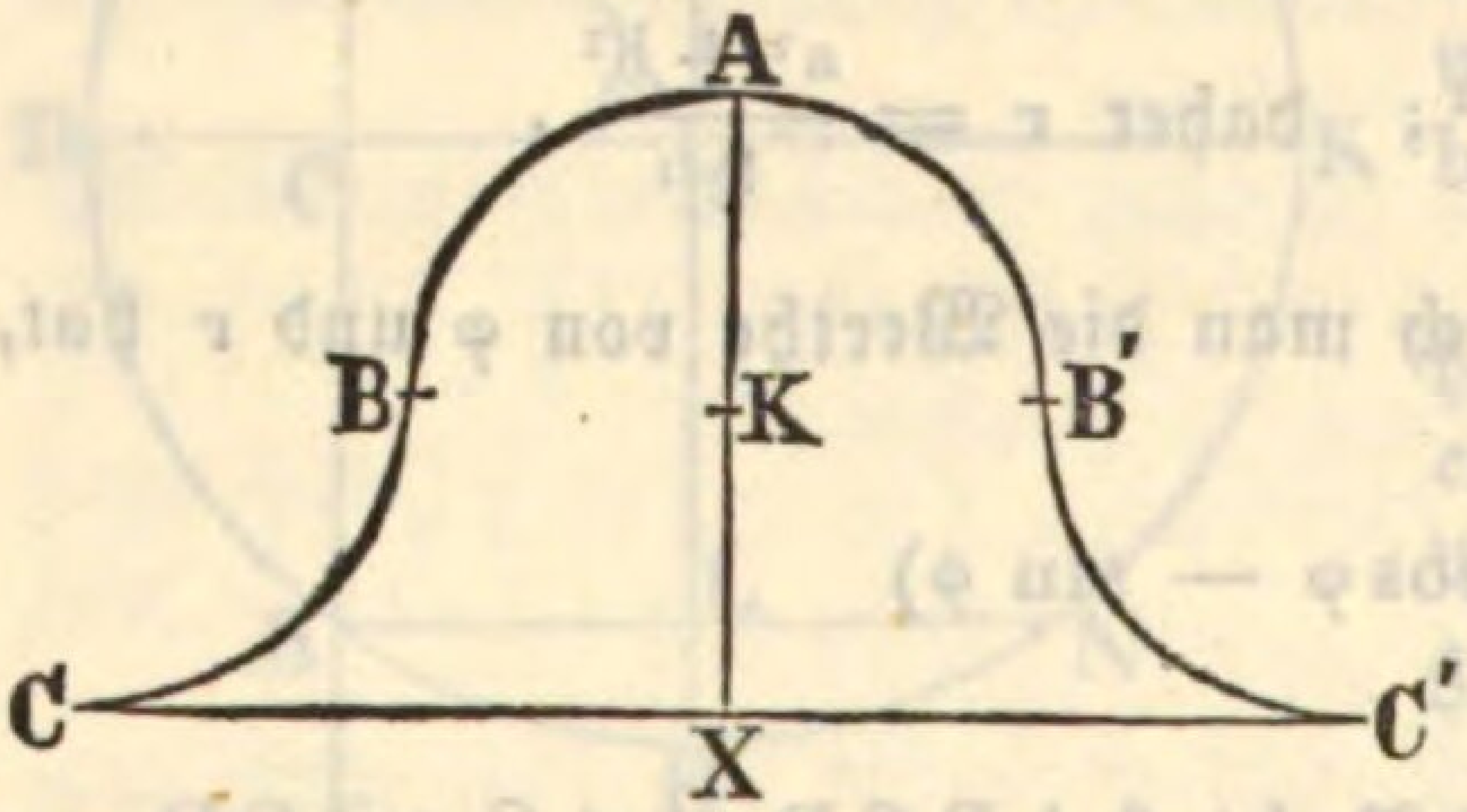
Beispiel 2. Es sey ABCD ein Quadrat, dessen jede Seite $= r$; beschreibt man nun aus C und D Quadranten mit dem Halbmesser $= r$, und dreht nun die krummlinige Figur AB um die Achse CB, so ist die ganze Oberfläche des so entstehenden Körpers gleich $\pi^2 r^2$, oder dem Quadrate des halben Umfanges des Kreises.

Fig. 581.



Beispiel 3. Es sey BAK ein Viertelkreis, und CB ein Quadrant mit demselben Halbmesser r in entgegengesetzter Wendung; es drehe sich nun der zusammengesetzte Bogen ABC um die Achse AX, wo AK $\perp$ CX, so gibt die Drehung von BA uns $2\pi r^2$, die von BC:

Fig. 582.

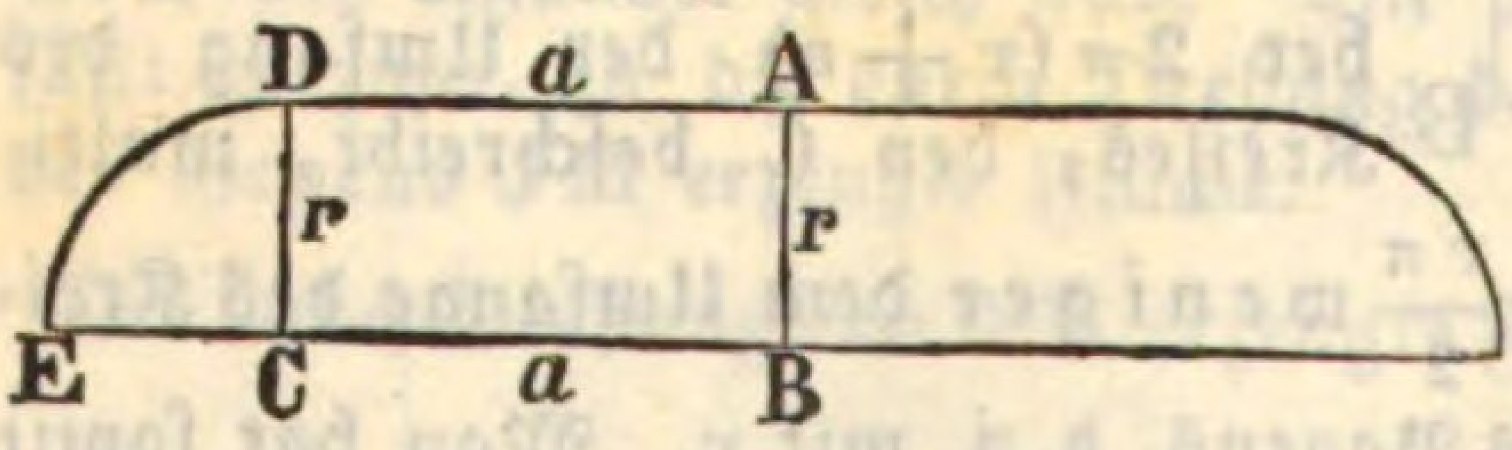


$$2\pi . 2r . \frac{r\pi}{2} - 2r\pi . r = 2r^2\pi^2 - 2\pi r^2,$$

daher die Gesammtoberfläche des so entstehenden glockenförmigen Körpers $= 2r^2\pi^2$.

Beispiel 4. Es sey das Rechteck ABCD, ich verlängere BC, und beschreibe aus C mit r=CD einen Viertelkreis DE, die Figur EDAB drehe sich nun um die Achse AB, wie groß ist die krumme Oberfläche?

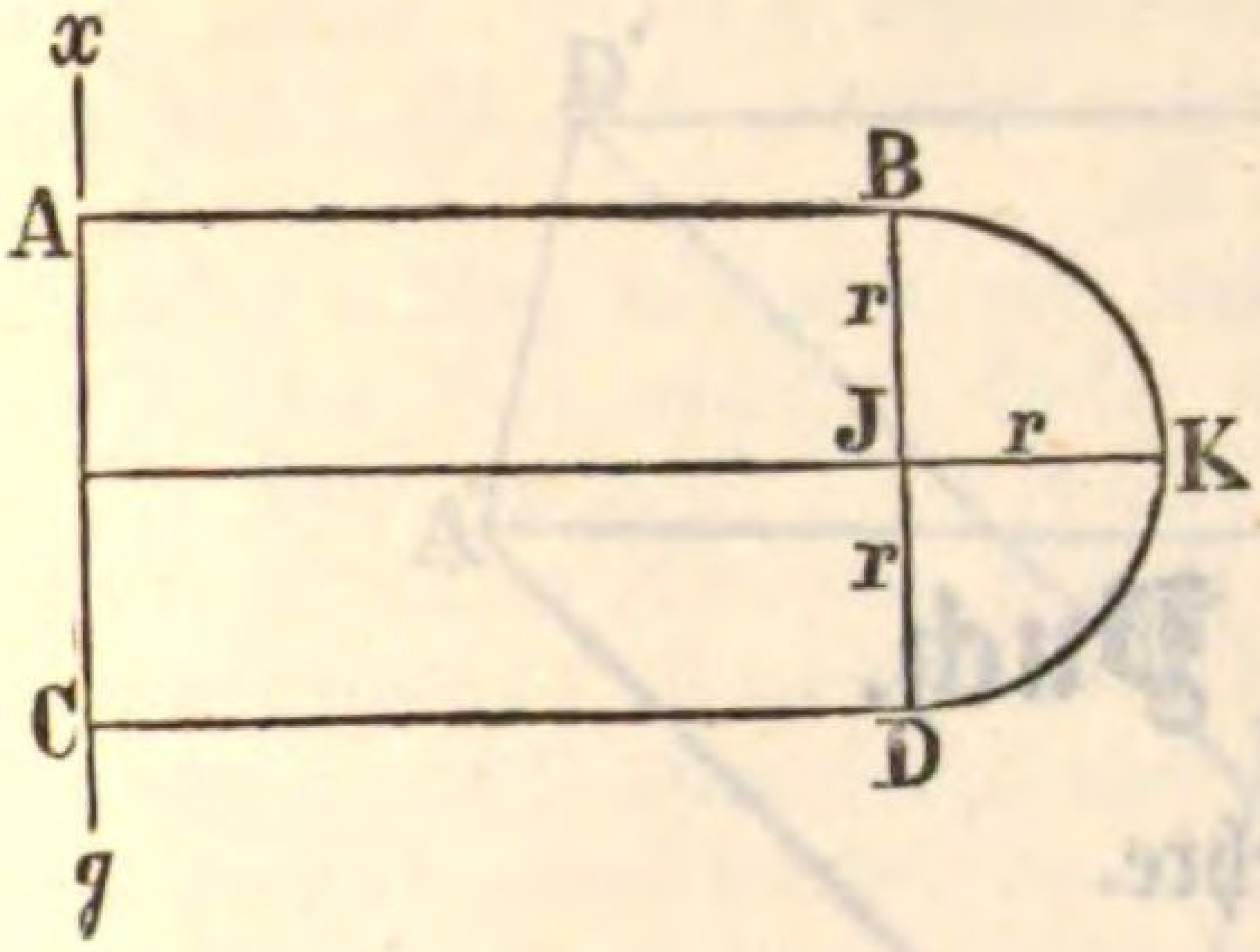
Fig. 583.



$$2\pi a . \frac{\pi r}{2} + 2\pi r . r = \pi r(\pi a + 2r).$$

Nennt man die Oberfläche des Cylinders, der durch Drehung der CD um AB erzeugt wird, C; ferner H die Oberfläche einer Halbkugel, deren Halbmesser $= r$ ist, so hat man die krumme Oberfläche des durch Drehung von DE um AB erzeugten Körpers gleich $\pi C + H$. Eben so ist das Rechteck ABCD, an dieses der Halbkreis BKD angesetzt, und dreht sich das Ganze um AC,

Fig. 584.



so hat man für die krumme Oberfläche

$2\pi a.\pi r + 2\pi r.2r = \pi.2a\pi.r + 4\pi r^2$,

d. h. ist C die krumme Oberfläche des durch BD beschriebenen Cylinders, und K die Oberfläche der Kugel des Halbmessers r, so hat man krumme Oberfläche durch BKD um AC beschrieben $= \pi C + K$.

Würde der Kreis statt heraus hinein gehen, also eine Rinne ringsum bilden, so hat man dann für die krumme Fläche $\pi C - K$.

Zweites Buch.

Körperlehre.

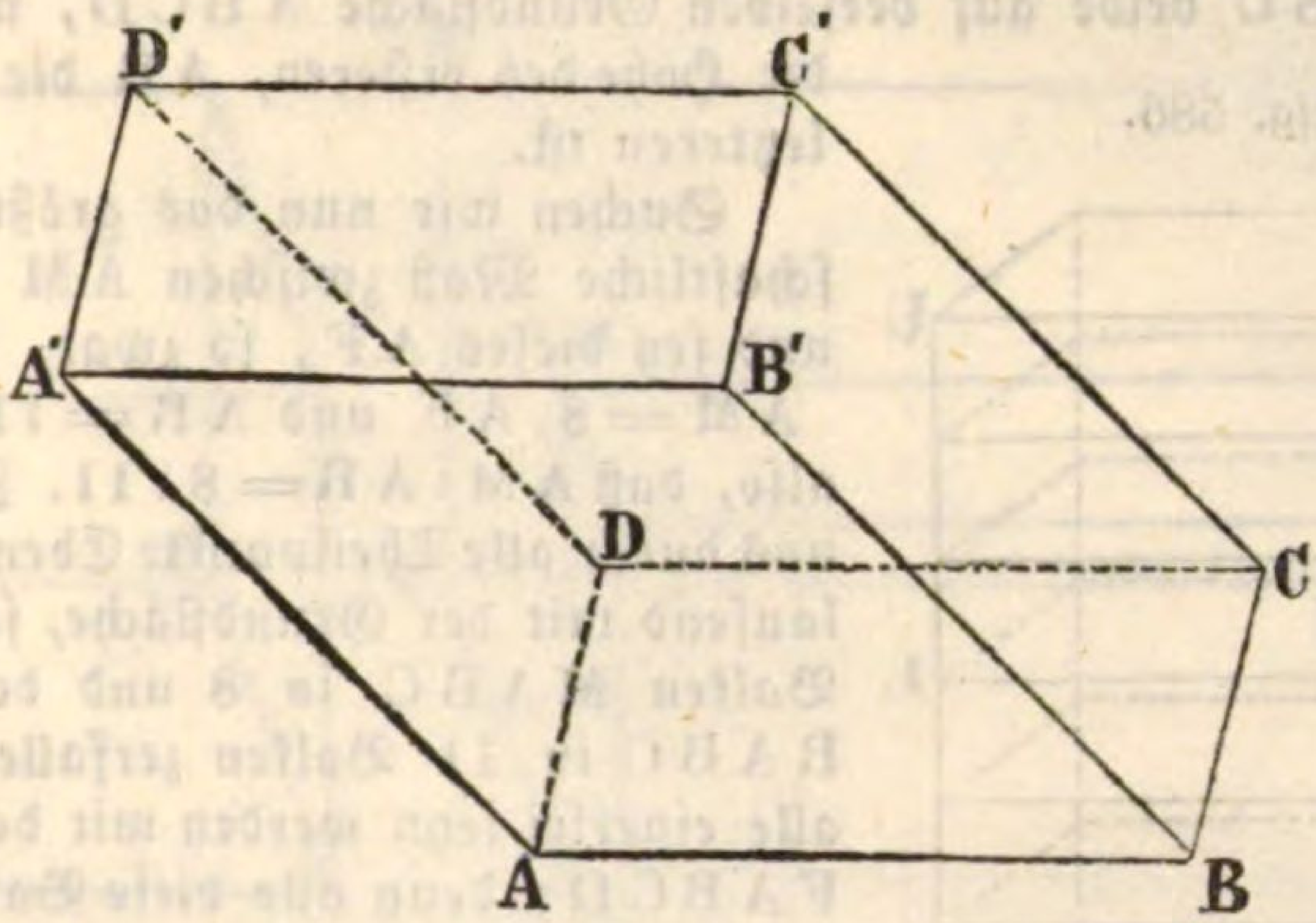
§. 453. Die eckigen Körper, d. i. die bloß von ebenen Flächen begrenzt werden, theilt man nach der Stellung derselben ein; entweder schneiden sich die Flächen in gleichlaufenden Geraden, und der Raum wird durch zwei gleichlaufende Ebenen begrenzt, oder die Flächen schneiden sich alle in einem Punkte, und der Raum wird durch eine Ebene geschlossen, oder es finden noch andere Stellungen Statt. Im ersten Falle heißen die Körper Prismen (Ecksäulen), im zweiten Pyramiden (Spitzsäulen), im dritten Polyeder (Vielflächner); obwohl man unter dem letzten Namen auch alle eckigen Körper zusammen begreift. An die Prismen wollen wir gleich die Cylinder, an die Pyramiden die Kegel anschließen, zuletzt die Körper in Betracht ziehen, die durch Umdrehung entstehen, bei welchen die Kugel die wichtigste ist.

Unser Hauptaugenmerk bei den Körpern ist die Größe ihres Körperinhaltes und die Größe ihrer Oberfläche, dann die Bestimmung der Eigenschaften der einzelnen Körper und des Zusammenhanges ihrer einzelnen Bestandtheile.

I. Prismen und Cylinder.

§. 454. Sind die Grundflächen eines Prismas Gleichecke (Parallelogramme), so heißt der dadurch gebildete Körper ein Parallelopiped oder Balken. Bei jedem Balken sind die zwei einander gegenüberstehenden Seitenflächen mit einander einerlei und gleichlaufend. Ist nämlich $A B C D A' B' C' D'$ ein Prisma, so müssen die Grundflächen $ABCD \parallel A'B'C'D'$, dann $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$ seyn; ist nun der Voraussetzung nach $ABCD$ ein Gleicheck, so muß $AD \parallel CB$ und $AB \parallel CD$ seyn; daher, da $A'D' \parallel AD$ und $C'B' \parallel CB$, auch $A'D' \parallel CB$ seyn; eben so $DD' \parallel AA'$. Man überzeugt sich so

Fig. 555.



leicht, daß AD ⋕ BC ⋕ A′D′ ⋕ B′C′; AB ⋕ CD ⋕ A′B′ ⋕ C′D′, während schon aus der Wesenheit des Prismas AA′ ⋕ BB′ ⋕ CC′ ⋕ DD′ ist. Da nun AA′ ∥ BB′ und A′D′ ∥ B′C′, so muß A′D′DA ∥ BB′CC′, und eben so, da A′B′ ∥ C′D′ und AA′ ∥ DD′, DD′CC′ ∥ AA′BB′ seyn. Bei einem Parallelepiped oder Balken kann also jede Seitenfläche als Grundfläche dienen.

Stehen die Seitenkanten eines Balkens senkrecht auf den Grundflächen, so heißt so ein Balken ein gerader. Ein Balken kann gerade seyn, rücksichtlich zweier gegenüberstehender Seitenflächen, wenn man diese als Grundflächen annimmt, und er kann schief seyn rücksichtlich zweier andern einander gegenüber stehenden Seitenflächen. Bei einem geraden Balken sind die Seitenflächen Rechtecke, die Grundflächen können aber Recht- oder Schiefecke seyn. Sind bei einem Balken sowohl die Seiten- als die Grundflächen Rechtecke, so heißt dann der Balken ein rechtwinkliger Balken; hier wird jede Seitenfläche, als Grundfläche angenommen, einen geraden Balken geben.

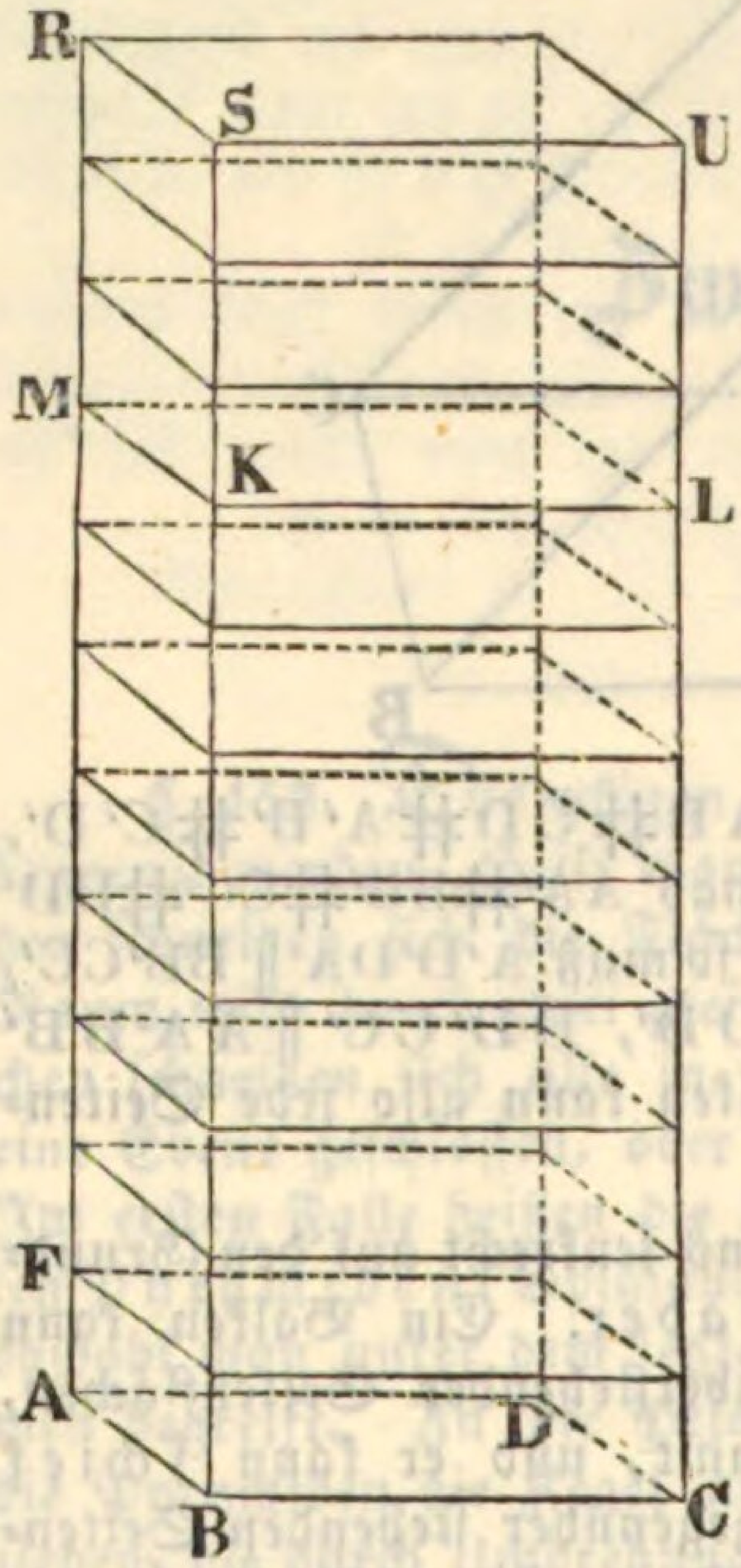
Ein rechtwinkliger Balken, wo die Grundfläche ein Quadrat ist, heißt ein quadratischer Balken.

Ist die Höhe eines quadratischen Balkens gleich der Seite der Grundfläche, so heißt dann dieser ein Würfel (Cubus). Als Einheit des Körpermaßes nimmt man einen Würfel, dessen jede Seite gleich der Einheit der Länge gleich ist, und den Körperinhalt irgend eines Raumes zu bestimmen, heißt somit so viel, als zu bestimmen, wie oft der Würfel über der Einheit der Längen in dem gegebenen Körper enthalten sey.

§. 455. Die Körperinhalte zweier rechtwinkliger Balken von derselben Grundfläche verhalten sich gerade so, wie ihre Höhen.

Es seyen die rechtwinkligen Balken ABCDMKL und ABCDRSU beide auf derselben Grundfläche ABCD, wobei AM die Höhe des ersteren, AR die Höhe des letzteren ist.

Fig. 586.



Suchen wir nun das größte gemeinschaftliche Maß zwischen AM und AR, und sey dieses AF, so zwar, daß

AM = 8 . AF und AR = 11 . AF ist,

also, daß AM : AR = 8 : 11. Ziehen wir uns durch alle Theilpunkte Ebenen gleichlaufend mit der Grundfläche, so wird der Balken MABC in 8 und der Balken RABC in 11 Balken zerfallen, welche alle einerlei seyn werden mit dem Balken FABCD; denn alle diese Balken haben einerlei Grundflächen. Da sie nun alle rechtwinklig sind und gleiche Höhen haben, so wird einer dieser 11 in jeden der andern vollkommen genau hineinpassen, und man hat somit:

Balk. RABCD = 11 . Balk. FABCD
Balk. MABCD = 8 . Balk. FABCD,

folglich:

RABCD : MABCD = 8 : 11,

und somit:

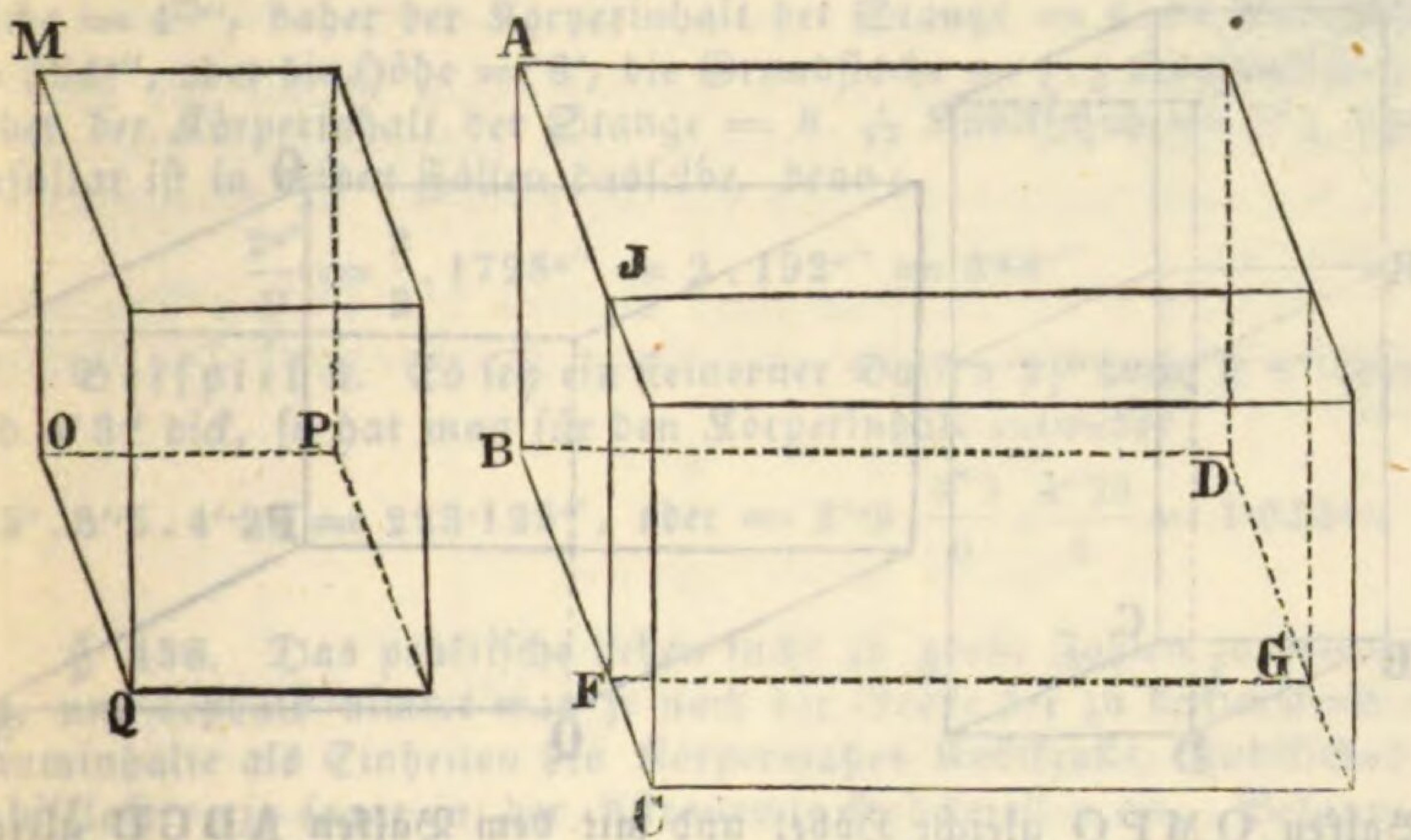
RABCD : MABCD = AR : AM.

Der Gang der Untersuchung wäre ganz derselbe, wie auch immer das Verhältniß der Höhen ist; der Satz gilt auch dann noch immer, wenn selbst das Verhältniß der Höhen irrationell ist; denn erstens jeder Lehrsatz, der für jedes rationelle Zahlenverhältniß gilt, gilt auch nothwendiger Weise für ein irrationelles, weil sich nirgend die Grenze angeben läßt, wo das rationelle aufhört und das irrationelle beginnt. Uebrigens läßt sich der Beweis des vorliegenden Satzes eben so von dem rationellen Verhältnisse auf irrationelle ausdehnen, wie wir es bei den Rechtecken von derselben Höhe in der ebenen Geometrie gethan haben.

§. 456. **Die Körperinhalte rechtwinkliger Balken derselben Höhe verhalten sich wie ihre Grundflächen.**

Es seyen die zwei rechtwinkligen Balken MOPQ und ABCD, ihre Höhen MO und AB seyen gleich, ihre Grundflachen verschieden, und zwar sey BC > OQ; ich schneide BF = OQ ab, und ziehe durch F die Ebene FJG, so daß ein neuer Balken ABFGD entsteht, der, wenn ich AFJG als Grundfläche, und also BD als Höhe

Fig. 587.



annehme, mit dem Balken MOPQ gleiche Grundfläche hat; wenn ich bei diesem MOQ als Grundfläche und OP als Höhe annehme, denn da MO = AB nach der Voraussetzung, OQ = BF nach der Verzeichnung ist, so hat man die Rechtecke MOQ = ABF, daher nach dem so eben bewiesenen Satze:

$$MOPQ : ABFD = OP : BD \quad (1).$$

Vergleiche ich nun die Balken ABFD und ABCD, so haben beide die Grundfläche ABD, und daher:

$$ABFD : ABCD = BF : BC \quad (2).$$

Die Multiplikation der Proportionen (1) und (2) gibt uns:

$$MOPQ : ABCD = OP . BF : BD . BC,$$

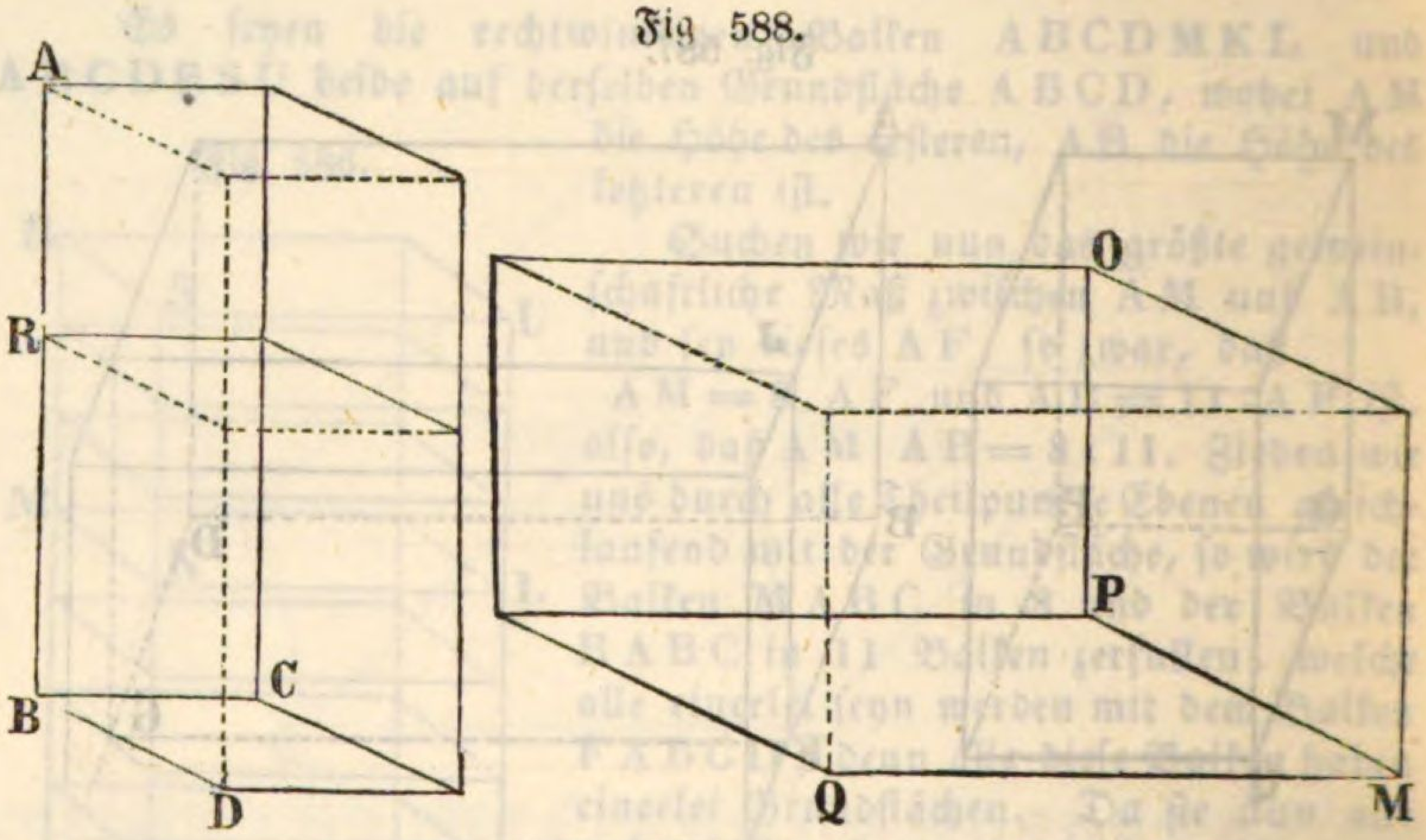
oder da BF = OQ, und POQ = OP . OQ und CBD = BD . BC ist:

$$MOPQ : ABCD = POQ : CBD.$$

§. 457. **Die Körperinhalte zweier rechtwinkliger Balken verhalten sich wie die Produkte aus ihrer Höhe und Grundfläche.**

Es seyen die zwei rechtwinkligen Balken ABCD und OMPQ von verschiedener Höhe und Grundfläche, und zwar AB > OP; ich schneide von AB ein Stück RB = OP ab, und lege durch R eine Ebene gleichlaufend mit BCD, so hat der Balken RBCD mit dem

Fig. 588.



Balken OMPQ gleiche Höhe, und mit dem Balken ABCD gleiche Grundfläche, daher in Folge der so eben bewiesenen Sätze:

$$ABCD : RBCD = AB : BR$$
$$RBCD : OMPQ = BCD : PMQ, \text{ daher}$$
$$\overline{ABCD : OMPQ = AB . BCD : BR . PMQ,}$$
$$\text{oder} = AB . BCD : OP . PMQ.$$

Fig. 589.



Vergleicht man also den Körperinhalt des Balkens ABCD mit dem Würfel FKGH, wo wir jede Seite = 1 voraussetzen wollen, so hat man:

$$ABCD : FGHK = AB . BCD : FG . KGH,$$
$$\text{oder } \frac{ABCD}{FGHK} = \frac{AB}{FG} \cdot \frac{BCD}{KGH}.$$

Der erste Quotient $\frac{ABCD}{FGHK}$ ist die Zahl, welche die Größe des Körperinhaltes des Balkens ABCD ausdrückt, $\frac{AB}{FG}$ ist die Zahl, welche die Höhe ausdrückt, $\frac{BCD}{KGH}$ ist die Zahl, welche den Flächeninhalt der Grundfläche angibt, daher ergibt sich der Satz:

Der Körperinhalt eines rechtwinkligen Balkens ist gleich der Höhe, multiplicirt mit dem Flächeninhalte der Grundfläche.

Es versteht sich hierbei, daß die Höhe mit der Längeneinheit gemessen wird, deren Quadrat zur Flächeninhaltsbestimmung der Grundfläche dient.

Beispiel 1. Es sey der Körperinhalt einer eisernen Stange zu bestimmen, die 8′ hoch, 2″ breit und 2″ dick sey, so muß ich ent-

weder alle Abmessungen in Zolle, oder alle in Schuh verwandeln. Im ersten Falle sage ich die Höhe $= 96''$, der Flächeninhalt der Grundfläche $= 4^{\square''}$, daher der Körperinhalt der Stange $= 4 . 96$ Kubikzoll $= 384^{c''}$, oder die Höhe $= 8'$, die Grundfläche $= \frac{1}{6} . \frac{1}{6}$ Quadratschuh, daher der Körperinhalt der Stange $= 8 . \frac{1}{36}$ Kubikschuh $= \frac{2}{9}^{c'}$; das Resultat ist in beiden Fällen dasselbe, denn:

$$\frac{2^{c'}}{9} = \frac{2}{9} . 1728^{c''} = 2 . 192^{c''} = 384^{c''}.$$

Beispiel 2. Es sey ein steinerner Balken $2\frac{1}{2}{}^{o}$ hoch, $3'\,6''$ breit und $4'\,3''$ dick, so hat man für den Körperinhalt entweder:

$$15' . 3'{\cdot}5 . 4'{\cdot}25 = 223{\cdot}125^{c'}, \text{ oder } = 2^{o}{\cdot}5 . \frac{3^{o}{\cdot}5}{6} . \frac{4^{o}{\cdot}25}{6} = 1{\cdot}033^{co}.$$

§ 458. Das praktische Leben sucht zu große Zahlen zu vermeiden, und deßhalb nimmt man je nach der Größe der zu bestimmenden Rauminhalte als Einheiten des Körpermaßes Kubikzolle, Kubikschuh, Kubikklafter, ja sogar in der Astronomie Kubikmeilen an. Bekanntlich ist ein Kubikzoll $= \frac{1}{1728}$ eines Kubikschuhes, ein Kubikschuh $= \frac{1}{216}$ Kubikklafter, eine Kubikmeile $=$ 64000,000,000 Kubikklafter.

Bei Baurechnungen theilt man die Kubikklafter in 6 Klafterschuhe, welcher eine Quadratklafter zur Grundfläche und einen Schuh zur Höhe hat, den Klafterschuh in 12 Klafterzolle, ein Klafterzoll hat eine Quadratklafter zur Grundfläche und einen Zoll zur Höhe; eine Klafterlinie hat eine Quadratklafter zur Grundfläche und eine Linie zur Höhe. Bezeichnen wir so eine Kubikklafter mit $1^{o,o,o}$, also einen räumlichen Klafterschuh mit $1^{o,o,\prime}$, einen räumlichen Klafterzoll mit $1^{o,o,\prime\prime}$, also Klafterlinie mit $1^{o,o,\prime\prime\prime}$, so wird die Bedeutung folgender Ausdrücke $1^{o,\prime,\prime}$, $1^{o,\prime,\prime\prime}$, $1^{o,o,\prime}$, $1^{o,o,\prime\prime}$ leicht zu finden seyn; nämlich der erste ist ein Balken eine Klafter hoch, 1 Schuh lang und 1 Schuh breit; der zweite ein Balken eine Klafter hoch, 1 Schuh lang, 1 Zoll breit u. s. w. Wir wollen diese verschiedenen Körper mit einander vergleichen:

$$1^{o,\prime,\prime} : 1^{o,o,\prime\prime} = 1 : 6 . \tfrac{1}{12} = 1 : \tfrac{1}{2};$$

denn diese beiden Balken haben gleiche Höhe, nämlich 1^{o}. Bei dem einen ist die Grundfläche ein Quadratschuh, bei dem zweiten ein Rechteck, dessen eine Seite $1^{o} = 6'$, die andere Seite $1'' = \frac{1}{12}'$, daher hat man:

$$1^{o,\prime,\prime} = 2 . 1^{o,o,\prime\prime}.$$

Eben so hat man:

$$1^{o,\prime,\prime\prime} : 1^{o,o,\prime\prime\prime} = 12 : 72 . \tfrac{1}{12} = 2 : 1;$$

denn beide haben die Höhe $= 1^{o}$, der erste zur Basis ein Reckteck $1'$ lang $1''$ breit $= 12^{\square''}$; der zweite ein Rechteck 1^{o} lang $1'''$ breit $= 72 . \frac{1}{12}$ Quadratzoll $=$ 6 Quadratzoll,

$$\text{daher } 1^{o,\prime,\prime\prime} = 2^{o,o,\prime\prime\prime}.$$

Ferner ist $1^{0,\prime\prime,\prime\prime} : 1^{0,0,\mathrm{IV}} = \left\{\begin{matrix} 1'' : 1^0 \\ 1'' : 1^{\mathrm{IV}} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 : 72 \\ 144 : 1 \end{matrix}\right\} = 2 : 1,$

daher $1^{0,\prime\prime,\prime\prime} = 2^{0,0,\mathrm{IV}}$.

Durch die vorhergehenden Entwicklungen ist uns der Weg gebahnt, wenn uns die Grundfläche eines rechtwinkligen Balkens im Riemenmaße gegeben ist, auch den Körperinhalt im Riemenmaße zu bestimmen.

Es sey z. B. die Höhe eines Balkens $2^0\,3'\,4''$, die Grundfläche gleich $3^{0,0}\;4^{0,\prime}\;6^{0,\prime\prime}$. Wie groß ist der Körperinhalt? Die Multiplikation gibt:

$$\begin{array}{lllll}
3^{0,0} & 4^{0,\prime} & 6^{0,\prime\prime} & & \\
2^{0} & 3^{\prime} & 4^{\prime\prime} & & \\
\hline
6^{0,0,0} & 8^{0,0,\prime} & 12^{0,0,\prime\prime} & & \\
 & 9^{0,0,\prime} & 12^{0,\prime,\prime} & 18^{0,\prime,\prime\prime} & \\
 & & 12^{0,0,\prime\prime} & 16^{0,\prime,\prime\prime} & 24^{0,\prime\prime,\prime\prime}.
\end{array}$$

Da aber nach dem Vorhergehenden:

$1^{0,\prime,\prime} = 2^{0,0,\prime\prime},\; 1^{0,\prime,\prime\prime} = 2^{0,0,\prime\prime\prime},\; 1^{0,\prime\prime,\prime\prime} = 2^{0,0,\mathrm{IV}}$ ist,

so hat man:

$12^{0,\prime,\prime} = 24^{0,0,\prime\prime},\; 18^{0,\prime,\prime\prime} = 36^{0,0,\prime\prime\prime},\; 24^{0,\prime\prime,\prime\prime} = 48^{0,0,\mathrm{IV}}$
$16^{0,\prime,\prime\prime} = 32^{0,0,\prime\prime\prime}$.

Daher ist obige Rechnung:

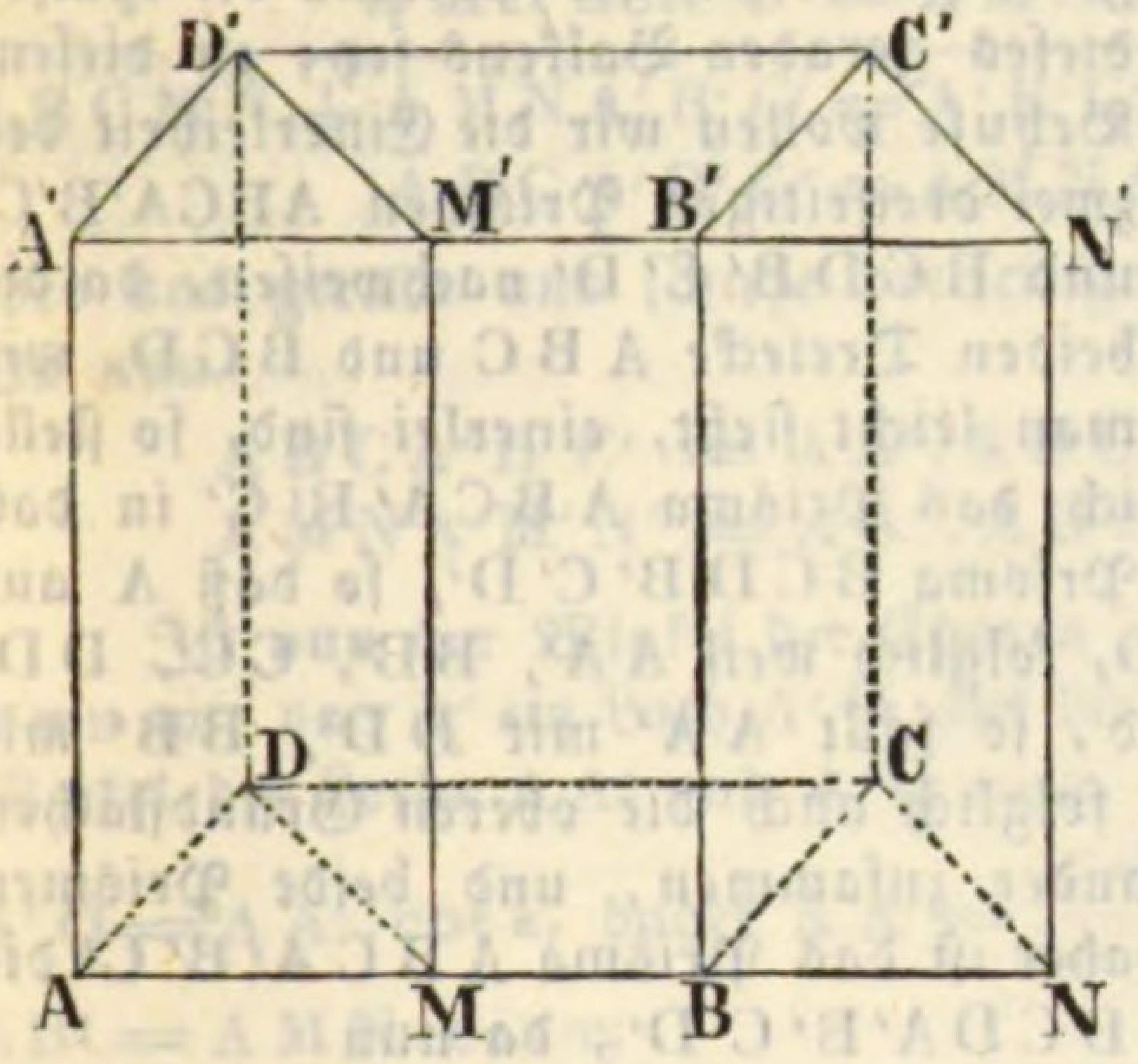
$$\begin{array}{lllll}
3^{0,0} & 4^{0,\prime} & 6^{0,\prime\prime} & & \\
2^{0} & 3^{\prime} & 4^{\prime\prime} & & \\
\hline
6^{0,0,0} & 8^{0,0,\prime} & 12^{0,0,\prime\prime} & & \\
 & 9^{0,0,\prime} & 24^{0,0,\prime\prime} & 36^{0,0,\prime\prime\prime} & \\
 & & 12^{0,0,\prime\prime} & 32^{0,0,\prime\prime\prime} & 48^{0,0,\mathrm{IV}} \\
\hline
9^{0,0,0} & 3^{0,0,\prime} & 6^{0,0,\prime\prime}. & &
\end{array}$$

Man überzeugt sich daher, daß die Rechnung genau auf dieselbe Art verrichtet wird, wie wir sie Seite 56 und 57 dieses Werkes angedeutet haben, wobei sich dieselben Abkürzungen anbringen lassen. Mit Anwendung dieser steht obige Rechnung wie folgt:

$$\begin{array}{llll}
3^{0,0} & 4^{0,\prime} & 6^{0,\prime\prime} & \\
2^{0} & 3^{\prime} & 4^{\prime\prime} & \\
\hline
6^{0,0,0} & . & . & \\
1 & 2 & . & \\
. & 1 & . & \\
1 & 3 & . & \\
 & 2 & . & \\
 & & 3 & \\
 & 1 & & . \\
 & & 2 & 8 \\
 & & & 4 \\
\hline
9^{0,0,0} & 3^{0,0,\prime} & 6^{0,0,\prime\prime}. &
\end{array}$$

§. 459. **Der Körperinhalt eines geraden Balkens, wenn auch seine Grundfläche kein Rechteck ist, ist gleich der Höhe, multiplicirt mit dem Flächeninhalte der Grundfläche.**

Fig 590.



Es sey der gerade Balken ABCDA'B'C'D' seine Grundfläche, ABCD sey ein Schiefeck; fällen wir nun von D und C die Lothe DM und CN auf AB, und legen durch DD' und M, und CC' und N Ebenen, wobei wir uns die obere und untere Grundfläche erweitert denken, und eben so die Seitenfläche AA'BB', so entsteht hierdurch der rechtwinklige Balken CDMNC'D'M'N', von dem wir beweisen wollen, daß er mit unseren gegebenen geraden Balken gleichen Körperinhalt hat. Leicht sieht man, daß die Dreiecke ADM und BCN mit einander einerlei sind. Stellt man nun das dreiseitige Prisma ADMA'D'M' in das andere BCNB'C'N' so, daß die Dreiecke ADM und BCN sich decken, so müssen AA' und BB', MM' und NN', DD' und CC' in einander fallen, weil je zwei lothrecht sind auf dieselbe Ebene im selben Punkte. Da nun diese benannten Lothe nach einander gleich sind, so werden also die dreiseitigen Prismen ADMA'D'M' und BCNB'C'N' mit einander einerlei seyn; gibt man nun zu beiden das Prisma MBCDM'B'C'D' hinzu, so hat man:

$$AMDA'M'D' + MBCDM'B'C'D' = BCNB'C'N' + MBCDM'B'C'D',$$

oder $ABCDA'B'C'D' = MNCDM'N'C'D'$.

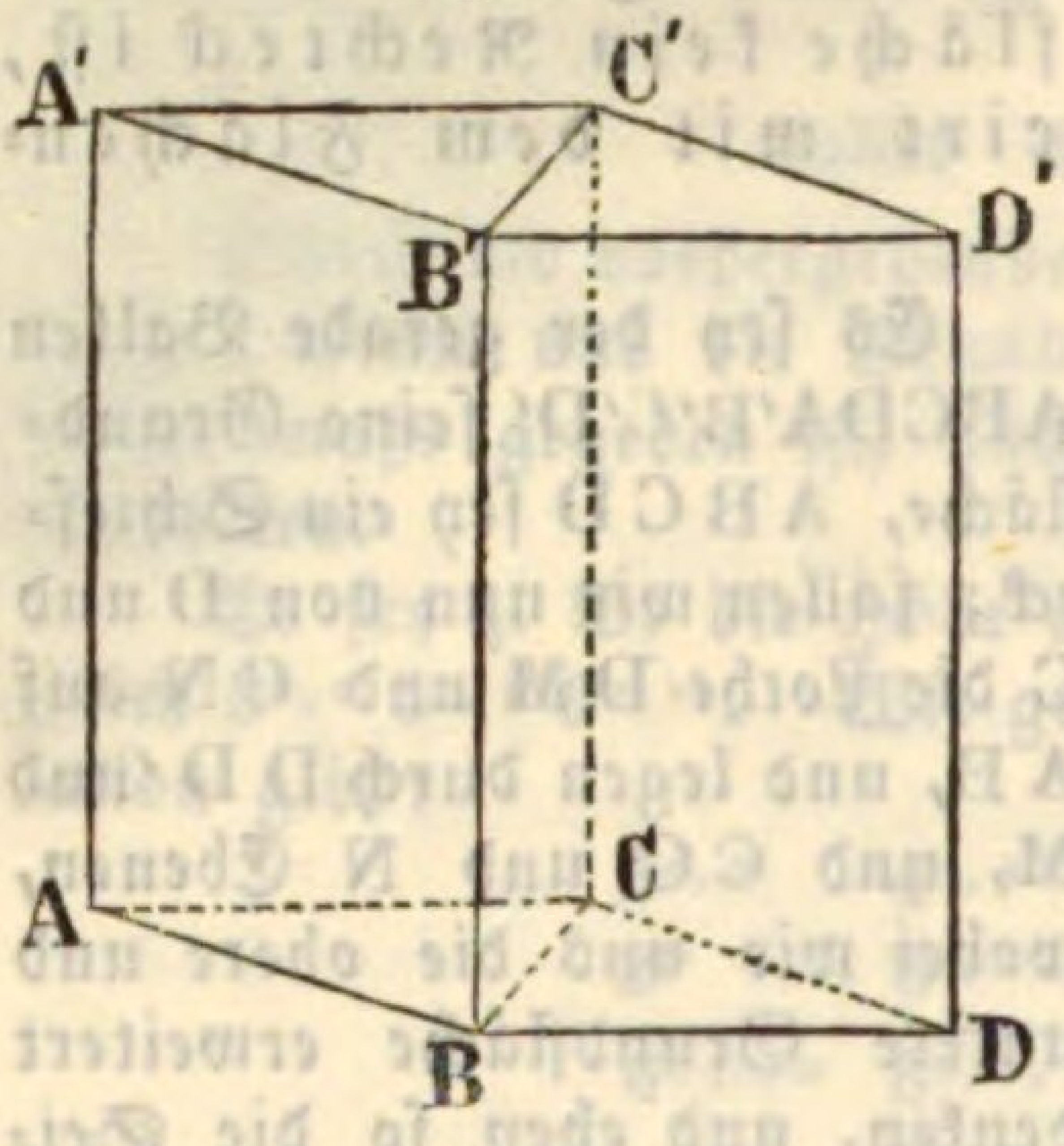
Da nun der rechtwinklige Balken $MNCDM'N'C'D = BB'.MNCD$ ist, so hat man:

$$ABCDA'B'C'D' = BB'.MNCD, \text{ oder}$$
$$ABCDA'B'C'D' = BB'.ABCD \text{ w. z. b. w.}$$

§. 460. Vermöge des so eben bewiesenen Satzes sind wir im Stande, den Körperinhalt jedes geraden dreiseitigen Prismas zu finden.

Es sey das gerade dreiseitige Prisma ABCA'B'C' (wo also die Seitenkanten alle auf der Grundfläche senkrecht stehen), denke ich mir durch BB' die Ebene BB'DD' ∥ AA'CC' und durch CC' die Ebene CC'DD' ∥ AA'BB', die sich in DD' schneiden, und erweitert

Fig. 591.



man die Grundfläche A B C und A′B′C′, bis sie D D′ in D und D′ schneiden, so entsteht dadurch der gerade Balken A B C D A′B′C′D′, und wir wollen nun nachweisen, daß unser gerades dreiseitiges Prisma die Hälfte dieses geraden Balkens sey; zu diesem Behufe wollen wir die Einerleiheit der zwei dreiseitigen Prismen ABCA′B′C′ und B C D B′ C′ D′ nachweisen, da die beiden Dreiecke A B C und B C D, wie man leicht sieht, einerlei sind, so stelle ich das Prisma A B C A′ B′ C′ in das Prisma B C D B′ C′D′, so daß A auf D, A B auf C D, A C auf B D, folglich weil A A′, B B′, C C′, D D′ alle auf A B C D senkrecht sind, so fällt A A′ mit D D′, B B′ mit C C′ und C C′ mit B B′, und folglich auch die oberen Grundflächen A′ B′ C′ und B′C′D′ mit einander zusammen, und beide Prismen sind mit einander einerlei. Daher ist das Prisma A B C A′ B′ C′ die Hälfte des geraden Balkens A B C D A′B′ C′D′; da nun

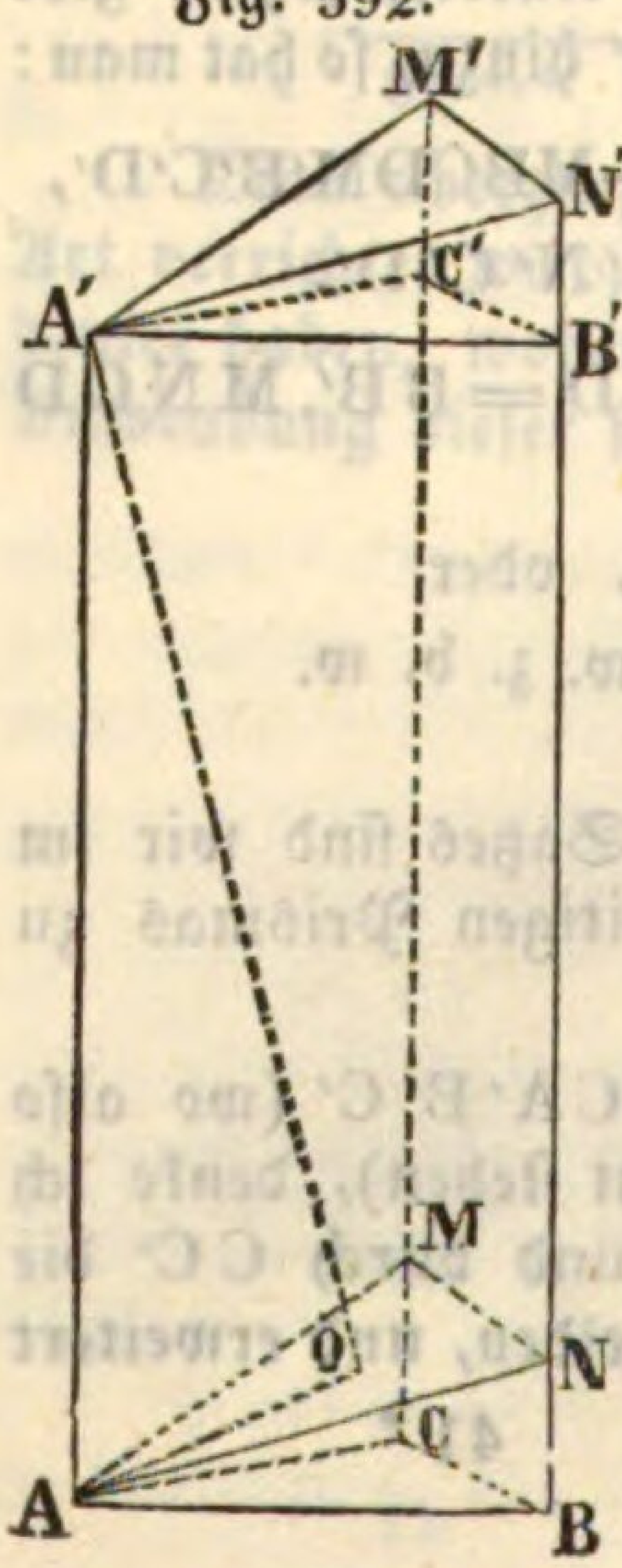
$$ABCDA'B'C'D' = AA'.ABCD \text{ ist, so hat man:}$$

$$ABCA'B'C' = AA'.\tfrac{1}{2}ABCD, \text{ oder}$$

$$ABCA'B'C' = AA'.ABC,$$

daher ist der **Körperinhalt eines geraden dreiseitigen Prismas gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe.**

Fig. 592.



§. 461. Wir wollen nun diese Behauptung auch auf ein schiefes, dreiseitiges Prisma ausdehnen.

Es sey das schiefe, dreiseitige Prisma A M N A′M′N′, wo also die Seitenkanten A A′, M M′, N N′ schief gegen die beiden Grundflächen A M N und A′M′ N′ sind. Ich lege nun durch A die Ebene A B C senkrecht auf A A′, welche die M M′ und N N′ in C und B schneidet; eben so lege ich durch A′ die Ebene A′B′ C′, welche die M M′ und N N′ in C′ und B′ schneidet, so daß das dadurch entstandene dreiseitige Prisma A B C A′ B′ C′ ein gerades ist. Vermöge der Grundeigenschaften der Prismen ist:

$$MM' = NN' = AA',$$

eben so B B′ = C C′ = A A′, daher M M′ = C C′, N N′ = B B′, folglich C M = C′M′, BN = B′N′, woraus sich wegen der Einerleiheit der Dreiecke A B C und A′B′C′, und da C M ⊥ A B C, C′M′ ⊥ A′B′ C′, B N ⊥ A B C, B′N′ ⊥ A′B′C′

ist, ergibt, daß das Körperstück ABCMN mit dem Körperstücke A'B'C'M'N' einerlei ist, indem das eine genau in den Raum hineinpaßt, den das andere einnimmt, daher:

$$ABCMN = A'B'C'M'N', \text{ und da}$$
$$AMNA'B'C' = AMNA'B'C' \text{ ist, so hat man:}$$

$$ABCMN + AMNA'B'C' = A'B'C'M'N' + AMNA'B'C', \text{ oder}$$
$$ABCA'B'C' = AMNA'M'N',$$

oder das gerade und schiefe dreiseitige Prisma sind einander gleich. Da nun:

$$ABCA'B'C' = AA'.ABC \text{ ist, so hat man auch.}$$
$$AMNA'M'N' = AA'.ABC.$$

Ist nun der Winkel der Ebenen AMN und ABC $= \alpha$, so ist, wenn wir von A' ein Loth A'Q auf die Ebene AMN fällen, auch der Winkel der Lothe AA' und A'Q $= \alpha$, d. h. AA'Q $= \alpha$, daher:

$A'Q = AA'.\cos\alpha$, daher $AA' = \frac{A'Q}{\cos\alpha}$, und dem Früheren zufolge:

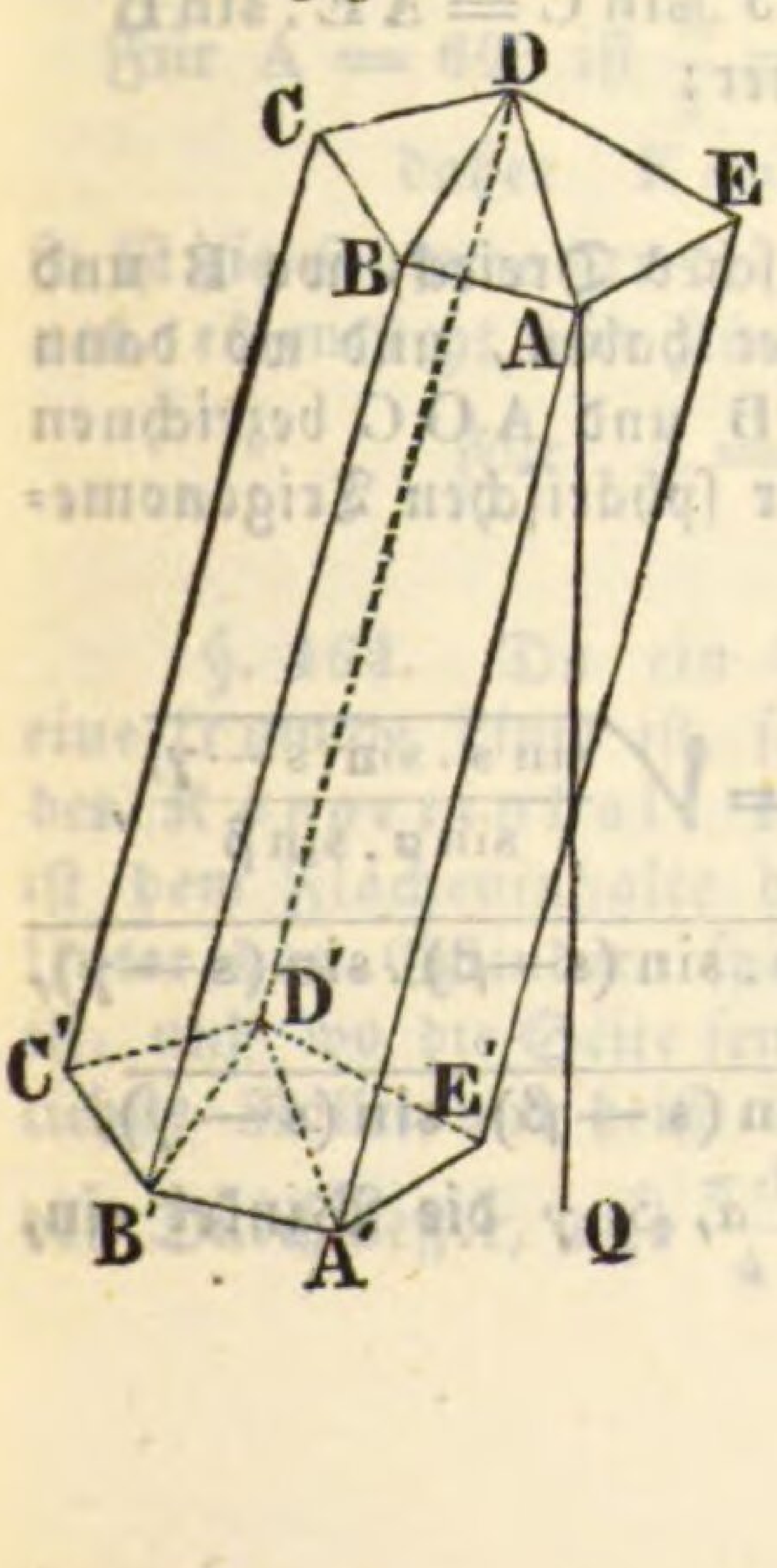
$ABC = AMN.\cos\alpha$;

$$\text{daher } AMNA'M'N' = \frac{A'Q}{\cos\alpha}.AMN.\cos\alpha,$$
$$\text{folglich } AMNA'M'N' = A'Q.AMN,$$

d. h. der körperliche Inhalt auch eines schiefen dreiseitigen Prismas ist gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe.

§. 462. Dieses bahnt uns den Weg zu dem allgemeinen Satze: der Körperinhalt eines jeden Prismas (geraden oder schiefen) ist gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe.

Fig. 593.



Nehmen wir ein mehrseitiges Prisma, z. B. ein fünfseitiges ABCDEA'B'C'D'E', legen wir durch die Kante DD' die Ebenen BB'DD' und AA'DD', so zerfällt unser fünfseitiges Prisma in drei dreiseitige, nämlich CBDC'B'D', ABDA'B'D', ADEA'D'E'. Ist nun AQ das Loth von A auf die untere Grundfläche, d. h. ist AQ die Höhe sowohl vom fünfseitigen, als allen dreiseitigen Prismen, so hat man:

$$CBDC'B'D' = AQ.C'B'D'$$
$$ABDA'B'D' = AQ.A'B'D'$$
$$ADEA'D'E' = AQ.A'D'E', \text{ daher}$$

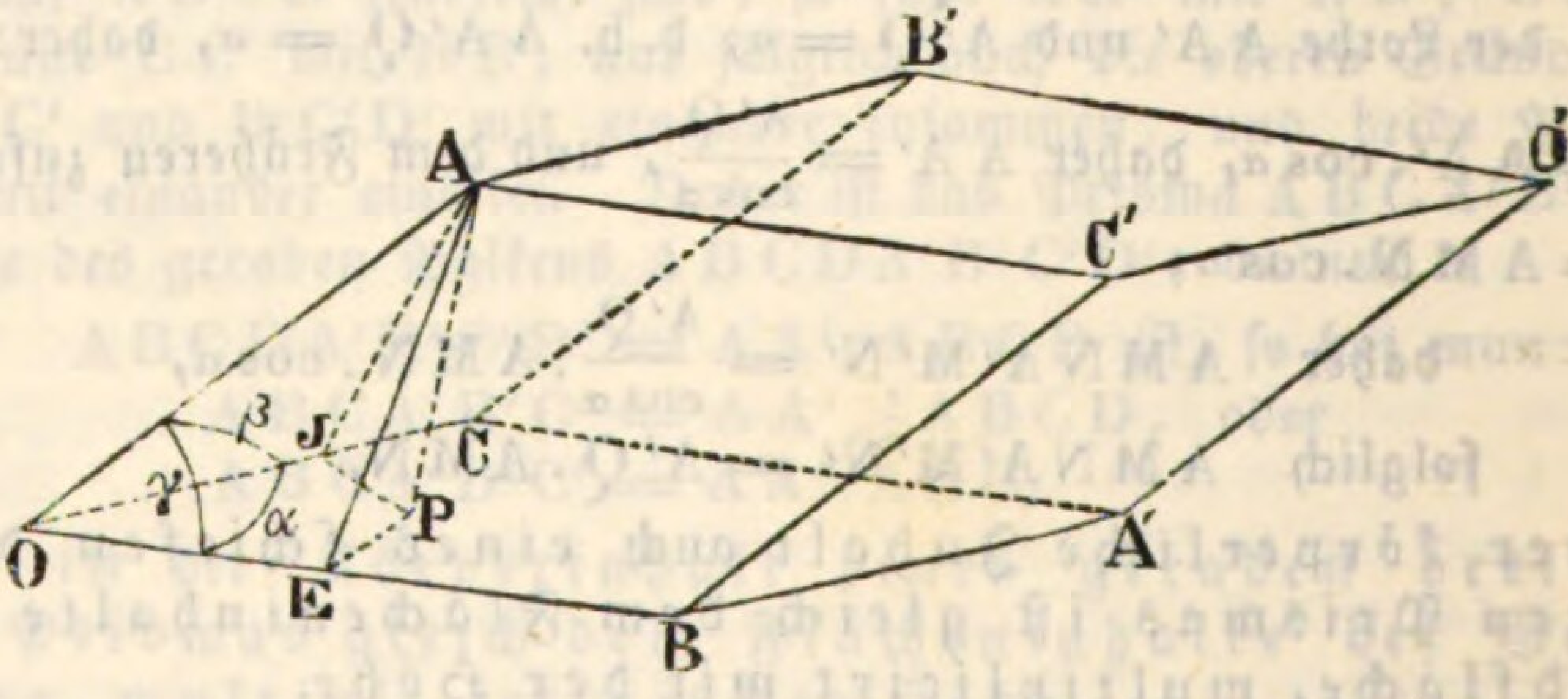
$CBDC'B'D' + ABDA'B'D' + ADEA'D'E'$
$$= AQ.(C'B'D' + A'B'D' + A'D'E'),$$
oder $ABCDEA'B'C'D'E' = AQ.A'B'C'D'E$,

was zu beweisen war.

§. 463. Es sey der Balken (Parallelepiped) $AA'BB'CC'OO'$; wir fällen von A das Loth AP auf die Grundfläche $BOCA'$, wir wollen die Längen der in O zusammentreffenden Kanten $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, und die Winkel, die sie mit einander bilden, $BOC = \alpha$, $AOC = \beta$, $AOB = \gamma$ nennen, so ist, wenn wir K den Körperinhalt dieses Körpers nennen:

$$K = bc.\sin\alpha.AP.$$

Fig. 594.



Ist nun $AJ \perp OC$, $AE \perp OB$, und nennt man die Winkel $AJP = C$, $AEP = B$, welche die Neigungswinkel der zugehörigen Ebenen sind, so hat man:

$AJ = a\sin\beta$, $AE = a\sin\gamma$, $AP = AJ.\sin C = AE.\sin B$
$AP = a\sin\beta.\sin C = a\sin\gamma.\sin B$, daher:
$K = abc.\sin\alpha.\sin\beta.\sin C.$

Die drei Bögen α, β und γ bilden ein sphärisches Dreieck, wo B und C die Winkel sind, die wir bereits bezeichnet haben, und wo dann entsprechend A den Winkel der Ebenen AOB und AOC bezeichnen wird. Nun wissen wir aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie, daß, wenn $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = s$ ist:

$$\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-\alpha).\sin(s-\beta)}{\sin\alpha.\sin\beta}};\ \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{\sin s.\sin(s-\gamma)}{\sin\alpha.\sin\beta}},$$

daher $\sin C = \frac{2}{\sin\alpha.\sin\beta}\sqrt{\sin s.\sin(s-\alpha).\sin(s-\beta).\sin(s-\gamma)}$,

daher $K = 2abc.\sqrt{\sin s.\sin(s-\alpha).\sin(s-\beta)\ \sin(s-\gamma)}$.

Führt man aber statt der Winkel der Kanten α, β, γ die Winkel ein,

die in O zusammenstoßende Ebenen A, B, C mit einander bilden, so ist:

$$K = \frac{-4abc.\cos\Sigma.\cos(\Sigma - A).\cos(\Sigma - B).\cos(\Sigma - C)}{\sin A.\sin B.\sin C},$$

wobei $\Sigma = \frac{1}{2}(A + B + C)$.

Für $\alpha = \beta = \gamma$ hat man $K = 2abc.\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}.\sin\frac{^3\alpha}{2}}$,

oder $K = 2abc.\sin\frac{^2\alpha}{2}\sqrt{4\cos\frac{^2\alpha}{2} - 1}$,

daher für $\alpha = 90^\circ$ $K = 2abc.\frac{1}{2}\sqrt{2-1} = abc$,

$\alpha = 60^\circ$ $K = 2abc.\frac{1}{4}\sqrt{3-1} = \frac{abc\sqrt{2}}{2}$.

Ist $A = B = C$, so hat man:

$$K = \frac{-4abc\cos\frac{3A}{2}.\cos\frac{^3A}{2}}{\sin{}^3A}, \text{ woraus:}$$

$$K = \frac{4abc\left(3\sin\frac{^2A}{2}.\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{^3A}{2}\right)}{8\sin\frac{^3A}{2}}, \text{ oder}$$

$$K = \frac{abc}{2}\operatorname{cotg}.\frac{A}{2}\left(3 - \operatorname{cotg}\frac{^2A}{2}\right).$$

Für $A = 90^\circ$ ist $\frac{A}{2} = 45^\circ$; $\operatorname{cotg}.\frac{A}{2} = 1$:

$$K = \frac{abc}{2}.(3-1) = abc.$$

Für $A = 60^\circ$ ist $\frac{A}{2} = 30$; $\operatorname{cotg}.\frac{A}{2} = \sqrt{3}$,

daher $K = o$, begreiflich, wenn $A = 60^\circ$,

so ist die Summe der drei Winkel $= 180^\circ$; das Dreieck wird ein ebenes, es entsteht kein Körpereck.

Für $A = 120^\circ$ hat man $K = \frac{4abc}{3\sqrt{3}}$.

§. 464. Da ein Cylinder ein Prisma, dessen Grundfläche eine krumme Linie ist, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß auch der Körperinhalt eines (geschlossenen) Cylinders gleich ist dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe. Unter den Cylindern spielt derjenige, dessen Grundfläche ein Kreis ist, und wo die Seite senkrecht auf der Grundfläche steht, die vorzüglichste Rolle, und heißt im gemeinen Leben eine Walze. Ist nun d der Durchmesser, also $\frac{\pi d^2}{4}$ der Flächeninhalt der Grundfläche, h die

Höhe, so ist der Körperinhalt der Walze gleich $\frac{\pi d^2 h}{4}$, wobei man nach der gestellten Höhe der Genauigkeit $\pi = \frac{22}{7}$ oder 3·14159 nimmt. In den meisten Fällen des bürgerlichen Lebens wird erstere Verhältnißzahl hinreichend genau seyn; dann ist der Körperinhalt einer Walze $= \frac{22}{28} d^2 h = \frac{11}{14} d^2 h = (1 - \frac{3}{14}) d^2 h$.

Beispiel 1. Eine Walze habe 7′ Höhe und 7′ im Durchmesser, also $d = 7$ und $h = 7$, so hat man: $d^2 = 49$; $d^2 h = 343$; $\frac{d^2 h}{14} = 24·5$; $3 . \frac{d^2 h}{14} = 73·5$; $343 - 73·5 = 269·5$,

daher Körperinhalt der Walze = 269.5 Kubikschuh,

oder auf andere Art: $d^2 h = 343$

$$\frac{d^2 h}{4} = 85·75$$

$$\begin{array}{ll} 3 & 257·25 \\ \frac{1}{7} & 12·25 \\ \hline & 269·5 \end{array}$$

Da $\frac{22}{7}$ um 0·001 zu groß ist, so kann man zu noch größerer Genauigkeit ein Tausendel von 85·75, d. i. nahe 0·1 abschlagen, so hat man besser 269·4, oder da $\frac{1}{4} . 3·141593 = 0·785398$, so hat die Walze = 269·3915.

Beispiel 2. Es sey eine Walze von 7′ Höhe und 2″ Durchmesser:

$$d = \frac{2'}{12} = \frac{1'}{6}; \quad \frac{d^2 h}{4} = \frac{7}{144}; \quad \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{7}{144} . \frac{22}{7} = \frac{11}{72} \text{ Kubikschuhe,}$$

oder $d = 2''$; $h = 84''$; $d^2 h = 336$; $\frac{d^2 h}{4} = 84$; $\frac{\pi d^2 h}{4} = 264$ K. Z.

Beispiel 3. Es werde ein Quadrat, dessen Seite gleich a ist, kreisförmig zu der Oberfläche einer Walze gemacht; wie groß ist der Körperinhalt dieser Walze? Der Umfang der Grundfläche der Walze ist a, also der Durchmesser $\frac{a}{\pi}$, daher der Flächeninhalt der Grundfläche $\pi . \frac{a^2}{4\pi^2} = \frac{a^2}{4\pi}$, daher der Körperinhalt $= \frac{a^3}{4\pi} = \frac{7}{88} a^3$.

§. 465. So verschieden die Einheiten der Längen- und Flächenmaße in einem und demselben Lande und in verschiedenen Ländern ist, so ist die Abweichung in den Einheiten der Körpermaße noch viel größer. Abgesehen von allen fremden Maßen, hat jedes Volk ein Körpermaß, welches sich auf die Einheit des Längenmaßes bezieht, und was man gewöhnlich das kubische Maß nennt, dann Einheiten des Körpermaßes für die Inhaltsbestimmung von trockenen und flüssigen Körpern. Kubikschuhe und Kubikzolle sind die Einheiten des kubischen Maßes für kleinere Körper, während Kubikklaftern und Kubikmeilen es für größere sind.

Es ist Gewohnheit in der Wissenschaft und beinahe aller Länder geworden, die verschiedenen Längen-, Flächen- und Körpermaße mit dem neuen französischen zu vergleichen. Als Einheit des französischen Maßes dient bekanntlich der 10millionste Theil des nördlichen Meridian-Erdquadranten = Metre = 3·078444 alt. Pariser Schuh = 3·163446 Wiener Schuh, daher 1 Kubikmetre = 31·65785 Wiener Kubikschuh. Ein Litre = 0·001 Kubikmetre, und dient als Einheit des Flüssigkeitsmaßes; ein Hectolitre = 100 Litres dient als Einheit des Hohlmaßes für trockene Gegenstände. Als Einheit des Gewichtes dient das Gewicht von einem Litre reines Wassers im luftleeren Raume, im Punkte seiner größten Dichtigkeit unter dem Namen Kilogramm.

In Oesterreich ist die Einheit des Hohlmaßes für trockene Gegenstände der Metzen = 1·9471 Wien. Kubiksch. = 0·615045 Hectol.; für das flüssige Hohlmaß hat man den Wiener Eimer = 1·792 Wien. Kubiksch., der 40 Maß hält, eine Maß = 1·415131 Litres.

Das Bedürfniß des täglichen Verkehres erheischt nun, die Inhaltsbestimmung der meisten Gefäße nicht im kubischen Maße, d. h. nicht in Kubiksch. und Kubikz., sondern in Eimern oder Metzen zu erfahren. Nachdem man die entsprechenden Abmessungen des Gefäßes in Schuhen und Zollen genommen, daraus das kubische Maß berechnet, so hat man dieses in das Eimermaß umzuwandeln, oder nach Umständen in Metzen, und auch oft nach dem Gewichte anzugeben. Da die Zahl $1·792 = \frac{1792}{1000} = \frac{4.4.4.4.7}{1000}$, so verwandelt man Eimer in Kubikfuß, wenn man die Anzahl der Eimer viermal mit 4, einmal mit 7 multiplicirt, und dann durch 1000 dividirt, und umgekehrt, Kubikfuße verwandelt man in Eimer, wenn man die Anzahl der Kubikfuße durch 1000 multiplicirt, und dann viermal durch 4 und einmal durch 7 dividirt.

Da ein niederösterreich. Eimer 40 Maß hat, so ist also 1 Maß $= \frac{1·792}{40} = 0·0448^{c'} = 77·4144^{c''}$, daher 1 Eimer = 3096·576 K. Z.

Das Gewicht von einer Wiener Maß gewöhnlichen Flußwassers ist gleich 2·5266 Wiener Pfund, daher 40 Maß oder 1 Eimer gleich 101·064 Wien. Pfd. In runder Zahl nimmt man als das Gewicht eines Kubikfußes gewöhnlichen Wassers bei gewöhnlicher Temperatur 56·4 Pfund.

I. Da $1·792 = 1 + \frac{8}{10}(1 - \frac{1}{100})$, so kann man Eimer in Kubikfuß verwandeln, wenn man zur Anzahl der Kubikfuße $\frac{8}{10}$ derselben hinzugibt, und $\frac{1}{100}$ des letzten Posten abzieht.

Beispiel 1. Es sey die Frage: wie viel 1000 Eimer Kubikschuh enthalten? so hat man:

nach der ersten Methode	nach der zweiten Methode
1000	1000
4000	800
16000	1800
64000	8
256000	1792 Kubikfuß.
1792000	

Antwort: 1792 Kubikfuß.

Beispiel 2. 5580 Eimer, wie viel Kubikfuß?

nach der ersten Methode	nach der zweiten Methode
5580	5580
22320	4464
89280	10044
357120	45
1428480	9999 Kubikfuß.
9999360	

Antwort: 9999 Kubikfuß.

II. Um Kubikschuhe in Eimer zu verwandeln, muß man die Anzahl der Kubikschuhe durch 1·792 dividiren, oder mit $\frac{1}{1{\cdot}792} = 0{\cdot}558035$ multipliciren. Da nun 0·558030 nahe $= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{8} - \frac{9}{1000}\right)$, so wird man von der Anzahl der Kubikschuhe die Hälfte nehmen, dazu $\frac{1}{8}$ dieser Hälfte hinzu geben, und $\frac{9}{1000}$ dieser Hälfte wegnehmen.

Beispiel 1. 7168 Kubikschuhe, wie viel Eimer?

nach der ersten Methode	nach der zweiten Methode
7168000	7168
1792000	3584
448000	448
112000	4032
28000	32
Antw.: 4000 Eimer.	4000 Eimer.

Beispiel 2. 1792 Kubikschuh in Eimer zu verwandeln:

nach der ersten Methode	nach der zweiten Methode
1792000	1792
448000	896
112000	112
28000	1008
7000	8
Antw.: 1000 Eimer.	1000 Eimer.

Beispiel 3. Wie viel Maß sind in einem Metzen = 1·9471 Kubikschuh enthalten?

1947·1
278·157
69·539
17·384
4·346,

daher 1 Metzen = 43·46 Maß.

III. Ein Metzen = 1·9471 Kubiksch. $= 2 - \frac{1}{20}\left(1 + \frac{6}{100}\right)$. Um also Metzen in Kubikschuhe zu verwandeln, so wird man 5 Proc. der Anzahl der Metzen rechnen, dazu 6 Proc. dieser 5 Proc. addiren; die so erhaltene Zahl, von der doppelten Anzahl Metzen abgezogen, gibt die entsprechende Anzahl der Kubikschuhe.

Beispiel 1. Es seyen 5136 Metzen in Kubiksch. zu verwandeln:

5136	10272
256·8	272
15·4	10000 Kubiksch.
272·2	

Die genaue Rechnung gibt 5136
1·9471
5136
4622·4
205·44
35·95
51
10000·30 Kubikschuhe.

Beispiel 2. 586 Metzen sollen in Kubikschuh verwandelt werden:

586	1172
29·3	31
1·7	1141 Kubikschuhe.
31	

IV. Um Kubikschuhe in Metzen zu verwandeln, muß man die Anzahl der Kubikschuhe durch 1·9471 dividiren, oder durch

$$\frac{1}{1{\cdot}9471} = 0{\cdot}51359 \text{ multipliciren.}$$

Da nun $0{\cdot}51359 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{100} - \frac{3}{1000}\right)$ ist, so wird man von der Anzahl der Kubikschuhe die Hälfte nehmen, zu der Hälfte 3 Proc. der Hälfte hinzu geben, und $\frac{1}{10}$ des letzten wegnehmen.

Beispiel 1. 3055 Kubiksch. sollen in Metzen verwandelt werden:

$$\begin{array}{r} 3055 \\ \hline 1527\cdot5 \\ 45\ 8 \\ \hline 1573\cdot3 \\ 4\cdot6 \\ \hline 1568\cdot7 \end{array}$$

1568·7, daher Antwort: 1569 Metzen.

Beispiel 2. 10000 Kubikschuhe wie viel Metzen?

$$\begin{array}{r} 10000 \\ \hline 5000 \\ 150 \\ \hline 5150 \\ 15 \\ \hline 5135 \end{array}$$

5135 Metzen, genau ist es 5135·9.

§. 466. 1) Es soll ein Würfel verfertiget werden, dessen hohler Raum gerade einen Metzen fassen soll. Nennen wir eine Seite des hohlen Würfels x, also den hohlen Rauminhalt x^2, so hat man zur Lösung der Aufgabe:

$$x^3 = 1\cdot9471\text{, daher } x = \sqrt[3]{1\cdot9471} = 1\cdot248713 \text{ Schuh,}$$

oder $x = 1'2''7'''$, also nahe $1\frac{1}{4}$ Schuh. Es frägt sich, wie groß ist der Fehler, wenn man jede Seite $= 1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ Schuh, also den Würfel $= \frac{125}{64} = 1\cdot953125$ annimmt, so ergibt sich, daß der Würfel nahe um 0·006 Kubiksch. oder 10 Kubikzoll zu groß ist. Nimmt man aber jede Seite der Bodenfläche zu $1\frac{1}{4}$ Schuh, so muß die Höhe des prismatischen Gefäßes $= 1\cdot2462$ Schuh oder $1'2''10'''\frac{1}{2}$ seyn.

2) Es soll ein balkenförmiges Gefäß mit quadratischer Grundfläche hergestellt werden, dessen Bodenkanten im Lichten 4′ lang sind, und der Inhalt des Gefäßes soll 10 Metzen betragen; wie groß muß die Höhe desselben seyn?

$$10 \text{ Metzen} = 19\cdot471 \text{ K.}'\text{, das Gefäß} = 16 . h \text{ K}'\text{,}$$

$$\text{daher } h = \frac{19\cdot471'}{16} = 1'\cdot2169 = 1'\cdot2''\cdot6$$

3) Es soll ein Cylinder verfertiget werden, dessen Inhalt ein Metzen betrage, so hat man, wenn h die Höhe und d der Durchmesser der Grundfläche ist:

$$\frac{\pi d^2 h}{4} = 1\cdot9471\text{; also } \frac{d^2 h}{4} = 0\cdot61978$$

$$d^2 h = 2\cdot47912.$$

Ist nun der Durchmesser des Bodens $d = 1\frac{1}{2}$ Schuh, so hat man $h = 2\cdot47912 . \frac{4}{9} = 1\cdot10183$, daher nahe die Höhe $= 1\cdot1$ Schuh.

4) Wie viel Maß enthält ein Cylinder, dessen Höhe 10″ und

der Durchmesser der Grundfläche = 4'' ist: 1 Eimer = 1·792 c', also 1 Maß = 0·0448c' = 77·4144c''; der Körperinhalt dieses Cylinders ist gleich 40 π c''. Da nun $1^{c''} = \frac{1}{77 \cdot 4144}$ Maß, so hat der Inhalt dieses Cylinders in Maßen $= \frac{40\pi}{77 \cdot 4144} = 1 \cdot 6195$.

§. 467. Sehr oft ist es die Aufgabe des Geometers, aus den Abmessungen eines Körpers sein Gewicht zu bestimmen. Als leitender Grundsatz diene uns hier: das specifische Gewicht eines Körpers ist die abstrakte Zahl, welche ausdrückt, wie oftmal das Gewicht eines Körpers größer ist, als das Gewicht eines gleich großen Raumes mit Wasser ausgefüllt. Z. B. das specifische Gewicht des geschmiedeten Eisens ist 7·75, d. h. ein Würfel von geschmiedetem Eisen ist 7·75 so viel im Gewichte, als ein eben so großer Würfel von Wasser. Da wir nun wissen, daß ein Kubikschuh Wasser 56·4 Pfund wiegt, so wird also ein Kubikschuh geschmiedetes Eisen 7·75 . 56·4 Pfd. = 437·1 Pfd., daher wird das Gewicht von x Kubiksch. geschmied Eisens x . 7·75 . 56·4 Wiener Pfund wiegen. Wir können daher sagen, das Gewicht eines Körpers in Wiener Pfunden ist gleich seinem Rauminhalte in Wiener Kubikschuhen, multiplicirt mit seinem specifischen Gewichte, multiplicirt mit 56·4. Bei Stangen, Blechen und andern Körpern gibt man lieber die Abmessungen, wenigstens einiger, in Zollen an. Ist nun s das specifische Gewicht eines Körpers, V sein Rauminhalt in Kubikschuhen, so ist s . V . 56·4 Pfd. sein Gewicht. Bestimme ich aber den Rauminhalt des Körpers statt in Kubikschuhen in Kubikzollen, und nenne ich die Anzahl von Kubikzollen v, die einen eben so großen Rauminhalt ausdrücken, als V Kubikschuhe, so wird v = 1728 . V, daher dann das Gewicht des Körpers gleich $\frac{s \cdot v \cdot 56 \cdot 4}{1728}$ Pfd., oder

$= \frac{s \cdot v \cdot 56 \cdot 4 \cdot 32}{1728} = \frac{s \cdot v \cdot 1804 \cdot 8}{1728}$ Lothe $= s \cdot v \cdot \frac{9 \cdot 4}{9} = 1 \cdot 0444 \cdot s \cdot v$ nahe 1·05 . s . v. Daher ist das Gewicht eines Kubikzolles = 1·04 . s Lothe, folglich bei einer ungefähren beiläufigen Rechnung gleich s Lothe, d. h. man kann sagen, annäherungsweise hat ein Wiener Kubikzoll eines Körpers so viel Lothe Wiener Gewicht, als die Zahl seines specifischen Gewichtes andeutet. Genauer wird das Resultat, wenn man 4 Procent dazu schlägt. Das specifische Gewicht des Schmiedeeisens ist 7·75, daher wiegt ein Kubikfuß davon 7·75 . 56·4 = 437·1 Pfd; daher also ein Kubikzoll $\frac{437 \cdot 1 \cdot 32}{1728} = 8 \cdot 09$ Lothe.

Ohne alle diese Rechnung hätte man annäherungsweise gleich sagen können: da das specifische Gewicht des geschmiedeten Eisens

7·75 ist, so ist das Gewicht eines Kubikzolles dann 7·75 Lothe, mit einem Fehler von $\frac{1}{4}$ Loth, genauer:

$$7·75 + 4\tfrac{1}{2}\% \text{ von } 7·75, \text{ d. h. } 7·75 + 0·35 = 8·1.$$

Diese Regel möchte daher in manchen Fällen zur schnellen Berechnung nicht ohne Werth seyn.

§. 468. 1) Eine geschmiedete quadratische eiserne Stange sey 8′ hoch und habe 2″ im Gevierte; wie groß ist das Gewicht derselben? 8′ = 96″, daher der Kubikinhalt dieser Stange = 96.4 = 384 Kubikzoll. Den Kubikzoll zu 8 Loth oder $\frac{1}{4}$ ℔ angenommen, gibt dieß $\frac{384}{4}$ ℔ = 96 ℔.

2) Eine cylindrische kupferne Stange habe 6′ Höhe und 3″ im Durchmesser; wie groß ist ihr Gewicht? das specifische Gewicht des Kupfers = 9.

Das Gewicht eines Kubikzolles = 9·4 Loth,

$$\text{der kubische Inhalt} = 72 . \frac{22}{7} . \frac{9}{4} \text{ Kubikzoll,}$$

$$\text{daher Gewicht} = 72 . \frac{22}{7} . \frac{9}{4} . \frac{9.4}{32} \text{ ℔} = 149·5 \text{ ℔}.$$

3) Eine Röhre, deren Durchmesser 4″ ist, soll mit Quecksilber (specif. Gewicht = 13·5) so angefüllt werden, daß das Gewicht des Quecksilbers gerade 100 Pfd. beträgt; wie hoch wird dieser Cylinder seyn? Nennen wir die Höhe x in Zollen, so ist der kubische Inhalt des Cylinders $x . 4 . \frac{22}{7}$ Kubikzoll,

$$\text{daher Gewicht } x . 4 . \frac{22}{7} . \frac{13·5 . 56·4}{1728} = 100 \text{ Pfd.}$$

$$\text{also } x = \frac{7 . 1728 . 100}{4 . 22 . 13·5 . 56·4} \text{ Zoll}$$

$$x = 18'''·05.$$

4) Es soll eine bleierne Walze von 2′ Höhe verfertiget werden, die 100 Pfd. im Gewichte haben soll; wie groß wird der Durchmesser dieser Walze seyn, wenn das specifische Gewicht des Bleies = 11 ist? Es sey der Durchmesser = x″, so ist der kubische Inhalt

$$= \frac{x^2}{4 . 144} . \frac{22}{7} . 2 \text{ Kubikschuhe,}$$

$$\text{daher das Gewicht} = \frac{x^2}{4 . 144} . \frac{44}{7} . 11 . 56·4 = 100 \text{ Pfd.,}$$

$$\text{daher } x^2 = \frac{144 . 7 . 100}{121 . 56·4}$$

$$x = \sqrt{\frac{144 . 700}{121 . 56·4}}$$

$$x = 3·843''.$$

5) Ein cylindrisches Seil ist 10° lang, 1″ im Durchmesser, und wiegt $9\frac{1}{4}$ Pfd; wie groß ist das specifische Gewicht desselben? Der Rauminhalt dieses Cylinders $= \frac{22}{28} \cdot \frac{60}{144} = \frac{11}{14} \cdot \frac{5}{12}$ Kubikfuß, daher $\frac{11}{14} \cdot \frac{5}{12} c' = \frac{37}{4}$ Pfd., mithin Gewicht eines Kubikfußes = 28·25 Pfd., daher specif. Gewicht $= \frac{28 \cdot 25}{56 \cdot 4} = 0 \cdot 5$.

6) Ein cylindrischer Draht von Gold (specif. Gewicht = 19) ist 19′ lang und 1 Pfd. im Gewichte; wie groß ist sein Durchmesser? Es sey der zu suchende Durchmesser $= x'' = \frac{x'}{12}$, daher:

$$\text{Rauminhalt des Cylinders} = \frac{22}{28} \cdot \frac{x^2}{144} \cdot 19,$$

$$\text{daher Gewicht desselben} = \frac{22}{28} \cdot \frac{x^2}{144} \cdot 19 . 19 . 56.4 = 1 \text{ Pfd.},$$

$$\text{mithin } x^2 = \frac{28 . 144}{22 . 19\ 19 . 56 \cdot 4},$$

$$\text{und somit } x = 0'' \cdot 09488 = 1''' \cdot 1385.$$

7) Ein Kupferdraht 10 Pfd. im Gewichte und 1‴ dick; wie lang ist er, wenn das specif. Gewicht des Kupfers = 9 ist? Es sey die Länge = x′, so hat man Rauminhalt des Cylinders $= \frac{22}{28} \cdot \frac{x}{144 . 144}$, Gewicht desselben $= \frac{22}{28} \cdot \frac{x}{144 . 144} \cdot 9 . 56 \cdot 4 = 10$,

$$\text{daher } x = \frac{28 . 144 . 144 . 10}{22 . 9 . 56 \cdot 4}$$

$$x = 519 \cdot 93 \text{ Schuh}.$$

8) 24 Stück Eisenblech, $1\frac{1}{3}'$ lang, $1\frac{1}{12}'$ breit, wiegen 50 Pfd.; da nun der Kubikzoll Eisen $\frac{1}{4}$ Pfd. wiegt, wie dick ist eines dieser Bleche? Es sey die Dicke $= x''' = \frac{x''}{12}$, so ist der Kubikinhalt eines dieser Bleche $= 16 . 13 . \frac{x}{12}$ Kubikzoll. Da nun das Gewicht eines Bleches $= \frac{50}{24}$ ℔ $= \frac{50}{6} \cdot \frac{1}{4}$ Pfd. ist, so ist der Kubikinhalt eines Bleches $= \frac{50}{6}$ Kubikzoll, daher $16 . 13 . \frac{x}{12} = \frac{50}{6}$,

$$\text{mithin } x = \frac{50 . 12}{6 . 13 . 16} \text{ Linien},$$

$$x = \frac{25}{52} \text{ nahe } \frac{1}{2} \text{ Linie}.$$

9) Ein gerades zehnseitiges regelmäßiges Prisma hat eine Höhe von 10′ und einen Körperinhalt von 7694 Kubikschuhen; wie groß ist

eine Seite davon? Es sey eine Seite $= x'$, so ist der Flächeninhalt des regelmäßigen Zehnecks:

$$10 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \text{cotg.}\, 18^{\circ}, \text{ daher der Körperinhalt:}$$

$$100 \cdot \frac{x^2}{4} \cdot \text{cotg.}\, 18^{\circ} = 7694$$

$$x = \sqrt{\frac{4 \cdot 7694}{100 \text{ cotg. } 18^{\circ}}}$$

$$x = 9{\cdot}99986,$$

oder kurz $x = 10'$.

§. 469. Zwei Prismen heißen ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnlich sind, ihre Höhen sich gerade so verhalten, wie zwei gleichliegende Seiten der Grundflächen, und wenn die Seitenkanten dieselbe Neigung gegen die Grundfläche haben. Es seyen B und b die Grundflächen zweier ähnlicher Prismen, H und h ihre Höhen, während L und l zwei gleichliegende Seiten der Grundflächen, so hat man:

$$B : b = L^2 : l^2$$

$$H : h = L : l, \text{ daher:}$$

$$BH : bh = L^3 : l^3,$$

d. h. die Körperinhalte ähnlicher Prismen verhalten sich wie die Würfel (oder dritten Potenzen) ihrer gleichliegenden Seiten.

Zwei Walzen heißen ähnlich, wenn ihre Achsen gleich geneigt sind gegen die Grundflächen, und dieselben sich gerade so, wie die Durchmesser derselben verhalten.

Es läßt sich leicht sehen, daß die Körperinhalte ähnlicher Walzen sich gerade so verhalten, wie die Würfel der Durchmesser ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Achsen.

§. 470. Ein Walzenausschnitt ist ein gerader Cylinder, dessen Grundfläche ein Kreisausschnitt ist. Ist nun

$$OA = OB = oa = ob = r; \; AOB = aob = \varphi;$$

oder Bogen $AB = ab = b$, $Oo = h$, so hat man für den Körperinhalt dieses Walzenausschnittes:

$$V = \frac{\varphi}{360} \pi r^2 h, \text{ oder } V = \frac{brh}{2}.$$

Eine cylindrische Röhre ist der Raum zwischen zwei geraden koncentrischen Kreiscylindern; ist daher R der Halbmesser des größeren (massiven) r der Halbmesser des kleineren (hohlen oder lichten) Cylinders, h die Höhe oder Länge beider, so hat man für den Körperinhalt dieser Röhre:

$$\pi R^2 h - \pi r^2 h = \pi h (R^2 - r^2) = \pi h (R - r)(R + r).$$

Nennt man nun d die Röhrendicke, so hat man für den Körperinhalt der Röhre:

$$\pi h d (2r + d) = 2r\pi d h + \pi d^2 h,$$

d. h. der Körperinhalt einer Röhre ist gleich dem Umfange im Lichten ($2r\pi$), multiplicirt mit der Dicke und Länge der Röhre mehr dem Körperinhalte eines Cylinders von derselben Länge, wo die Dicke der Halbmesser der Grundfläche ist.

Ist nun die Röhrendicke sehr gering, so wird dieser Cylinder bei praktischen Rechnungen weggelassen werden können.

Beispiel 1. Eine Brunnenröhre sey 15′ lang, der Durchmesser im Lichten sey 8″, die Dicke 3″; wie groß ist der Körperinhalt derselben? Nach der ersten Formel $\pi(R^2 - r^2)h$ hat man:

$$\tfrac{22}{7}\left(\tfrac{49}{144} - \tfrac{16}{144}\right) 15 = \tfrac{605}{56} = 10{\cdot}8 \text{ Kubikschuhe;}$$

nach der zweiten:

$$\tfrac{22}{7} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{1}{4} \cdot 15 + \tfrac{22}{7} \cdot \tfrac{15}{16} = \tfrac{22}{7}\left(\tfrac{10}{4} + \tfrac{15}{16}\right) = 10{\cdot}80 \text{ Kubikschuhe.}$$

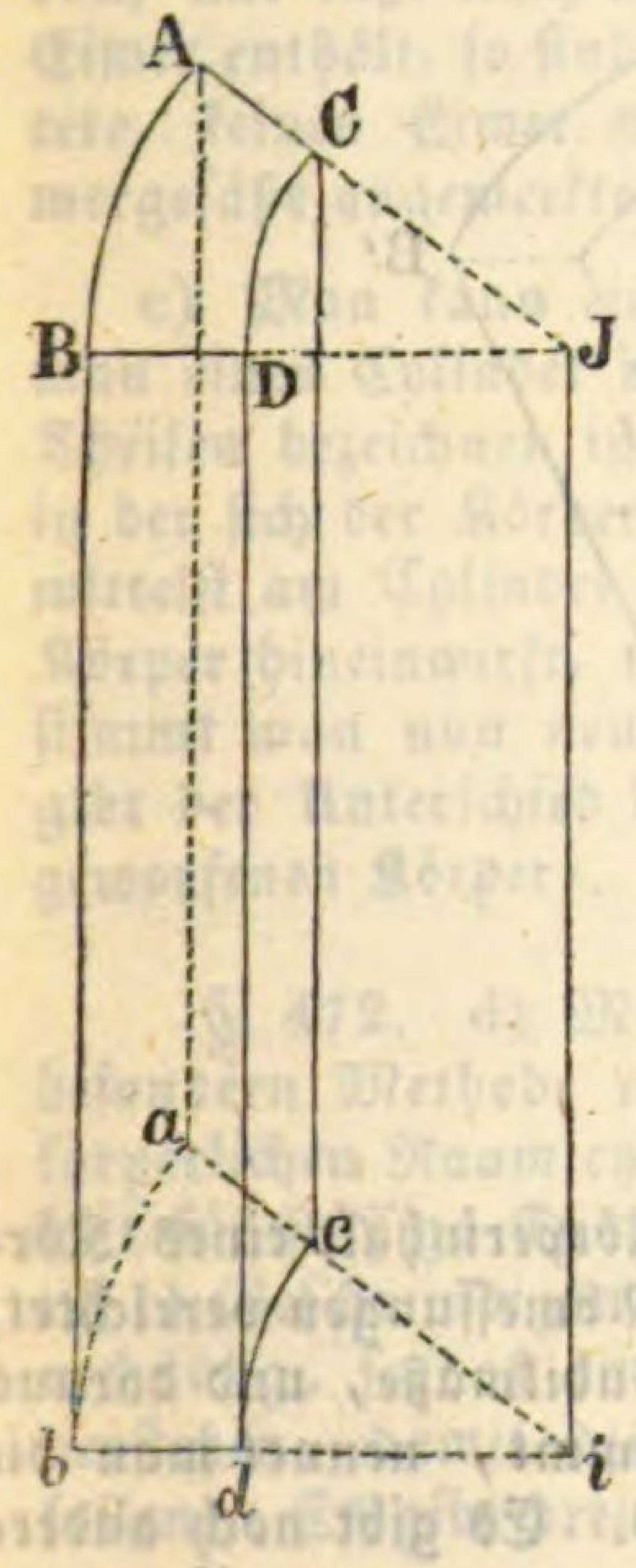
Würde man hier den Cylinder $\frac{22}{7} \cdot \frac{15}{16}$ vernachläßigen wollen, so würde das Resultat 7·85 nahe um 3 Kubikschuhe zu klein seyn.

Beispiel 2. Es sey eine eiserne Röhre 7″ lang, 4″ im Lichten, die Dicke 2‴, so hat man:

$$\tfrac{22}{7}\left(\tfrac{169}{36} - 4\right) 7 \text{ Kubikz.} = 15{\cdot}28 \text{ Kubikz., oder:}$$

$$\tfrac{22}{7} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{6} + \tfrac{22}{7} \cdot 7 \cdot \tfrac{1}{36} = 14{\cdot}67 + 0{\cdot}61 = 15{\cdot}28 \text{ Kubikz.}$$

Fig. 595



Wir wollen untersuchen, wie groß der Fehler ist, wenn man den Cylinder, dessen Durchmesser die Dicke ist, vernachläßigt.

Nennen wir den wahren Körperinhalt der Röhre R, den auf die angeführte Weise angenäherten R′, so hat man:

$$R = 2r\pi d h + d^2 h \pi, \quad R' = 2r d h \pi,$$

daher Fehler

$$= R - R' = d^2 h \pi = \frac{d^2 h \pi}{2r\pi d h} \cdot R' = \frac{d}{2r} \cdot R',$$

$$\text{daher Fehler} : R' = d : 2r,$$

$$\text{und} \quad R = R' + R' \cdot \frac{d}{2r}.$$

Der Fehler, den man auf diese Art macht, ist der sovielte Theil des angenäherten Werthes der Röhre, als der wievielste Theil die Dicke vom Durchmesser im Lichten ist.

Es sey der Röhrenausschnitt (gebildet durch koncentrische Bögen innerhalb ihrer Halbmesser) ABCDJabcdi, wobei die Bögen AB und CD, ab und cd, ihre Mittelpunkte in J und i haben. Da der Körperinhalt jedes prismatischen und cylindrischen

Körpers gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe ist, so hat man:

$$\text{Röhrenausschnitt} = ABCD.h,$$

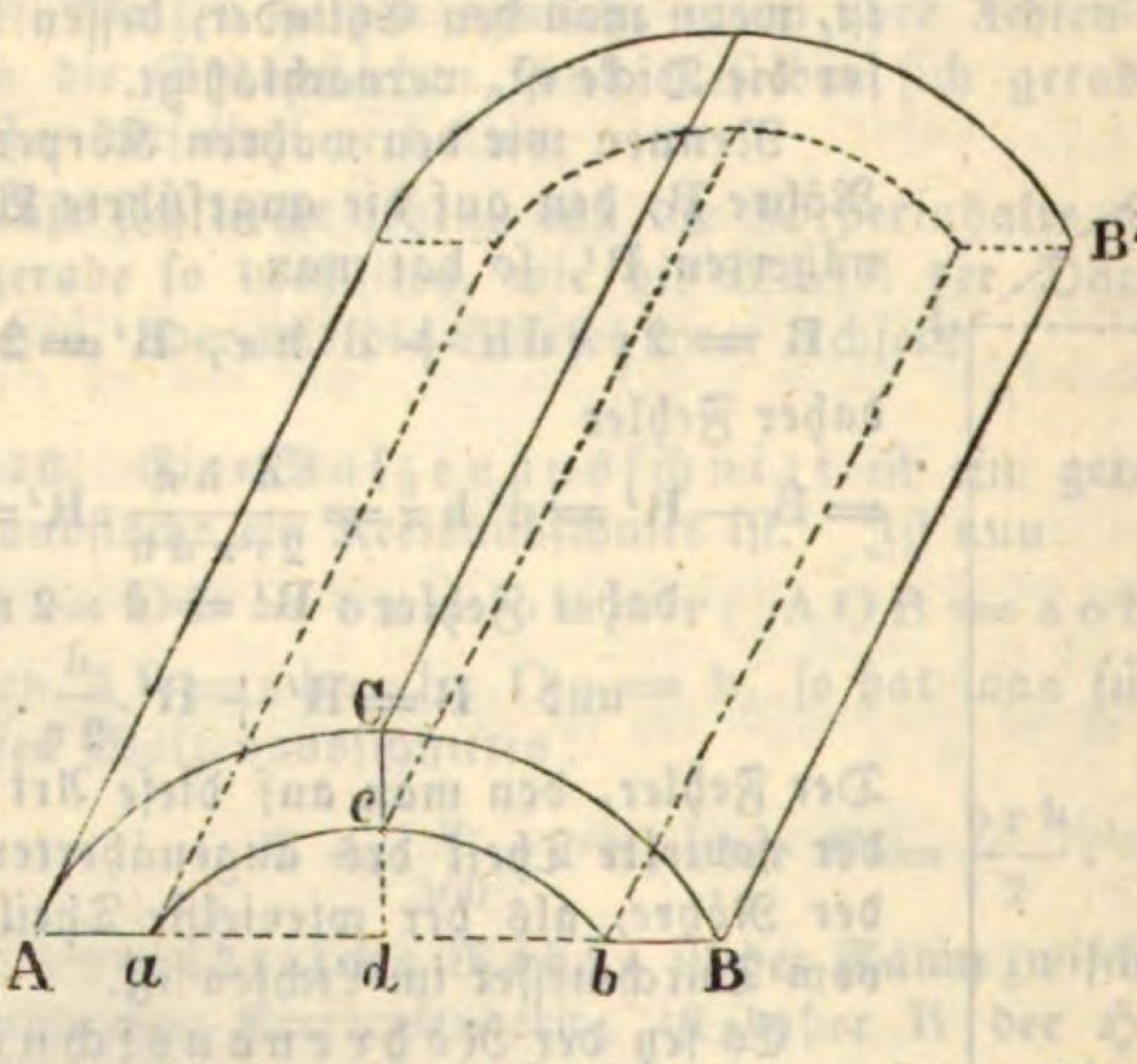
wo h die Höhe seyn soll; da nun $ABCD = (AB + CD)\frac{AC}{2}$ ist, so hat man Röhrenausschnitt $= (AB + CD).\frac{AC}{2}.h$, d. h. der Körperinhalt eines **Röhrenausschnittes** ist gleich der halben Summe der zwei Bögen, multiplicirt mit ihrer Entfernung und der Höhe.

Es sey der Röhrenabschnitt ABCabcB′, der durch eine Ebene von der Röhre abgeschnitten wird, die mit der Achse derselben gleichlaufend ist, so wird ihr Körperinhalt gleich seyn der Grundfläche ABCabc, multiplicirt mit der Höhe. Der Flächeninhalt der Grundfläche ist gleich dem Unterschiede der zwei Kreisabschnitte ABC und abc. Man hat also bei genauerer Rechnung die erforderlichen Abmessungen von ab, cd, AB und Cd zu machen, daraus auf die früher gelehrte Art die Kreisabschnitts-Flächeninhalte zu bestimmen und ihren Unterschied mit der Höhe zu multipliciren. Bei minder strengen, nur annäherungsweisen Rechnungen wird es hinreichen:

$$ABC = \tfrac{2}{3}AB.Cd;\quad abc = \tfrac{2}{3}ab.cd,$$

daher Röhrenabschnitt $= \frac{2}{3}h(AB.Cd - ab.cd)$ zu setzen.

Fig. 596.



§. 471. Die bisher gelehrte Art, den Körperinhalt eines Körpers dadurch zu finden, daß man die nöthigen Abmessungen verrichtet, und daraus durch Rechnung den Inhalt in Kubikmaße, und daraus durch Rechnung in andern Körpermaßen bestimmt, nennet man die kubische Ausmessung eines Körpers. Es gibt noch andere

Methoden, den Körperinhalt irgend eines gegebenen Raumes zu bestimmen.

a) Durch Abwiegen. Kennt man genau das specifische Gewicht irgend eines Körpers, so gibt die Kenntniß von dem absoluten Gewichte dieses Körpers in Pfunden, Lothen 2c. uns das Hilfsmittel, seinen Rauminhalt zu finden, wie auch immer seine Gestalt sey. Bedeutet nämlich G das Gewicht eines Körpers in Wiener Pfunden, v seinen Rauminhalt in Wiener Kubikfußen, s sein specifisches Gewicht, so hat man bekanntlich:

$$G = v \,.\, s \,.\, 56{\cdot}4,$$

und daher folglich:

$$v = \frac{G}{s \,.\, 56{\cdot}4} \text{ Kubikfuß},$$

$$\text{oder } v = \frac{G}{s} \cdot \frac{1728^{c''}}{56{\cdot}4}, \text{ oder } v = \frac{G}{s} \,.\, 30{\cdot}6 \text{ Kubikzoll.}$$

Z. B. ein eiserner Körper (spec. Gewicht $= 7{\cdot}25$) habe 100 Pfd, wie groß sein Rauminhalt?

$$\text{Antwort} = \frac{100}{7{\cdot}25} \cdot \frac{1728^{c''}}{56{\cdot}4} = 422{\cdot}59^{c''}.$$

b) Durch Aichung. Man füllt den hohlen, auszumessenden Raum mit Wasser, welches man nach und nach in ein Gefäß mit bestimmtem Rauminhalte abläßt, wodurch man dann den Inhalt des gegebenen Raumes findet. Füllt man so z. B. ein Faß mit Wasser voll, und läßt nach und nach dasselbe in ein Gefäß ab, welches einen Eimer enthält, so findet man, wie viel Eimer im Fasse sind; das letztere, keinen Eimer mehr ausfüllende Wasser wird durch die am Eimergefäße angemerkten Theile eines Eimers bestimmt.

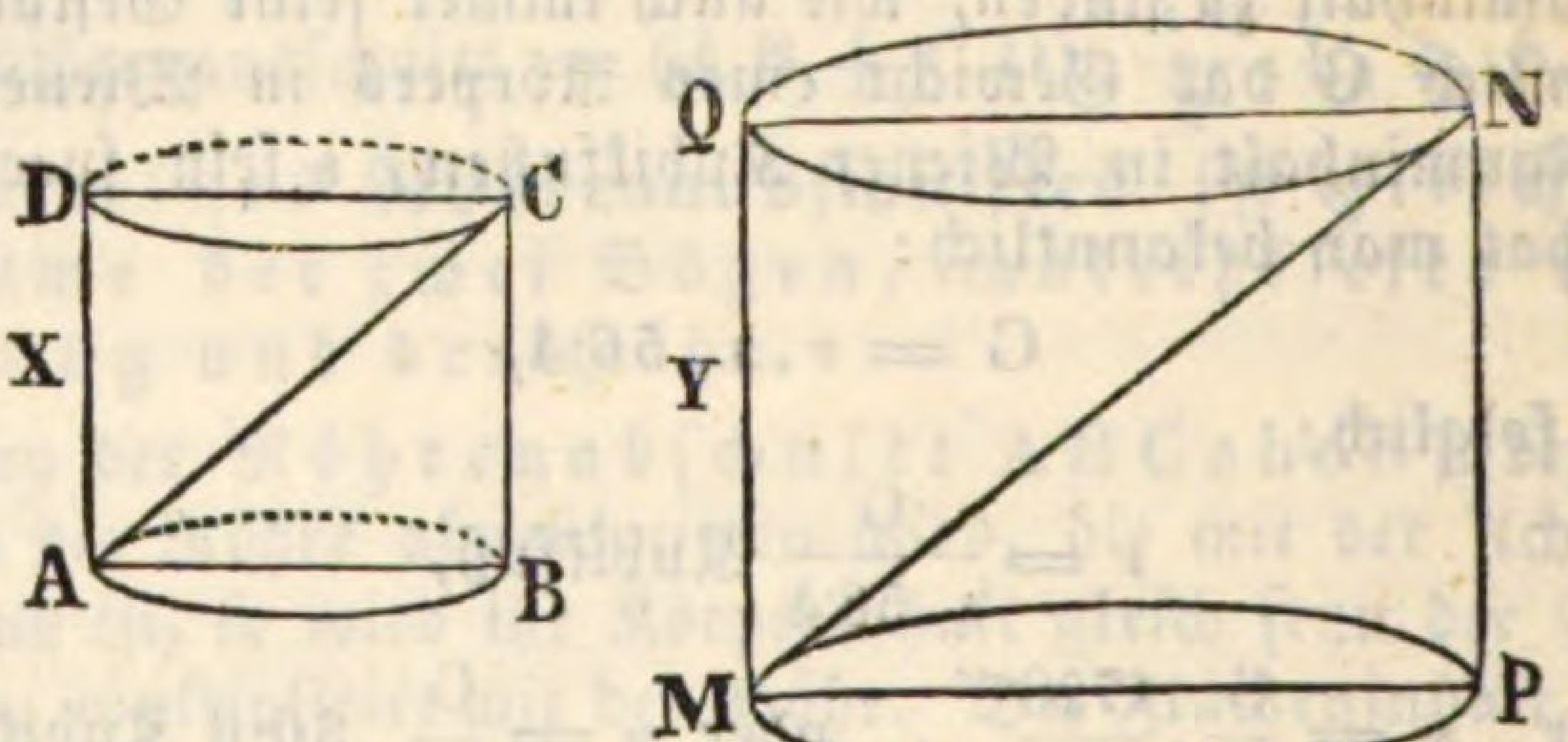
c) Man kann einen Körperinhalt auch dadurch bestimmen, wenn man einen Cylinder nimmt, dessen Körperinhalt in seinen einzelnen Theilen bezeichnet ist, dann den Cylinder mit einer Flüssigkeit füllt, in der sich der Körper nicht auflöset, den Rauminhalt dieser Flüssigkeit mittelst am Cylinder angebrachten Eintheilungen bestimmt, dann den Körper hineinwirft, wodurch die Flüssigkeit in die Höhe steigt. Bestimmt man nun neuerdings jetzt den Rauminhalt der Flüssigkeit, so gibt der Unterschied beider Rauminhalte den Rauminhalt des hineingeworfenen Körpers.

§. 472. d) Mittelst Visirstäben. Dieß sind nach einer besondern Methode eingetheilte Maßstäbe, mittelst welchen man den körperlichen Raum cylindrischer Gefäße nach der landesüblichen Einheit für flüssige Dinge bestimmen kann. Der Hauptzweck derselben ist 1) Geschwindigkeit in der Berechnung, und 2) Leichtigkeit der Berechnung, so daß auch Leute, die wenig oder nichts von Mathematik verstehen, damit die entsprechenden Raumbestimmungen vornehmen sollen. Es gibt dreierlei Arten von Visirstäben.

I. Kubische Visirstäbe.

Denken wir uns zwei gleichseitige, d. h. gerade Cylinder, wo bei beiden die Höhe gleich dem Durchmesser der Grundfläche ist.

Fig 597.



Es sey AB = BC = a; MP = NP = b, so ist, wenn wir den Körperinhalt des ersten Cylinders X und des zweiten Y nennen:

$$X = \frac{\pi a^3}{4};\ Y = \frac{\pi b^3}{4},$$

daher $X : Y = a^3 : b^3$.

Da nun die Dreiecke ABC und MNP einander ähnlich sind, so hat man $AC^3 : MN^3 = a : b$, daher $AC : MN = a^3 : b^3$, und somit:

$$X : Y = \overline{AC}^3 : \overline{MN}^3.$$

Es soll nun der Cylinder X so groß seyn, daß die Einheit des Flüssigkeitsmaßes (für unsere Gegenden ein niederöst. Eimer) gerade hineingehet, also $\frac{\pi a^3}{4} = 1{\cdot}792$ Kubikschuhe.

$$a = \sqrt[3]{\frac{7{\cdot}168}{\pi}}$$

$$a = 1{\cdot}31648$$

$$a = 1'3''10'''.$$

Es ist dann $AC = a\sqrt{2} = 1'{\cdot}861791 = 1'10''4'''{\cdot}1$. Nennen wir nun der Kürze halber $AC = m$ und $MN = d$, so hat man:

$X : Y = m^3 : d^3$, oder $Y : 1$ Eimer $= d^3 : m^3$, daher $Y = \frac{d^3}{m^3}$. Eimer.

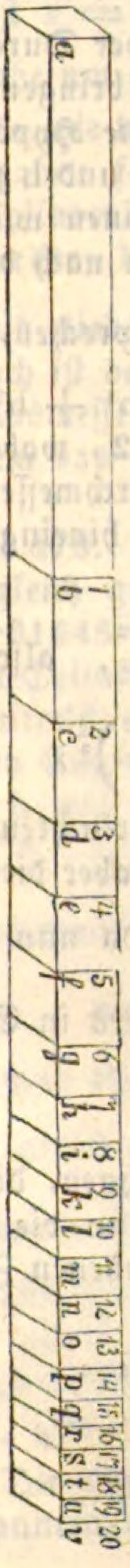
Denken wir uns nun einen Maßstab, der in seiner Eintheilung $m, m\sqrt[3]{2}, m\sqrt[3]{3}, m\sqrt[3]{4}, m\sqrt[3]{5}, m\sqrt[3]{6}, m\sqrt[3]{7}$ u. s. w., allgemein $m\sqrt[3]{x}$ trägt, so wird dieser Stab in den Cylinder Y in der Richtung MN angebracht, und gesetzt, er gebe $d = MN = m\sqrt[3]{x}$, so hat man:

$$Y = \frac{(m\sqrt[3]{x})^3}{m^3} \text{ Eimer} = x \text{ Eimer}.$$

Da man so auf dem Visirstabe die Entfernungen m, $m\sqrt[3]{2}$, $m\sqrt[3]{3}$, $m\sqrt[3]{4}$ u. s. w. aufträgt, aber bei jeder dieser Eintheilungen die Zahlen 1, 2, 3, 4 u. s. w. ansetzt, so sieht man, daß dieser Visirstab schief in der Stellung der MN angebracht durch die Zahl, die bei N eintrifft, alsogleich die Anzahl der Eimer angibt, die der Cylinder Y enthält.

Verfertiget man nun eine eingetheilte Stange, und macht:

Fig. 598.



$ab = m$	$= 1'{\cdot}862$,	oder	$1'10''34$
$bc = m\sqrt[3]{2}$	$= 2{\cdot}346$	»	$2'4''15$
$cd = m\sqrt[3]{3}$	$= 2{\cdot}685$	»	$2'8''22$
$de = m\sqrt[3]{4}$	$= 2{\cdot}955$	»	$2'11''46$
$ef = m\sqrt[3]{5}$	$= 3{\cdot}184$	»	$3'2''20$
$fg = m\sqrt[3]{6}$	$= 3{\cdot}383$	»	$3'4''60$
$gh = m\sqrt[3]{7}$	$= 3{\cdot}562$	»	$3'6''74$
$hi = m\sqrt[3]{8}$	$= 3{\cdot}724$	»	$3'8''68$
$ik = m\sqrt[3]{9}$	$= 3{\cdot}873$	»	$3'10''47$
$kl = m\sqrt[3]{10}$	$= 4{\cdot}011$	»	$4'0''13$
$lm = m\sqrt[3]{11}$	$= 4{\cdot}141$	»	$4'1''69$
$mn = m\sqrt[3]{12}$	$= 4{\cdot}262$	»	$4'3''15$
$no = m\sqrt[3]{13}$	$= 4{\cdot}378$	»	$4'4''53$
$op = m\sqrt[3]{14}$	$= 4{\cdot}487$	»	$4'5''84$
$pq = m\sqrt[3]{15}$	$= 4.592$	»	$4'7''09$
$qr = m\sqrt[3]{16}$	$= 4{\cdot}691$	»	$4'8''30$
$rs = m\sqrt[3]{17}$	$= 4{\cdot}787$	»	$4'9''44$
$st = m\sqrt[3]{18}$	$= 4{\cdot}879$	»	$4'10''55$
$tu = m\sqrt[3]{19}$	$= 4{\cdot}968$	»	$4'11''60$
$uv = m\sqrt[3]{20}$	$= 5{\cdot}054$	»	$5'0''64$,

so heißt ein solcher Stab ein **kubischer Visirstab**. Stellt man nun solch einen Visirstab mit dem unteren Ende a in einen gleichseitigen Cylinder (wo die Höhe und der Durchmesser der Grundfläche einander gleich

sind) so ein, daß a am einen Ende des Bodendurchmessers ankommt, während die Stange schief am entgegengesetzten Ende des obern Durchmessers ansteht, so gibt die Zahl des Stabes, welcher am Rande des obern Durchmessers ansteht, die Anzahl der Eimer des Gefäßes.

So vortheilhaft dieß für den ersten Augenblick erscheint, so ist doch der Gebrauch der kubischen Visirstäbe ein sehr eingeschränkter, da ich nur die Gefäße damit ausmessen kann, die mit dem Normalgefäße ähnlich sind. Wollte man z. B. den von uns beschriebenen kubischen Visirstab auf andere, als auf gleichseitige Cylinder anwenden, so kommt man in arge Fehler.

Nehmen wir einen Cylinder, dessen Höhe $= h$, der Durchmesser b ist, und wobei wir $h = rb$ annehmen wollen, und bringen unsern Visirstab in die entsprechende Stellung, so daß er die Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks bildet, dessen Katheten h und b sind; so frägt es sich, welche Zahl x an dem Visirstabe erscheinen wird, am Ende des obern Durchmessers. Da alle diese Zahlen nach der Formel $m\sqrt[3]{x}$ aufgetragen sind, so wird die Zahl x entsprechen, welche macht, daß $(m\sqrt[3]{x})^2 = h^2 + b^2$, oder $(m\sqrt[3]{x})^2 = b^2 + b^2 r^2$ ist, wodurch wir x bestimmen werden. Da nun $m = a\sqrt{2}$, wobei a die Bedeutung wie früher hat, daß es nämlich der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders ist, in den genau ein Eimer hineingeht, so hat man:

$$2a^2\sqrt[3]{x^2} = b^2(1 + r^2); \text{ daher } \sqrt[3]{x} = \frac{b}{a}.\frac{\sqrt{1+r^2}}{\sqrt{2}}, \text{ also:}$$

$$x = \frac{b^3}{a^3}\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

d. i. die Zahl, die der Visirstab als Inhalt des untersuchten Cylinders in Eimern angeben wird. Der wirkliche Inhalt aber dieses Cylinders ist gleich $\frac{\pi b^2}{4}.br = \frac{\pi b^3 r}{4}$ in Kubikfußen. Da nun ein Eimer $= \frac{\pi a^3}{4}$ ist, so hat der wirkliche Inhalt des Cylinders in Eimern:

$$\frac{b^3}{a^3}.r = n,$$

wenn wir nämlich durch n die Anzahl der Eimer bezeichnen, die wirklich in den Cylinder hineingehen. Vergleichen wir nun die wahre Zahl n mit der durch den Visirstab als Inhalt angegebenen Zahl x, so hat man:

$$\frac{x}{n} = \frac{1}{r}\left(\frac{1+r^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{1+r^2}{r}\sqrt{1+r^2}$$

$$\frac{x}{n} = 0{\cdot}35355\,\frac{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}{r}$$

Setzet man z. B. $r = \frac{3}{2}$, d. h. die Höhe des untersuchten Cylinders ist gleich $1\frac{1}{2}$ vom Bodendurchmesser, so findet man:

$$\frac{x}{n} = 1·381,$$

$$\text{d. h.}\quad x = 1·381\,n,$$

$$\text{daher}\quad x - n = 0·381\,n.$$

Wenn also die Höhe $1\frac{1}{2}$ des Bodendurchmessers ist, so gibt der kubische Visirstab, der für gleichseitige Cylinder eingerichtet ist, den Inhalt um mehr als $\frac{1}{3}$ des wirklichen Inhaltes zu groß an.

Ist $r = \frac{11}{10}$, so findet man $\frac{x}{n} = 1·0559$, daher $x - n = 0·0559n$, d. h. nahe um 6% des wahren Inhaltes zu groß.

So wie wir die Anleitung zur Verfertigung des kubischen Visirstabes gaben für gleichseitige Cylinder, so kann für was immer für einen Cylinder, der gerade einen Eimer enthält, ein Visirstab verfertiget werden, dann ist natürlich m eine andere Länge, aber am Visirstabe sind wieder $m\sqrt[3]{2}$, $m\sqrt[3]{3}$, $m\sqrt[3]{4}$ u. s. w. aufzutragen, und der Gebrauch ist derselbe. Allein auch hier lassen sich nur solche Cylinder damit ausmessen, die mit dem Cylinder nach dem Visirstabe verfertiget (von dem das m genommen wurde), ähnlich sind.

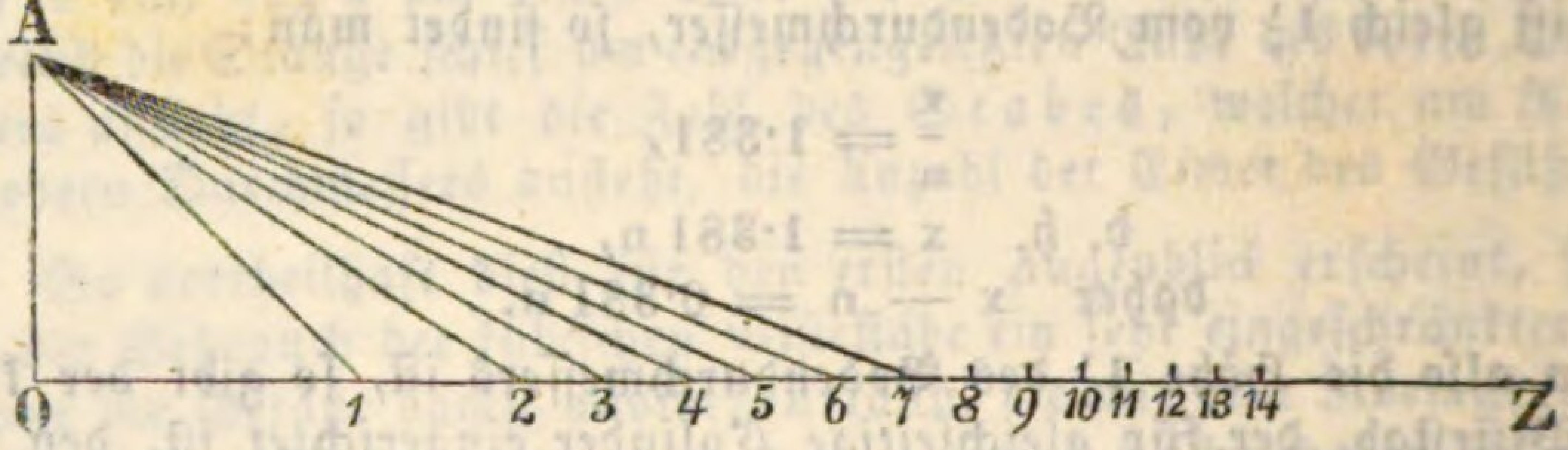
§. 473. Quadratische Visirstäbe. Verfertiget man sich einen gleich getheilten Maßstab, dessen jeder einzelne Theil gleich $a = 1·31648$ Wiener Schuh ist (d. i. der Durchmesser eines gleichseitigen Cylinders, dessen Inhalt ein niederösterr. Eimer ist), so kann man mittelst eines solchen Maßstabes den Inhalt jedes Cylinders gleich in Eimern angeben. Denn es sey ein Cylinder, wo der Durchmesser b und die Höhe h sey, so ist sein Inhalt in Kubikfußen $= \frac{\pi b^2 h}{4}$. Da nun 1 Eimer $= \frac{\pi a^3}{4}$ ist, so hat man Inhalt des obigen Cylinders in Eimern

$$= \frac{\pi b^2 h}{4} : \frac{\pi a^3}{4}, \text{ d. h. } = \frac{b^2 h}{a^3} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{a}\right).$$

Mißt man also den Durchmesser b mit dem Maßstabe, dessen einzelne Theile gleich a sind, so ist $\frac{b}{a}$ die Zahl, die dieser Maßstab für b gibt, und eben so $\frac{h}{a}$ die Zahl, die dieser Maßstab für h gibt. Man braucht also diesen Maßstab, dessen einzelne Theile gleich a sind, an den Durchmesser anzulegen, die entsprechende Zahl abzulesen, eben so mit der Höhe zu verfahren, das Quadrat der ersten Zahl mit der zweiten multiplicirt, gibt den Inhalt in n. ö. Eimern.

Die Quadrirung der ersteren Zahl kann man sich mittelst des sogenannten quadratischen Visirstabes ersparen.

Fig 599.



Zur Anfertigung dieses letztern verfährt man folgendermaßen: Es sey $OA = a = 1{\cdot}31648$ n. ö. Schuh, senkrecht auf OA sey die Gerade OZ; ich mache nun $O1 = OA$, ziehe die O1, so ist:

$$\overline{A1}^2 = 2\,\overline{OA}^2 = 2a^2, \text{ daher } A1 = a\sqrt{2}.$$

Mache ich nun $O2 = A1$, so ist $O2 = a\sqrt{2}$. Nun ist:

$$\overline{A2}^2 = OA^2 + O2^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2, \text{ daher } A2 = a\sqrt{3}.$$

Macht man nun $O3 = A2$, so ist $O3 = a\sqrt{3}$; schneidet man nun eben so $O4 = A3$, $O5 = A4$, $O6 = A5$ u. s. w. ab, so hat man:

$$O4 = a\sqrt{4},\ O5 = a\sqrt{5},\ O6 = a\sqrt{6},\ O7 = a\sqrt{7},\ O8 = a\sqrt{8} \text{ rc.}$$

Wie man leicht sieht, ist $O4 = 2a$, $O9 = 3a$, $O16 = 4a$, $O25 = 5a$ u. s. w. Man kann auch unmittelbar nach Rechnung die Werthe der O1, O2, O3 u. s. w. auftragen. Ein so eingetheilter Stab heißt nun ein quadratischer Visirstab für n. ö. Eimer. Messe ich nun den Durchmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders mit diesem Stabe, und gesetzt, an einem Ende des Durchmessers ist O, am andern Ende des Durchmessers die Zahl x, so ist die Länge dieses Durchmessers natürlich $b = a\sqrt{x}$. Messe ich nun die Höhe dieses Cylinders mit einem gleich getheilten Maßstabe, dessen einzelne Theile gleich a sind, und gesetzt, ich finde, daß die Höhe des Cylinders $h = y \cdot a$ ist (wenn nämlich y Theile gleich a auf die Höhe fallen), so ist der körperliche Inhalt dieses Cylinders:

$$\frac{\pi b^2 h}{4} = \frac{\pi a^2 x \cdot y \cdot a}{4} \text{ Kubikfuß.}$$

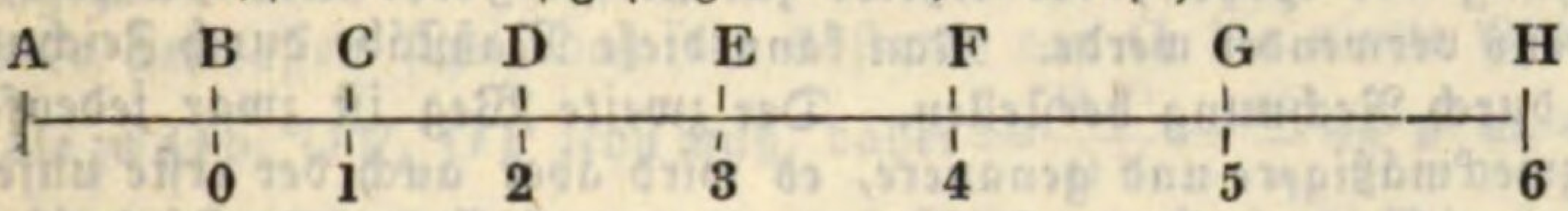
Da nun ein Eimer $= \frac{\pi a^3}{4}$ Kubikfuß hat,

so ist obiger Cylinder $= xy$ Eimer.

Wenn ich also bei einem Cylinder den Durchmesser der Grundfläche mit dem quadratischen Visirstabe, die Höhe mit einem nach a gleich getheilten Maßstabe (beide können auf verschiedenen Seiten einer und derselben Maßstange seyn) messe, so gibt das Produkt beider dadurch erhaltenen Zahlen den Inhalt des Cylinders in Eimern an.

§. 474. Logarithmische Visirstäbe. — Die gewöhnlichen Maßstäbe enthalten Vielfache der Längeneinheit; die Zahlen,

welche das Vielfache ausdrücken, sind bei den einzelnen Abtheilungen angesetzt; die Zahlen auf solch einem Maßstabe bilden eine arithmetische Progression gewöhnlich um den Unterschied = 1 aufsteigend. Man kann sich aber zum Messen eines Maßstabes bedienen, wo die Zeigerzahlen eine geometrische Progression bilden, d. i. eine Reihe von Zahlen, wo stets der Quotuszeiger auf einanderfolgender Zahlen stets derselbe ist. Denken wir uns eine bestimmte Länge größer als die Längeneinheit, berechnen wir uns die Werthe von a^2, a^3, a^4, a^5 . . . im Längenmaße, und tragen wir diese Längen auf einem Maßstabe auf, und schreiben zu jeder Länge die ihr entsprechenden Exponenten, so wird der Maßstab beiläufig folgendermaßen aussehen:



wobei $AB = 1$, $AC = a$, $AD = a^2$, $AE = a^3$, $AF = a^4$ u. s. w. ist. Je näher das a an 1 ist, desto näher kommen die Abtheilungspunkte an einander; doch werden sie beim weiteren Fortschreiten sich immer weiter von einander entfernen. Um nun irgend eine Länge mittelst dieses Maßstabes zu messen, legt man, wie gewöhnlich, den einen Endpunkt der zu messenden Länge auf A, und sieht, zwischen welchen Abtheilungspunkten der andere Endpunkt fällt. Gesetzt, eine zu messende Linie reichet von A bis F, so ist diese Länge gleich a^4; will ich nun dieß im gewöhnlichen Längenmaße haben, so brauche ich nur statt a^4 die ihr gleiche Zahl zu setzen. Auch hier kann man Unterabtheilungen des Maßstabes haben, so viel als man will. Will man z. B. zwischen F und G 5 Unterabtheilungen haben, so heißt das so viel, als man soll zwischen a^4 und a^5 5 Glieder in einer geometrischen Progression einschalten. Man hat, wenn a^4 und a^5 als Endglieder gelten:

$$a^4,\ a^{4+\frac{1}{6}},\ a^{4+\frac{2}{6}},\ a^{4+\frac{3}{6}},\ a^{4+\frac{4}{6}},\ a^{4+\frac{5}{6}},\ a^{4+\frac{6}{6}},\ \text{oder}$$

$$a^4,\ a^4\sqrt[6]{a},\ a^4\sqrt[6]{a^2},\ a^4\sqrt[6]{a^3},\ a^4\sqrt[6]{a^4},\ a^4\sqrt[6]{a^5},\ a^5.$$

Man braucht diese fünf mittlere Glieder nur zu berechnen, um ihre entsprechenden Werthe von A an aufzutragen, wo sie dann zwischen F und G oder 4 und 5 kommen, und zwar mit $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ zu bezeichnen sind. Reichet nun eine zu messende Länge von A bis zu $\frac{5}{6}$ zwischen 4 und 5, so ist diese Länge gleich $a^{4+\frac{5}{6}}$ oder $a^{\frac{29}{6}}$.

Hat man so zwei Längen mit einem solchen geometrisch fortschreitenden Maßstabe gemessen, so wird man zum gegenseitigen Vergleiche dieser zwei Längen die durch diesen Maßstab angegebenen Zahlen nicht wie sonst durch einander dividiren, sondern von einander abziehen.

Reicht z. B. die Länge l von A bis H, gibt also die Zahl 6, die andere Länge l' von A bis D gibt also die Zahl 2, so ist $l = a^6$, $l' = a^2$, daher $\frac{l}{l'} = a^4$. Um also zu wissen, wie vielmal l größer als l' ist, suche ich zu $6 - 2 = 4$ den entsprechenden Längenwerth $= a^4$.

Eben so wird man, um das Produkt zweier Längen zu erhalten, ihre Zahlen auf diesem Maßstabe addiren; die Summe gibt den Exponenten der Potenz von a an, die die Größe des Produktes ausdrückt, z. B. L gibt 2, L' aber 3, so ist $L = a^2$, $L' = a^3$, daher $L L = a^5$.

Wir wollen uns nun einen Maßstab verfertigen, wo die auf einander folgenden Potenzen von $a = 1{\cdot}31648$ Wiener Schuh (wobei a die Höhe eines gleichseitigen Cylinders ist, der genau einen n. ö. Eimer enthält), also 1, a, a^2, a^3 u. s. w. enthalten sind. Unter Einem wollen wir auch einen Maßstab angeben, der 1, $(\sqrt{a})^1$, $(\sqrt{a})^2$, $(\sqrt{a})^3$, $(\sqrt{a})^4$ ... enthält, mit der Bestimmung, daß der erstere Maßstab zur Messung der Höhen, der letztere zur Messung des Durchmessers des Bodens verwendet werde. Man kann diese Maßstäbe durch Zeichnung und durch Rechnung herstellen. Der zweite Weg ist zwar jedenfalls der zweckmäßigere und genauere, es wird aber auch der erste unseren Lesern nicht ohne Interesse seyn, und zum besseren Verständniß des zweiten vorbereiten.

Fig. 600.

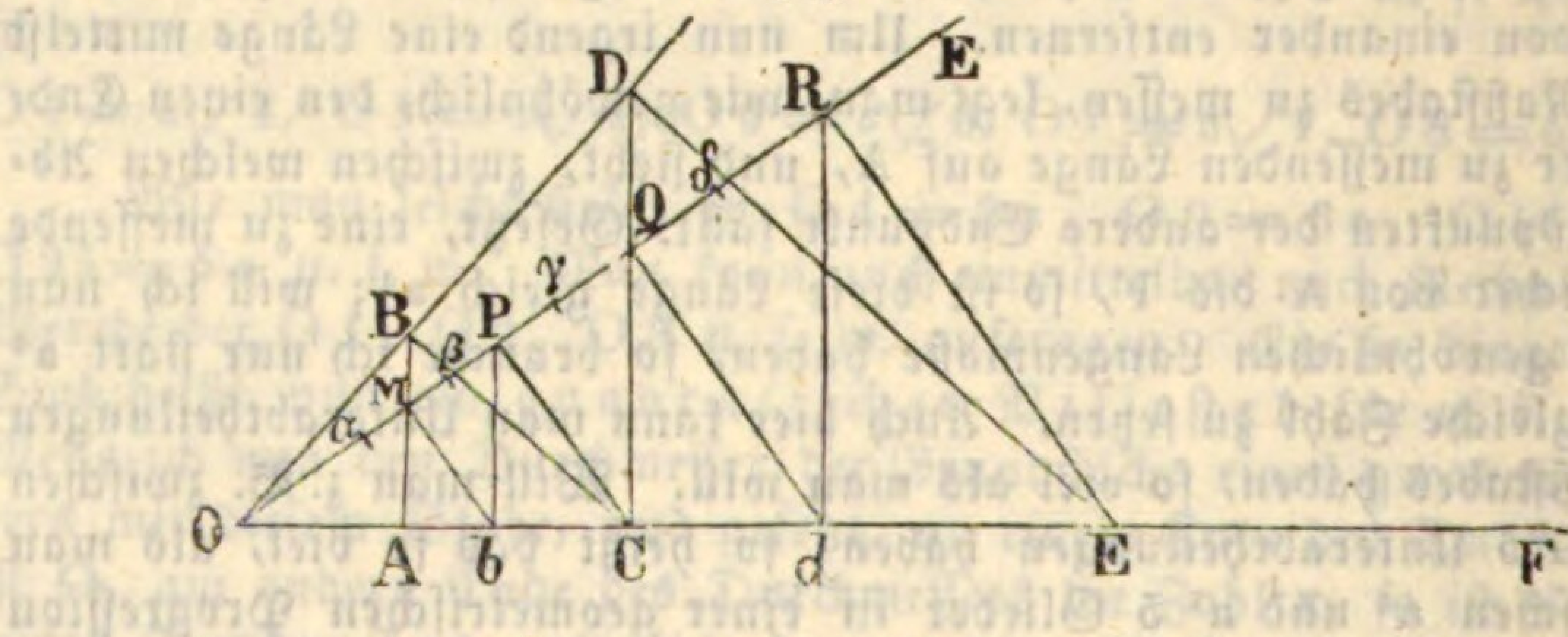
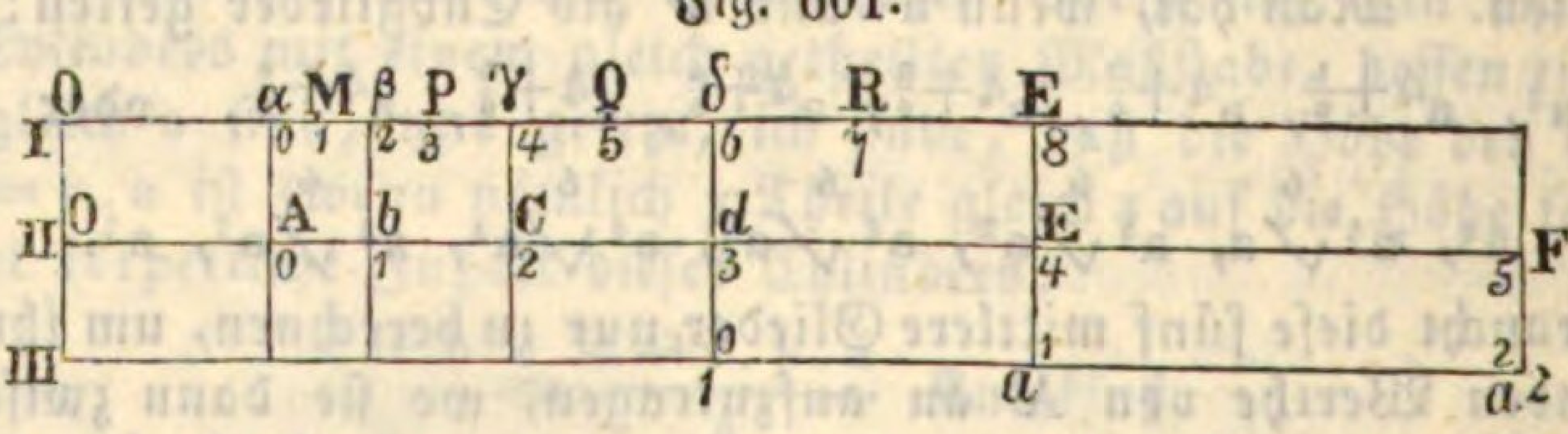


Fig. 601.



I. Durch Zeichnung. Von der Länge OF schneide ich ein Stück $OA = 1$ n. ö. Schuh ab, dann $Ob = a = 1{\cdot}3165$; aus O mit dem Halbmesser Ob beschreibe ich einen Kreis, und errichte in A ein Loth, welches den Kreis in B trifft, so daß also $OB = Ob = a$ ist, ziehe $BC \perp OB$, $CD \perp OC$, $DE \perp OD$ u. s. w., so hat man:

$$OA : OB = OB : OC = OC : OD = OD : OE = \text{ꝛc.}, \text{ daher}$$

$$OC = \frac{OB^2}{OA}; \quad OD = \frac{OC^2}{OB}; \quad OE = \frac{OD^2}{OC}.$$ Da nun:

$OA = 1$, $OB = a$ ist, so hat man $OC = a^2$, $OD = a^3$, $OE = a^4$. Macht man nun $Od = OD$, so hat man in der Geraden OF in den Punkten A, b, C, d, E, f die Werthe von 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5 aufge-

tragen, und dadurch hat man den Maßstab für die Messung der Höhen; um nun auch den für die Messung der Bodendurchmesser zu erhalten, beschreibe ich über O b als Durchmesser einen Halbkreis, der die A B im Punkte M trifft, verbinde O und b mit M, so ist O M B ein rechter Winkel, und man hat daher:

$OA : OM = OM : OB$, oder $1 : OM = OM : a$, daher $OM = \sqrt{a}$.

Errichtet man nun in b die $bP \perp Ob$, so hat man:

$OM : Ob = Ob : OP$, oder $\sqrt{a} : a = a : OP$, daher $OP = a^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{a})^3$.

Errichte ich in P ein Loth auf O P, so muß es durch den Punkt C durchgehen; denn der Punkt, wo das Loth die Gerade O f trifft, muß so beschaffen seyn, daß sein Abstand von O die vierte Proportionale zu O b, O P, O P seyn muß, daher $= \frac{OP^2}{Ob} = \frac{a^3}{a} = a^2 = OC$. Man kann so leicht sich überzeugen, daß $OQ = (\sqrt{a})^5$, $OR = (\sqrt{a})^7$ ist; macht man nun $O\alpha = OA$, $O\beta = Ob$, $O\gamma = OC$, $O\delta = Od$, $O\varepsilon = OE$, so ist $O\alpha = 1$, $OM = \sqrt{a}$, $O\beta = (\sqrt{a})^2$, $OP = (\sqrt{a})^3$, $O\gamma = (\sqrt{a})^4$, $OQ = (\sqrt{a})^5$, $O\delta = (\sqrt{a})^6$, $OR = (\sqrt{a})^7$, $O\varepsilon = (\sqrt{a})^8$; daher die Gerade O P den verlangten Maßstab für den Bodendurchmesser gibt.

Ich zeichne mir nun den Maßstab I für den Bodendurchmesser mit den Punkten O, α, M, β, P, γ u. s. w. in denselben Abmessungen, wie ich hier gefunden, bezeichne dann

	α	M	β	P	γ	Q	δ	R
mit	0	1	2	3	4	5	6	7;

zeichne dann einen zweiten Maßstab II, wo ich die Linie O F genau mit den gefundenen Abtheilungen auftrage, und bezeichne

	A	b	C	d	E	f...
mit	0	1	2	3	4	5...;

endlich zeichne ich mir einen dritten Maßstab genau wie der II, nur mit dem Unterschiede, daß ich bei

	d	E	f	G	h...
	3	4	5	6	7... und zugleich die
Werthe von	1,	a,	a^2,	a^3,	a^4..., oder vielmehr die ihnen entsprechenden

Zahlenwerthe 1, 1·31647, 1·73313, 2·28164, 3·00375, 3·95439 Eim. ansetze.

Um nun diese drei Maßstäbe (welche an drei Seiten eines und desselben Stabes angebracht seyn können) zur Bestimmung des Rauminhaltes eines Cylinders in Eimern zu verwenden, verfahre ich folgendermaßen: Mit dem Maßstabe I messe ich den Bodendurchmesser, mit dem Maßstabe II die Höhe, die dadurch angezeigten Zahlen addire ich und suche auf dem dritten Maßstabe III dieser Summe die entsprechende Eimerzahl. Zur Erläuterung sey x die Zahl auf I, und y die

auf II angegebene Zahl, so ist nach der Natur der hier dargestellten Maßstäbe, wenn b der Bodendurchmesser und h die Höhe des fraglichen Cylinders in n. ö. Schuhen bedeutet, $b = (\sqrt{a})^x$; $h = a^y$; da nun nach unserer früheren Untersuchung der Inhalt des zu untersuchenden Cylinders gleich $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{h}{a}\right)$ in Eimern ist, so macht der Inhalt unseres Cylinders in Eimerzahl

$$\left(\frac{(\sqrt{a})^x}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^y}{a}\right) = \frac{a^{x+y}}{a^3} = a^{x+y-3}.$$

Um die Subtraction der 3 von $x+y$ zu ersparen, stehen in III bei d statt a^3 die 1, bei E statt a^4 a, bei f statt a^5 a^2 u. s. w.

Es sey z. B. mit unserem so beschriebenen Maßstabe für den Bodendurchmesser die Zahl 2 für die Höhe auch die Zahl 2 gefunden, so gibt ihre Summe auf III 3·00375, d. i. 3 Eimer als Inhalt des Cylinders an.

II. Die Anfertigung der hier beschriebenen Visirstäbe wird durch Rechnung viel bequemer und genauer.

Wie man leicht einsieht, kann man mit einem Visirstabe, nämlich II, ausreichen; nur muß man, wenn man damit den Bodendurchmesser nimmt, die entsprechende Zahl verdoppeln. Die Skale III dient nicht zum Messer, ist eigentlich nur die Tabelle, welche die Werthe der verschiedenen Potenzen von a in Eimerzahl umsetzt.

Um nun den Visirstab II zu verfertigen, wissen wir, daß

$OA = 1'$; $Ob = a = 1{\cdot}31647'$; $OC = a^2 = 1{\cdot}73310'$;

$Od = a^3 = 2{\cdot}28163 = OE$; $a^4 = 3{\cdot}00361'$ u. s. w. ist, daher

$\log OA = 0$; $\log Ob = \log a = 0{\cdot}1194110$;

$\log OC = 2 \log a = 0{\cdot}2388220$; $\log OD = 3 \log a = 0{\cdot}3582330$

u. s. w. ist. So mittelst Logarithmen rechnend, findet man:

$a = 1{\cdot}31647$ W. Schuh.		$a^7 = 6{\cdot}85294$ W. Schuh.	
$a^2 = 1{\cdot}73309$		$a^8 = 9{\cdot}02169$	
$a^3 = 2{\cdot}28157$		$a^9 = 11{\cdot}87678$	
$a^4 = 3{\cdot}00361$		$a^{10} = 15{\cdot}6354$	
$a^5 = 3{\cdot}95416$		$a^{11} = 20{\cdot}5836$	
$a^6 = 5{\cdot}20554$		$a^{12} = 27{\cdot}0976.$	

Für den eigentlichen Visirstab II wird die Auftragung bis einschließlich a^6 für die meisten Fälle hinreichend seyn; die übrigen Potenzen von a bedarf man zunächst für die Tabelle III. Um nun auf dem Stabe II die Unterabtheilungen zwischen 0, 1, 2, 3 u. s. w. zu erhalten, muß man sich Werthe von Potenzen von a mit gebrochenen Exponenten berechnen. Wollen wir überall 3 Abtheilungen einschalten, so hat man zwischen

0 und 1, $a^{\frac{1}{4}}$, $a^{\frac{2}{4}}$, $a^{\frac{3}{4}}$

1 und 2, $a^{\frac{5}{4}}$, $a^{\frac{6}{4}}$, $a^{\frac{7}{4}}$

2 und 3, $a^{\frac{9}{4}}$, $a^{\frac{10}{4}}$, $a^{\frac{11}{4}}$ u. s. w.

zu berechnen.

Da nun $\log a = 0{\cdot}1194110$, daher

$$\left.\begin{array}{l}\log a^{\frac{1}{4}} = 0{\cdot}02985275, \text{ so ist} \\ \left.\begin{array}{l}\log a^{\frac{2}{4}} = 0{\cdot}0597055 \\ \log a^{\frac{3}{4}} = 0{\cdot}0895583\end{array}\right\}, \text{ daher}\end{array}\right. \left\{\begin{array}{l}a^{\frac{1}{4}} = 1{\cdot}07116 \\ a^{\frac{2}{4}} = 1{\cdot}14738 \\ a^{\frac{3}{4}} = 1{\cdot}22902\end{array}\right\} \text{ W. Schuh.}$$

Auf ähnliche Art kann ich auch die andern Unterabtheilungen berechnen.

Um auch die Unterabtheilungen von A oder O zu erhalten, findet man mittelst Logarithmen:

$$a^{-\frac{3}{4}} = 0'{\cdot}81365;\ a^{-\frac{2}{3}} = 0'{\cdot}87155;\ a^{-\frac{1}{4}} = 0'{\cdot}93357.$$

Trägt man nun gemäß den Entfernungen:

0′·81, 0′·87, 0′·93, 1′, 1′·07, 1′·15, 1′23, 1′32 ... die Zahlen
$-\frac{3}{4}$, $-\frac{2}{4}$, $-\frac{1}{4}$, 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$ u. s. w.

auf, so hat man den verlangten Visirstab, den man auch **logarithmischen Visirstab** nennt.

Die Tabelle III kann auf der Rückseite des Visirstabes angebracht werden, und da sie nur zum Umsetzen in Eimerzahl dienet, so brauchen die darauf befindlichen Zahlen nicht die oben angegebenen Entfernungen einzuhalten Damit ich die 3 nicht von x und y abzuziehen brauche, gibt die Tabelle für die Zahl 3 einen Eimer; für die Zahl 4 nicht den Werth von a^4, sondern von $a^2 = 1{\cdot}733$ Eim., und sieht folgendermaßen aus:

Zahl	2,	$2\frac{1}{4}$,	$2\frac{2}{4}$,	$2\frac{3}{4}$,	3,	$3\frac{1}{4}$,	$3\frac{2}{4}$,	$3\frac{3}{4}$,	4,	$4\frac{1}{2}$...
entsprechende Eimerzahl	0·76,	0·81,	0·87,	0·93,	1,	1·07,	1·15,	1·23,	1·32...	

Statt den Dezimaltheilen kann man die entsprechende Anzahl von Maßen schreiben, und dann wird es wohl angehen, die weitere Unterabtheilung durch unmittelbare Theilung zu finden, oder wenn man genauer seyn will, auch diese Unterabtheilungen mittelst Logarithmen zu finden. Zum allfälligen Gebrauche folgt hier eine Tabelle der Potenzen von a:

Exponent.	Werth der Potenz.	Exponent.	Werth der Potenz.	Exponent	Werth der Potenz.
-2	0·5770	3	2·2816	8	9·0217
$-1\frac{3}{4}$	0·6181	$3\frac{1}{4}$	2·4439	$8\frac{1}{4}$	9·6636
$-1\frac{2}{4}$	0·6620	$3\frac{2}{4}$	2·6178	$8\frac{2}{4}$	10·3512
$-1\frac{1}{4}$	0·7091	$3\frac{3}{4}$	2·8041	$8\frac{3}{4}$	11·0878
-1	0·7596	4	3·0036	9	11·8768
$-\frac{3}{4}$	0·8137	$4\frac{1}{4}$	3·2173	$9\frac{1}{4}$	12·7219
$-\frac{2}{4}$	0·8716	$4\frac{2}{4}$	3·4463	$9\frac{2}{4}$	13·6271
$-\frac{1}{4}$	0·9336	$4\frac{3}{4}$	3·6915	$9\frac{3}{4}$	14·5968
$+0$	1·0000	5	3·9542	10	15·6354
$\frac{1}{4}$	1·0712	$5\frac{1}{4}$	4·2355	$10\frac{1}{4}$	16·7480
$\frac{2}{4}$	1·1474	$5\frac{2}{4}$	4·5369	$10\frac{2}{4}$	17·9397
$\frac{3}{4}$	1·2290	$5\frac{3}{4}$	4·8597	$10\frac{3}{4}$	19·2162
1	1·3165	6	5·2055	11	20·5835
$1\frac{1}{4}$	1·4101	$6\frac{1}{4}$	5·5759	$11\frac{1}{4}$	22·0482
$1\frac{2}{4}$	1·5105	$6\frac{2}{4}$	5·9727	$11\frac{2}{4}$	23·6170
$1\frac{3}{4}$	1·6180	$6\frac{3}{4}$	6·3977	$11\frac{3}{4}$	25·2975
2	1·7331	7	6·8529	12	27·0976
$2\frac{1}{4}$	1·8564	$7\frac{1}{4}$	7·3406		
$2\frac{2}{4}$	1·9885	$7\frac{2}{4}$	7·8629		
$2\frac{3}{4}$	2·1300	$7\frac{3}{4}$	8·4224		

Es ließen sich eben so quadratische und logarithmische Visirstäbe für die Größe eines n. ö. Metzen = 1·9471$^{c'}$ anfertigen. Hierbei muß man dann annehmen:

$$a = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1{\cdot}9471}{\pi}} = 1{\cdot}35342'.$$

II. Pyramiden und Kegel.

§. 475. **Zwei Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben auch gleichen Körperinhalt.** Zu diesem Behufe denken wir uns zwei Pyramiden, eine dreiseitige und eine vierseitige, wobei die Grundflächen gleichen Flächeninhalt haben sollen; denken wir uns beide Pyramiden mit den Grundflächen in eine und dieselbe Ebene gestellt, so daß unter der Voraussetzung, daß beide Pyramiden dieselbe Höhe haben sollen, die Gerade, die die beiden Scheitel verbindet, mit der Ebene, in der beide Grundflächen liegen, gleichlaufend ist.

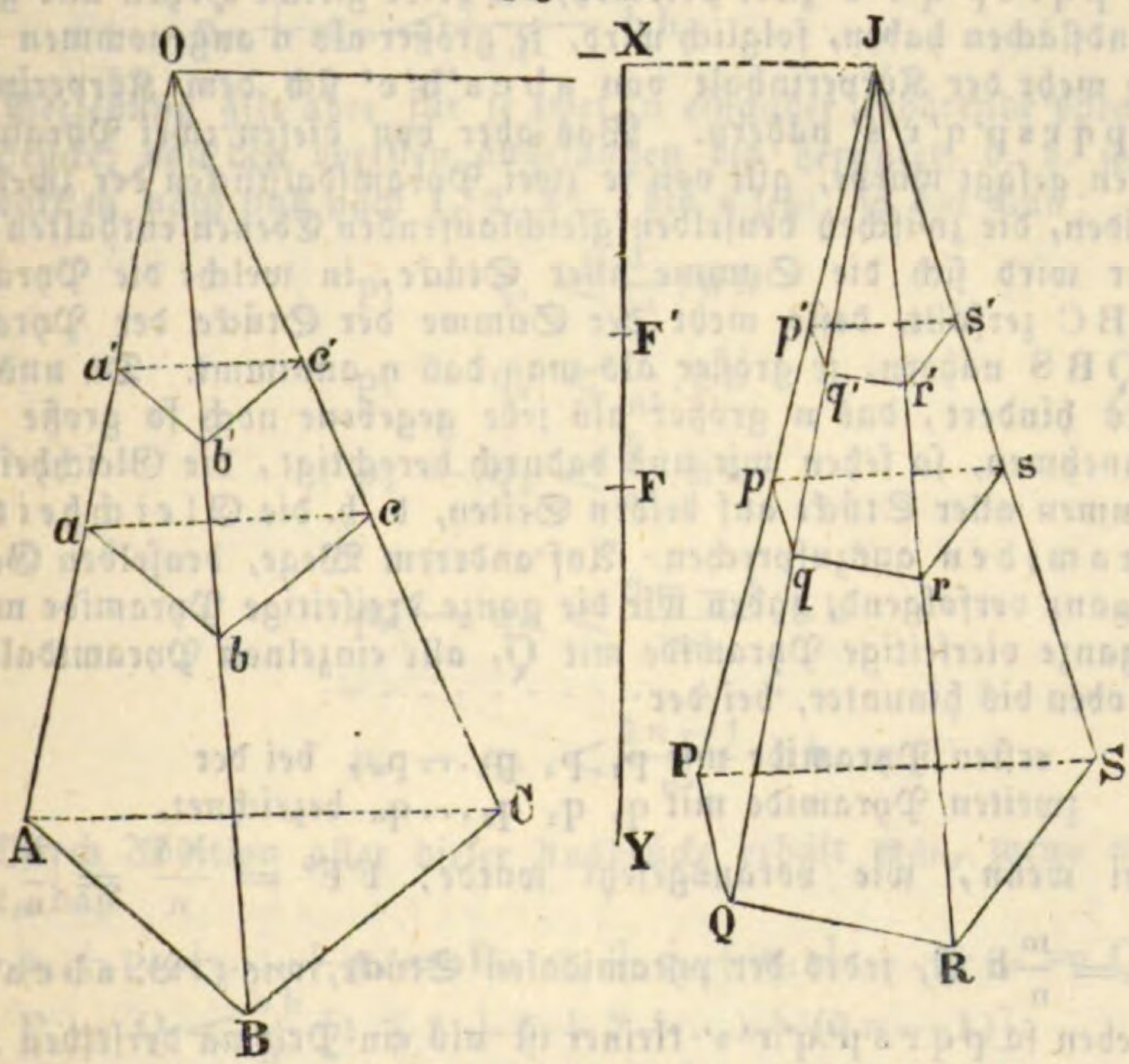
Es seyen dieß die Pyramiden OABC und JPQRS, wobei ABC = PQRS; es stelle ferner XY die Höhe beider Pyramiden vor, deren Grundflächen ABC und PQRS in derselben Ebene liegen sollen. Nehmen wir einen Punkt F der XY an, und legen durch denselben eine Ebene gleichlaufend mit der der beiden Grundflächen, so haben wir, wenn abc und pqrs die Durchschnittsfiguren dieser Ebenen mit beiden Pyramiden sind:

$$abc : ABC = \overline{XF}^2 : \overline{XY}^2 \text{ und}$$

$$pqrs : PQRS = \overline{XF}^2 : \overline{XY}^2, \text{ daher}$$

$$abc : ABC = pqrs : PQRS.$$

Fig. 602.



Da nun, der Voraussetzung nach, PQRS = ABC ist, so muß natürlich abc = pqrs. Man sieht somit leicht ein, daß, wenn ich durch was immer für einen Punkt der XY eine Ebene gleichlaufend zu der der beiden Grundflächen lege, unter der gemachten Voraussetzung der Gleichheit der Grundflächen und Höhen der Pyramiden, die Durchschnittsfiguren jederzeit mit einander gleich seyn werden. Aus demselben Grunde wird, wenn man eine Ebene durch F' gleichlaufend mit der früheren Ebene legt, a'b'c' = p'q'r's' seyn.

Nennen wir der Kürze halber XY = h, ABC = PQRS = b, und denken wir uns h in n gleiche Theile getheilt, wovon $FF' = \frac{h}{n}$

ein einzelner sey; es sey ferner $FX = m.\frac{h}{n}$, $F'X = (m-1).\frac{h}{n}$. Wenn man so $XY = h$ in n gleiche Theile theilt, und durch jeden Theilpunkt gleichlaufende Ebenen zur Ebene der beiden Grundflächen zieht, so zerfallen beide Pyramiden in n Pyramidalstücke, wie bei der einen $abca'b'c'$, bei der andern $pqrsp'q'r's'$ sind. Je größer nun n ist, d. h. in je mehr gleiche Theile man die Höhe h theilet, desto näher kommen zwei Durchschnittsfiguren, wie abc und $a'b'c'$, und desto mehr nähert sich ein solches Pyramidalstück einem Prisma; denn da abc und $a'b'c'$, eben so pqrs und $p'q'r's'$ stets mit einander ähnlich sind, und beim Aneinanderrücken sich daher der Einerleiheit nähern, so nähern sich auf diese Weise sowohl $abca'b'c'$, als auch $pqrsp'q'r's'$ zwei Prismen, die beide gleiche Höhen und gleiche Grundflächen haben, folglich wird, je größer als n angenommen wird, desto mehr der Körperinhalt von $abca'b'c'$ sich dem Körperinhalte von $pqrsp'q'r's'$ nähern. Was aber von diesen zwei Pyramidalstücken gesagt wurde, gilt von je zwei Pyramidalstücken der zwei Pyramiden, die zwischen denselben gleichlaufenden Ebenen enthalten sind; daher wird sich die Summe aller Stücke, in welche die Pyramide OABC zerfällt, desto mehr der Summe der Stücke der Pyramide JPQRS nähern, je größer als man das n annimmt. Da uns nun nichts hindert, das n größer als jede gegebene noch so große Zahl anzunehmen, so sehen wir uns dadurch berechtigt, die Gleichheit der Summen aller Stücke auf beiden Seiten, d. h. die **Gleichheit der Pyramiden** auszusprechen. Auf anderem Wege, denselben Gedanken ganz verfolgend, haben wir die ganze dreiseitige Pyramide mit P, die ganze vierseitige Pyramide mit Q, alle einzelnen Pyramidalstücke von oben bis hinunter, bei der

ersten Pyramide mit $p_1\ p_2\ p_3 \ldots p_n$, bei der
zweiten Pyramide mit $q_1\ q_2\ q_3 \ldots q_n$ bezeichnet,

wobei wenn, wie vorausgesetzt wurde, $FF' = \frac{XY}{n} = \frac{h}{n}$ und $XF = \frac{m}{n}h$ ist, jedes der pyramidalen Stücke, wie z. B. $abca'b'c'$ und eben so $pqrsp'q'r's'$ kleiner ist als ein Prisma derselben Höhe auf der größeren der beiden Grundflächen, z. B. abc, dagegen größer als ein Prisma von derselben Höhe mit der kleineren Grundfläche, z. B. abc als Grundfläche. Da nun:

$$\frac{abc}{ABC} = \frac{\left(\frac{m}{n}h\right)^2}{h^2} = \frac{m^2}{n^2};\quad \frac{pqrs}{PQRS} = \frac{\left(\frac{m}{n}h\right)^2}{h^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\frac{a'b'c'}{ABC} = \frac{\left(\frac{m-1}{n}h\right)^2}{h^2} = \frac{(m-1)^2}{n^2};\quad \frac{p'q'r's'}{PQRS} = \frac{\left(\frac{m-1}{n}h\right)^2}{h^2} = \frac{(m-1)^2}{n^2},$$

so ist, wenn wir $ABC = PQRS$ durch b ausdrücken:

$$abc = pqrs = \frac{m^2}{n^2} b; \; a'b'c' = p'q'r's' = \frac{(m-1)^2}{n^2} b.$$

Da $abca'b'c' = p_m$, $pqrsp'q'r's' = q_m$ ist,

$$p_m > \frac{(m-1)^2}{n^2} b \cdot \frac{h}{n}; \quad p_m < \frac{m^2}{n^2} b \cdot \frac{h}{n}$$

$$q_m < \frac{m^2}{n^2} b \cdot \frac{h}{n}; \quad q_m > \frac{(m-1)^2}{n^2} b \cdot \frac{h}{n},$$

woraus sich durch Subtraction ergibt:

$$p_m - q_m < \frac{m^2 - (m-1)^2}{n^3} \cdot b\,h, \text{ oder}$$

$$p_m - q_m < \frac{2m-1}{n^3} \cdot b\,h.$$

Diese Beziehung gilt aber für je zwei zu einander gehörende pyramidale Stücke, von den obersten angefangen bis herunter, d. h. wenn man statt m nach und nach 1, 2, 3 ... bis n setzt, so hat man:

$$p_1 - q_1 < \frac{1}{n^3} \cdot b\,h$$

$$p_2 - q_2 < \frac{3}{n^3} \cdot b\,h$$

$$p_3 - q_3 < \frac{5}{n^3}\, b\,h$$

. . . .

$$p_m - q_m < \frac{2m-1}{n^3} \cdot b\,h$$

. . . .

$$p_n - q_n < \frac{2n-1}{n^3} \cdot b\,h.$$

Durch Addition aller dieser Ausdrücke erhält man, wenn man bedenkt, daß

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = P, \; q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = Q,$$

$$P - Q < \frac{b\,h}{n^3} [1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n-1)].$$

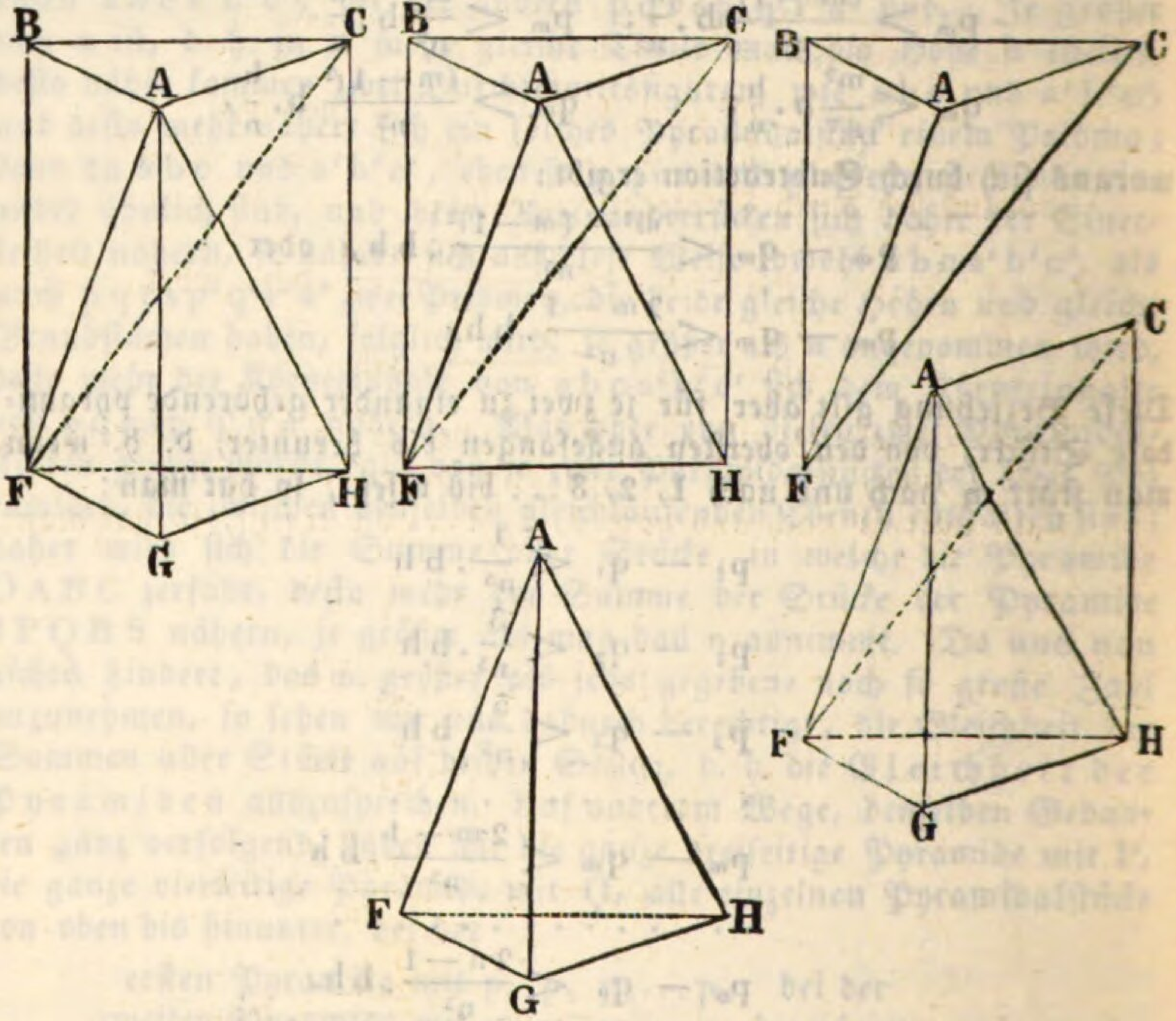
Die Summe der Ausdrücke innerhalb der Klammern gilt nach den über arithmetische Progressionen bekannten Lehrsätzen $\frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2$,

$$\text{daher } P - Q < {}^{b}h.$$

Da es nun gänzlich in unserem Belieben steht, das n so groß zu machen, folglich $\frac{b\,h}{n}$ so klein zu machen, als wir nur immer wollen, so kann der Unterschied der beiden Pyramiden $P - Q$ kleiner als jede noch so kleine Größe dargestellt werden, das ist aber nur dann möglich, wenn $P - Q = O$, d. h. wenn die beiden Pyramiden einander

gleich sind, daher ergibt sich als strenges Resultat: *Zwei Pyramiden von gleicher Höhe und gleichen Grundflächen haben denselben Körperinhalt.*

Fig. 663.



§. 476. *Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleiche Pyramiden zerlegen.* Es sey das Prisma BACFGH; legen wir durch die drei Punkte A, F und H eine Ebene, so zerfällt das Prisma in eine vierseitige Pyramide, die ihren Scheitel in A hat, und deren Grundfläche BCFH ist; und in eine dreiseitige Pyramide AFGH, die wir beide in der Zeichnung noch besonders dargestellt haben. Legen wir nun durch die Punkte A, F und C ebenfalls eine Ebene, so zerfällt die vierseitige AFCHB in die zwei dreiseitigen Pyramiden ABFC und ACFH. Die letztgenannten zwei dreiseitigen Pyramiden sind einander gleich; denn ihre Grundflächen BCF und HCF sind einerlei, und ihre Höhe ist eine und dieselbe. Da vom Punkte A auf die zwei Grundflächen BCF und HCF, die in einer Ebene BCFH liegen, nur ein Loth möglich ist, daher sind die Pyramiden ACFB und ACFH einander gleich.

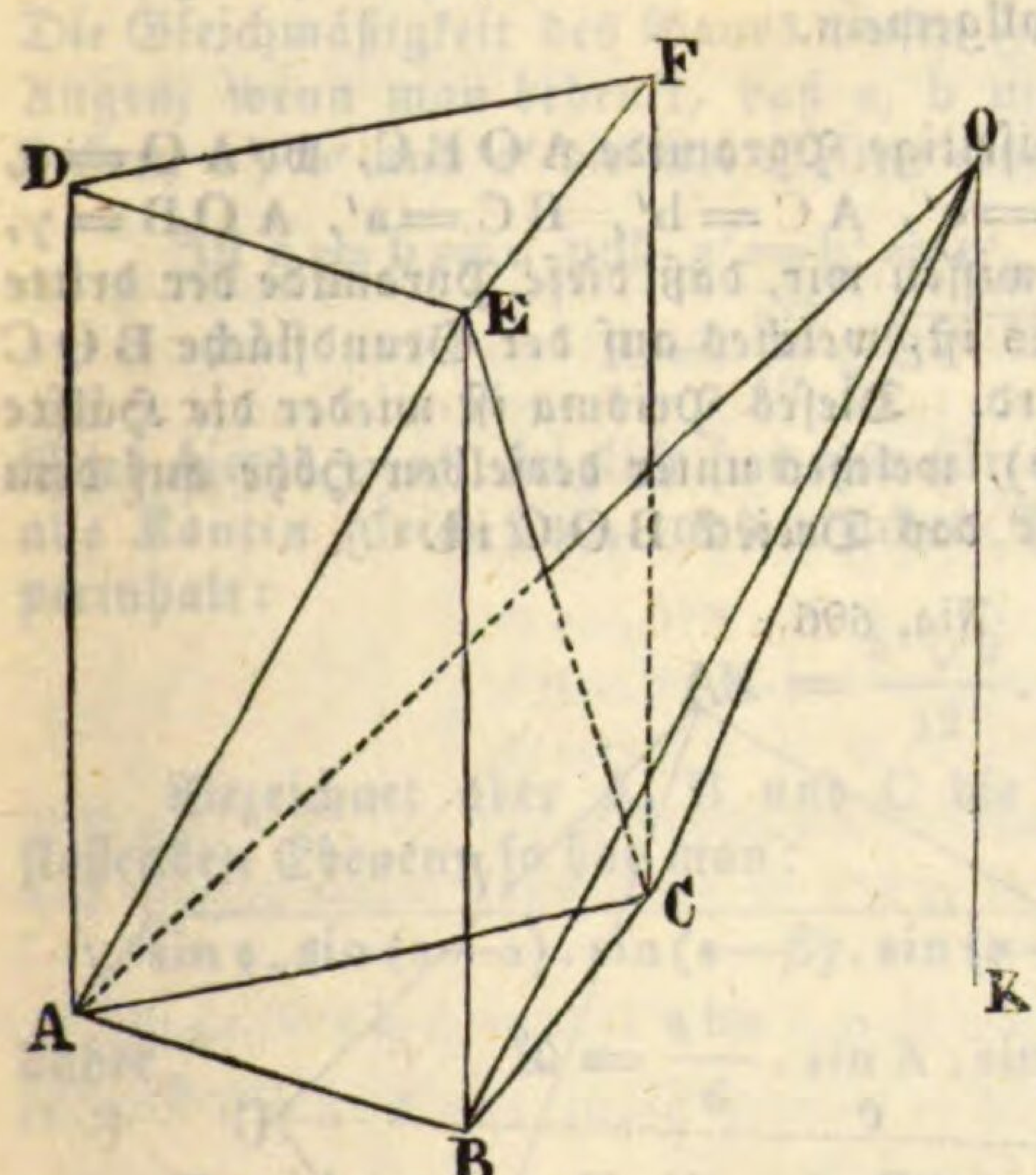
Statt zuerst durch die Punkte A, F, H, und dann durch die Punkte A, C und F Ebenen zu legen, kann ich zuerst durch AF und C

eine Ebene legen, und theile dadurch das Prisma in eine vierseitige Pyramide, deren Scheitel F, und deren Grundfläche AGHC ist, und eine dreiseitige Pyramide FABC. Diese zwei Pyramiden haben wir wieder in einer besondern Zeichnung dargestellt Legt man nun durch F, A und H eine Ebene, so wird die vierseitige Pyramide FAGHC in zwei gleiche dreiseitige Pyramiden getheilt, dann die Dreiecke AGH ≡ ACH, und da von F auf die Ebene AGHC nur ein Loth möglich ist, so haben beide Pyramiden dieselbe Höhe.

Wir haben also ABFC = ACFH aus dem Früheren, und nun ACFH = AFGH, daher ABFC = ACFH = AFGH, d. h. alle drei dreiseitigen Pyramiden haben gleichen Körperinhalt. Die erste Figur stellt alle drei Pyramiden der in ihrer Zusammenstellung im dreiseitigen Prisma, die zweite Figur gibt die vierseitige Pyramide aus der hinteren ABFC und mittleren Pyramide ACFH zusammengesetzt, unter ihr die vordere Pyramide AFGH; die dritte Figur gibt die vordere AFGH und mittlere ACFH Pyramide in der Zusammenstellung zur vierseitigen Pyramide, und ober ihr die hintere Pyramide ABFC.

§. 477. **Der Körperinhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem Flächeninhalte der Grundfläche, multiplicirt mit der Höhe derselben.**

Fig. 604.

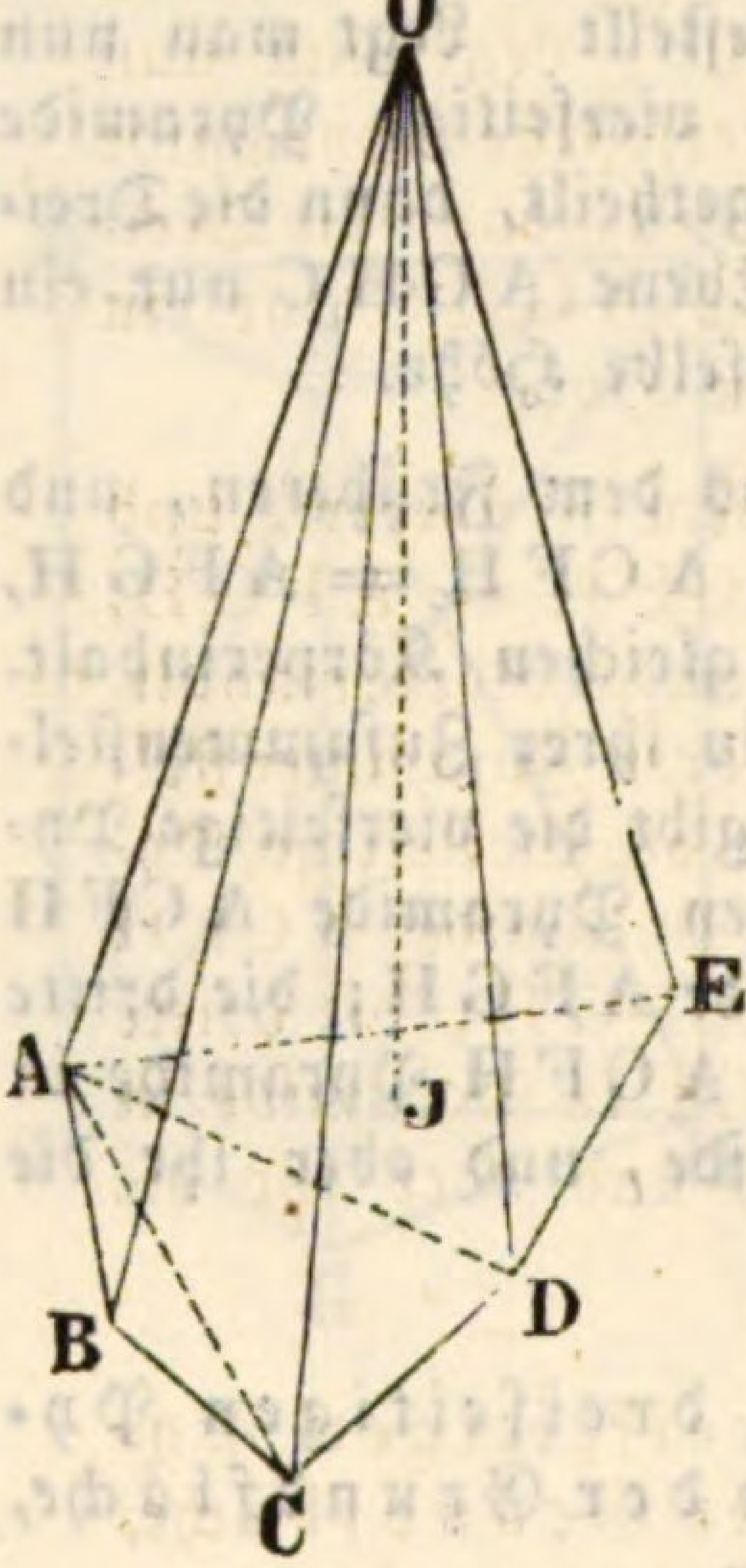


Es sey die dreiseitige Pyramide OABC, ich fälle von O das Loth OK auf die Ebene ABC, und denke mir über ABC ein dreiseitiges gerades Prisma ABCDEF errichtet, dessen Höhe AD = OK sey. Legt man nun durch die Punkte A, E und C eine Ebene, so daß dadurch die dreiseitige Pyramide EABC abgeschnitten wird, so hat man EABC = OABC, weil beide Pyramiden gleiche Höhe und Grundflächen haben. Da nun $EABC = \frac{1}{3} . ABCDEF$, daher $EABC = \frac{1}{3} . ABC . EB$, so hat man:

$$OABC = \frac{1}{3} . ABC . OK \text{ w. z. b. w.}$$

§. 478. **Der Körperinhalt jeder Pyramide ist gleich der Grundfläche, multiplicirt mit dem dritten Theile der Höhe.**

Fig. 605.



Es sey die mehrseitige Pyramide OABCDE, man lege durch den Scheitel O und durch AC, AD Ebenen, so zerfällt die Pyramide OABCDE in die dreiseitigen Pyramiden OABC, OACD, OADE. Da nun, wenn OJ das Loth von J auf die Ebene ABCDE ist:

$$OABC = \frac{OJ}{3} . ABC$$

$$OACD = \frac{OJ}{3} . ACD$$

$$OADE = \frac{OJ}{3} . ADE,$$

so hat man:

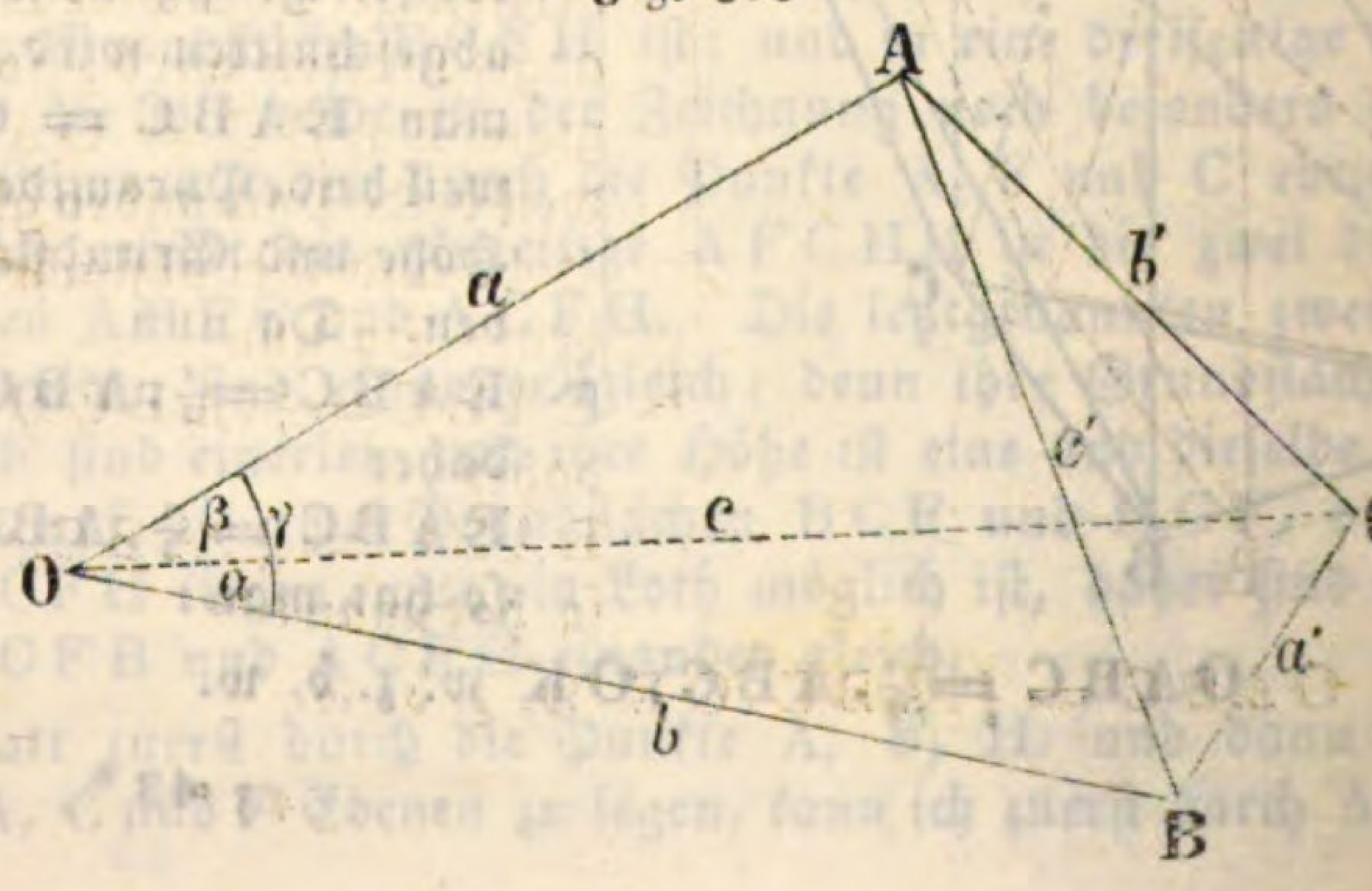
$$OABCDE = OABC + OACD + OADE$$
$$= \frac{OJ}{3} (ABC + ACD + ADE),$$

daher $OABCDE = \frac{OJ}{3} . ABCDE.$

Dieselbe Zerlegung, die wir hier mit der fünfseitigen Pyramide gemacht, können wir mit jeder Pyramide machen, daher gilt der hier ausgesprochene Lehrsatz allgemein.

§. 479. Es sey die dreiseitige Pyramide AOBC, wo $AO = a$, $BO = b$, $CO = c$, $AB = c'$, $AC = b'$, $BC = a'$, $AOB = \gamma$, $AOC = \beta$, $BOC = \alpha$, so wissen wir, daß diese Pyramide der dritte Theil des dreiseitigen Prismas ist, welches auf der Grundfläche BOC in derselben Höhe erhoben wird. Dieses Prisma ist wieder die Hälfte des Parallelopipeds (Balkens), welches unter derselben Höhe auf dem Gleichecke steht, dessen Hälfte das Dreieck BOC ist.

Fig. 606



Da nun nach §. 463 dieses Parallelopiped ein Körperinhalt gleich $2abc\sqrt{\sin s . \sin(s-\alpha) . \sin(s-\beta) . \sin(s-\gamma)}$ ist, so hat man, wenn K der Körperinhalt der dreiseitigen Pyramide ist:

$$K = \frac{abc}{3}\sqrt{\sin s . \sin(s-\alpha) . \sin(s-\beta) . \sin(s-\gamma)}.$$

Da nun:

$$\sin s . \sin(s-\alpha) = \tfrac{1}{2}[\cos\alpha - \cos(2s-\alpha)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)]$$
$$\sin(s-\gamma) . \sin(s-\beta) = \tfrac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma) - \cos(2s-\beta-\gamma)]$$
$$= \tfrac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma) - \cos\alpha],$$

so ist:

$$K = \frac{abc}{6}\sqrt{(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha . \cos\beta . \cos\gamma)}.$$

Da nun:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc};\ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b'^2}{2ac};\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab},$$

so erhält man nach Substitution dieser Werthe im vorhergehenden Ausdrucke nach einigen Formumänderungen:

$$\begin{aligned}144K^2 = {} & a^2a'^2[b^2+c^2+b'^2+c'^2-a^2-a'^2] \\ & + b^2b'^2[a^2+c^2+a'^2+c'^2-b^2-b'^2] \\ & + c^2c'^2[a^2+b^2+a'^2+b'^2-c^2-c'^2] \\ & - [a^2b^2c'^2 + a^2c^2b'^2 + b^2c^2a'^2 + a'^2b'^2c'^2].\end{aligned}$$

Die Gleichmäßigkeit des Baues dieser Formel fällt um so mehr in die Augen, wenn man bedenkt, daß a, b und c im Punkte O zusammenstoßen, a′, b′ und c′ die drei Seiten eines Dreiecks sind.

Ist $a = b = c$ und $a' = b' = c'$, so hat man:

$$K = \frac{a'^2}{12}\sqrt{3a^2 - a'^2}.$$

Wird hier $a = a'$, folglich hat man für eine dreiseitige Pyramide, wo alle Kanten gleich sind, und welches Tetraeder heißt, als Körperinhalt:

$$K = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Bezeichnet aber A, B und C die Winkel der in O zusammenstoßenden Ebenen, so hat man:

$$\sqrt{\sin s . \sin(s-\alpha) . \sin(s-\beta) . \sin(s-\gamma)} = \tfrac{1}{2}\sin A . \sin\beta . \sin\gamma,$$

daher $$K = \frac{abc}{6} . \sin A . \sin\beta . \sin\gamma.$$

Bezeichnen nun F, F′ und F″ die Flächeninhalte der Dreiecke AOB, AOC und BOC, so hat man:

$$F = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma,\ F' = \tfrac{1}{2}ac\sin\beta,\ F'' = \tfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

daher $$F . F' . F'' = \tfrac{1}{8}a^2b^2c^2\sin\alpha . \sin\beta . \sin\gamma,$$ daher:

$$abc = \sqrt{\frac{8F.F'.F''.}{\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma}},\ \text{somit:}$$

$$K = \tfrac{1}{3}\sin A\sqrt{\frac{2F.F'.F''.\sin\beta.\sin\gamma}{\sin\alpha}}$$

Bezeichnet man nun

$$-\cos\Sigma.\cos(\Sigma-A).\cos(\Sigma-B).\cos(\Sigma-C) = \Delta^2,$$

wobei $\Sigma = \frac{1}{2}(A+B+C)$ ist, so hat man:

$$\sin\alpha = \frac{2\Delta}{\sin B.\sin C};\ \sin\beta = \frac{2\Delta}{\sin A.\sin C};\ \sin\gamma = \frac{2\Delta}{\sin A.\sin B},$$

daher $\frac{\sin\beta\ \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{2\Delta}{\sin^2 A}$, woraus:

$K = \frac{2}{3}\sqrt{F.F'.F''.\Delta}$, oder

$$K = \tfrac{2}{3}\sqrt{F.F'.F''.\sqrt{-\cos\Sigma.\cos(\Sigma-A).\cos(\Sigma-B).\cos(\Sigma-C)}}.$$

Setzet man hier $A = B = C$ und $F = F' = F''$, so hat man:

$$K = \frac{2}{3}\sqrt{F^3.\cos^2\frac{A}{2}\sqrt{1-2\cos A}}.$$

Setzet man hier $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ und $\cos A = \frac{1}{3}$, so erhält man:

$$K = \frac{a^2\sqrt{2}}{12}.$$

Setzet man in der allgemeinen Formel $A = 90°$, so hat man:

$$K = \frac{1}{3}\sqrt{2F.F'.F''}.$$

Nennet man die vierte Seitenfläche $ABC = F'''$ und die Winkel, die F'' mit F, F' und F'' bildet, C' B' A', und bemerkt, daß die Summe der drei Projektionen der drei Seitenflächen auf die vierte gleich dem Flächeninhalte dieser vierten Seitenfläche ist, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} F = F'\cos A + F''\cos B + F'''\cos C' \\ F' = F\cos A + F''\cos C + F'''\cos B' \\ F'' = F\cos B + F'\cos C + F'''\cos A' \\ F''' = F\cos C' + F'\cos B' + F'''\cos A' \end{array}\right\}\ \text{I.}$$

Multiplicirt man nun diese Gleichungen mit F, F', F'' und F''', und ziehet die Summe der drei ersten so erhaltenen Gleichungen von der vierten ab, so hat man:

$$F'''^2 = F^2 + F'^2 + F''^2 - 2(FF'\cos A + FF''\cos B + F'F''\cos C)\ \text{II.}$$

Die Gleichungen in I. und II. dienen dazu, aus F, F', F'', A, B und C das F''' und A', B', C' zu finden.

Es sey nun für einen Einzelfall $A = B = C$, so hat man:

$$F'''^2 = F^2 + F'^2 + F''^2$$

und $F = F'''\cos C'$, $F' = F'''\cos B'$; $F'' = F'''\cos A'$.

Die letzten drei Gleichungen in der vorhergehenden substituirt, gibt:

$$\cos^2 A' + \cos^2 B' + \cos^2 C' = 1,$$

woraus $\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C' = 2,$

und $\cos 2A' + \cos 2B' + \cos 2C' = -1.$

Nennet man p das Loth von O auf ABC, so hat man:

$$\frac{p}{3} F''' = \frac{1}{3}\sqrt{2 F F' F''}, \text{ daher:}$$

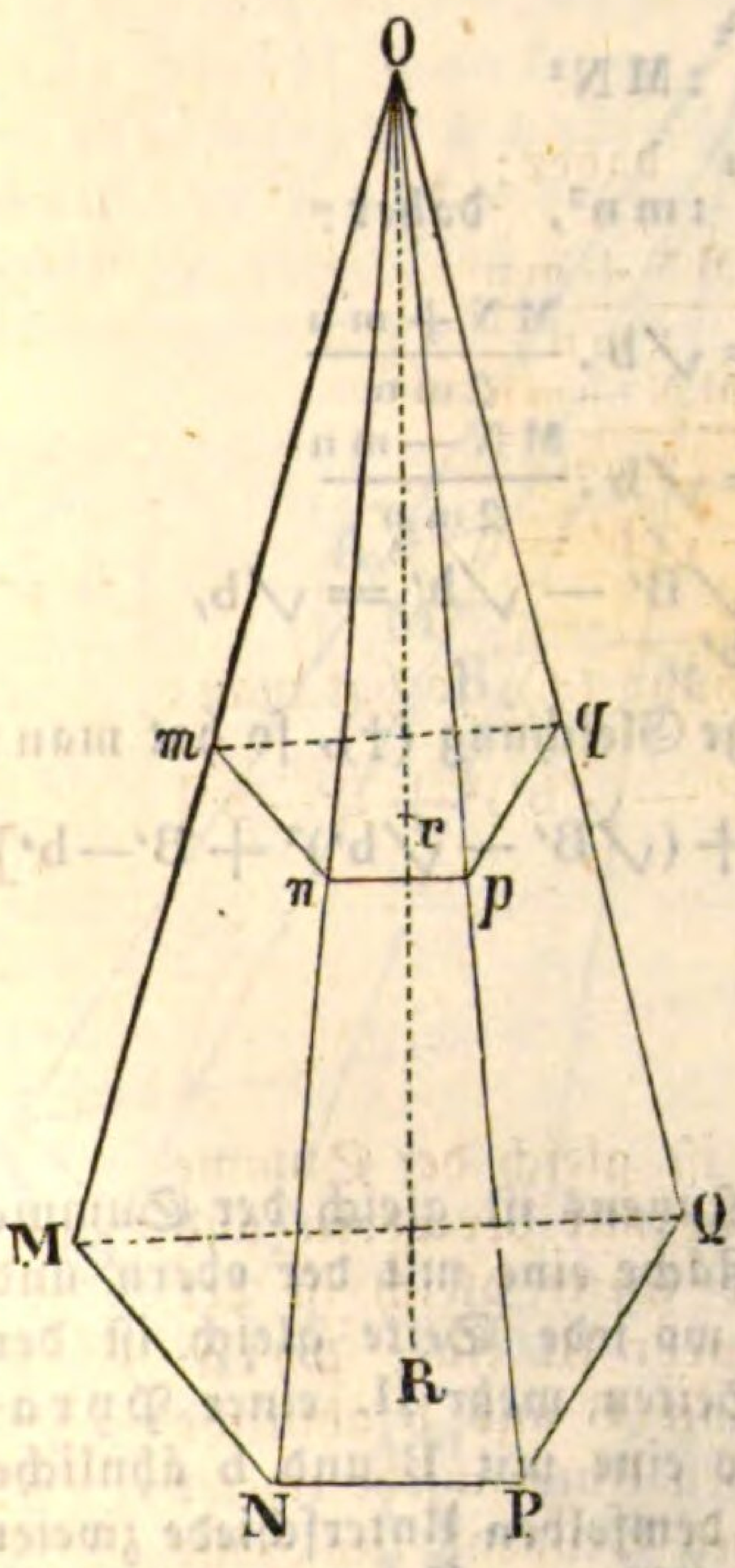
$$p^2 = \frac{2 F F' F''}{F'''^2}, \text{ oder:}$$

$$p^2 = 2 F''' \cos A' . \cos B' . \cos C', \text{ oder:}$$

$$p^2 = \frac{2 F F' F''}{F^2 + F'^2 + F''^2}.$$

§. 480. Um den körperlichen Inhalt einer (durch eine Ebene gleichlaufend mit der Grundfläche) abgestutzten Pyramide zu finden, verfahren wir folgendermaßen:

Fig. 607.



Es sey die Pyramide OMNPQ, und die Ebene mnpq sey gleichlaufend mit MNPQ. Es sey MNPQ = B, mnpq = b, OR ⊥ MNPQ und Rr = h, so ist der Pyramidalstutzen MNPQmnpq = OMNPQ − Omnpq = P − p, wenn wir die ganze Pyramide durch P und die kleinere Pyramide durch p ausdrücken. Nennen wir nun Or = x, so hat man:

$$\frac{mnpq}{MNPQ} = \frac{Or^2}{OR^2}, \text{ oder } \frac{b}{B} = \frac{x^2}{(x+h)^2},$$

$$\text{daher } \frac{x}{x+h} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{B}}, \text{ woraus:}$$

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}};\; x + h = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}},$$

$$\text{daher } P = \frac{B}{3}.\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}};$$

$$p = \frac{b}{3}.\frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}, \text{ mithin}$$

$$MNPQmnpq = \frac{h}{3}.\frac{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}}.$$

Nennet man der Kürze halber $\sqrt{B} = u$, $\sqrt{b} = v$,

daher $B = u^2$, $b = v^2$,

folglich $B\sqrt{B} = u^3$, $b\sqrt{b} = v^3$,

$$\text{somit } \frac{B\sqrt{B}-b\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} = \frac{u^3-v^3}{u-v} = u^2 + uv + v^2,$$

oder $= B + \sqrt{Bb} + b,$

so hat man $MNPQmnpq = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b)$ (†),

oder Pyramidalstutzen $= B\frac{h}{3} + \sqrt{Bb}\,.\frac{h}{3} + b\,.\frac{h}{3}$,

d. h. ein Pyramidalstutzen ist gleich der Summe dreier Pyramiden, welche zur Höhe die Höhe des Stutzens haben, wobei die erste Pyramide die größere, die zweite die kleinere Grundfläche, die dritte das geometrische Mittel der beiden Grundflächen als Grundfläche hat.

Stellt nun B' den Flächeninhalt eines Vieleckes vor, das mit B und b ähnlich ist, wo aber jede Seite desselben gleich ist der halben Summe zweier gleichliegender Seiten von B und b, und ist eben so b' der Flächeninhalt eines Vieleckes, ebenfalls mit B und b ähnlich, wo jede Seite gleich ist dem halben Unterschiede zweier gleichliegender Seiten der B und b, so hat man:

$$B' : B = \left(\frac{MN + mn}{2}\right)^2 : MN^2$$

$$b' : b = \left(\frac{MN - mn}{2}\right)^2 : mn^2, \text{ daher:}$$

$$\sqrt{B'} = \sqrt{B}\,.\frac{MN + mn}{2MN} = \sqrt{b}\,.\frac{MN + mn}{2mn}$$

$$\sqrt{b'} = \sqrt{B}\,.\frac{MN - mn}{2MN} = \sqrt{b}\,.\frac{MN - mn}{2mn}$$

daher $\sqrt{B'} + \sqrt{b'} = \sqrt{B}$; $\sqrt{B'} - \sqrt{b'} = \sqrt{b}$,

woraus $\sqrt{Bb} = B' - b'$.

Substituirt man diese Werthe in die obige Gleichung (†), so hat man:

$$MNPQmnpq = \frac{h}{3}[(\sqrt{B'} + \sqrt{b'})^2 + (\sqrt{B'} - \sqrt{b'})^2 + B' - b']$$

$$= \frac{h}{3}(3B' + b')$$

$$= B'h + b'.\frac{h}{3},$$

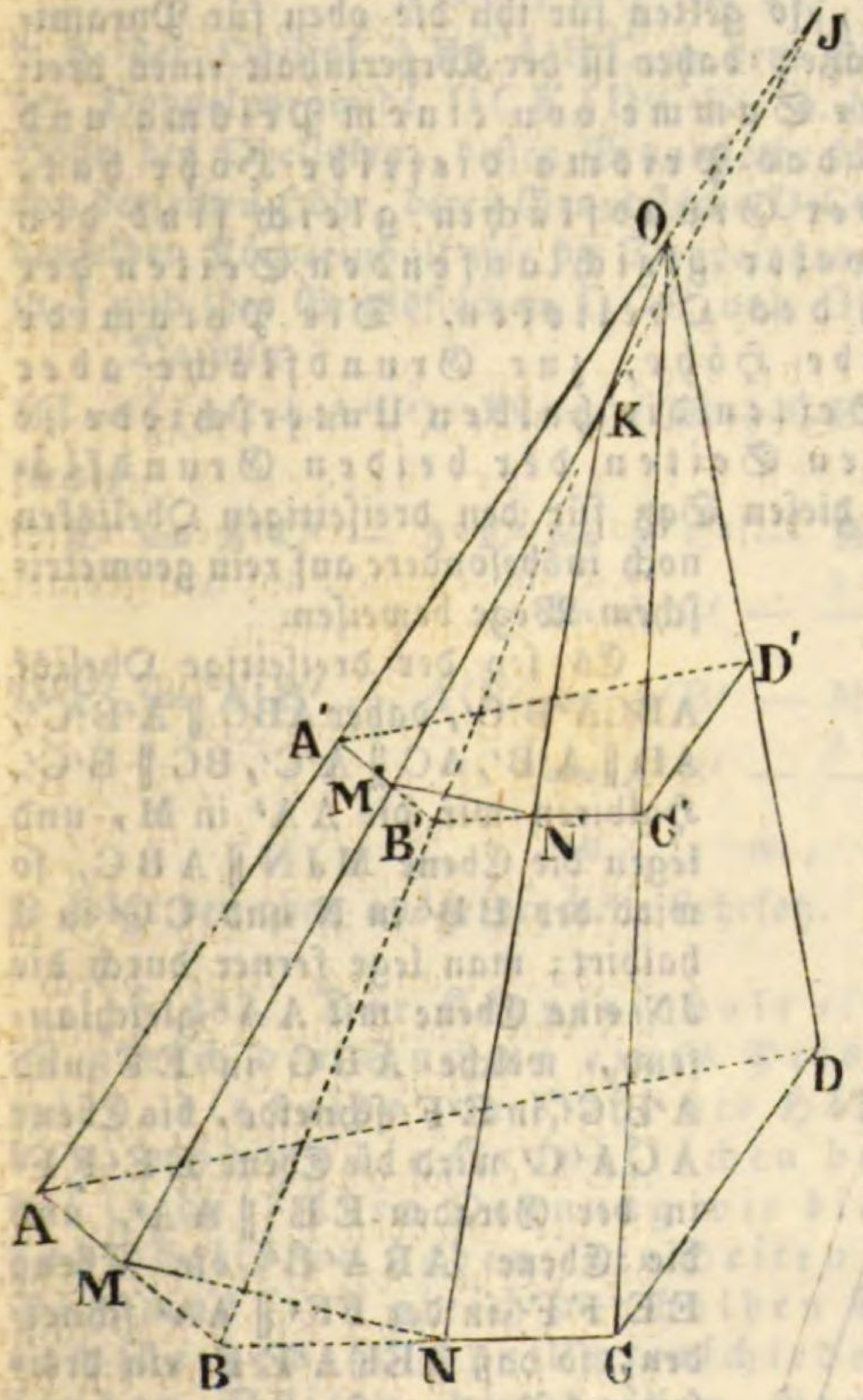
d. h. der Körperinhalt eines Pyramidalstutzens ist gleich der Summe aus I. eines Prismas, dessen Grundfläche eine mit der obern und untern Grundfläche ähnliche Figur ist, wo jede Seite gleich ist der halben Summe zweier gleichliegender Seiten mehr II. einer Pyramide, welche zur Grundfläche ebenfalls eine mit B und b ähnliche Figur hat, wo aber jede Seite gleich ist demselben Unterschiede zweier gleichliegender Seiten, und wo beide die Höhe des Stutzens zur Höhe haben.

Halbirt man Mm oder Nn, und legt durch den Halbirungspunkt eine Ebene gleichlaufend mit B und b, so ist der Flächeninhalt der entstehenden Durchschnittsfigur B'. Denkt man sich ferner r als Scheitel einer Pyramide, deren Grundfläche $MNPQ$ ist, so wird die

durch den Halbirungspunkt von Mm mit B und b gleichlaufend gezogene Ebene diese Pyramide in einer Figur schneiden, deren Flächeninhalt gleich b′ ist.

§. 481. Es kommt nun zu untersuchen, ob ein gegebener Körper wirklich ein Pyramidalstutzen sey oder nicht. Jede Pyramide, die durch eine Ebene gleichlaufend mit der Grundfläche abgestutzt wird, hat zwei mit einander ähnliche Grundflächen, wo also nicht bloß die gleichliegenden Seiten gleichlaufend, sondern auch proportionirt sind.

Fig. 608.



Es sey die gleichlaufend abgestutzte Pyramide ABCDA′B′C′D′, wo alle Seitenkanten AA′, BB′, CC′, DD′ sich in O vereinigen, so sieht man, daß

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA}$$

schneidet man nun den Pyramidalstutzen durch eine Ebene MM′NN′, die nicht durch O durchgehet, sondern die OB in dem Punkte K schneidet, so entsteht ein Körper AMNCD A′M′N′C′D′, der einer gleichlaufend abgestutzten Pyramide ähnlich sieht, ohne es jedoch zu seyn. Die Seiten AM und A M′, MN und M′N′, NC und N′C′ u. s. w. sind zwar mit einander gleichlaufend, aber nicht proportionirt. Es schneide die MM′ die AO in dem Punkte J, so hat man:

$$\frac{AM}{A'M'} = \frac{AJ}{A'J} = \frac{JM}{JM'}; \quad \frac{MN}{M'N'} = \frac{KM}{KM'}$$

oder $$\frac{AM}{A'M'} = \frac{MK + KJ}{M'K + KJ}.$$

Nun ist $$\frac{KM + KJ}{KM' + KJ} < \frac{KM}{KM'},$$

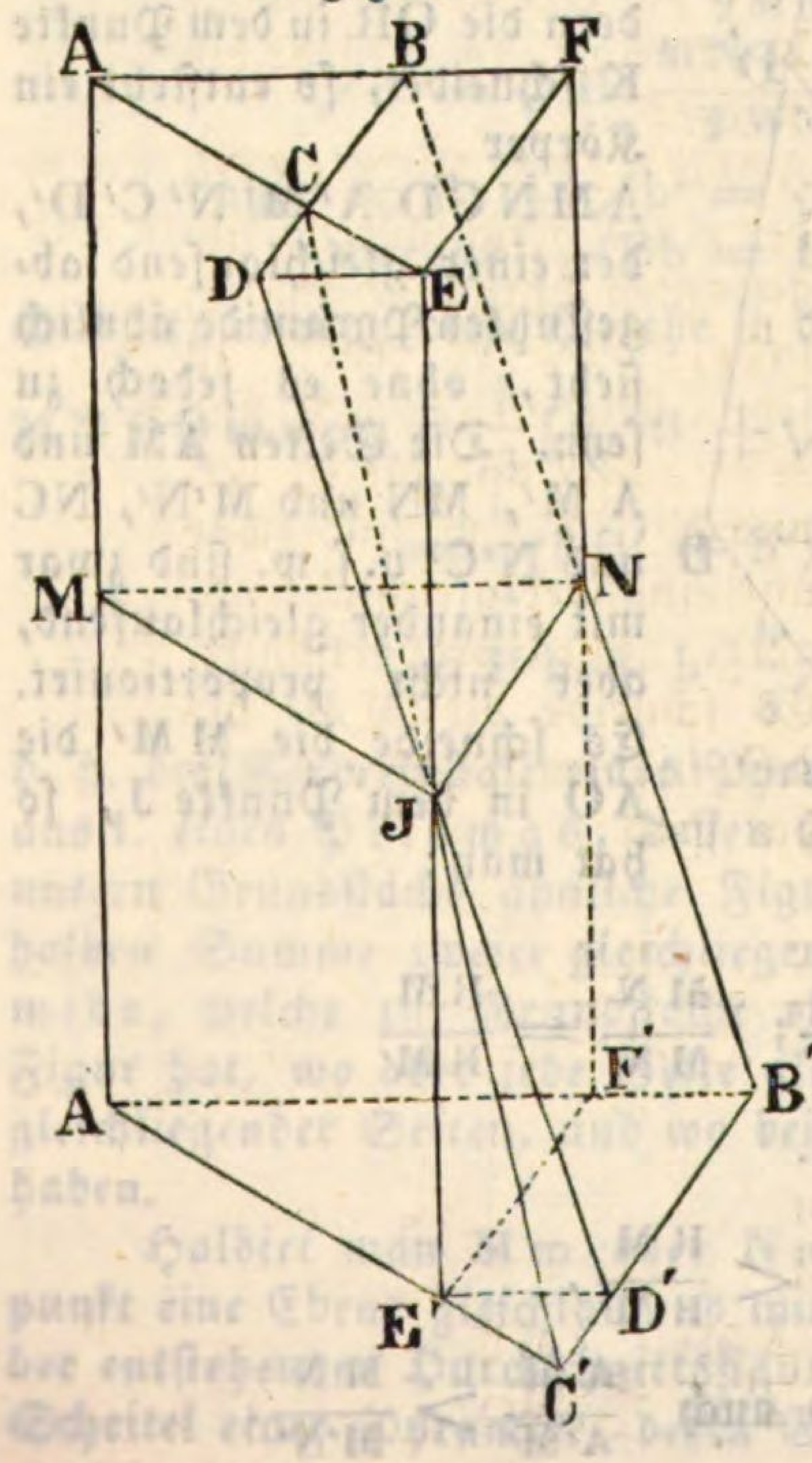
weil $KM > KM'$, also auch $\frac{AM}{A'M'} > \frac{MN}{M'N'}$.

Einen solchen Körper, wie AMNCDA'M'N'C'D', welcher von ganz gleichlaufenden Vielecken als Grundflächen, und von Trapezen als Seitenflächen eingeschlossen ist, wollen wir einen **Obelisken** nennen.

Wie man sieht, ist jede gleichlaufend abgestutzte Pyramide ein Obelisk, aber nicht jeder Obelisk ein Pyramidalstutzen. Man kann sich leicht überzeugen, daß jeder dreiseitige Obelisk ein Pyramidalstutzen ist.

§. 482. Da jeder dreiseitige Obelisk zugleich eine dreiseitige abgestutzte Pyramide darstellt, so gelten für ihn die oben für Pyramidalstutzen entwickelten Lehrsätze; daher ist der Körperinhalt eines dreiseitigen Obelisken gleich **der Summe von einem Prisma und einer Pyramide, wo das Prisma dieselbe Höhe hat, und wo die Seiten der Grundflächen gleich sind den halben Summen je zweier gleichlaufenden Seiten der beiden Grundflächen des Obelisken. Die Pyramide hat ebenfalls dieselbe Höhe, zur Grundfläche aber ein Dreieck, dessen Seiten die halben Unterschiede je zweier gleichlaufenden Seiten der beiden Grundflächen sind.** Wir wollen diesen Satz für den dreiseitigen Obelisken noch insbesondere auf rein geometrischem Wege beweisen.

Fig. 609.



Es sey der dreiseitige Obelisk ABCA'B'C', daher ABC ‖ A'B'C', AB ‖ A'B', AC ‖ A'C', BC ‖ B'C'. Halbiren wir die AA' in M, und legen die Ebene MJN ‖ ABC, so wird der BB' in N und CC' in J halbirt; man lege ferner durch die JN eine Ebene mit AA' gleichlaufend, welche ABC in EF und A'B'C' in E'F' schneide, die Ebene ACA'C' wird die Ebene EE'FF' in der Geraden EE' ‖ AA', und die Ebene ABA'B' die Ebene EE'FF' in der FF' ‖ AA' schneiden, so daß AEFA'E'F' ein dreiseitiges Prisma ist. Legt man nun durch EE' eine Ebene, ‖ AA'BB', so wird diese durch die Ebene BCB'C' in der DD', und von den Ebenen ABC und A'B'C' in DE ‖ D'E' geschnitten.

Wie man leicht sieht, sind die zwei dreiseitigen Prismen DEJBFN und D'E'JB'F'N mit einander ei-

nerlei, bezeichnen wir den Körperinhalt jedes derselben durch P. Eben so sind die zwei Pyramiden JCED und J′C′E′D′ mit einander einerlei, bezeichnen wir ihren Körperinhalt mit p. Es sey endlich AEFMNJ = A′E′F′MNJ = Q, so sieht man leicht:

$$\begin{aligned} ABCMNJ &= AEFMNJ - (DEJBFN - DECJ) \\ &= Q - (P - p), \\ A'B'C'MNJ &= MJNA'E'F' + (D'E'JB'F'N + D'E'C'J) \\ &= Q + (P + p), \end{aligned}$$

daher durch Addition:

$$ABCA'B'C' = 2Q + 2p;$$

d. h. der Obelisk ABCA′B′C = dem Prisma AEFA′E′F′ mehr der Doppelpyramide DCEJD′C′E′, d. h. einem Prisma von der Höhe des Obelisken, dessen Grundfläche MJN mehr einer Pyramide von derselben Höhe, deren Grundfläche D′C′E′ ist (weil diese Pyramide denselben Körperinhalt wie die Doppelpyramide, welche ihren Scheitel in J und ihre Grundflächen DCE und D′C′E′ hat).

Da nun

$$MJ = \tfrac{1}{2}(AC + A'C'),\; JN = \tfrac{1}{2}(CB + C'B'),\; MN = \tfrac{1}{2}(AB + A'B'),$$

ferner

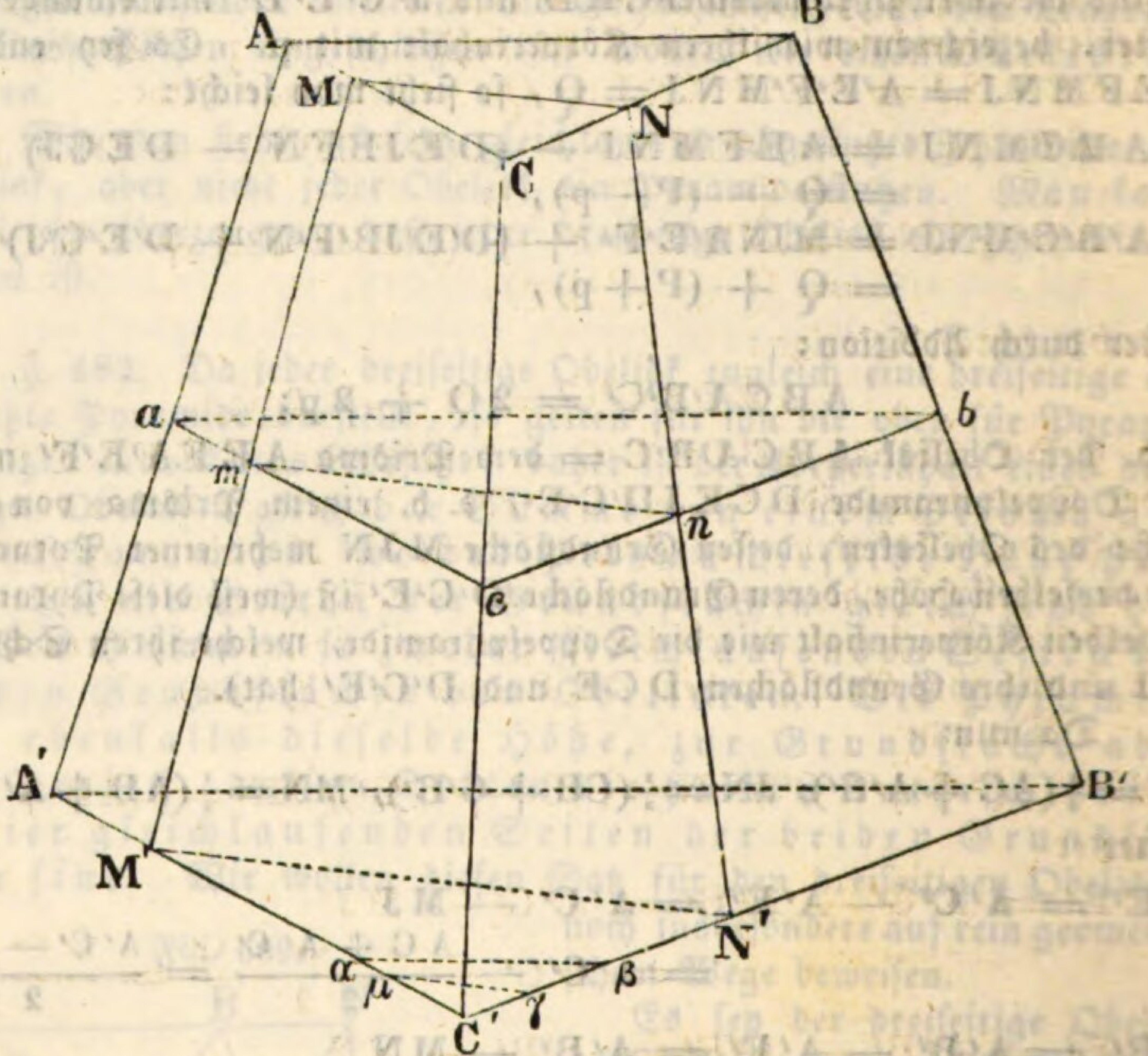
$$\begin{aligned} C'E' &= A'C' - A'E' = A'C' - MJ \\ &= A'C' - \frac{AC + A'C'}{2} = \frac{A'C' - AC}{2} \\ D'E' &= A'B' - A'F' = A'B' - MN \\ &= A'B' - \frac{AB + A'B'}{2} = \frac{A'B' - AB}{2} \end{aligned}$$

u. s. w.,

so folgt der oben ausgesprochene Lehrsatz.

§. 483. **Der Körperinhalt eines jeden Obelisken ist gleich der Summe eines Prisma und einer Pyramide, die beide zur Höhe die Höhe des Obelisken haben, und wo die Grundflächen beider dieselben Winkel in derselben Ordnung wie die zwei Grundflächen des Obelisken haben; die Seiten der Grundfläche des Prisma's sind gleich der halben Summe, die der Pyramide dem halben Unterschiede je zweier gleichlaufenden Seiten der beiden Grundflächen des Obelisken.**

Fig. 610.



Es sey der dreiseitige Obelisk $ABCA'B'C'$, also $ABC \parallel A'B'C'$, $AC \parallel A'C'$, $BC \parallel B'C'$, $AB \parallel A'B'$. Führen wir nun die Ebene $MNM'N'$, welche die beiden Grundflächen in $MN \parallel M'N'$ schneidet, so entsteht der vierseitige Obelisk $ABMNA'B'M'N'$ (welcher nur in dem Falle eine abgestutzte Pyramide wäre, wenn die Ebene $MNM'N'$ durch den Vereinigungspunkt der AA', BB' und CC' ginge).

Halbiren wir AA', MM', CC', NN', BB' in a, m, c, n, b, so ist

$$ac = \frac{AC + A'C'}{2},\ bc = \frac{BC + B'C'}{2},\ ab = \frac{AB + A'B'}{2},$$

$$cm = \frac{CM + C'M'}{2},\ cn = \frac{CN + C'N'}{2},\ mn = \frac{MN + M'N'}{2}.$$

Führt man eben so durch c die $c\alpha \parallel AA'$, so ist

$$C'\beta = B'C' - bc = \frac{B'C' - BC}{2};$$

eben so durch c die $c\beta \parallel BB'$, so ist

$$C'\alpha = A'C' - ac = \frac{A'C' - AC}{2}.$$

Nun ist

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB},\ \text{daher}\ \frac{\frac{B'C' - BC}{2}}{\frac{A'C' - AC}{2}} = \frac{B'C'}{A'C'},$$

$$\text{d. h.}\quad \frac{C\beta}{C\alpha} = \frac{C'B'}{C'A'},\quad \text{daher}\quad \alpha\beta \parallel A'B'.$$

Da nun $\frac{A'B'}{\alpha\beta} = \frac{B'C'}{\beta C'}$ und $\frac{ab}{\alpha\beta} = \frac{bc}{\beta c'}$ ist, so hat man:

$$\frac{A'B' - ab}{\alpha\beta} = \frac{B'C' - bc}{\beta C'}.$$

Da nun $B'C' - bc = \beta C'$ ist, so hat man:

$$\alpha\beta = A'B' - ab = \frac{A'B' - AB}{2}.$$

Ganz auf dieselbe Weise, wie wir es mit den Obelisken $ABCA'B'C'$ gemacht, thun wir es mit $MNCM'N'C'$, und man sieht, daß

$$mn = \frac{M'N' + MN}{2},\quad mc = \frac{M'C' + MC}{2},\quad nc = \frac{C'N' + CN}{2};$$

$$\mu\gamma = \frac{M'N' - MN}{2},\quad C'\mu = \frac{M'C' - MC}{2},\quad C'\gamma = \frac{C'N' - CN}{2}.$$

Nennt man nun h die Höhe beider Obelisken, so hat man:

$$\text{Obelisk } ABCA'B'C' = abc \,.\, h + \alpha\beta C' \,.\, \frac{h}{3},$$

$$\text{Obelisk } MNCM'N'C' = mnc \,.\, h + \mu\gamma C' \,.\, \frac{h}{3},\quad \text{daher}$$

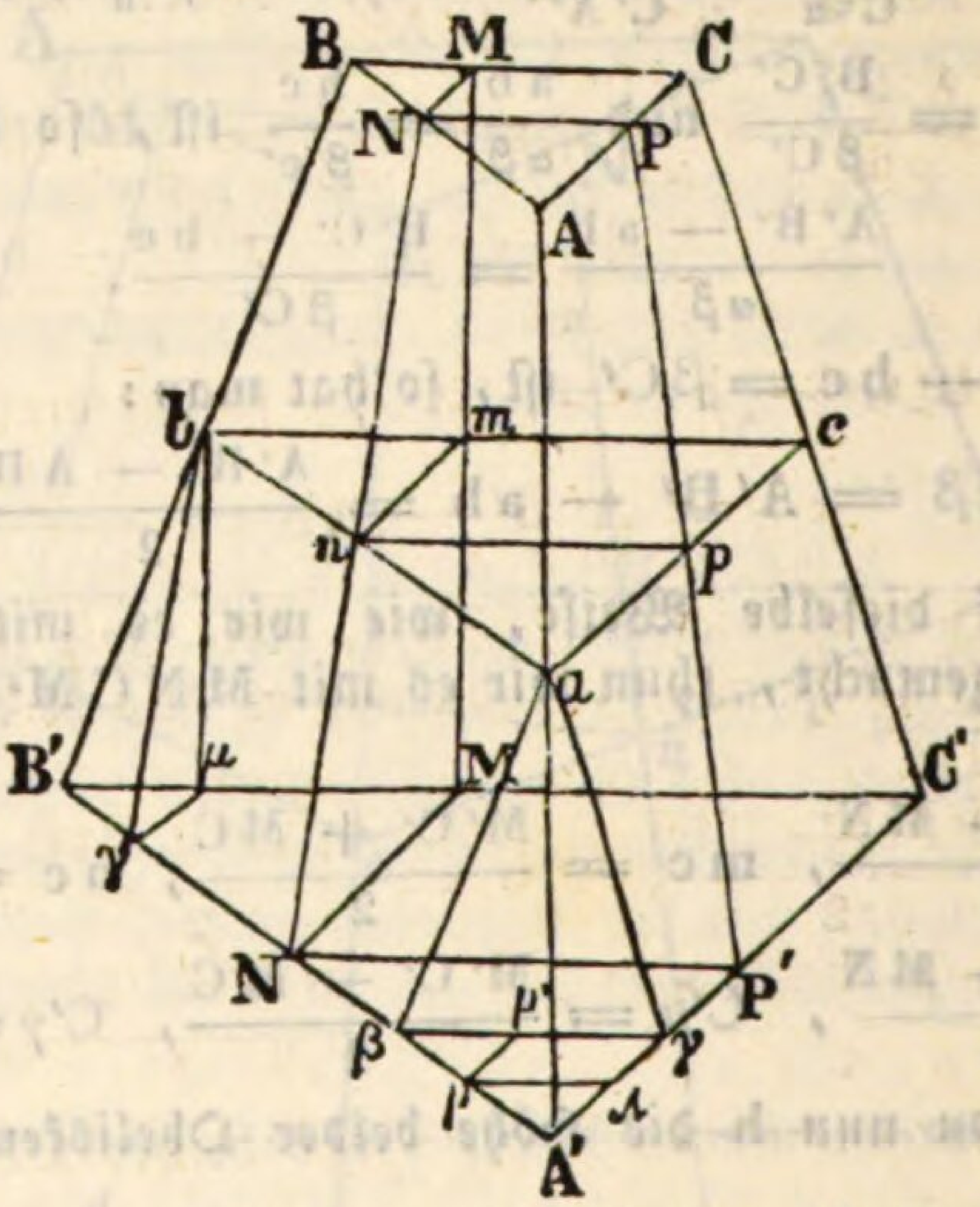
$$\text{Obelisk } ABMNA'B'M'N' = (abc - mnc)h + (\alpha\beta C' - \mu\gamma C')\frac{h}{3}$$

oder

$$ABMNA'B'M'N' = abmn \,.\, h + \alpha\beta\mu\gamma \,.\, \frac{h}{3},$$

d. h. der vierseitige Obelisk ist gleich einem Prisma derselben Höhe, und die Seiten der Grundflächen die halben Summen mehr einer Pyramide derselben Höhe, wo die Seiten der Grundfläche die halben Unterschiede der beiden Grundflächen des Obelisken sind, und wo die Winkel in derselben Ordnung dieselben sind. Jeden vierseitigen Obelisk, dessen Grundflächen ABMN und A'B'M'N' nicht Gleichecke (Parallelogramme) sind, kann man sich aus einem dreiseitigen durch einen Schnitt, wie hier MNM'N', entstanden denken. Um auch den Beweis für einen vierseitigen Obelisk, dessen Grundflächen Gleichecke sind, zu führen:

Fig. 611.



Sey wieder der dreiseitige Obelisk $ABCA'B'C'$. Durch N zieht man $NP \parallel BC$ und $NM \parallel AC$, leget nun durch NP und NM die Ebenen $NPN'P'$ und $NMN'M'$, so hat man $N'M' \parallel NM \parallel AC \parallel A'C'$ und $N'P' \parallel NP \parallel BC \parallel B'C'$, so also, daß sowohl NMPC als auch $N'M'P'C'$ Gleichecke sind. Haben nun a, b, c, m, n dieselbe Bedeutung wie in der vorigen Figur, so ist auch $np = \frac{1}{2}(NP + N'P')$, $pc = \frac{1}{2}(PC + P'C')$. Ist ferner:

$$B'\mu = B'M' - bm = \tfrac{1}{2}(B'M' - BM),$$
$$B'\nu = B'N' - bn = \tfrac{1}{2}(B'N' - BN),$$
$$A'\beta = A'B' - ab = \tfrac{1}{2}(A'B' - AB),$$
$$A'\gamma = A'C' - ac = \tfrac{1}{2}(A'C' - AC),$$
$$A'\gamma' = A'N' - an = \tfrac{1}{2}(A'N' - AN),$$
$$A'\pi = A'P' - ap = \tfrac{1}{2}(A'P' - AP),$$

so hat man, wenn h wieder die Höhe bedeutet:

$$\text{Obelisk } ABCA'B'C' = abc \,.\, h + A'\beta\gamma \,.\, \frac{h}{3},$$

$$\text{Obelisk } BMNB'M'N' = bmn \,.\, h + B'\mu\nu \,.\, \frac{h}{3},$$

$$\text{Obelisk } ANPA'N'P' = anp \,.\, h + A'\nu'\pi \,.\, \frac{h}{3}, \text{ daher}$$

$$\text{Obelisk } MNPCM'N'P'C' = (abc - bmn - anp)h$$
$$+ (A'\beta\gamma - B'\mu\nu - A'\nu'\pi)\frac{h}{3}.$$

Da nun $A'\nu' = \frac{1}{2}(A'N' - AN)$, $A'\beta = \frac{1}{2}(A'B' - AB)$,
$B'\nu = \frac{1}{2}(N'B' - NB)$, daher

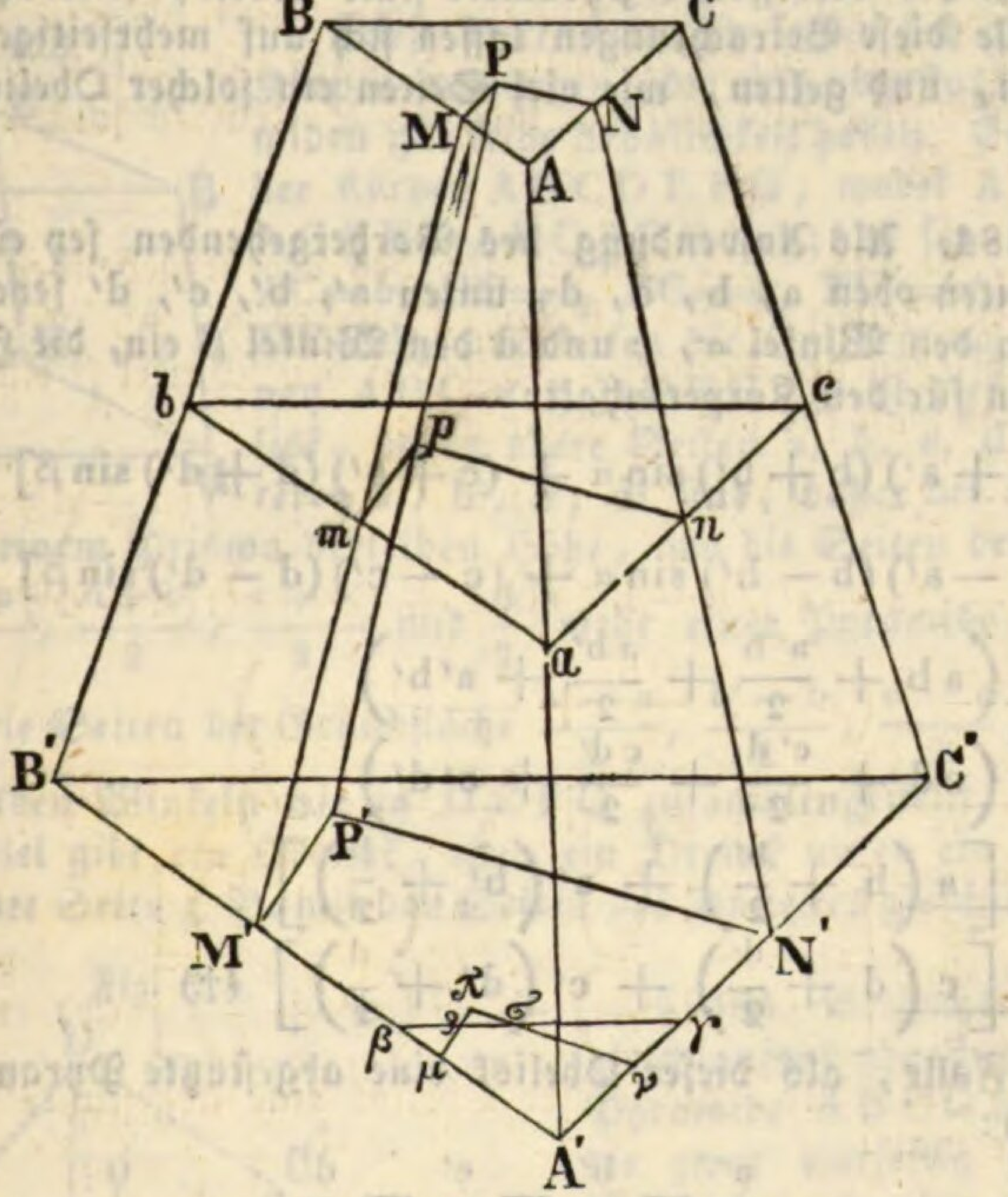
$A'\nu' + B'\nu = \frac{1}{2}(A'N' + N'B' - AN - NB) = \frac{1}{2}(A'B' - A'B)$, folglich $A'\nu' + B'\nu = A'\beta$ ist, so muß $B'\nu = A'\beta - A'\nu' = \beta\nu'$ seyn. Zieht man daher $\nu'\mu' \parallel A'C'$, so ist $\beta\nu'\mu' = B'\mu\nu$, daher

$A'\beta\gamma - B'\mu\nu - A'\nu'\pi' = \mu'\nu'\pi\gamma$, daher

Obelisk $MNPCM'N'P'C' = mnpc \cdot h + \mu'\nu'\pi\gamma \cdot \frac{h}{3}$,

also derselbe Satz auch für diesen Obelisken erwiesen.

Fig. 612.



Es sey ferner der Obelisk $ABCA'B'C'$ durch die zwei Ebenen $MPM'P'$ und $NPN'P'$ so geschnitten, daß ein Fünfeck $BMPNC$ entstehe. Haben hier wieder a, b, c, m, n 2c. dieselbe Bedeutung wie früher, ist eben so

$A'\beta = \frac{1}{2}(A'B' - AB)$, $A'\mu = \frac{1}{2}(A'M' - AM)$ u. s. w.,

so hat man:

Obelisk $ABCA'B'C' = abc \cdot h + A'\beta\gamma \cdot \frac{h}{3}$,

Obelisk $APMNA'P'M'N = apmn \cdot h + A'\pi\mu\nu \cdot \frac{h}{3}$, also

Obelisk $BCMPNB'C'M'P'N' = (abc - apmn)\,h + (A'\beta\gamma - A'\pi\mu\nu)\,\frac{h}{3}$

$= bmpnc.h + \beta\mu\pi\nu\gamma \cdot \frac{h}{3}$,

wie hier die Figur

$\beta\mu\pi\nu\gamma = A'\beta\gamma - A'\pi\mu\nu = \Delta\beta\mu\rho - \Delta\rho\pi\sigma + \Delta\sigma\nu\gamma$

ist, ein Fünfeck nämlich, dessen Seiten zu $BMPNC$ gleichlaufend

sind, wo aber alle Seiten die halben Unterschiede je zweier gleichlaufenden Seiten der beiden Grundflächen BMPNC und B'M'P'N'C' sind. Fallen nun die Seiten eines solchen Polygons, wie hier, über einander, so wird ein Theil, wie hier $\pi\rho\sigma$, negativ. Es läßt sich leicht zeigen, daß in manchen Fällen das ganze Polygon negativ wird, so daß also die betreffende Pyramide statt addirt, subtrahirt werden muß. Alle diese Betrachtungen lassen sich auf mehrseitige Obelisken ausdehnen, und gelten, wie viel Seiten ein solcher Obelisk nur haben mag.

§. 484. Als Anwendung des Vorhergehenden sey ein Obelisk, dessen Seiten oben a, b, c, d, unten a', b', c', d' seyen, a und b schließen den Winkel α, c und d den Winkel β ein, die Höhe sey h, so hat man für den Körperinhalt:

$$\frac{h}{8}[(a+a')(b+b')\sin\alpha+(c+c')(d+d')\sin\beta]$$
$$+\frac{h}{24}[(a-a')(b-b')\sin\alpha+(c-c')(d-d')\sin\beta]$$
$$=\frac{h\sin\alpha}{6}\left(ab+\frac{a'b}{2}+\frac{ab'}{2}+a'b'\right)$$
$$+\frac{h\sin\beta}{6}\left(cd+\frac{c'd}{2}+\frac{cd'}{2}+c'd'\right)$$
$$=\frac{h\sin\alpha}{6}\left[a\left(b+\frac{b'}{2}\right)+a'\left(b'+\frac{b}{2}\right)\right]$$
$$+\frac{h\sin\beta}{6}\left[c\left(d+\frac{d'}{2}\right)+c'\left(d'+\frac{d}{2}\right)\right] \quad (\dagger)$$

Im Falle, als dieser Obelisk eine abgestutzte Pyramide wäre, hätte man:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\frac{d'}{d};$$

nennen wir diese Größe m, so also, daß $a'=am$, $b'=bm$, $c'=cm$, $d'=dm$ ist, dann ist

$$\frac{h\sin\alpha}{6}\left[a\left(b+\frac{b'}{2}\right)+a'\left(b'+\frac{b}{2}\right)\right]=\frac{h\sin\alpha}{6}ab(1+m+m^2)$$

und

$$\frac{h\sin\beta}{6}\left[c\left(d+\frac{d'}{2}\right)+d'\left(d'+\frac{d}{2}\right)\right]=\frac{h\sin\beta}{6}cd(1+m+m^2),$$

$$\text{also Pyramidalstutzen}=\frac{h}{6}(1+m+m^2)(ab\sin\alpha+cd\sin\beta).$$

Nennt man nun die beiden Grundflächen f und f', also

$$ab\sin\alpha+cd\sin\beta=2f,\quad a'b'\sin\alpha+c'd'\sin\beta=2f',$$
$$\text{so ist}\quad f'=m^2f,\quad \text{daher}\quad \sqrt{ff'}=mf,$$
$$\text{daher Pyramidalstutzen}=\frac{h}{3}(f+f'+\sqrt{ff'}),$$

übereinstimmend mit unseren früheren Untersuchungen.

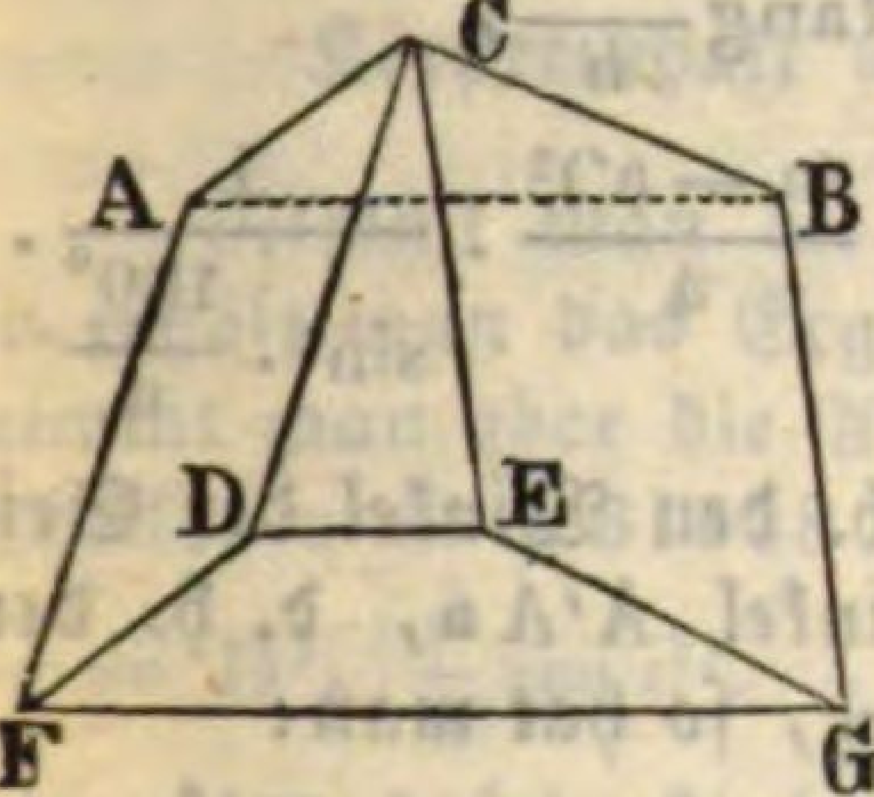
Wird das Viereck ein Rechteck, so heißt dann der Körper ein

Ponton; da wird in der Gleichung (†) $\alpha = \beta = 90^\circ$; $a = c$, $b = d$, und man hat:

$$\text{Ponton} = \frac{h}{6}\,[a(2b + b') + a'(2b' + b)] \quad \text{oder}$$

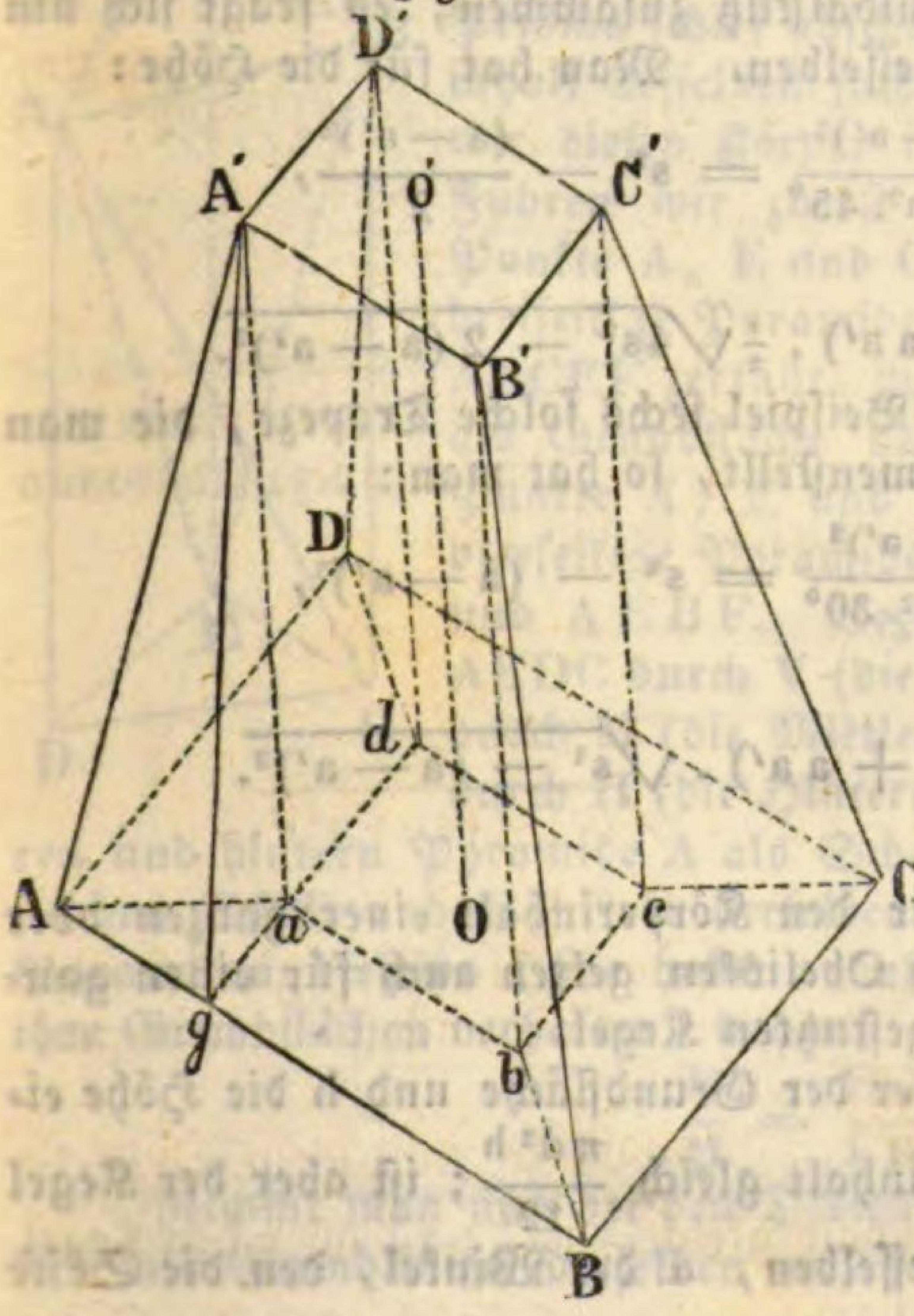
$$\text{Ponton} = \frac{h}{3}\,(ab + a'b') + \frac{h}{3}\left(\frac{ab' + a'b}{2}\right).$$

Fig. 613.



Diese Betrachtungen lassen sich auf andere Körper anwenden, die mit abgestutzten Pyramiden gar keine Aehnlichkeit haben. Es sey z. B. der Körper ABCDEFG, wobei $AB \parallel FG$, $AC \parallel FD$, $BC \parallel EG$ sey; es sey $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$, $FG = a'$, $FD = b'$, $EG = c'$, $DE = d'$, und h sey die Entfernung der Ebenen ABC und DEFG, so ist dieß ein Obelisk, dessen obere Seiten a, b, c, d, die unteren a', b', c', d' sind, daher der Körperinhalt gleich einem Prisma derselben Höhe, wo die Seiten der Grundfläche $\frac{a + a'}{2}$, $\frac{b + b'}{2}$, $\frac{c + c'}{2}$ und $\frac{d'}{2}$ mehr einer Pyramide derselben Höhe, wo die Seiten der Grundfläche $\frac{a' - a}{2}$, $\frac{b' - b}{2}$, $\frac{c' - c}{2}$, $\frac{d'}{2}$ sind, unter denselben Winkeln wie in DEFG zusammengestellt. Ein anderes Beispiel gibt ein Obelisk, oben ein Dreieck unten ein Sechseck, wo jede zweite Seite z. B. mit den Seiten des Dreieckes gleichlaufend ist.

Fig. 614.



§. 485. Betrachten wir eine gleichlaufend abgestutzte gerade Pyramide ABCDA'B'C'D', die zwar vierseitig gezeichnet ist, wobei wir aber der Allgemeinheit in der Rechnung wegen ein nseitiges regelmäßiges Vieleck betrachten wollen. Es sey

$AB = BC = CD = \ldots = a$,
$A'B' = B'C' = \ldots = a'$,
$AA' = BB' = CC' = \ldots = s$.

Fällen wir von den Eckpunkten der obern Grundfläche A', B'... Lothe auf die untere, nämlich A'a, B'b, ..., so bildet abcd ein regelmäßiges Vieleck, einerlei mit A'B'C'D', und es hat denselben Mittelpunkt O mit ABCD, und A, a und O liegen in einer Geraden. Nennen wir nun $A'a = h$, $AO = r$,

$aO = r'$, fällen $aq \perp AB$, und nennen $A'q = k$, so ist $Aa = r - r'$, $BAD = 180^0 - \frac{360^0}{n}$, $aAq = 90^0 - \frac{180^0}{n}$, und man hat:

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}},\quad r' = \frac{a'}{2\sin\frac{180^0}{n}},\quad Aa = \frac{a-a'}{2\sin\frac{180^0}{n}},$$

$$Aq = \frac{a-a'}{2},\quad aq = \frac{a-a'}{2}.\text{cotang}\frac{180^0}{n},$$

$$k^2 = h^2 + \frac{(a-a')^2}{4}.\text{cotang}^2\frac{180^0}{n},\quad s^2 = h^2 + \frac{(a-a')^2}{4}.\frac{1}{\sin^2.\frac{180^0}{n}}.$$

Nennt man den Winkel $A'qa = \varphi$, d. h. den Winkel der Seitenfläche gegen die Grundfläche, und den Winkel $A'Aa$, d. h. den Winkel der Seitenkante gegen die Grundfläche ψ, so hat man:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{2h}{a-a'}.\text{tang}\frac{180^0}{n},\quad \text{tang}\,\psi = \frac{2h}{a-a'}.\sin\frac{180^0}{n}.$$

Ist hingegen a, a′ und s gegeben, so findet man h durch die Gleichung

$$h^2 = s^2 - \frac{(a-a')^2}{4\sin^2.\frac{180^0}{n}}.$$

Es seyen z. B. vier gleichseitige Trapeze, wo die Grundlinien a und a′, und die schiefen gleichen Seiten s seyen; man setzet aus diesen vier Trapezen einen Pyramidalstutz zusammen; es frägt sich um die Größe des Körperinhaltes desselben. Man hat für die Höhe:

$$h^2 = s^2 - \frac{(a-a')^2}{4.\sin^2.45^0} = s^2 - \frac{(a-a')^2}{2},$$

und den Körperinhalt:

$$K = \tfrac{1}{3}(a^2 + a'^2 + aa').\tfrac{1}{2}\sqrt{4s^2 - 2(a-a')^2}.$$

Nehmen wir als zweites Beispiel sechs solche Trapeze, die man zu einem Pyramidalstutz zusammenstellt, so hat man:

$$h^2 = s^2 - \frac{(a-a')^2}{4.\sin^2.30^0} = s^2 - (a-a')^2,$$

daher Körperinhalt:

$$K = \frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + a'^2 + aa').\sqrt{s^2 - (a-a')^2}.$$

§. 486. Die Formeln für den Körperinhalt einer ganzen oder gestutzten Pyramide oder einen Obelisken gelten auch für einen ganzen und einen gleichlaufend abgestutzten Kegel.

Ist also d der Durchmesser der Grundfläche und h die Höhe eines Kegels, so ist sein Körperinhalt gleich $\frac{\pi d^2 h}{12}$; ist aber der Kegel ein gerader und s die Seite desselben, α der Winkel, den die Seite

des Kegels mit der Grundfläche bildet, so hat man:

$$h = s \sin \alpha, \text{ daher Körperinhalt } = \frac{\pi d^2 s \sin \alpha}{12}.$$

Sind bei einem Kegelstutzen D, d die Durchmesser der Grundflächen und h die Höhe, so hat man:

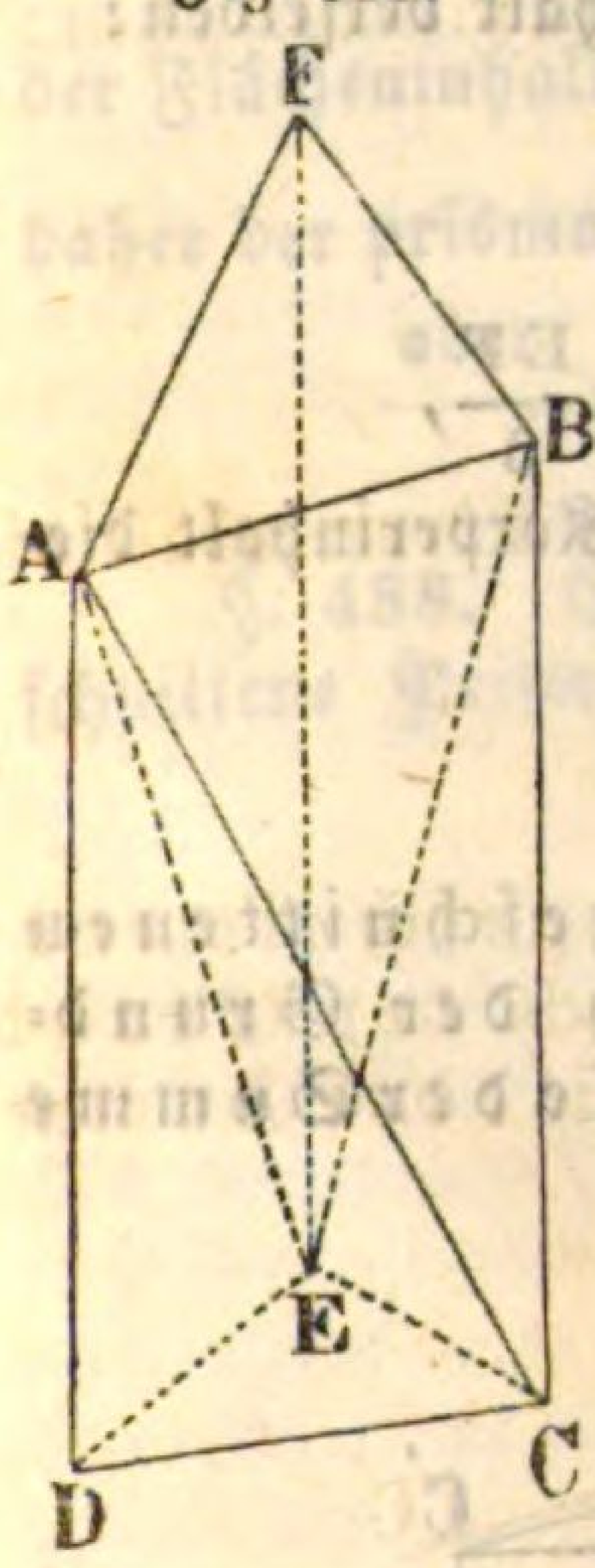
$$\text{Körperinhalt} = \frac{\pi}{12} h (D^2 + d^2 + D d), \text{ oder}$$

$$\text{Körperinhalt} = \pi \left(\frac{D + d}{4}\right)^2 . h + \pi . \frac{h}{3} \left(\frac{D - d}{4}\right)^2.$$

Nimmt man die Abmessungen D, d, h in Zollen, Schuhen, so erhält man das Ergebniß dieser Formeln in Kubikzoll, Kubikschuh; nimmt man aber die Abmessungen nach dem Maßstabe, dessen einzelne Theile a = 1·31648 W. Schuh sind (siehe §. 472), und nennt $\frac{D}{a} = D'$, $\frac{d}{a} = d'$, $\frac{h}{a} = h'$, d. h. sind die Abmessungen nach a, D', d' und h', so hat man für den Körperinhalt des abgestutzten Kegels:

$$\left(\frac{D' + d'}{2}\right)^2 . h' + \frac{1}{3} \left(\frac{D' - d'}{2}\right)^2 . h' \text{ in Wiener Eimern.}$$

Fig. 615.



§. 487. Es seyen die drei Kanten AD, EF und BC mit einander gleichlaufend, und alle drei auf der Ebene DEC senkrecht, die Ebene AFB aber nicht mit DEC gleichlaufend, so daß dieser Körper entsteht, wenn man ein gerades dreiseitiges Prisma schief abschneidet; wir wollen den Körperinhalt desselben suchen. Zu diesem Behufe werden wir diesen Körper in drei Pyramiden zerschneiden. Führen wir zuerst einen Schnitt durch die drei Punkte A, E und C, wodurch dieser Körper in die dreiseitige Pyramide ADEC und in die vierseitige ABCEF zerfällt, die in A den Scheitel und BCEF als Grundfläche hat. Legen wir nun durch die Punkte A, E und B eine Ebene, so zerfällt diese vierseitige Pyramide in die zwei dreiseitigen AEBC und AEBF. Bezeichnen wir nun die Pyramide AEDC durch V (die Vordere), die Pyramide AEBC durch M (die Mittlere), und die Pyramide AEBF durch H (die Hintere), und nehmen bei der mittleren und hintern Pyramide A als Scheitel an, so liegen ihre Grundflächen EBC und EBF in derselben Ebene, so daß also diese beiden Pyramiden dieselbe Höhe haben, daher ihre Körperinhalte sich wie ihre Grundflächen verhalten, daher:

$$\frac{H}{M} = \frac{EBF}{EBC}.$$

Nimmt man nun bei den Dreiecken EBC und EBF, BC und EF als Grundlinien derselben an, so ist EC ihre gemeinschaftliche

Höhe, weil BC ⊥ EC und EF ⊥ EC, weil je EF und BC auf der Ebene CDE senkrecht sind, daher hat man:

$$\frac{EBF}{EBC} = \frac{EF}{BC}, \text{ daher } \frac{H}{M} = \frac{EF}{BC}.$$

Nimmt man hingegen bei der mittleren und vorderen Pyramide E als Scheitel an, so bilden beide Pyramiden zusammen eine vierseitige, deren Scheitel E und Grundfläche ABCD ist, daher, wie man sieht, die beiden Grundflächen der dreiseitigen Pyramiden in einer Ebene liegen, und da sie beide in E ihren Scheitel haben, so haben beide Pyramiden dieselbe Höhe, verhalten sich also wie ihre Grundflächen, daher:

$$\frac{M}{V} = \frac{ABC}{ACD};$$

nimmt man aber bei diesen zwei Dreiecken BC und AD als Grundlinien an, so haben beide DC zur Höhe, daher:

$$\frac{ABC}{ACD} = \frac{BC}{AD}, \text{ somit } \frac{M}{V} = \frac{BC}{AD}.$$

Wir haben somit $H = \frac{EF}{BC}.M$ und $M = \frac{BC}{AD}.V$, folglich $H = \frac{EF}{AD}.V$.

Nimmt man nun bei der vorderen Pyramide CDE als Grundfläche an, so ist ihre Höhe AD, daher der Körperinhalt derselben:

$$V = \Delta DEC.\frac{AD}{3},$$

daher vermöge der vorhergehenden Gleichungen:

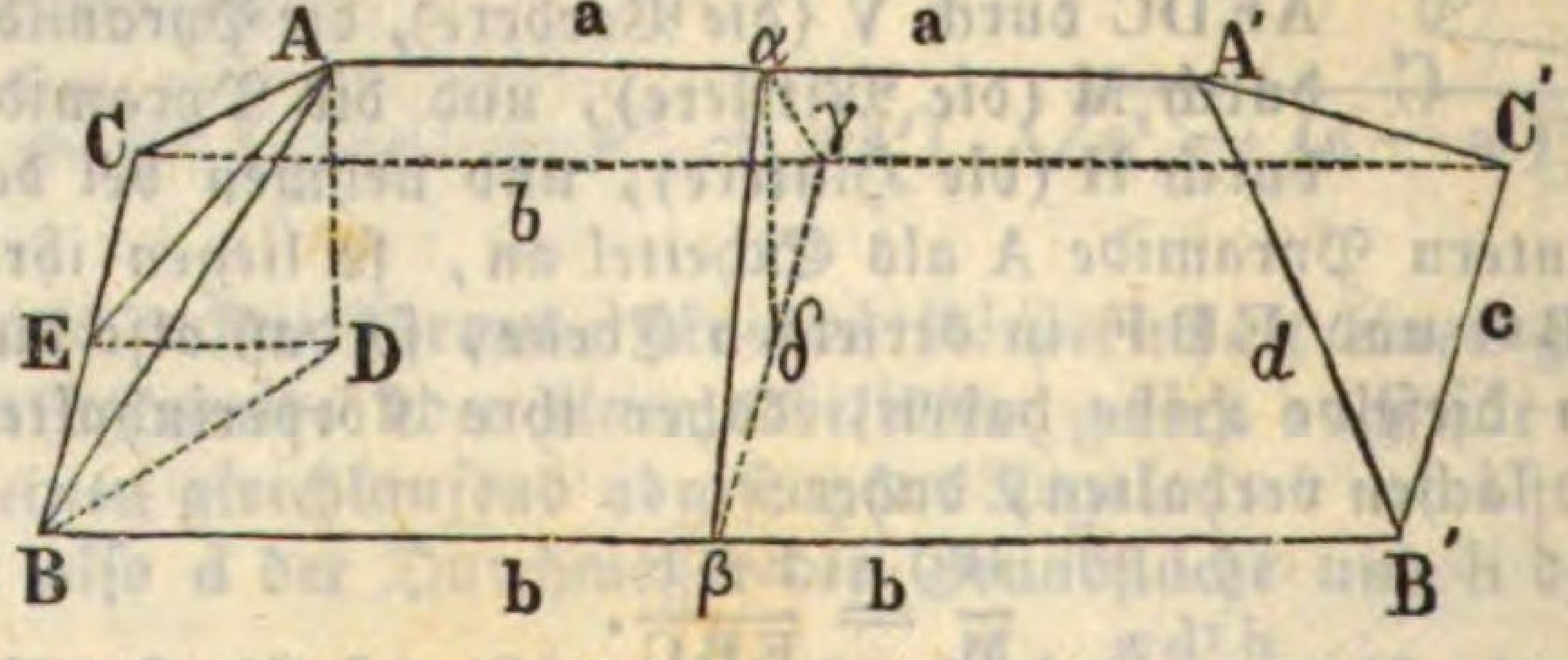
$$M = \Delta.DEC.\frac{BC}{3}, \quad H = \Delta.DEC.\frac{EF}{3},$$

daher die Summe dieser drei Pyramiden, oder der Körperinhalt dieses prismatischen Stückes ABCDEF ist gleich

$$\Delta.DEC.\left(\frac{AD + BC + EF}{3}\right),$$

d. h. der Körperinhalt eines schief abgeschnittenen geraden dreiseitigen Prismas ist gleich der Grundfläche multiplicirt mit dem dritten Theile der Summe der drei senkrechten Seitenkanten.

Fig. 616.



Betrachten wir den dreiseitigen prismatischen Körper ABCA′B′C′, und legen durch α die Ebene αβγ senkrecht auf die gleichlaufenden

Kanten AA', BB' und CC', so zerfällt dieser Körper in zwei gerade dreiseitige schief abgeschnittene Prismen, und man hat:

$$ABC\alpha\beta\gamma = \Delta\alpha\beta\gamma \, . \, \tfrac{1}{3}(A\alpha + B\beta + C\gamma),$$
$$A'B'C'\alpha\beta\gamma = \Delta\alpha\beta\gamma \, . \, \tfrac{1}{3}(A'\alpha + B'\beta + C'\gamma),$$

daher durch Addition beider Gleichungen:

$$ABCA'B'C' = \Delta\alpha\beta\gamma \, . \, \tfrac{1}{3}(AA' + BB' + CC'),$$

daher: **der Körperinhalt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prisma's ist gleich dem Flächeninhalte des senkrechten Durchschnittes multiplicirt mit dem dritten Theile der Summe der drei gleichlaufenden Kanten.**

Nehmen wir als einen einzelnen Fall an BB' = CC', und die Seitenflächen ABC und A'B'C' gegen die Ebene CC'BB' gleich geneigt; nennen wir AA' = a, BB' = CC' = b, CB = C'B' = c, AC = AB = A'C' = A'B' = d. Fällen wir AD ⊥ BB'CC', AE ⊥ BC, und ziehen DE und BD, so hat man:

$$DE = \frac{b-a}{2}, \quad AE = \tfrac{1}{2}\sqrt{4d^2 - c^2}, \quad BD = \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2 + (b-a)^2},$$

$$AD = \tfrac{1}{2}\sqrt{4d^2 - c^2 - (b-a)^2}, \quad \cos AED = \frac{b-a}{\sqrt{4d^2 - c^2}},$$

der Flächeninhalt von $\alpha\beta\gamma = \tfrac{1}{2} AD \, . \, BC = \frac{c}{4}\sqrt{4d^2 - c^2 - (b-a)^2}$,

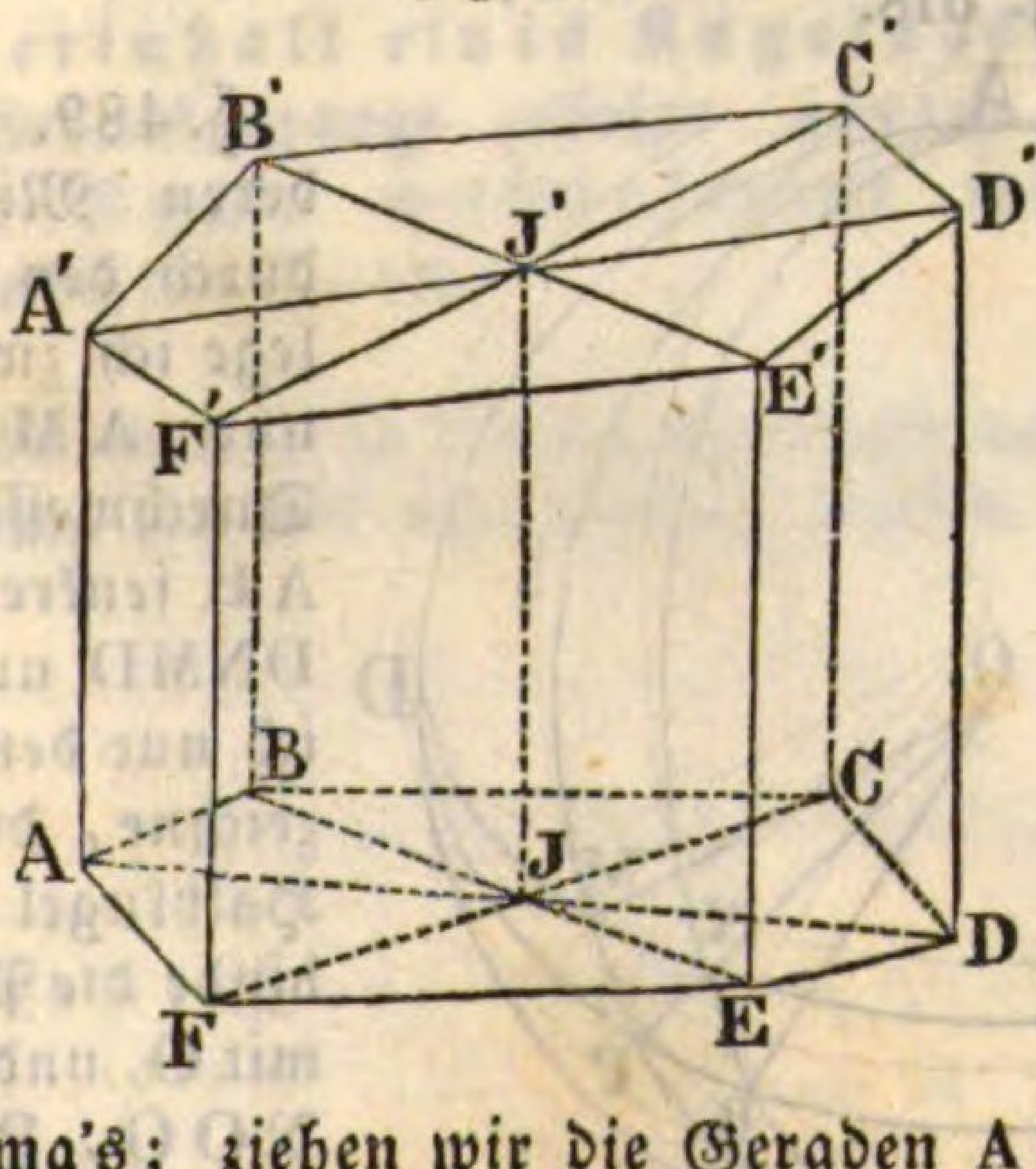
daher der prismatische Körper $= \tfrac{1}{12}(a + 2b)\, c \sqrt{4d^2 - c^2 - (b-a)^2}$,

oder $= \tfrac{1}{6}(a + 2b) \, . \, c \, . \, AD$

$= \tfrac{1}{6}(a + 2b) \, . \, c \, . \, AE \sin AED.$

§. 488. Es sey das gerade regelmäßige sechsseitige schief abgeschnittene Prisma ABCDEFA'B'C'D'E'F', JJ' das Stück der

Fig. 617.



Achse dieses Prisma's; ziehen wir die Geraden AD und A'D', BE und B'E', CF und C'F', und legen durch je dieser zwei Geraden

durchschneidende Ebenen, so hat man dieses prismatische Stück in sechs dreiseitige schief abgeschnittene gerade Prismen getheilt, und man hat:

$$ABJA'B'J' = \Delta . ABJ . \tfrac{1}{3}(AA' + BB' + JJ'),$$
$$BCJB'C'J' = \Delta . BCJ . \tfrac{1}{3}(BB' + CC' + JJ'),$$
$$CDJC'D'J' = \Delta . CDJ . \tfrac{1}{3}(CC' + DD' + JJ'),$$
$$DEJD'E'J' = \Delta . DEJ . \tfrac{1}{3}(DD' + EE' + JJ'),$$
$$EFJE'F'J' = \Delta . EFJ . \tfrac{1}{3}(EE' + FF' + JJ'),$$
$$FAJF'A'J' = \Delta . FAJ . \tfrac{1}{3}(FF' + AA' + JJ');$$

nennt man daher K den Körperinhalt dieses sechsseitigen prismatischen Stückes, so hat man, da $AA' + DD' = 2JJ'$, $BB' + EE' = 2JJ'$, $CC' + FF' = 2JJ'$ ist:

$$K = \Delta . ABJ . \tfrac{1}{3}(12JJ' + 6JJ') = \Delta ABJ . 6JJ',$$

oder wenn man $ABCDEF = F$ nennt:

$$K = F . JJ'.$$

Hat man ein nseitiges regelmäßiges gerades Prisma statt dieses sechsseitigen, wobei JJ' das Stück der Achse dieses Prisma's seyn soll, und F wieder den Flächeninhalt der Grundfläche bedeutet, so hat man:

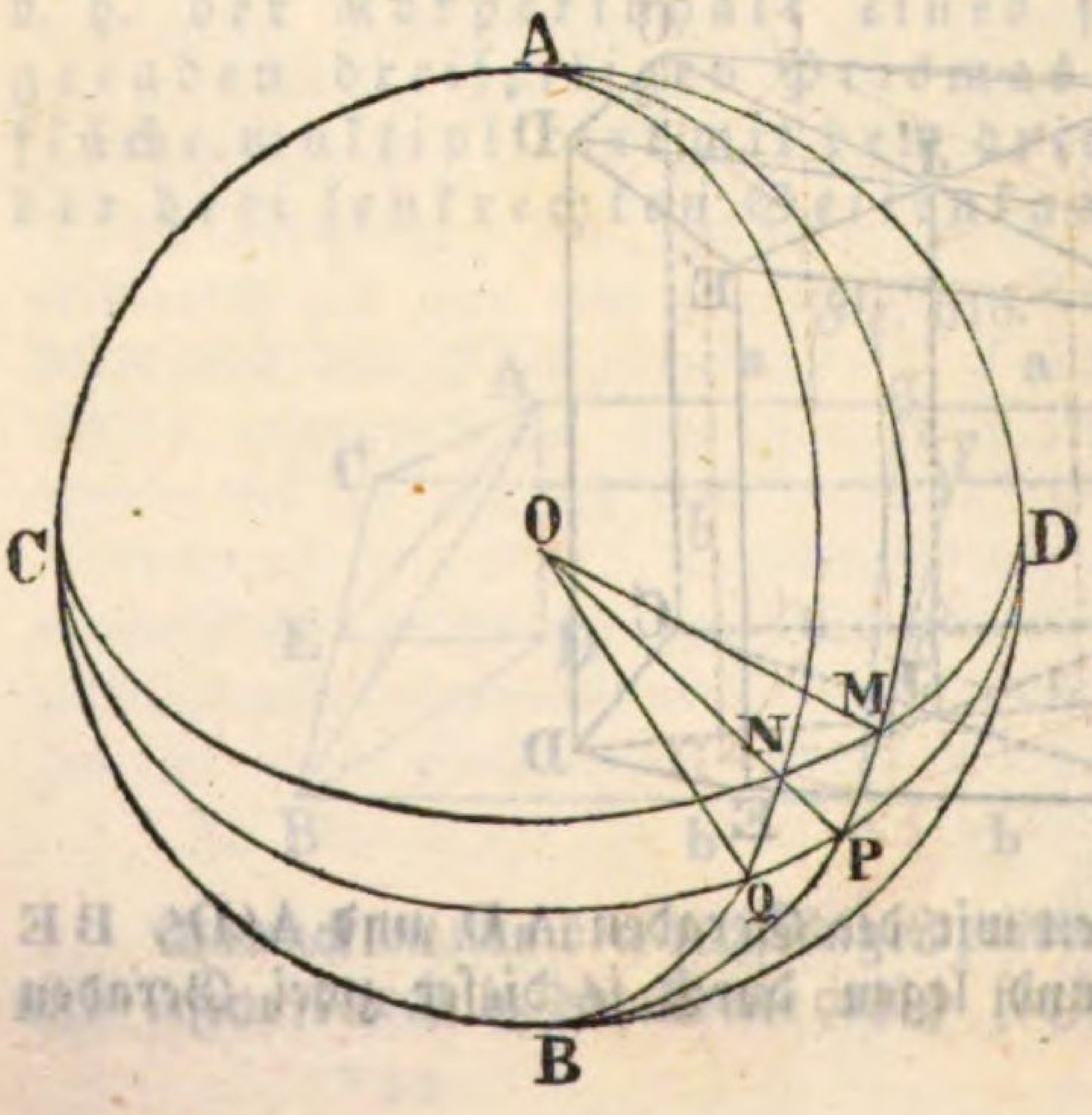
$$K = \frac{F}{n} . \tfrac{1}{3}(2 . nJJ' + nJJ'), \quad K = F . JJ',$$

daher ist der Körperinhalt eines schief abgeschnittenen regelmäßigen geraden Prisma's gleich der Grundfläche multiplicirt mit dem dazu gehörigen Stücke der Achse dieses Prisma's.

Wir können diesen Satz unmittelbar auf einen Cylinder übertragen, und sagen: der Körperinhalt eines geraden schief abgeschnittenen Cylinders ist gleich der Grundfläche multiplicirt mit dem dazu gehörigen Stücke der Achse dieses Cylinders.

III. Kugel und andere durch Drehung erzeugte Körper.

Fig. 618.



§. 489. Es sey die Kugel, deren Mittelpunkt O ist; durch den Durchmesser AB lege ich zwei Kreise ANQB und AMPB, durch den Durchmesser CD, welcher auf AB senkrecht ist, die Kreise DNMD und CQPD, wobei ich nur den Theil der Kreise zeichne, die auf die vordere Halbkugel fallen. Ich verbinde die Punkte N, M, P, Q mit O, und lege durch NOM, NOQ, POQ und MOP Ebenen, so entsteht ein Körper NMPQO, der sich von

einer vierseitigen Pyramide nur dadurch unterscheidet, daß seine Grundfläche NMPQ eine krumme Fläche ist. Denken wir uns nun durch AB und CD unzählige solche Kreise gezogen, so wird die ganze Kugeloberfläche in unzählige Vierecke und dann in Dreiecke um die Punkte A, B, C und D herum zerlegt. Denkt man sich die Eckpunkte dieser Figur mit O verbunden und die entsprechende Ebene dadurch gelegt, so zerfällt die ganze Kugel in unzählige solche pyramidenähnliche Körper, die alle ihren Scheitel in O und ihre Grundfläche in der Oberfläche der Kugel haben.

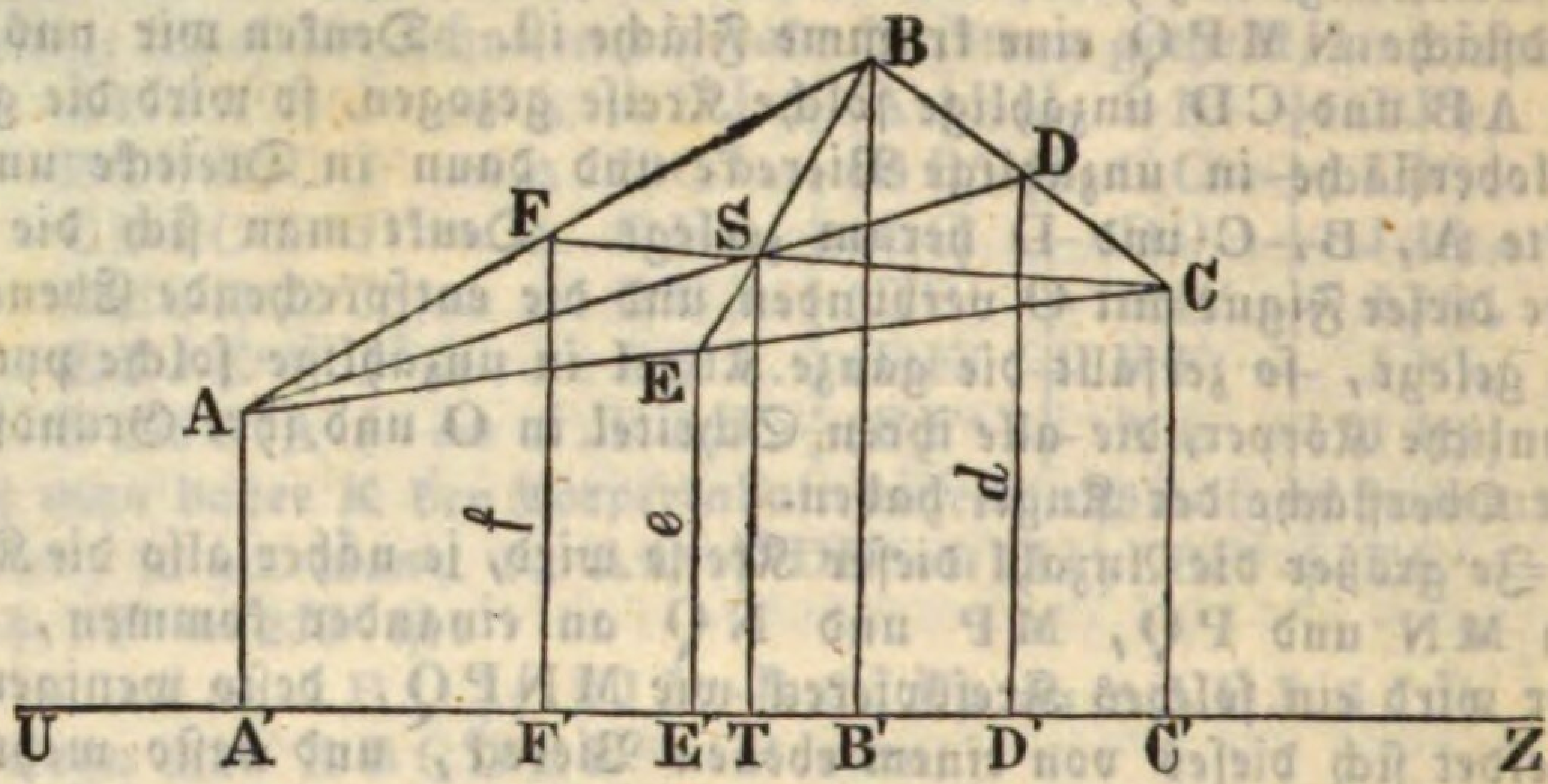
Je größer die Anzahl dieser Kreise wird, je näher also die Kreisbögen MN und PQ, MP und NQ an einander kommen, desto kleiner wird ein solches Kreisviereck wie MNPQ, desto weniger unterscheidet sich dieses von einem ebenen Viereck, und desto mehr nähert sich der Inhalt des Körpers OMNPQ dem Körperinhalte einer vierseitigen Pyramide. Da uns nun durchaus nichts hindert, in Gedanken die Anzahl der Kreise, die durch AB und CD gelegt werden, über alle Grenzen zu vervielfältigen, und dadurch die Kugel in eine immer größere Anzahl von vierseitigen und dreiseitigen Pyramiden zu zerlegen, die alle im Mittelpunkte ihren Scheitel und ihre Grundfläche in der Kugeloberfläche haben, und die Höhen dieser Pyramiden sich dem Halbmesser der Kugel ohne Ende nähern, daher der Körperinhalt einer solchen einzelnen Pyramide immer nahe seiner Grundfläche multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ des Halbmessers seyn wird, so folgt daraus, daß die Summe aller dieser Pyramiden, d. h. der Körperinhalt der Kugel gleich der Summe aller Grundflächen dieser Pyramide, d. h. der Kugeloberfläche multiplicirt mit dem Drittel des Halbmessers gleich seyn wird.

Denkt man sich auf der Kugeloberfläche einen Kreis und durch den Umfang dieses Kreises und den Mittelpunkt eine Kegelfläche, so heißt der Körper zwischen der Kegelfläche und dem von ihr begrenzten Theile der Kugeloberfläche ein Kugelausschnitt (Kugelsector).

Der Körperinhalt eines Kugelausschnittes ist dem vorhergehenden Gedankengange zufolge gleich seiner Grundfläche in der Kugel multiplicirt mit dem dritten Theile des Halbmessers.

§. 490. Wir werden zu diesem Resultate noch auf einem anderen Wege gelangen, den wir nun betreten wollen.

Fig. 619.



Es sey das Dreieck ABC. Wir wollen dieses Dreieck um die Gerade UZ als Achse drehen, und den Körperinhalt des so entstehenden ringförmigen Körpers suchen. Wir wollen von A, B und C auf UZ die Lothe AA', BB' und CC' fällen, die wir mit a, b, c bezeichnen wollen. Nennt man nun $A'B' = x$ und $B'C' = y$, so beschreiben sowohl AB, BC als auch AC abgestutzte Kegelflächen. Zieht man nun von der Summe der Körperinhalte der zwei ersten Kegelstutzen den letzten ab, so hat man den verlangten Körperinhalt. Nun ist

$$\text{erster Kegelstutzen} = \pi(a^2 + b^2 + ab)\frac{x}{3},$$

$$\text{zweiter} \quad \text{»} \quad = \pi(b^2 + c^2 + bc)\frac{y}{3},$$

$$\text{dritter} \quad \text{»} \quad = \pi(a^2 + c^2 + ac)\frac{x+y}{3},$$

daher, wenn wir den Inhalt des durch Drehung von ABC um YZ entstandenen Körpers durch K bezeichnen:

$$K = \frac{\pi}{3}[(a+b)bx + (b+c)by - (a+c)cx - (a+c)ay].$$

Gibt man hier innerhalb der Klammern $bcx + aby$ hinzu, und nimmt es wieder weg, so hat man:

$$K = \frac{\pi(a+b+c)}{3}[(b-c)x + (b-a)y],$$

Nun ist aber der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich

$$AA'BB' + BB'CC' - AA'CC' \quad \text{oder}$$

$$ABC = (a+b)\frac{x}{2} + (b+c)\frac{y}{2} - (a+c)\frac{(x+y)}{2}$$

$$= (b-c)\frac{x}{2} + (b-a)\frac{y}{2}.$$

Nennen wir daher diesen Flächeninhalt F, so hat man:

$$K = \frac{\pi(a+b+c)}{3} \cdot 2F.$$

Sind nun F, E und D die Halbirungspunkte der Seiten AB,

AC und BC, fällt man von diesen Punkten die Lothe FF′, EE′ und DD′ auf UZ, und nennt diese Lothe f, e und d. Nennt ferner den Durchschnittspunkt S der AD, BE und CF, welcher bekanntlich der Schwerpunkt des Dreiecks heißt, und es sey endlich $ST \perp UZ$.

Da, wie bekannt, $AS = 2SD$, $CS = 2FS$, $DS = 2ES$ ist, so hat man:

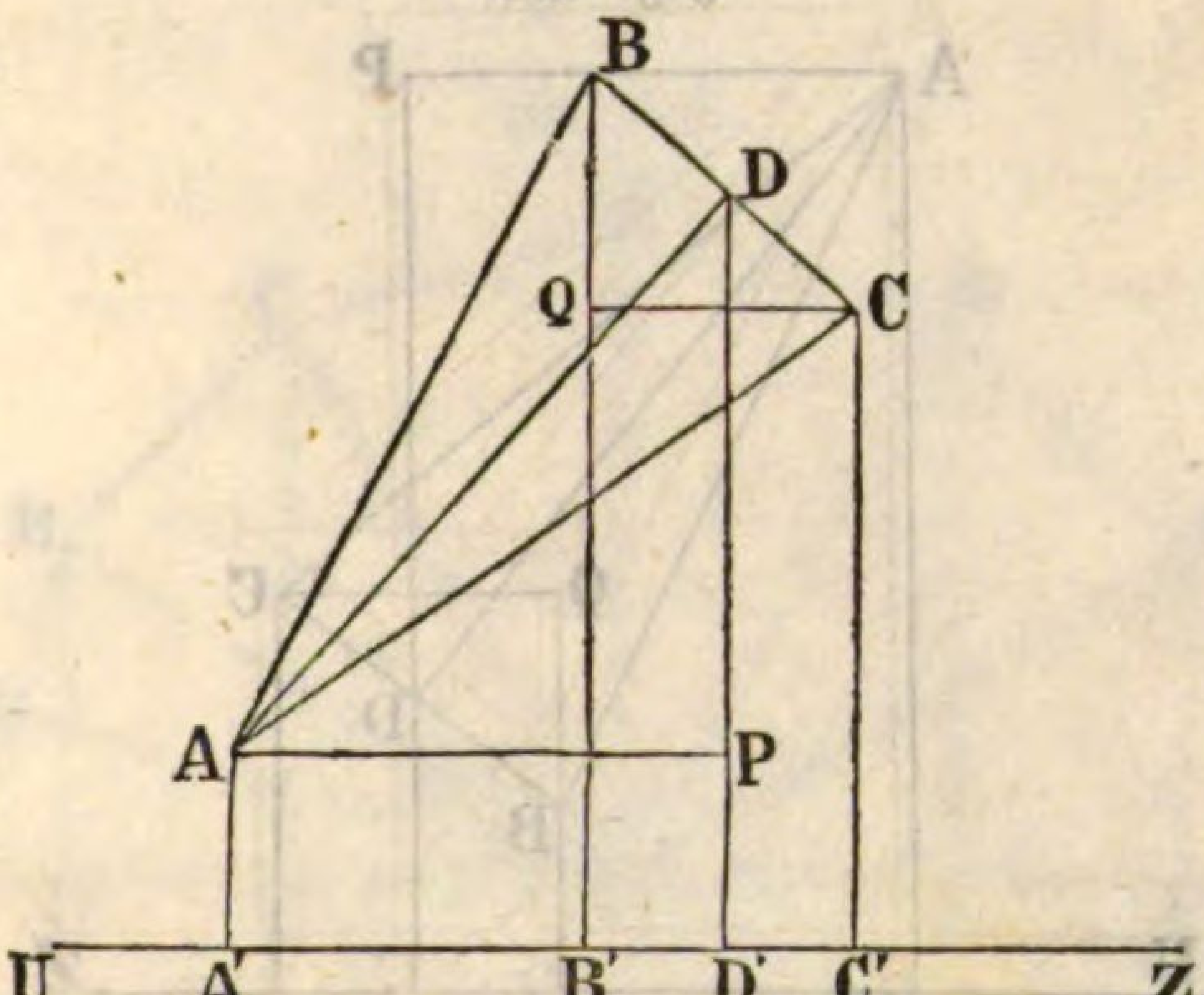
$$ST = \frac{a + 2d}{3} = \frac{b + 2e}{3} = \frac{c + 2f}{3},$$

während $d = \frac{b + c}{2}$, $e = \frac{a + c}{2}$, $f = \frac{a + b}{2}$ ist, daher

$$ST = \frac{a + b + c}{3}, \text{ daher } K = 2\pi . ST . F,$$

d. h. der Körperinhalt des durch Rotation eines Dreiecks um eine Gerade entstandenen Körpers ist gleich dem Flächeninhalte dieses Dreiecks multiplicirt mit dem Umfange des Kreises, den der Schwerpunkt desselben beschreibt.

Fig. 620.



§. 491. Es sey das Dreieck ABC ein gleichschenklichtes $AB = AC$, so ist dann $AD \perp BC$; da nun nach dem vorhergehenden Paragraphe der Körperinhalt

$$K = \frac{\pi(a + b + c)}{3} . 2F$$

ist, wo a, b, c ihre frühere Bedeutung haben, und da hier $2F = AD . BC$ ist, so hat man:

$$K = \frac{\pi}{3}(a + b + c) . AD . BC.$$

Zieht man nun das Loth $AP \perp DD'$ und $CQ \perp BB'$, so sind die Dreiecke ADP und BCQ mit einander ähnlich; da $BQ \perp AP$, $CQ \perp DP$, $BC \perp AD$, so hat man:

$$AD : BC = DP : QC, \text{ somit}$$
$$AD \cdot QC = BC \cdot DP.$$

Nun ist $DP = DD' - AA' = \frac{b+c}{2} - a = \frac{1}{2}(b+c-2a)$,

$$\text{somit } AD \cdot QC = \frac{BC}{2}(b+c) - BC \cdot a,$$

$$\text{somit } BC \cdot (b+c) = 2 \cdot AD \cdot B'C' + 2 BC \cdot a.$$

$$\text{Da nun } K = \frac{\pi}{3} a \cdot AD \cdot BC + \frac{\pi}{3} AD \cdot (b+c) \cdot BC,$$

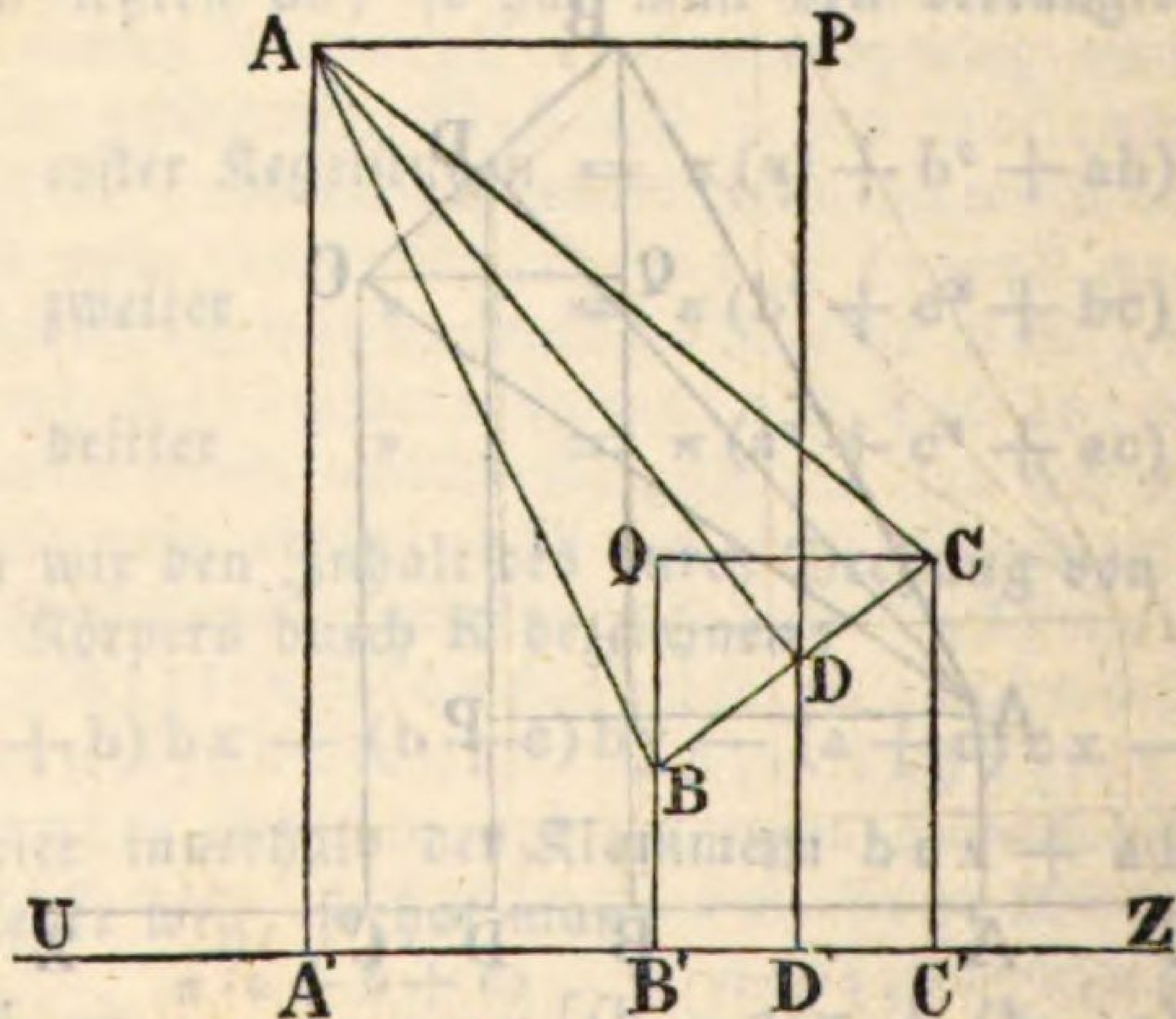
so hat man:

$$K = \frac{\pi}{3} a \cdot AD \cdot BC + \frac{\pi}{3} \cdot AD(2 AD \cdot B'C' + 2 \cdot a BC),$$

$$K = \pi a \cdot AD \cdot BC + \frac{2\pi}{3} AD^2 \cdot B'C',$$

$$K = 2\pi a \cdot F + \frac{2\pi}{3} AD^2 \cdot B'C'.$$

Fig. 621.



Ist aber, wie in dieser Figur, hier die Grundlinie BC näher zur Drehungsachse als der Scheitel A, so wird DP negativ, d. h. $DP = AA' - DD' = a - \frac{b+c}{2}$, daher

$$AD \cdot QC = BC \cdot a - \frac{BC}{2}(b+c), \text{ somit}$$

$$BC(b+c) = 2 BC \cdot a - 2 AD \cdot B'C', \text{ folglich}$$

$$K = 2\pi a \cdot F - \frac{2\pi}{3} AD^2 \cdot B'C',$$

daher allgemein

$$K = 2\pi a \cdot F \pm \pi AD^2 \cdot \tfrac{2}{3} B'C'.$$

Würde DC senkrecht auf die Drehungsachse stehen, so wird

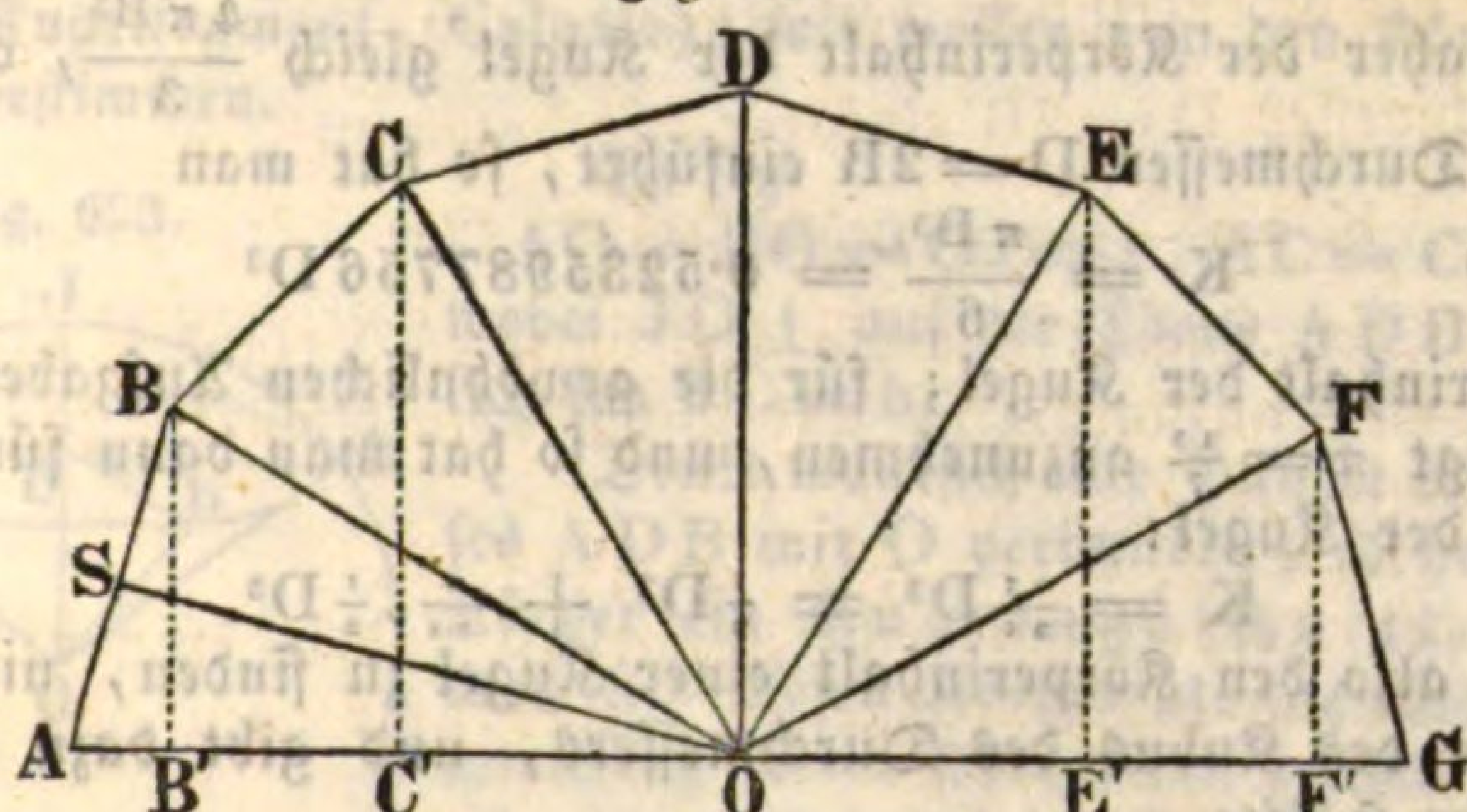
$$B'C' = 0, \quad \text{also} \quad K = 2\pi a F,$$

d. h. der Körperinhalt des durch Drehung eines gleichschenklichten Dreiecks um eine Gerade außerhalb des Dreiecks erhaltenen Körpers ist gleich dem Umfange des Kreises, den der Scheitel dieses Dreiecks beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des Dreiecks mehr oder weniger dem Flächeninhalte des Kreises, dessen Halbmesser das Loth auf die Grundlinie (AD) ist, multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ der Projektion der Grundlinie auf die Drehungsachse, und zwar mehr, wenn der Scheitel näher als die Grundlinie zur Drehungsachse liegt, und weniger im umgekehrten Falle.

Liegt der Scheitel selbst in der Drehungsachse, so ist $AA' = a = 0$, und dann ist der Körperinhalt des durch Drehung des Dreiecks um diese Achse erhaltenen Körpers bloß dem Flächeninhalte des Kreises, dessen Halbmesser das Loth auf die Grundlinie ist, multiplicirt mit $\frac{2}{3}$ der Projektion der Grundlinie auf die Drehungsachse. Man hat dann:

$$K = \frac{2\pi}{3} AD^2 . B'C'.$$

Fig. 622.



Es sey ABCDEFG die Hälfte eines regelmäßigen $n$seitigen Vielecks; drehen wir dieses um den Durchmesser AG des umschriebenen Kreises. Zieht man die BO, CO, DO, EO, FO, und fällt $OS \perp AB$, und BB', CC', DD', EE', FF' lothrecht auf AG, so ist der Körperinhalt des durch die Drehung

von ABO um AG erhaltenen Körpers gleich $\frac{2\pi}{3} OS^2 . AB'$,

BCO » » » » » $\frac{2\pi}{3} OS^2 . B'C'$,

COD » » » » » $\frac{2\pi}{3} OS^2 . C'O$,

DOE » » » » » $\frac{2\pi}{3} OS^2 . OE'$,

von EOF um AG erhaltenen Körpers gleich $\frac{2\pi}{3} OS^2 . E'F'$,

FOG » » » » » $\frac{2\pi}{3} OS^2 . F'G$.

Durch Summirung aller dieser Ausdrücke erhält man für den Körperinhalt des durch das nseitige Vieleck erzeugten Körpers gleich $\frac{2\pi}{3} SO^2 . AG$.

Nennt man R den Halbmesser des umschriebenen Kreises, so ist $AG = 2R$ und $SO = R \cos\frac{\pi}{n}$, daher der Körperinhalt des durch Rotation eines necks um den Durchmesser des umschriebenen Kreises erzeugten Körpers

$$K = \frac{4\pi}{3} R^3 \cos^2\frac{\pi}{n},$$

daher für ein rotirtes Viereck $K = \frac{2\pi}{3} R^3$,

» » » Sechseck $K = \pi R^3$.

Je größer die Anzahl der Seiten, d. h. n wird, um desto mehr wird der durch Drehung erhaltene Körper sich einer Kugel nähern; wird n unendlich groß, also $\frac{\pi}{n} = 0$, also $\cos\frac{\pi}{n} = 1$, so hat man die Kugel, daher der Körperinhalt der Kugel gleich $\frac{4\pi R^3}{3}$, oder wenn man den Durchmesser $D = 2R$ einführt, so hat man

$$K = \frac{\pi D^3}{6} = 0{\cdot}5235987756\, D^3$$

als Körperinhalt der Kugel; für die gewöhnlichen Aufgaben des Lebens genügt $\pi = \frac{22}{7}$ anzunehmen, und so hat man dann für den Körperinhalt der Kugel:

$$K = \tfrac{11}{21} D^3 = \tfrac{1}{2} D^3 + \tfrac{1}{21} . \tfrac{1}{2} D^3.$$

Um also den Körperinhalt einer Kugel zu finden, nimmt man die Hälfte des Kubus des Durchmessers, und gibt dazu den 21sten Theil dieser Hälfte.

Z. B. 1) Es sey der Durchmesser einer Kugel 6′, so hat man:

216, 108 36
5·14 5·14

Antwort: 113·14 Kubikschuh;

die genaue Rechnung gibt 113·1974 Kubikschuh.

2) $D = 21$; $D^3 = 9261$, 4630·5 1543·5
220·5

Resultat 4851 Kubikschuh;

die genaue Rechnung gibt 4849′048 C′.

Da der Körperinhalt der Kugel $K = \frac{\pi}{6} D^3$ ist, so hat man:

$$D = \sqrt[3]{\frac{6K}{\pi}} = 1{\cdot}240701 \sqrt[3]{K}.$$

Beispiel 1. Es sey eine Kugel von Gold (spec. Gewicht 19) ein Pfund im Gewichte, wie groß ist der Durchmesser derselben? Nennen wir den Durchmesser D, so hat man:

$$\frac{\pi D^3}{6} . 19 . 56{\cdot}4 = 1, \quad \text{daher} \quad D = \sqrt[3]{\frac{6}{19 . 56{\cdot}4 . \pi}},$$

$$\begin{array}{ll} \log 6 = 0{\cdot}778\ 1513 & \log 19 = 1{\cdot}278\ 7536 \\ \quad\ \ 3{\cdot}520\ 1827 & \log 56{\cdot}4 = 1{\cdot}751\ 2791 \\ \quad\ \ 0{\cdot}257\ 9686 - 3 & \log \pi \quad = 0{\cdot}497\ 1499 \\ \log D = 0{\cdot}083\ 6562 - 1 & \qquad\qquad 3{\cdot}527\ 1826 \end{array}$$

$$D = 0{\cdot}121242' = 1{\cdot}4549''.$$

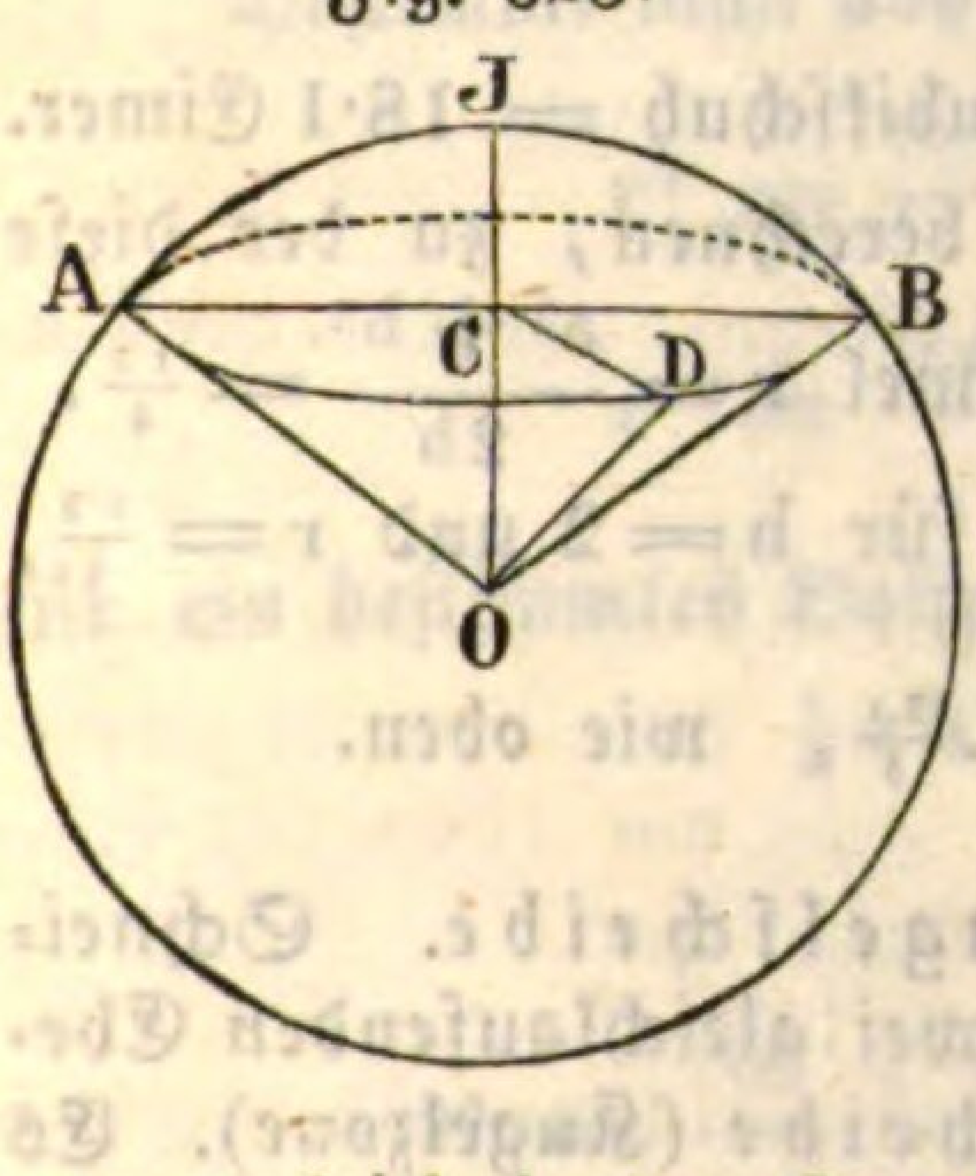
Beispiel 2. Es sey der Durchmesser einer Kugel zu suchen, die denselben Körperinhalt hat als ein Würfel, dessen jede Seite gleich a ist, so hat man:

$$\frac{\pi D^3}{6} = a^3, \quad \text{daher} \quad D = a \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}},$$

$$\text{daher} \quad D = 1{\cdot}241\, a.$$

§. 492. Schneidet man von einer Kugel ein Stück ABCJ durch eine Ebene ab, so heißt das abgeschnittene Stück eine Kugelhaube (Kugelsegment, Calotte); wir wollen nun den Körperinhalt desselben bestimmen.

Fig. 623.



Es sey

AO = BO = OJ = r, AC = CB = a,

wobei JO ⊥ auf der Ebene ADB ist, endlich sey JC = h.

Denkt man sich alle Punkte des Umkreises ADB mit O verbunden, so heißt dieser Körper ein Kugelausschnitt, und da man sich diesen Körper als die Summe von unendlich vielen Pyramiden denken kann, die alle ihren Scheitel in O, ihre Grundfläche in der Oberfläche der Kugel haben, so ist der Körperinhalt eines solchen Kugelausschnittes gleich der Oberfläche des Kugelausschnittes, der zugleich in der Kugelfläche liegt, multiplicirt mit $\frac{1}{3}$ des Halbmessers der Kugel. Die Oberfläche aber von AJB ist gleich dem Umfange eines größten Kreises, multiplicirt mit der Höhe JC, daher

$$\text{Kugelausschnitt} = 2\pi r . h . \frac{r}{3} = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

Zieht man nun von diesem Kugelausschnitte den Kegel ab, dessen Scheitel O, und der Kreis ADB die Grundfläche ist, so erhält man den Körperinhalt der Kugelhaube:

$$\text{Kegel} = \pi a^2 . \frac{r - h}{3}, \quad \text{daher}$$

$$\text{Kugelhaube} = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h - \tfrac{1}{3}\pi a^2 (r - h) \quad \text{I.}$$

Das Dreieck OBC gibt

$$r^2 = a^2 + (r - h)^2 \quad \text{oder} \quad 2rh = a^2 + h^2,$$

mittelst welcher Gleichung wir aus I. einmal a, ein anderes Mal r entfernen können. Wir erhalten dadurch für den Körperinhalt H der Kugelhaube folgende zwei Ausdrücke:

$$H = \pi h^2 . r - \frac{\pi h^3}{3} \quad (A),$$

$$H = \tfrac{1}{2} \pi a^2 . h + \frac{\pi h^3}{6} \quad (B).$$

Die erste Formel lehret: der Körperinhalt einer Kugelhaube ist gleich einem Cylinder, wo die Höhe der Haube der Halbmesser, und der Halbmesser der Kugel die Höhe desselben ist, weniger zweimal einer Kugel, deren Durchmesser diese Höhe ist.

Die zweite wichtigere Formel lehret: der Körperinhalt einer Kugelhaube ist gleich einem halben Cylinder von der Grundfläche und Höhe der Kugelhaube, mehr einer Kugel, deren Durchmesser diese Höhe ist.

Die zweite Formel ist deßwegen wichtiger, weil man mittelst ihrer den Körperinhalt bestimmen kann bloß mittelst der Ausmessungen an der Kugelhaube.

Beispiel. Der Durchmesser der Grundfläche einer Kugelhaube sey 6′, die Höhe derselben 2′, wie viel Eimer gehen in den hohlen Raum derselben?

Man hat nach der Formel (B):

$$\tfrac{1}{2} . \tfrac{22}{7} . 9 . 2 + \tfrac{22}{7} . \tfrac{8}{6} = \tfrac{22}{7} . \tfrac{31}{3} = 32{\cdot}476 \text{ Kubikschuh} = 18{\cdot}1 \text{ Eimer}.$$

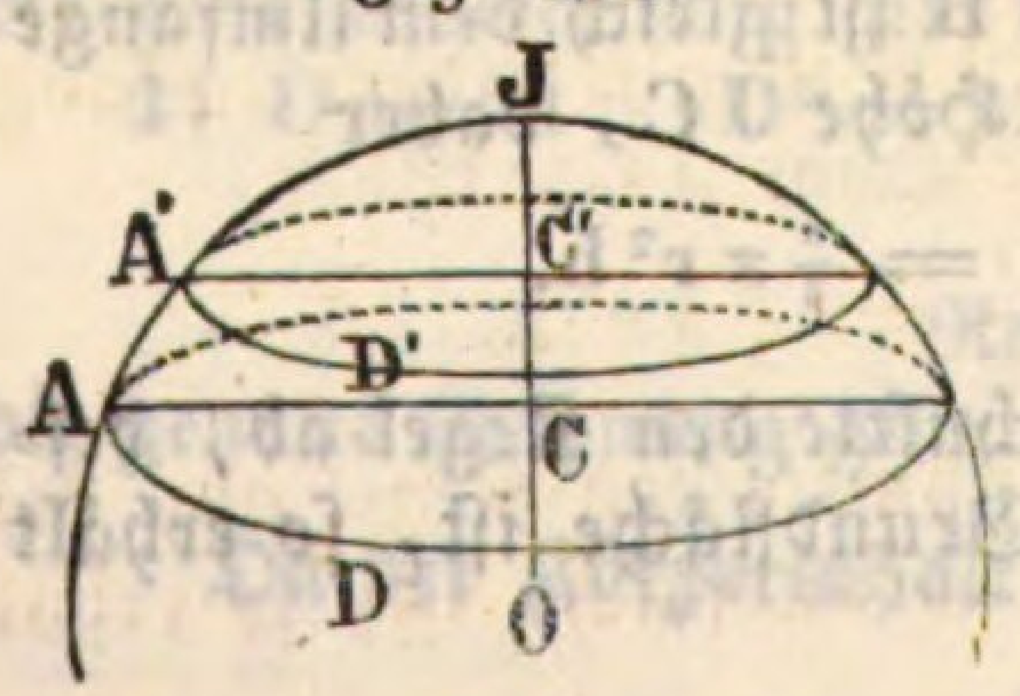
Wollte man den Halbmesser der Kugel berechnen, zu der diese Kugelhaube gehört, so hat man nach der Formel $r = \frac{a^2 + h^2}{2h} = \frac{13}{4}$.

Rechnet man nun nach der Formel (A) für $h = 2$ und $r = \frac{13}{4}$, so hat man:

$$\tfrac{22}{7} . 4 . \tfrac{13}{4} - \tfrac{22}{7} . \tfrac{8}{3} = \tfrac{22}{7} . \tfrac{31}{3}, \quad \text{wie oben.}$$

§. 493. Körperinhalt einer Kugelscheibe. Schneidet man von einer Kugel ein Stück zwischen zwei gleichlaufenden Ebenen ab, so heißt dieser Körper eine Kugelscheibe (Kugelzone). Es seyen die Ebenen ACD und A′C′D′ gleichlaufend, CJ sey ein Loth vom Mittelpunkte der Kugel auf beide Ebenen. Es sey nun $AC = a$, $A'C' = a'$, $CJ = h$, $C'J = h'$, ferner

Fig. 624.



$$CC' = h - h' = k.$$

Heißt nun die größere Kugelhaube H, die kleinere H′, so hat man:

$$H = \pi h^2 r - \frac{\pi h^3}{3}, \quad H' = \pi h'^2 r - \frac{\pi h'^3}{3};$$

daher, wenn man $H - H' = S$ nennt:

$$S = \pi r(h^2 - h'^2) - \frac{\pi}{3}(h^3 - h'^3),$$

$$S = \pi k\left[r(h + h') - \tfrac{1}{3}(h^2 + hh' + h'^2)\right].$$

Da nun $r = \dfrac{a^2 + h^2}{2h}$, und eben so $r = \dfrac{a'^2 + h'^2}{2h'}$, so hat man

$$2hr = a^2 + h^2, \quad 2h'r = a'^2 + h'^2, \quad \text{daher}$$

$$hr + h'r = \tfrac{1}{2}(a^2 + a'^2 + h^2 + h'^2), \quad \text{somit}$$

$$S = \pi k\left[\tfrac{1}{2}(a^2 + a'^2 + h^2 + h'^2) - \tfrac{1}{3}(h^2 + hh' + h'^2)\right],$$

$$S = \pi k\left[\tfrac{1}{2}(a^2 + a'^2) + \tfrac{1}{6}(h^2 - 2hh' + h'^2)\right],$$

$$S = \tfrac{1}{2}(\pi a^2 k + \pi a'^2 k) + \frac{\pi k^3}{6}.$$

Der Körperinhalt einer Kugelscheibe ist gleich der halben Summe zweier Cylinder, die die Höhe der Scheibe zur Höhe, und den obern und untern Kreis zur Grundfläche haben, mehr einer Kugel, die die Höhe der Scheibe zum Durchmesser hat.

Es erübriget uns nur, hier aus a, a′ und k der Kugelscheibe den Halbmesser r der zugehörigen Kugel zu finden. Zu diesem Behufe hat man:

$$k = \sqrt{r^2 - a'^2} - \sqrt{r^2 - a^2}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung das r, so hat man:

$$r^2 = \frac{(a^2 + a'^2 + k^2)^2 - 4a^2a'^2}{4k^2} \quad \text{oder}$$

$$r^2 = \frac{[(a + a')^2 + k^2]\,.\,[(a - a')^2 + k^2]}{4k^2};$$

für ein bestimmtes Beispiel sey $a = 35''$, $a' = 28''$, $k = 21''$,

$$\tfrac{1}{2}\pi k(a^2 + a'^2) = 66297^{c''}$$

$$\tfrac{1}{6}\pi k^3 = 4851^{c''}$$

$$S = 71148^{c''},$$

$$r^2 = \frac{(63^2 + 21^2)(7^2 + 21^2)}{4.21^2} = 25{\cdot}7^2, \quad r = 35.$$

§. 494. Ist die Höhe h einer Kugelhaube gleich dem mfachen des Halbmessers r der Kugel, und ist diese Kugelhaube selbst das nfache der ganzen Kugel, wo beide m und n natürlich kleiner als 1 sind, so hat man zwischen m und n folgende Gleichung:

$$\pi m^2 r^3 - \frac{\pi}{3} m^3 . r^3 = n . \frac{4\pi r^3}{3} \quad \text{oder}$$

$$3m^2 - m^3 = 4n;$$

für $m = 0{\cdot}1$	hat man		$n = 0{\cdot}00725$
$0{\cdot}2$	»	»	$= 0{\cdot}028$
$0{\cdot}3$	»	»	$= 0{\cdot}06075$
$0{\cdot}4$	»	»	$= 0{\cdot}104$
$0{\cdot}5$	»	»	$= 0{\cdot}15625$
$0{\cdot}6$	»	»	$= 0{\cdot}216$
$0{\cdot}7$	»	»	$= 0{\cdot}28175$
$0{\cdot}8$	»	»	$= 0{\cdot}352$
$0{\cdot}9$	»	»	$= 0{\cdot}42525$
1	»	»	$= 0{\cdot}5$

Ist so z. B. die Höhe der Kugelhaube $h = 0{\cdot}6\,r = \frac{3}{5}r$, so ist die Kugelhaube $= \frac{216}{1000}$ oder $\frac{27}{125}$ der ganzen Kugel.

Ist umgekehrt n gegeben und wird um m gefragt, so hat man die Gleichung des dritten Grades

$$m^3 - 3\,m^2 + 4\,n = 0$$

aufzulösen, wobei m die unbekannte ist.

Wollte man z. B. den vierten Theil der Kugel abschneiden, so ist $n = \frac{1}{4}$, $4n = 1$, und die aufzulösende Gleichung:

$$m^3 - 3\,m^2 + 1 = 0.$$

Aus der vorangehenden Tabelle sieht man, damit $n = \frac{1}{4} = 0{\cdot}25$ sey, muß dann m zwischen $0{\cdot}6$ und $0{\cdot}7$ liegen. Die wirkliche Berechnung gibt $m = 0{\cdot}6526$. Um also von einer Kugel den vierten Theil derselben abzuschneiden, muß die Höhe der abzuschneidenden Kugelhaube $= 0{\cdot}6526$ des Halbmessers seyn.

Wollte man die Kugel durch gleichlaufende Ebenen in fünf gleiche Theile theilen, so sucht man zuerst die Höhe einer Kugelhaube, die gleich ist dem fünften Theile der Kugel mittelst der Gleichung

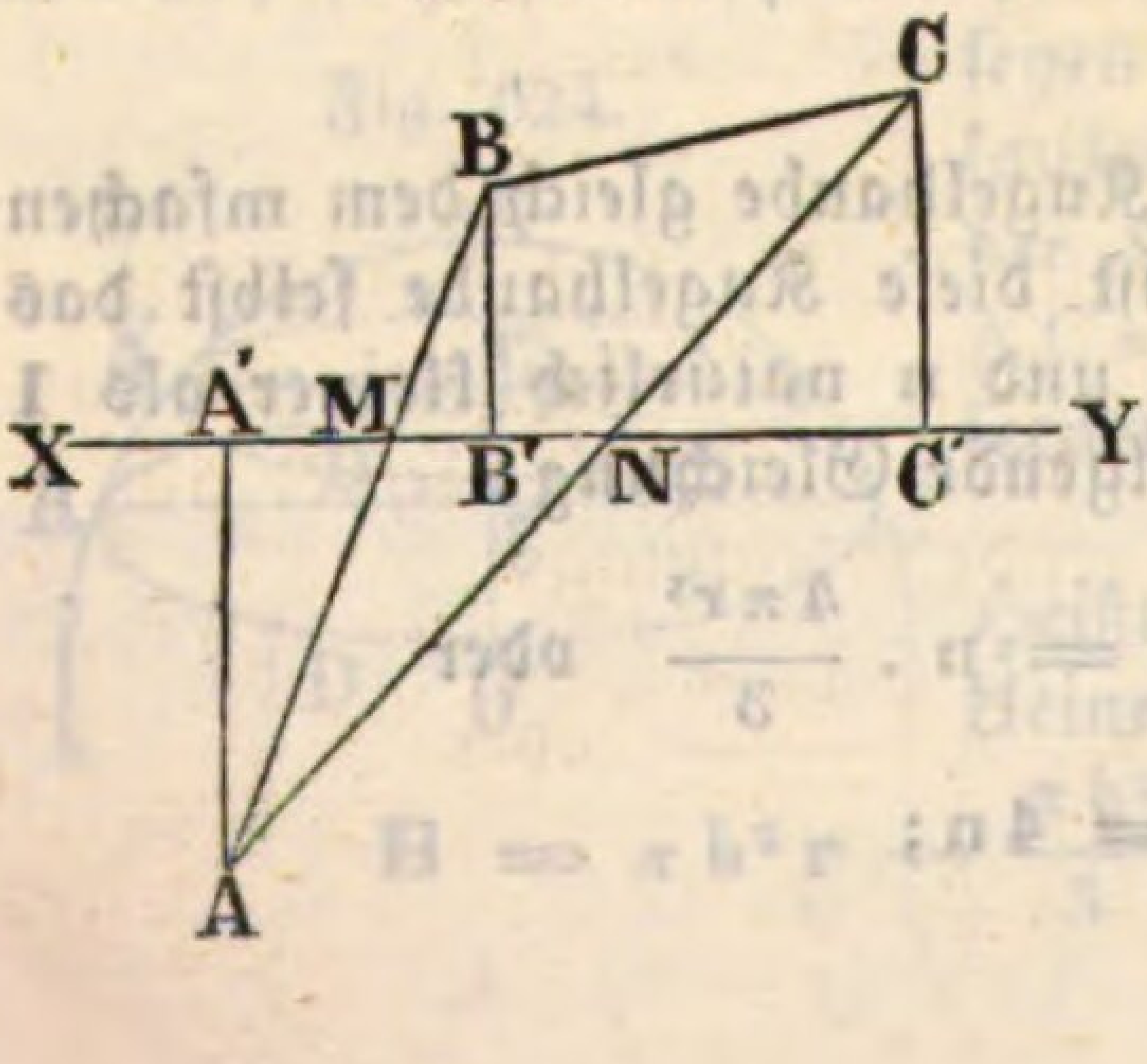
$$m^3 - 3\,m^2 + \tfrac{4}{5} = 0,$$

dann die Höhe einer Kugelhaube, deren Körperinhalt gleich $\frac{2}{5}$ der Kugel ist, durch die Gleichung:

$$m^3 - 3\,m^2 + \tfrac{8}{5} = 0.$$

Die erste Höhe von der zweiten abgezogen, gibt die Höhe der Kugelzone ab, deren Körperinhalt $= \frac{1}{5}$ der Kugel ist. Die doppelte zweite Höhe vom Durchmesser der Kugel abgezogen, gibt die Höhe der dritten Kugelzone, deren Körperinhalt $= \frac{1}{5}$ der Kugel ist.

Fig. 625.



§. 495. Wir haben früher den Inhalt eines Körpers gesucht, der entstehet durch Drehung eines Dreiecks um eine Gerade, die außerhalb dieses Dreiecks liegt. Wir wollen nun das Dreieck A B C um eine Achse XY drehen, die innerhalb des Dreiecks gehet. Zu diesem Behufe fällen wir von den Punkten A, B und C die Lothe $AA' = a$, $BB' = b$ und $CC' = c$ auf die Drehungsachse XY, nennen die

Größen $A'B' = x$, $B'C' = y$. Ich bezeichne den Körper, der durch die Drehung des Vierecks BCMN um XY entstehet, durch I., und den, der durch Drehung des Dreiecks AMN entstehet, durch II.; es bestehet I. aus einem Kegel, der durch Drehung des Dreiecks MBB′ entstehet, mehr einem abgekürzten Kegel, der durch BB′CC′ entstehet, weniger einem Kegel durch NCC′ entstehend. Der Körper II. ist der Unterschied der zwei Kegel, die durch die Drehung der Dreiecke A′AN und AA′M hervorgebracht werden. Man hat so:

$$\text{I.} = \frac{\pi}{3}[MB'.b^2 + (b^2 + c^2 + bc)y - NC'.c^2],$$

$$\text{II.} = \frac{\pi}{3}[A'N.a^2 - A'M.a^2].$$

Nun ist $MB' = \dfrac{b}{b+a}x$, $\quad MA' = \dfrac{a}{a+b}x$,

$NC' = \dfrac{c}{a+c}(x+y)$, $\quad NA' = \dfrac{a}{a+c}(x+y)$, daher:

$$\text{I.} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{b^3}{a+b}x + (b^2 + c^2 + bc)y - \frac{c^3}{a+c}(x+y)\right],$$

$$\text{II.} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{a^3}{a+c}(x+y) - \frac{a^3}{a+b}x\right].$$

Durch Subtraktion erhält man:

$$\text{I.} - \text{II.} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{a^3+b^3}{a+b}.x + (b^2 + c^2 + bc)y - \frac{a^3+c^3}{a+c}(x+y)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3}[(a^2-ab+b^2)x + (b^2+c^2+bc)y - (a^2-ac+c^2)(x+y)]$$

$$= \frac{\pi}{3}[b(b-a)x + b(b+c)y - c(c-a)x + a(c-a)y].$$

Gibt man hier innerhalb der Klammer

$$b.cx - b.ay - c.bx + a.by$$

hinzu, so erhält man:

$$\text{I.} - \text{II.} = \frac{\pi}{3}(b+c-a)[(b-c)x + (b+a)y].$$

Sucht man den Flächeninhalt F des Dreiecks ABC, so findet man leicht:

$$2F = \frac{b^2}{a+b}x + (b+e)y - \frac{c^2}{a+c}(x+y) + \frac{a^2}{a+c}(x+y) - \frac{a^2}{a+b}x,$$

$$2F = \frac{b^2-a^2}{b+a}x + (b+c)y + \frac{a^2-c^2}{a+c}(x+y),$$

$$2F = (b-a)x + (b+c)y + (a-c)(x+y),$$

$$2F = (b-c)x + (b+a)y,$$

daher hat man:

$$\text{I.} - \text{II.} = 2\pi F.\frac{b+c-a}{3}.$$

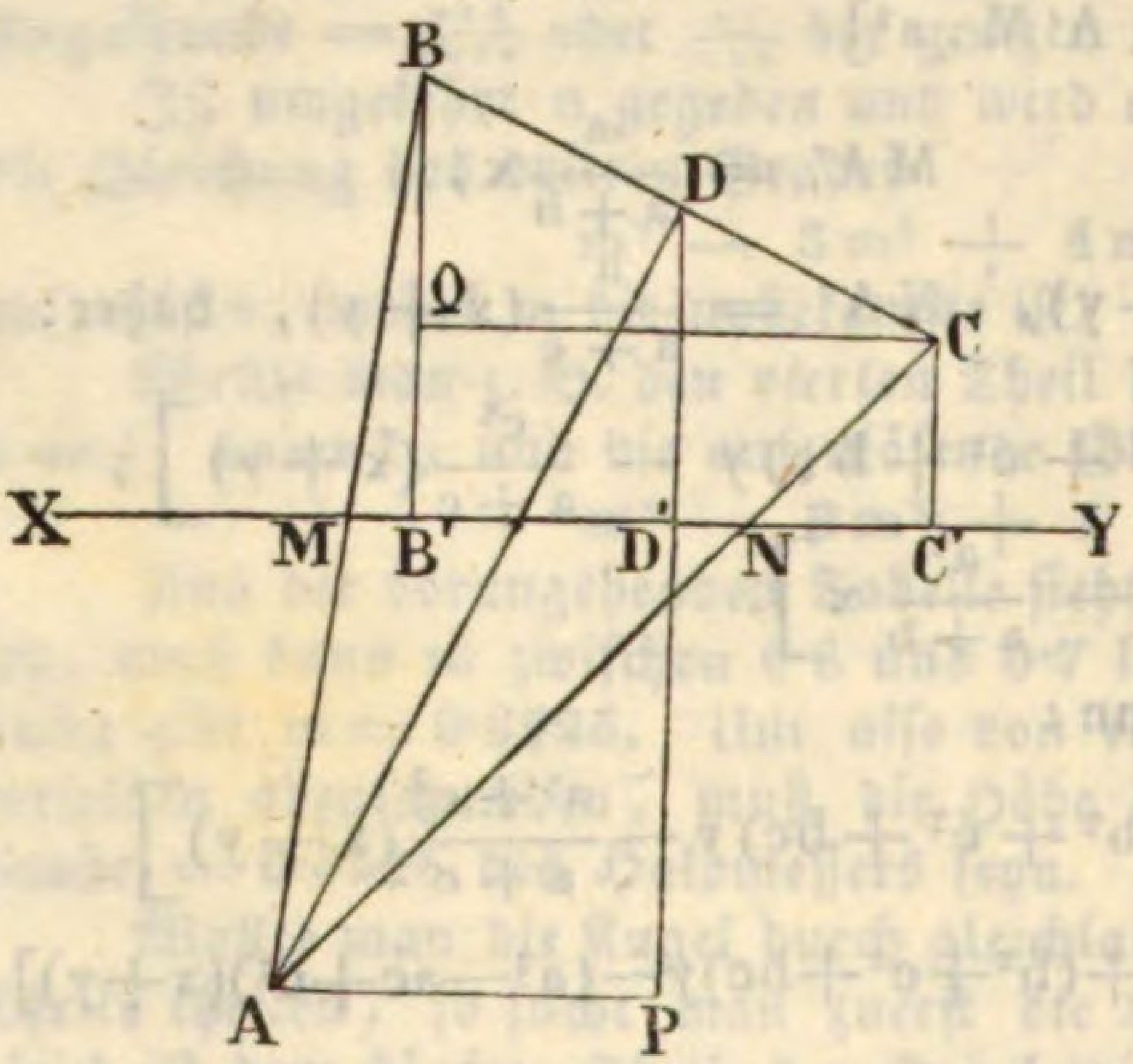
Wie man leicht findet, ist $\dfrac{b+c-a}{3}$ die Größe des Lothes vom

Schwerpunkte dieses Dreiecks auf die Achse XY; nennen wir die Größe dieses Lothes s, so hat man:

$$\text{I.} - \text{II.} = 2\pi s . \text{F}.$$

Gehet also die Drehungsachse durch das Dreieck durch, so ist der Unterschied der Inhalte der zwei durch die Drehung der Dreiecksstücke um diese Achse entstehenden Körper gleich dem Umfange des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Dreiecks beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des Dreiecks.

Fig. 626.



Gehet die Drehungsachse durch den Schwerpunkt des Dreiecks, so sind die zwei durch Drehung der zwei Theile entstehenden Körper einander gleich.

Wenden wir das Vorhergehende auf die Drehung eines gleichschenklichten Dreiecks an, AB=AC, AD ⊥ BC. Wir wollen wieder den durch Drehung von MBCN entstandenen Körper mit II., und den durch AMN entstandenen mit I. bezeichnen, so hat man dem Vorhergehenden zufolge:

$$\text{I.} - \text{II.} = \pi . \frac{b+c-a}{3} . \text{AD} . \text{BC} = \frac{\pi}{3} [(b+c)\text{BC} - a . \text{BC}] \text{AD}.$$

Fällt man nun die Lothe CQ ⊥ BB′, AP ⊥ DD′, so sieht man leicht, daß die Dreiecke ADP und BCQ mit einander ähnlich sind, daher

$$\text{AD} : \text{BC} = \text{PD} : \text{CQ}, \quad \text{also} \quad \text{AD}.\text{CQ} = \text{BC}.\text{DP}.$$

Nun ist $\text{DP} = \text{DD}' + \text{D}'\text{P} = \frac{b+c}{2} + a$, daher:

$$\text{AD}.\text{CQ} = (b+c)\frac{\text{BC}}{2} + a.\text{BC}, \quad \text{somit}$$

$$(b+c)\,\text{BC} = 2\,\text{AD}.\text{CQ} - 2a.\text{BC}.$$

Substituiren wir diesen Werth von (b + c) BC aber innerhalb der Klammer in dem Ausdrucke für I — II., so hat man:

$$\text{I.} - \text{II.} = \frac{\pi}{3} [2\,\text{AD}.\text{CQ} - 3a.\text{BC}]\,\text{AD};$$

oder da CQ = B′C′ und BC.AD = 2 △ABC ist, so hat man:

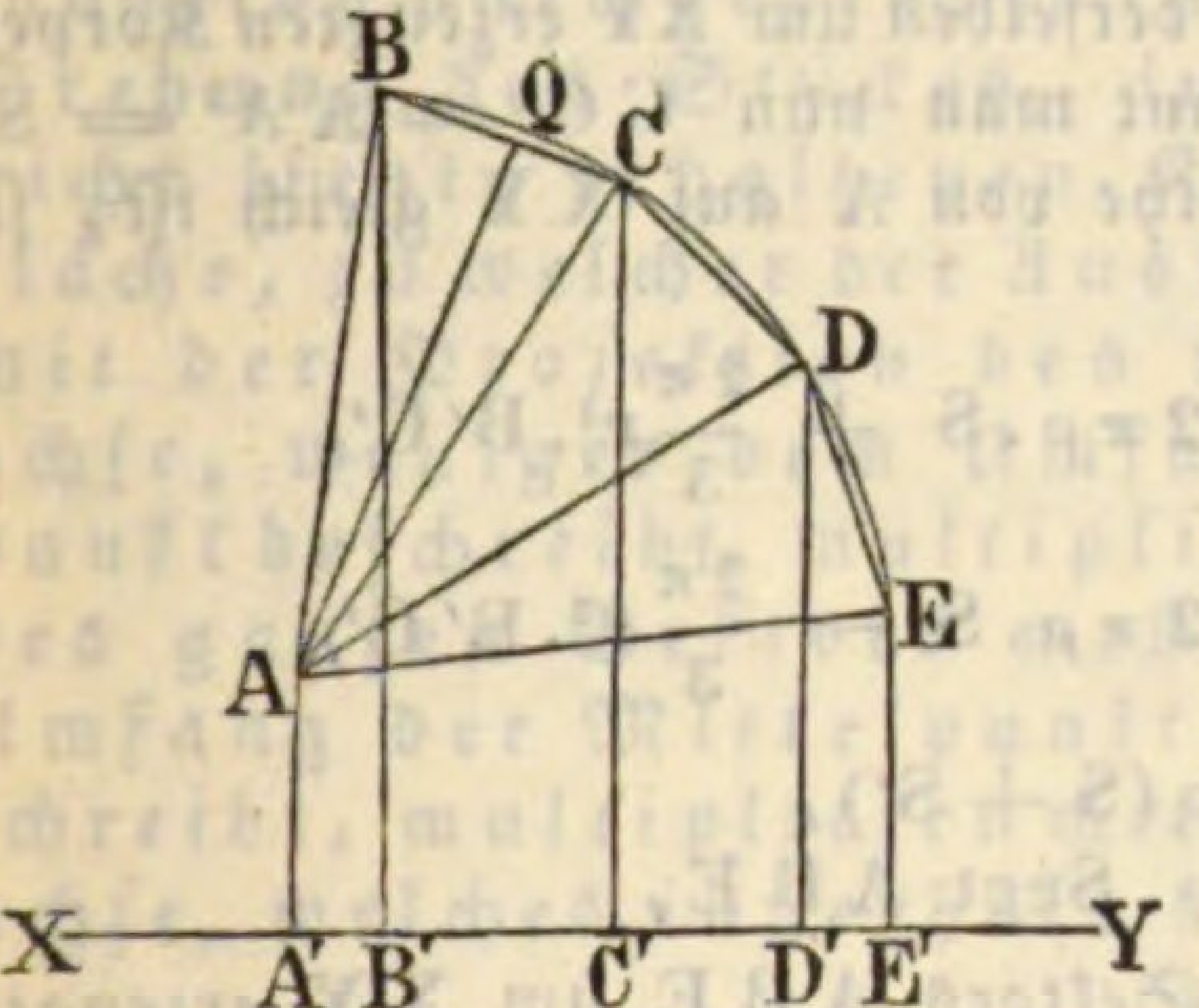
$$\text{I.} - \text{II.} = \frac{2\pi}{3}\,\text{AD}^2.\text{B}'\text{C}' - 2\pi a\,\triangle\text{ABC}.$$

Da nun $II. = \frac{\pi}{3} a^2 . MN$, so hat man:

$$I. = \frac{2\pi}{3} . AD^2 . B'C' - 2\pi a . \Delta ABC + \frac{\pi}{3} a^2 . MN;$$

ein Ausdruck, der sich leicht in Worten geben läßt.

Fig. 627.



§. 496. Betrachten wir den Kreisausschnitt ABE, und drehen ihn um die Achse XY, und wir wollen den Rauminhalt des so entstehenden Körpers suchen. Theilen wir den Bogen BE in mehrere gleiche Theile, z. B. BC = CD = DE. Nennen wir die Körperinhalte, die durch die Rotation der Dreiecke ABC, ACD, ADE entstehen, nach einander I., II., III., so hat man nach dem §. 491, wenn $AA' = \rho$, $AQ = r$ ist:

$$I. = 2\pi\rho . \Delta ABC + \frac{2\pi}{3} r^2 . B'C',$$

$$II. = 2\pi\rho . \Delta ACD + \frac{2\pi}{3} r^2 . C'D',$$

$$III. = 2\pi\rho . \Delta ADE + \frac{2\pi}{3} r^2 . D'E', \text{ daher:}$$

$$I. + II. + III. = 2\pi\rho . (\Delta ABC + \Delta ACD + \Delta ADE) + \frac{2\pi}{3} r^2 . B'E'.$$

Da nun alle diese Beziehungen gelten, man mag BE in so viele gleiche Theile theilen als man will, so hat man für den Körperinhalt des durch Rotation des Kreisausschnittes ABE um die Achse XY erzeugten Körpers:

$$K = 2\pi\rho . \text{Sect.} ABE + \frac{2\pi}{3} r^2 . B'E'.$$

Würde der Kreisausschnitt gegen die Drehungsachse so stehen, daß der Mittelpunkt weiter als der Bogen von der Achse entfernt wäre, d. h. würde der Bogen seine erhabene Seite der Drehungsachse zuwenden, so hätte man, wie man leicht sieht:

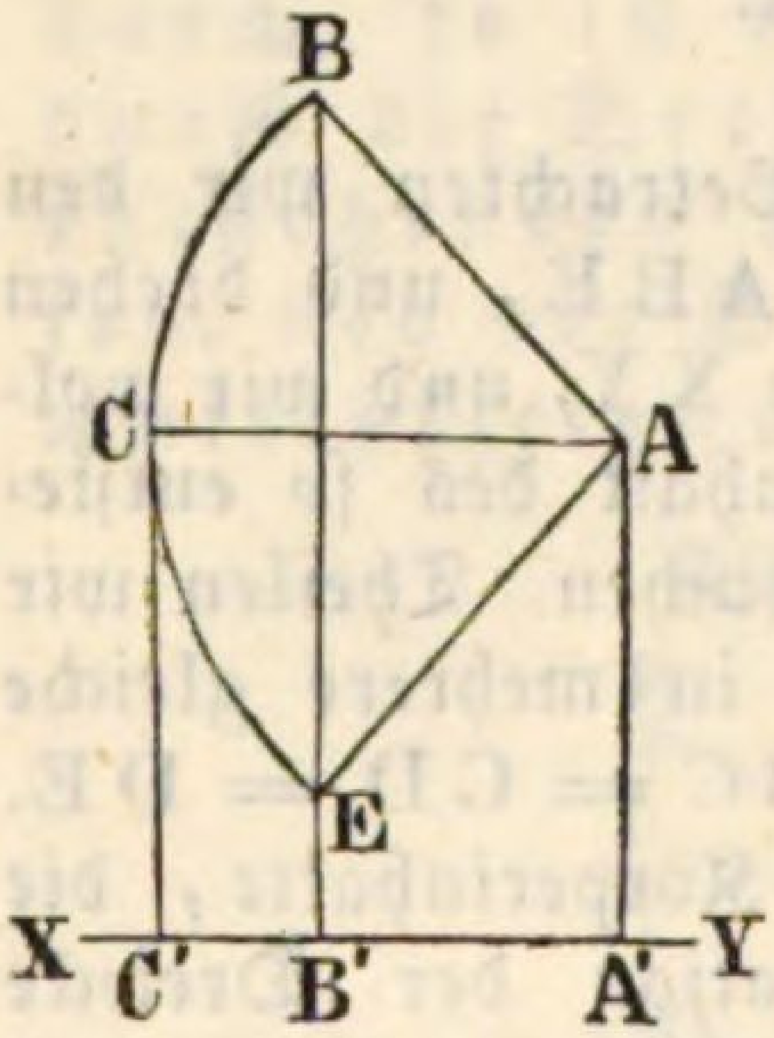
$$K = 2\pi\rho . \text{Sect.} ABE - \frac{2\pi}{3} r^2 . B'E',$$

d. h. der Rauminhalt eines Körpers, der durch Drehung eines Kreisausschnittes um eine Achse außerhalb dieses Ausschnittes entsteht, ist gleich dem Umfange des Kreises, den der Mittelpunkt beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des Kreisausschnittes (Sectors), **mehr** oder **weniger** $\frac{2}{3}$ des Flächeninhaltes des Kreises, zu dem der Kreisausschnitt ge-

hört, multiplicirt mit der Projektion des Bogens auf die Drehungsachse.

Würde der sich rotirende Kreissektor folgende Stellung haben:

Fig. 628.



d. h. wäre die Sehne B E senkrecht auf die Drehungsachse X Y, so fällen wir vom Mittelpunkte A ein Loth A C auf E B, benennen den Sektor A B C mit S, den Sektor A E C mit S′, und die durch Drehung derselben um XY erzeugten Körper K und K′; nennt man nun C C′ = A A′ = S, weil es dem Lothe von A auf X Y gleich ist, so hat man:

$$K = 2\pi\rho . S + \frac{2\pi}{3} r^2 . B'C',$$

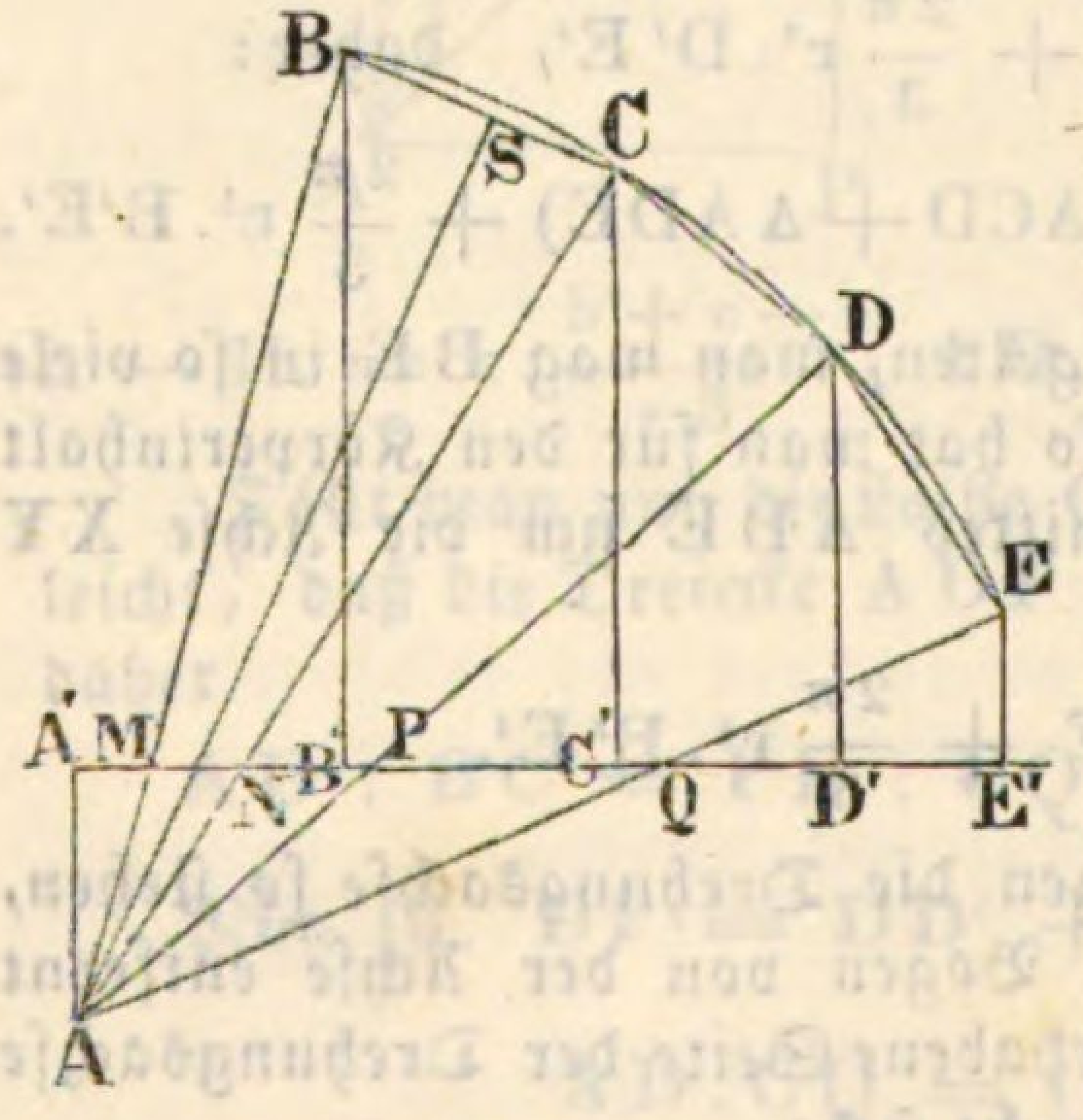
$$K' = 2\pi\rho . S' - \frac{2\pi}{3} r^2 . B'C',$$

daher $K + K' = 2\pi\rho(S + S')$,

d. h. $K + K' = 2\pi\rho . \text{Sect. } A B E$,

daher der durch die Rotation des Sektors A B E um X Y erzeugte Körper gleich dem Umfange, den der Mittelpunkt beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des Sektors, sobald die Sehne des Sektors senkrecht auf der Rotationsachse stehet.

Fig. 629.



Gehet aber die Drehungsachse XY durch den Kreisausschnitt A B E hindurch, und wir wollen den Rauminhalt erhalten, der durch Drehung des Stückes B M Q E des Kreisausschnittes ober der Drehungsachse erhalten wird, so verfahren wir folgender Maßen. Theilen wir den Bogen B E in mehrere gleiche Theile, z. B. hier in drei, und wir wollen zuerst suchen die Körperinhalte, die durch Drehung von den Vierecken B C M N, C D N P und D E P Q entstehen, welche Körperinhalte wir durch I., II. und III. bezeichnen wollen; nennen wir zu diesem Behufe die Lothe $AA' = \rho$ und $AS = r$, so hat man:

$$I. = \frac{2\pi}{3} r^2 . B'C' - 2\pi\rho . \Delta ABC + \frac{\pi}{3}\rho^2 . MN,$$

$$II. = \frac{2\pi}{3} r^2 . C'D' - 2\pi\rho . \Delta ACD + \frac{\pi}{3}\rho^2 . NP,$$

$$III. = \frac{2\pi}{3} r^2 . D'E' - 2\pi\rho . \Delta ADE + \frac{\pi}{3}\rho^2 PQ, \text{ daher:}$$

$$I. + II. + III. = \frac{2\pi}{3} r^2 . B'E' - 2\pi\rho(\Delta ABC + \Delta ACD + \Delta ADE) + \frac{\pi}{3}\rho^2 . MQ.$$

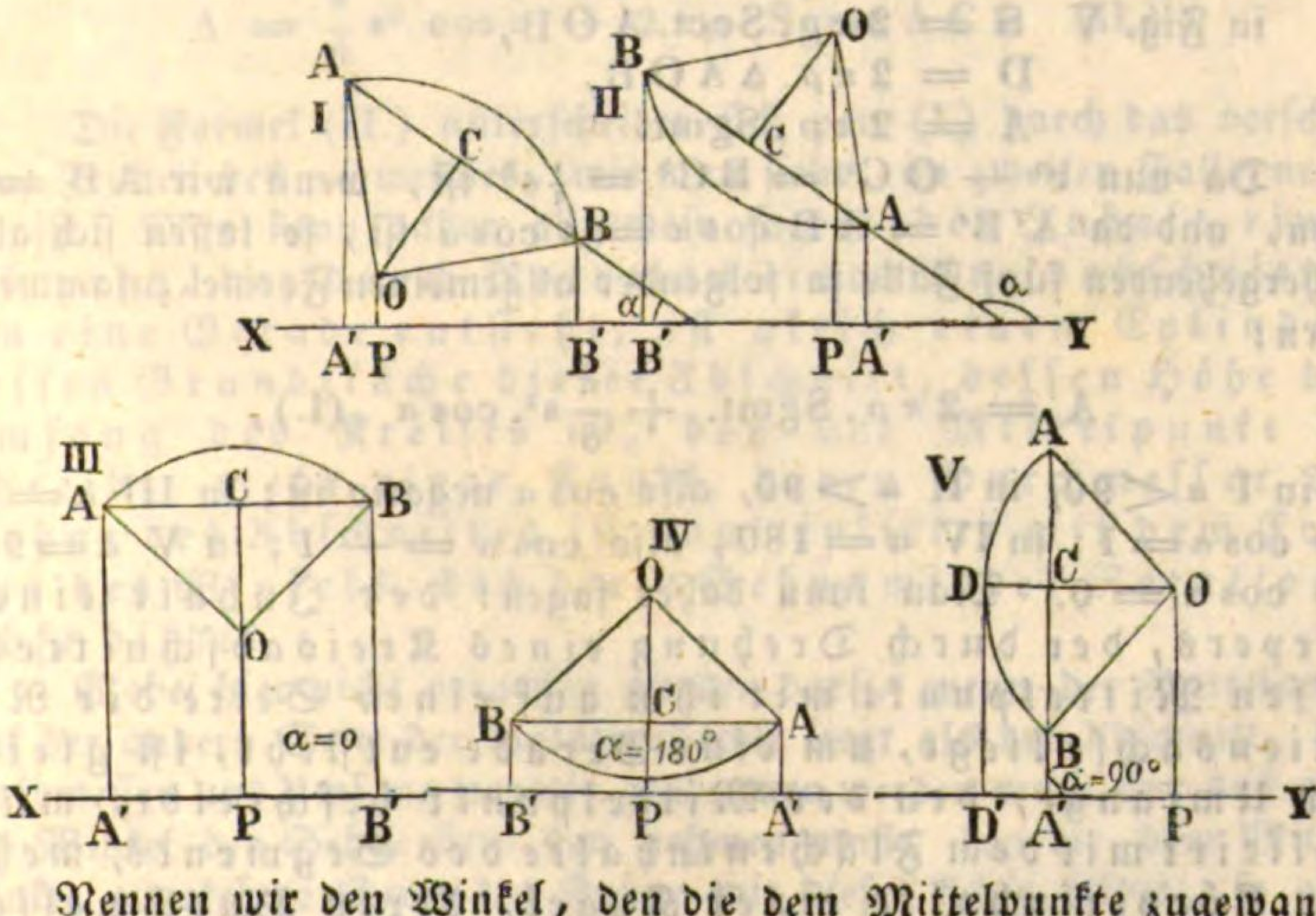
Da nun dasselbe gilt, wir mögen den Bogen B E in so viele gleiche Theile theilen als wir nur wollen, so hat man für den Körperinhalt K des durch Drehung des Stückes B M Q E des Kreissektors um die Achse X Y:

$$K = \frac{2\pi}{3} r^2 . B'E' - 2\pi\rho . \text{Sect.} ABE + \frac{\pi}{3}\rho^2 . MQ;$$

d. h. dreht sich ein Kreissektor um eine Achse, die durch ihn selbst durchgehet, so ist der Körperinhalt des durch Drehung des Stückes, in welchem der Mittelpunkt nicht liegt, erhaltenen Körpers gleich $\frac{2}{3}$ der Kreisfläche, zu welcher der Ausschnitt gehört, multiplicirt mit der Projektion des Bogens auf die Drehungsachse, weniger dem Umfange, den der Kreismittelpunkt beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des ganzen Sektors mehr $\frac{1}{3}$ der Kreisfläche, deren Umfang der Mittelpunkt des Kreisausschnittes beschreibt, multiplicirt mit dem Stücke der Drehungsachse, welches innerhalb des Kreisausschnittes liegt.

§. 497. Wir wollen nun den Rauminhalt eines Körpers suchen, der durch Drehung eines Kreisabschnittes um eine Gerade entsteht, und hier die Fälle unterscheiden, ob der Mittelpunkt des Kreises, zu dem der Kreisabschnitt gehört, mit diesem Abschnitte auf derselben Seite der Drehungsachse liegt oder nicht. Im ersten Falle wollen wir die verschiedene Richtung, die die Sehne des Abschnittes gegen die Drehungsachse hat, besonders ins Auge fassen.

Fig. 630.



Nennen wir den Winkel, den die dem Mittelpunkte zugewandte Seite der Sehne A B mit der Drehungsachse X Y bildet, α, so ist

dieser Winkel α in I spitzig, in II stumpf, in III und in IV Null, in V ein rechter, wodurch die Möglichkeit aller Stellungen erschöpft wird, da ein sechster denkbarer dasselbe Resultat wie V gibt. Nennen wir nun in allen fünf Figuren $OP = \rho$, $AO = OB = r$, bezeichnen wir den durch Drehung des Sektors AOB entstehenden Körper mit S, den durch Drehung des Dreiecks entstehenden mit D, endlich den durch Drehung des Abschnitts erzeugten mit A, so hat man dem Vorhergehenden zufolge:

in Fig. I $S = 2\pi\rho . \text{Sect.} AOB + \frac{2\pi}{3} r^2 . A'B'$,

$D = 2\pi\rho . \Delta AOB + \frac{2\pi}{3} OC^2 . A'B'$,

also $A = S - D = 2\pi\rho . \text{Sgmt.} + \frac{2\pi}{3}(r^2 - OC^2) A'B'$;

in Fig. II $S = 2\pi\rho . \text{Sect.} AOB - \frac{2\pi}{3} r^2 . A'B'$,

$D = 2\pi\rho . \Delta AOB - \frac{2\pi}{3} OC^2 . A'B'$,

also $A = 2\pi\rho . \text{Sgmt.} - \frac{2\pi}{3}(r^2 - OC^2) A'B'$;

in Fig. III $S = 2\pi\rho . \text{Sect.} AOB + \frac{2\pi}{3} r^2 . AB$,

$D = 2\pi\rho . \Delta AOB + \frac{2\pi}{3} OC^2 . AB$,

$A = 2\pi\rho . \text{Sgmt.} + \frac{2\pi}{3}(r^2 - OC^2) . AB$;

eben so Fig. IV $A = 2\pi\rho . \text{Sgmt.} - \frac{2\pi}{3}(r^2 - OC^2) . AB$;

in Fig. V $S = 2\pi\rho . \text{Sect.} AOB$,
$D = 2\pi\rho . \Delta AOB$,
$A = 2\pi\rho . \text{Sgmt.}$

Da nun $r^2 - OC^2 = BC^2 = \frac{1}{4} s^2$ ist, wenn wir $AB = s$ setzen, und da $A'B' = AB \cos\alpha = s \cos\alpha$ ist, so lassen sich alle vorhergehenden fünf Fälle in folgender allgemeinen Formel zusammenfassen:

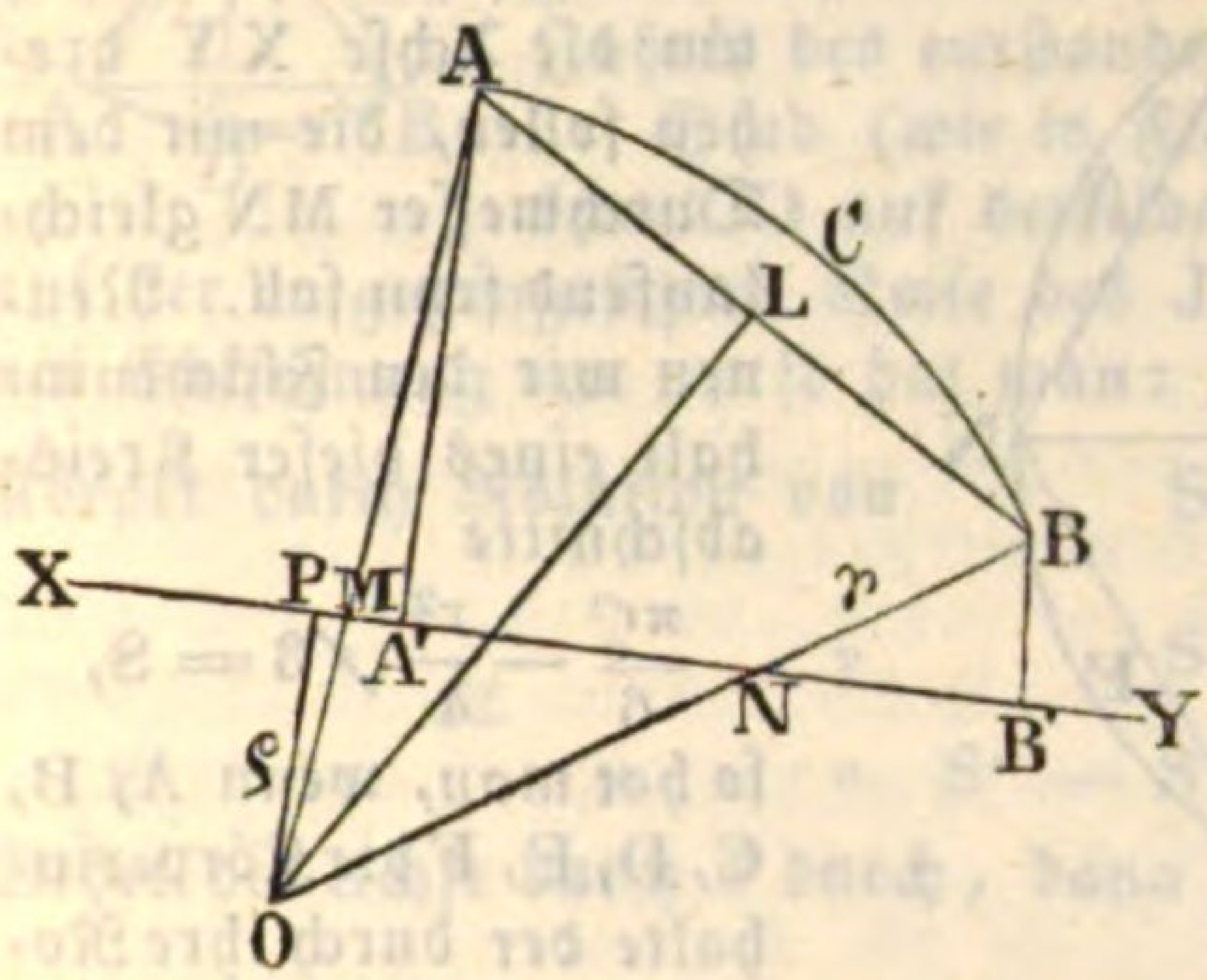
$$A = 2\pi\rho . \text{Sgmt.} + \frac{\pi}{6} s^3 . \cos\alpha \quad \text{(I.)},$$

wo in I $\alpha < 90$, in II $\alpha > 90$, also $\cos\alpha$ negativ ist; in III $\alpha = 0$, also $\cos\alpha = 1$; in IV $\alpha = 180$, also $\cos\alpha = -1$; in V $\alpha = 90$, also $\cos\alpha = 0$. Man kann daher sagen: der Inhalt eines Körpers, der durch Drehung eines Kreisabschnittes, dessen Mittelpunkt mit ihm auf einer Seite der Rotationsachse liegt, um eine Gerade entsteht, ist gleich dem Umfange, den der Mittelpunkt beschreibt, multiplicirt mit dem Flächeninhalte des Segments, mehr dem Körperinhalte einer Kugel, deren Durchmesser die Sehne ist, multiplicirt mit dem Cosinus des Win-

kels, den die dem Mittelpunkte zugekehrte Seite der Sehne mit der Rotationsachse bildet.

Dieser Satz hat auch seine Geltung, wenn der Mittelpunkt des Kreises, zu dem der Abschnitt gehört, und der Abschnitt auf verschiedenen Seiten der Rotationsachse liegen. Es sey der Sektor AOB, die Rotationsachse schneide ihn in der MN. Heißt man nun die Inhalte der Körper, die durch Drehung des Kreisstückes ABMN, des Vierecks ABMN, und des Abschnittes ABC um die Achse XY entstehen, S, D, A, so hat man:

Fig. 631



$$S = \frac{2\pi}{3} r^2 A'B' - 2\pi\rho . \text{Kreisstück } ABMN + \frac{\pi}{3}\rho^2 . MN,$$

$$D = \frac{2\pi}{3} OL^2 . A'B' - 2\pi\rho . \text{Viereck } ABMN + \frac{\pi}{3}\rho^2 . MN,$$

daher

$$A = S - D = \frac{2\pi}{3} A'B'(r^2 - OL^2) - 2\pi\rho . \text{Sgmt } ACB.$$

Ist nun AB = s, und bildet AB mit XY den Winkel α, ist daher $A'B' = s\cos\alpha$, so ist, da $r^2 - OL^2 = \frac{s^2}{4}$,

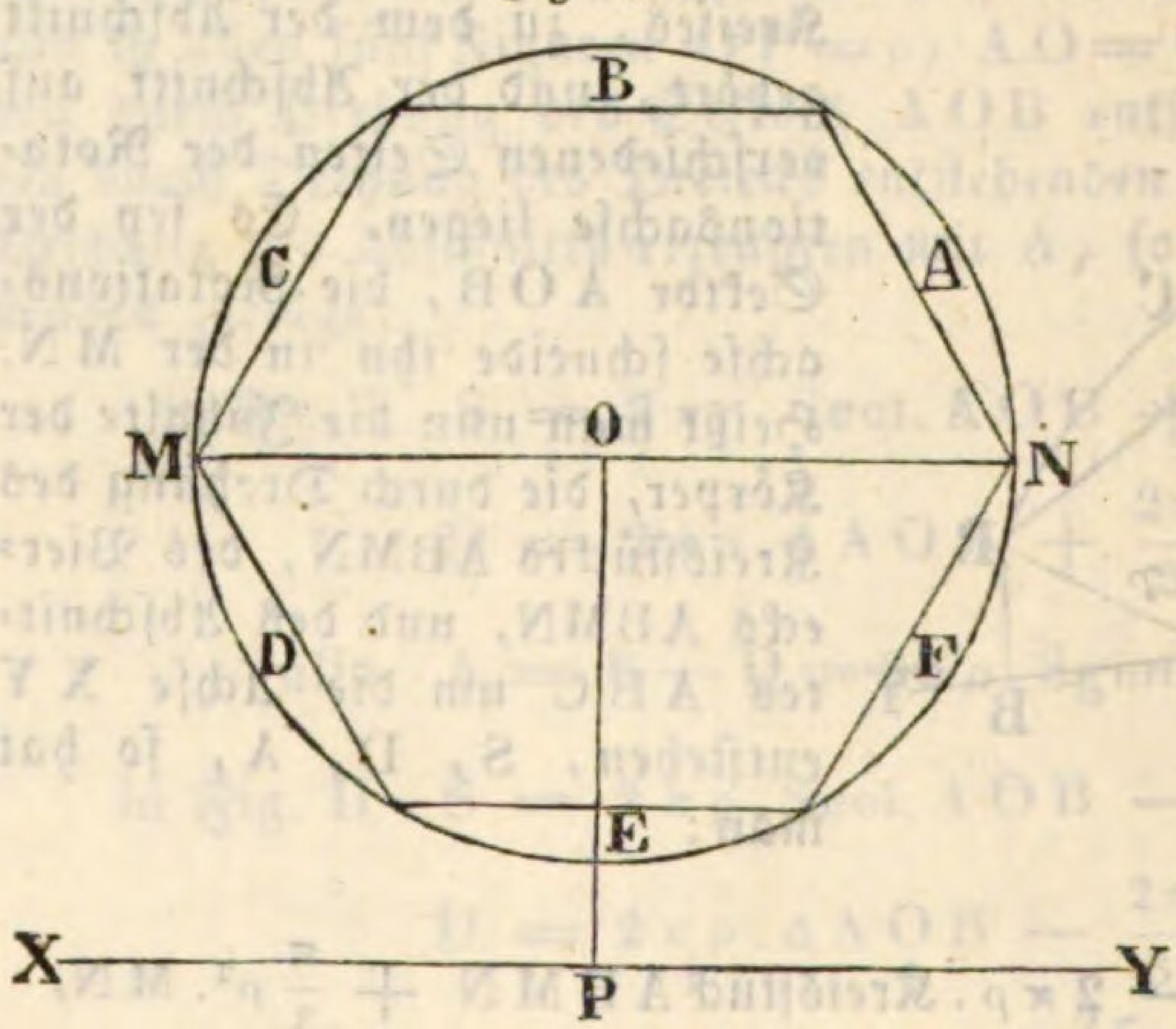
$$A = \frac{\pi}{6} s^3 . \cos\alpha - 2\pi\rho . \text{Sgmt.} ACB \quad \text{(II.)}$$

Die Formel (II.) unterscheidet sich von (I.) durch das verschiedene Zeichen des ρ, welches, wie man sieht, im zweiten Falle negativ ist. Man kann daher allgemein sagen: der Inhalt eines Körpers, der durch Rotation eines Kreisabschnittes um eine Gerade entsteht, ist gleich einem Cylinder, dessen Grundfläche dieser Abschnitt, dessen Höhe der Umfang des Kreises ist, den der Mittelpunkt beschreibt, mehr einer Kugel, deren Durchmesser die Sehne des Abschnittes ist, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den diese Sehne mit der Rotationsachse bildet.

Wobei hier nicht vergessen werden darf, wenn der Mittelpunkt auf der andern Seite der Rotationsachse liegt als der Abschnitt, sein Halbmesser und Umfang negativ genommen werden muß, und daß man als Winkel der Sehne stets den nehmen muß, den die dem Mittelpunkte zugekehrte Seite der Sehne mit dieser Achse bildet, so also, daß der Cosinus dieses Winkels negativ genommen werden muß,

wenn der Bogen zwischen dem Mittelpunkte und der Rotationsachse liegt.

Fig 632.



1) Als ein Beispiel nehmen wir die sechs Kreisabschnitte, die sich um die Achse XY drehen sollen, die mit dem Durchmesser MN gleichlaufend seyn soll. Nennen wir den Flächeninhalt eines dieser Kreisabschnitte

$$\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{24}\sqrt{3} = S,$$

so hat man, wenn A, B, C, D, E, F die Körperinhalte der durch ihre Rotation erzeugten Körper bedeuten, u. $OP = \rho$ ist:

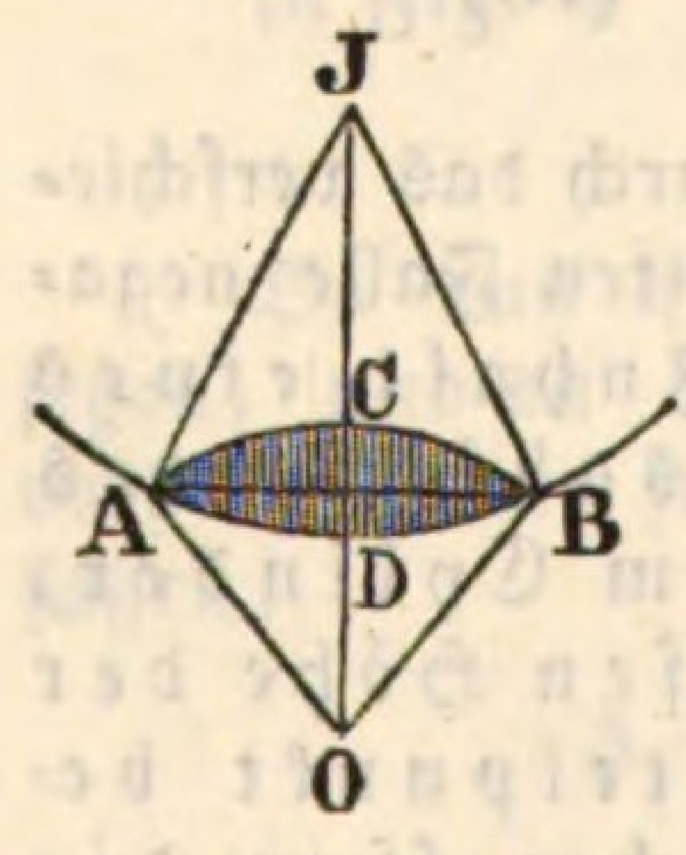
$$A = C = 2\pi\rho . S + \frac{r^3}{6}\cos 60^\circ = 2\pi\rho . S + \frac{\pi r^3}{12},$$

$$B = 2\pi\rho . S + \frac{r^3}{6}\cos 0^\circ = 2\pi\rho . S + \frac{\pi r^3}{6},$$

$$D = F = 2\pi\rho . S + \frac{r^3}{6}\cos 120^\circ = 2\pi\rho . S - \frac{\pi r^3}{12},$$

$$E = 2\pi . \rho + \frac{r^3}{6}\cos 180^\circ = 2\pi\rho . S - \frac{\pi r^3}{6}.$$

Fig. 633.



2) Als zweites Beispiel sey das Doppelsegment $ACBD = ACB + BDA$, wo ersteres zum Mittelpunkte J gehört, und es sey $AB = BJ = AJ = r$; ABD gehöre zum Mittelpunkte O, und es sey $AOB = 90^\circ$, $AO = BO = r'$. Nennt man nun die Flächeninhalte von ACB und ADB, S und S′, so hat man:

$$S = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2}{4}\sqrt{3}, \quad S' = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2};$$

es sey nun die Rotationsachse auf der Seite des Mittelpunktes J in einer Entfernung $= \rho$ von ihm, gleichlaufend mit AB, so hat man:

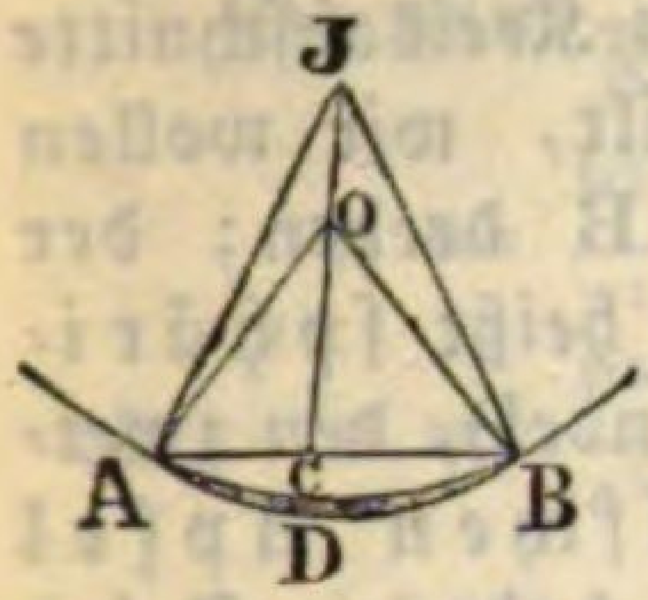
Körper durch Rotation von $S = 2\pi\rho S + \frac{\pi r^3}{6}$,

» » » » $S' = 2\pi(\rho + OJ) S' - \frac{\pi r^3}{6}$,

daher Körper durch Rotation

von $ABCD = 2\pi[\rho S + \rho S' + OJ . S']$.

Fig. 634.



Würde daher die Rotationsachse durch den Punkt J durchgehen, daher $\rho = 0$ seyn, so wäre der Inhalt des Rotationskörpers $= 2\pi OJ.S'$. Gehet hingegen die Rotationsachse durch den Punkt O, ebenfalls gleichlaufend mit AB, so hat man $2\pi OJ.S$ als Inhalt des entstandenen Körpers.

Sind (wie in Fig. 634) die beiden Mittelpunkte J und O auf derselben Seite, und die Rotationsachse auf der entgegengesetzten Seite des J als die beiden Segmente in einer Entfernung von ρ, so hat man:

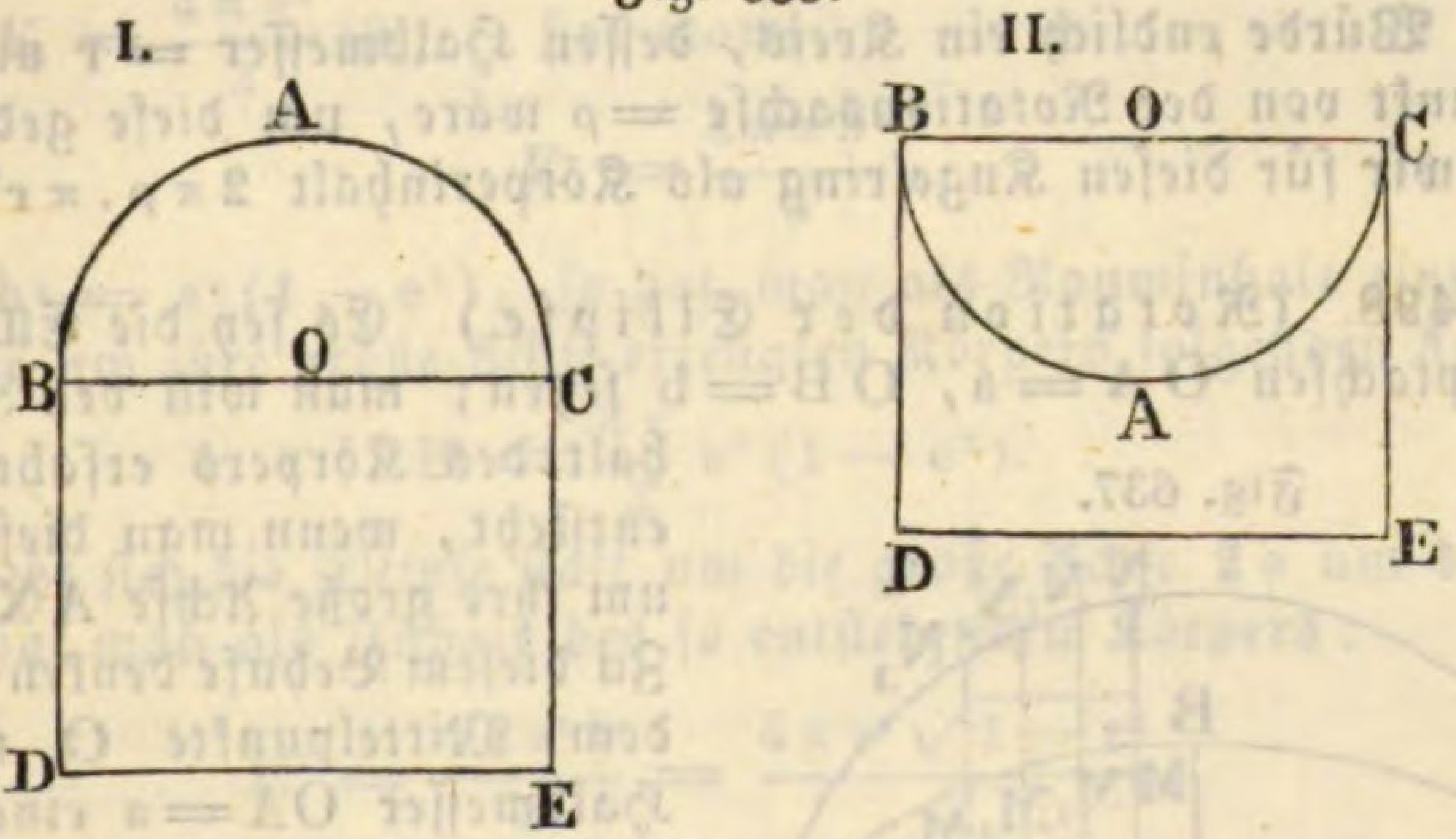
Körper durch Rotation von $S' = 2\pi\rho . S' + \frac{\pi r^3}{6}$,

» » » » $S = 2\pi(\rho - OJ) S + \frac{\pi r^3}{6}$,

» » » » $S' - S = 2\pi(\rho S' - \rho S + OJ.S)$.

Gehet die Achse durch J durch, dann hat man $2\pi OJ.S$.

Fig. 635.



3) Es sey der Halbkreis ABC und an ihn anschließend das Rechteck BCDE; es frägt sich um den Inhalt des Körpers, der entsteht, wenn die Figur ABCDE sich um DE drehet. Es sey der Halbmesser des Halbkreises $BO = OC = \frac{1}{2} DE = r$, $BD = h$.

Durch Drehung von BCDE erhält man $\pi h^2 . r$.

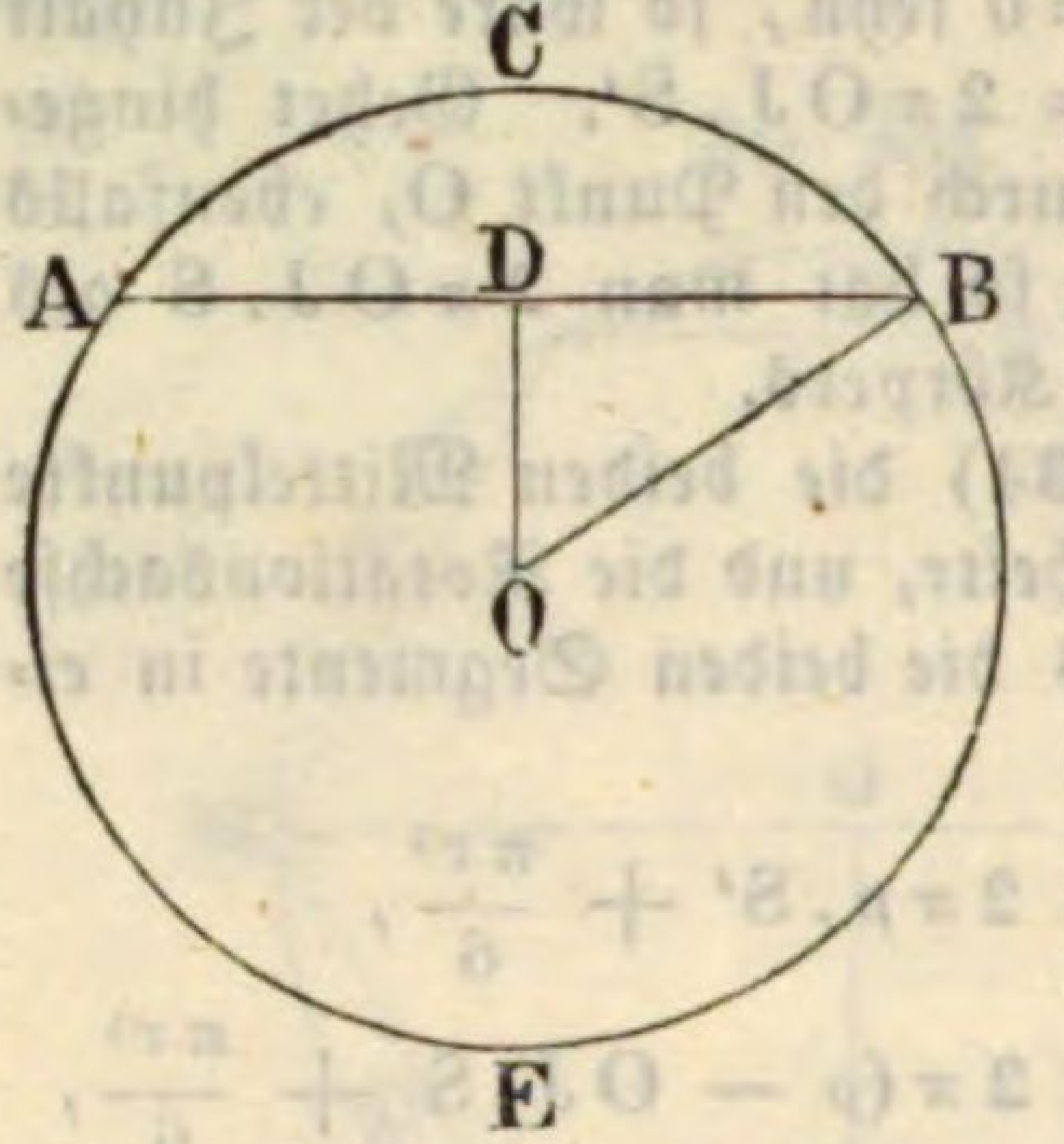
» » » ABC » » $2\pi h . \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{\pi(2r)^3}{6}$.

» » » ABCDE » » $\pi h^2 r + \pi^2 h r^2 + \frac{4\pi r^3}{3}$.

Ist der Halbkreis ABC ein entgegengesetzter, wie hier in der zweiten Figur, so erhalten wir als Körperinhalt:

$$\pi h^2 r + \pi^2 h r^2 - \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Fig. 636.



4) Es sey der Kreis ACBE durch die Sehne AB in die zwei Kreisabschnitte ACB und ABE getheilt, wir wollen beide um die Sehne AB drehen; der erste so entstehende Körper heißt sphärische Spindel (Kugelspindel), den zweiten wollen wir sphärischen Apfel (Kugelapfel) nennen, und haben in Folge der vorausgehenden Untersuchungen, wenn wir $BO = r$, $AB = a$, den Flächeninhalt des Segments $ACB = S$, den von $AEB = S'$ nennen:

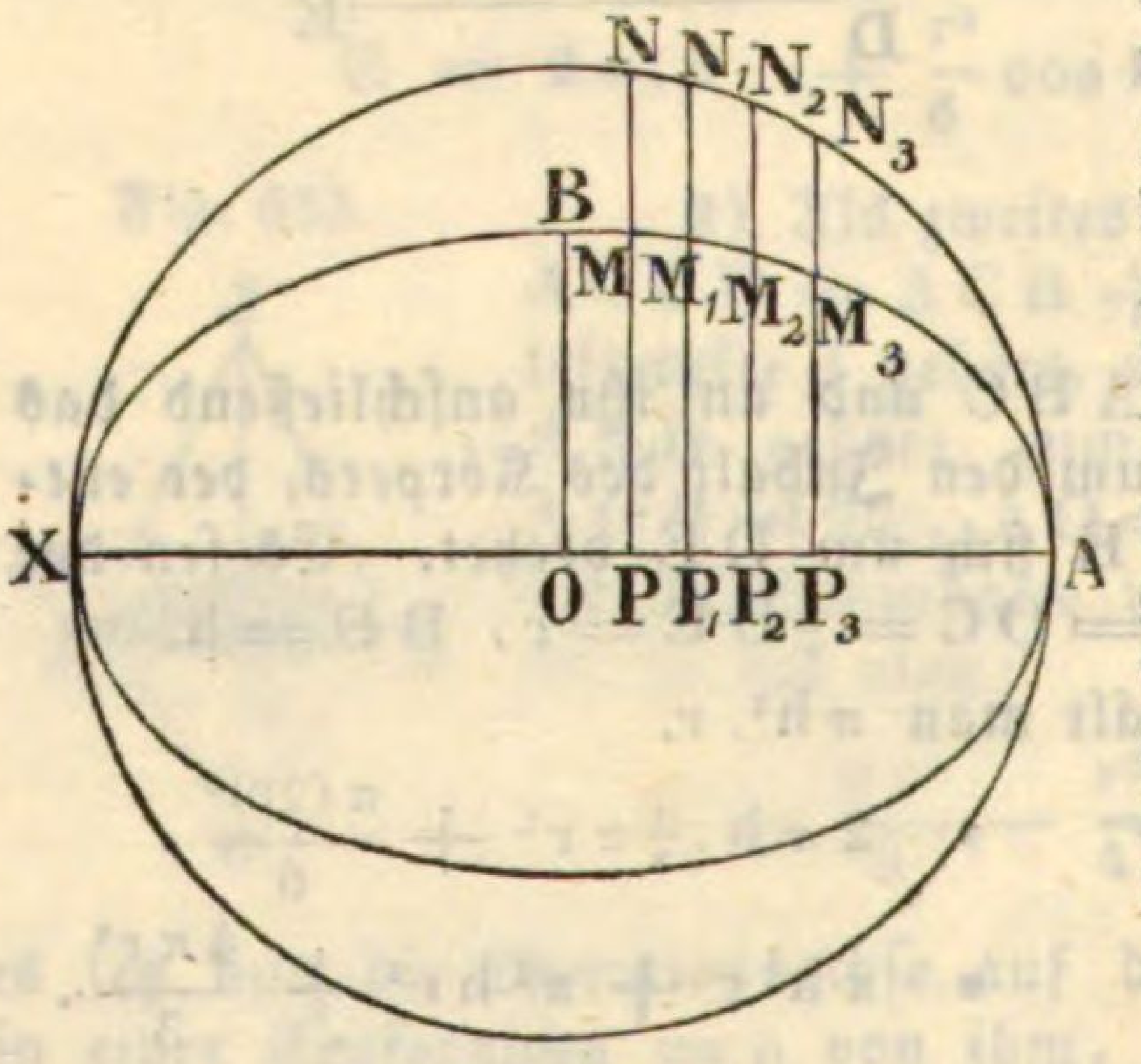
$$\text{Kugelspindel} = \frac{\pi a^3}{6} - 2\pi . DO . S,$$

$$\text{Kugelapfel} = \frac{\pi a^3}{6} + 2\pi . DO . S'.$$

5) Würde endlich ein Kreis, dessen Halbmesser $= r$ und dessen Mittelpunkt von der Rotationsachse $= \rho$ wäre, um diese gedreht, so erhalten wir für diesen Kugelring als Körperinhalt $2\pi\rho . \pi r^2$.

§. 498. (Rotation der Ellipse.) Es sey die Ellipse, deren Hauptachsen $OA = a$, $OB = b$ seyen; man will den Rauminhalt des Körpers erfahren, der entsteht, wenn man diese Ellipse um ihre große Achse AX drehet. Zu diesem Behufe denken wir aus dem Mittelpunkte O mit dem Halbmesser $OA = a$ einen Kreis beschrieben, von den Punkten $MM_1M_2M_3$... der Ellipse fällen wir Lothe auf PA, und verlängern diese Lothe, bis sie den Kreis in $NN_1N_2N_3$ treffen. Verbinden wir die Punkte MM_1, M_1M_2..., NN_1, N_1N_2...; den Körper, der durch Rotation der Trapeze MM_1PP_1, $M_1M_2P_1P_2$, $M_2M_3P_2P_3$...

Fig. 637.



entsteht, wollen wir e, e_2, ., . . ., die durch Rotation der Trapeze NN_1PP_1, $N_1N_2P_1P_2$... entstehen, k, k_1, k_2, . . . nennen, so ist:

$$e = \frac{\pi PP_1}{3}(MP^2 + M_1P_1^2 + MP . M_1P_1),$$

$$k = \frac{\pi PP_1}{3}(NP^2 + N_1P_1^2 + NP . N_1P_1).$$

Da nun $\frac{MP}{NP} = \frac{b}{a}$, $\frac{M_1P_1}{N_1P_1} = \frac{b}{a}$ ist, so hat man

$$e = \frac{b^2}{a^2} \cdot \pi \cdot \frac{PP_1}{3} (MP^2 + M_1P_1^2 + MP.M_1P_1)$$

oder $e = \frac{b^2}{a^2} . k$;

eben so erhält man $e_1 = \frac{b^2}{a^2} k_1$, $e_2 = \frac{b^2}{a^2} k_2$ u. s. w., daher

$$e + e_1 + e_2 + \ldots = \frac{b^2}{a^2}(k + k_1 + k_2 + \ldots).$$

Denkt man sich so ohne Ende AX in immer mehr und mehr Theile wie PP_1 getheilt, nennt den Körperinhalt des durch Rotation der Ellipse erzeugten Körpers E, und die Kugel, die durch Rotation des Kreises ANX erzeugt wird, K, so hat man:

$$E = \frac{b^2}{a^2} . K,$$

oder da $K = \frac{4\pi a^3}{3}$ ist, so hat man:

$$E = \frac{4\pi a b^2}{3},$$

oder da $b^2 = a^2(1 - e^2)$, so hat man als Rauminhalt eines durch die Ellipse um ihre große Achse erzeugten Körpers folgenden Ausdruck:

$$E = \frac{4\pi}{3} a^3 (1 - e^2).$$

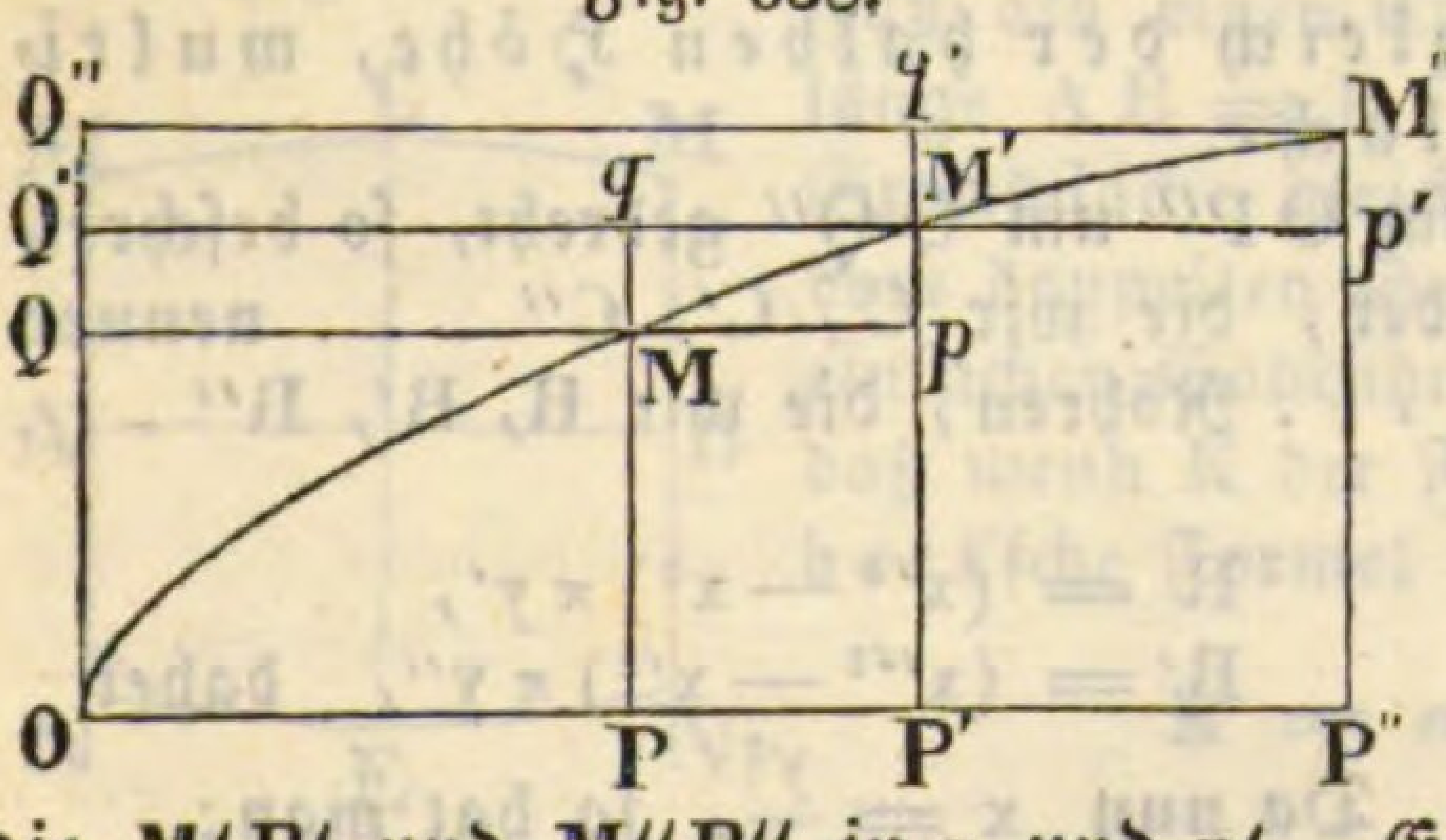
Dreht sich die Ellipse statt um die große Achse 2a um die kleine 2b, so hat man als Inhalt des so entstehenden Körpers:

$$E' = \frac{4\pi a^2 b}{3} = \frac{4\pi a^3 \sqrt{1 - e^2}}{3},$$

so daß $E = E' . \sqrt{1 - e^2}$ ist.

§. 499. (Rotation der Parabel.) Es sey die Parabel OMM′M″, welche wir um ihre Achse OP″ drehen, und den Inhalt des so entstehenden Körpers bestimmen wollen. Fällen wir von den Punkten M, M′, M″ die Lothe MP, M′P′, M″P″... und MQ, M′Q′, M″Q″... auf die Achse OP, und auf ihr senkrecht stehende OQ″; die MP und M′P′ treffen die M′Q′ und M″Q″ in q und q′, eben so die MQ und M′Q′ die M′P′ und M″P″ in p und p′. Es sey nun

Fig. 638.



$$OP = x,\ OP' = x',\ OP'' = x'',$$
$$OQ = y,\ OQ' = y',\ OQ'' = y''.$$

Die Rotation der Rechtecke PM′, P′M″ . . . um OP′ gibt Cylinder, die wir C, C′, C″ . . . nennen wollen, die Rotation der Rechtecke QM′, Q′M″ . . . cylindrische Röhren, die wir R, R′, R″ . . . nennen wollen. Man hat so:

$$C = \pi y'^2 (x' - x), \quad R = x'. \pi (y'^2 - y^2),$$
$$C' = \pi y''^2 (x'' - x'), \quad R' = x''. \pi (y''^2 - y'^2),$$
$$C'' = \pi y'''^2 (x''' - x''). \quad R'' = x'''. \pi (y'''^2 - y''^2).$$

Da nun $y^2 = px$, $y'^2 = px'$, $y''^2 = px''$, so hat man

$$\frac{C}{R} = \frac{\pi p x' (x' - x)}{x'. \pi p (x' - x)} = 1,$$

eben so $\frac{C'}{R'} = \frac{C''}{R''} = \ldots 1,$

daher auch $\frac{C + C' + C'' + \ldots}{R + R' + R'' + \ldots} = 1.$

Denken wir uns nun das Stück OP''_3 in unendlich viele gleiche Theile getheilt, wie hier PP′ ist, so wird sich die Summe

$$C + C' + C'' + \ldots$$

ohne Ende dem Raume des durch Rotirung des Stückes AMM′M″P″P′PO um OP′ beschriebenen Körpers nähern, während sich die Summe

$$R + R' + R'' + \ldots$$

ohne Ende dem Raume des Körpers nähert, der durch Drehung des Stückes OMM′M″Q″Q′QO um OP″ entsteht. Da nun jedenfalls für noch so kleine Zwischenräume stets die Gleichung

$$\frac{C + C' + C'' + \ldots}{R + R' + R'' + \ldots} = 1$$

gilt, so werden diese beiden Körper einander gleich seyn.

Da nun die Summe beider so erzeugten Körper gleich dem Cylinder ist, den das Rechteck OP″M″Q″ bei der Drehung um OP″ beschreibt, so ist der Körper, den die Parabel OM″ um OP_2 beschreibt, gleich

$$\tfrac{1}{2} \pi \overline{M''P''}^2 . OP.$$

Stellt man daher dieses Rotations-Paraboloid auf seine ebene Grundfläche, so kann man sagen: **der Körperinhalt eines Rotations-Paraboloids ist gleich der halben Höhe, multiplicirt mit der Grundfläche.**

Wird die Parabel statt um OP″ um OQ″ gedreht, so beschreiben QM′, Q′M″ . . . Cylinder, die wir C, C′, C″ . . . nennen wollen, dagegen PM′, P′M″ . . . Röhren, die wir R, R′, R″ . . . nennen wollen; man hat so:

$$C = (y' - y) \pi x^2, \quad R = (x'^2 - x^2) \pi y',$$
$$C' = (y'' - y') \pi x'^2, \quad R' = (x''^2 - x'^2) \pi y'', \text{ daher}$$

$\frac{C}{R} = \frac{(y' - y) \pi x^2}{(x'^2 - x^2) \pi y'}$. Da nun $x = \frac{y^2}{p}$, so hat man:

$$\frac{C}{R} = \frac{(y' - y) y^4}{(y'^4 - y^4) y'} = \frac{y^4}{y' (y'^3 + y'^2 y + y' y^2 + y^3)}.$$

Werden M, M', M'' . . . unendlich nahe an einander geschoben, so werden auch y und y' einander unendlich nahe, und daher

$$\lim.\frac{C}{R} = \frac{1}{4},$$

d. h. der Quotient $\frac{C}{R}$ wird sich ohne der Zahl $\frac{1}{4}$ nähern; eben so hat man:

$$\lim.\frac{C'}{R'} = \frac{1}{4}, \quad \lim.\frac{C''}{R''} = \frac{1}{4} \text{ u. s. w., daher:}$$

$$\lim.\frac{C + C' + C'' + \ldots}{R + R' + R'' + \ldots} = \frac{1}{4}.$$

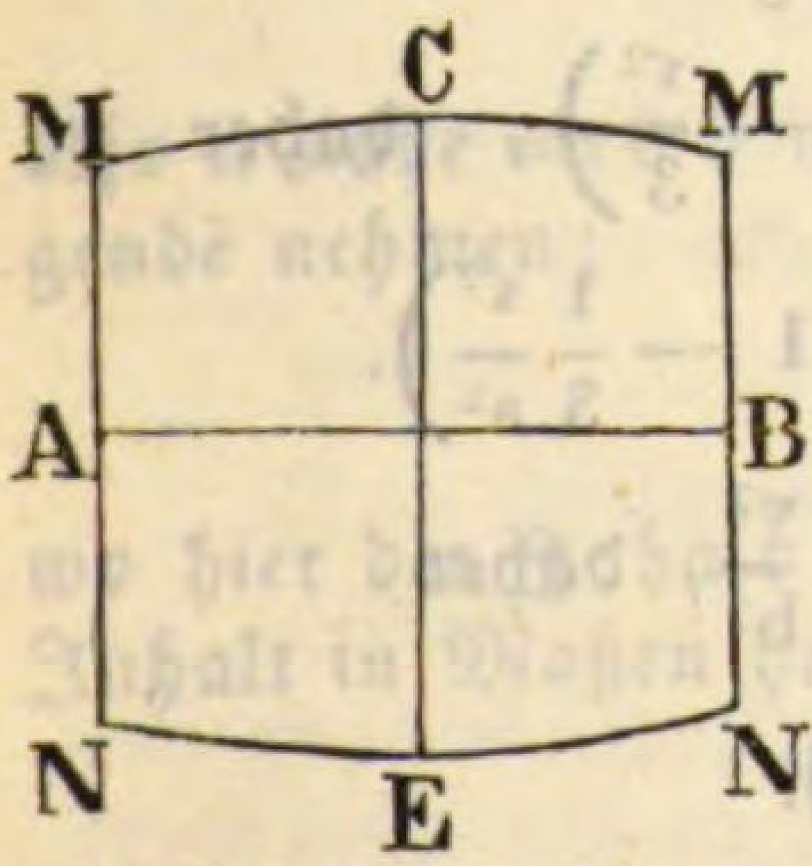
Da nun die Summe aller Cylinder und aller Röhren gleich ist einem Cylinder, dessen Höhe M''P'', und wo OP'' der Halbmesser der Basis ist, so hat man:

$$\lim. C + C' + C'' + \ldots = \tfrac{1}{5}.\pi OP''^2.M''P''.$$

Es ist daher der Inhalt eines Körpers, der durch Drehung einer Parabel um eine Gerade senkrecht im Scheitel auf die Achse ist, gleich der Grundfläche, multiplicirt mit $\frac{1}{5}$ der Höhe.

§. 500. (Fässer-Inhaltsbestimmung.) Der innere Raum eines runden Fasses gehört auch zu den Körpern, die durch Rotation erzeugt werden. Die Mathematiker haben die verschiedensten krummen Linien in Anwendung gebracht, aber theils ist der Bau der Fässer zu unregelmäßig, um strenge unter eine allgemeine Regel gebracht zu werden, theils erheischt das praktische Bedürfniß keine so außerordentliche Genauigkeit, sondern stellt vielmehr die Forderung einer schnellen und leichten Messung und Berechnung, mit einer Genauigkeit, die für die gewöhnlichen Zwecke dieser Messung — worunter die Größe der Steuererhebung gehört — hinreicht; und hiebei zeigt sich die Art der anzuwendenden Krummen von geringerer Wichtigkeit als der Bau der anzuwendenden Formel.

Fig. 639.



Der Mathematiker Lambert betrachtet ein Faß als einen Cylinder, dessen Höhe die Faßlänge AB = l, und wo der Durchmesser der Grundfläche gleich ist dem Drittel der Summe vom doppelten Spunddurchmesser EC = D und einfachen Bodendurchmesser MN = d, so also, daß wenn K der Faßinhalt ist, so gibt die Lambert'sche Formel

$$K = \pi l \left(\frac{2D + d}{6}\right)^2 \quad (1),$$

eine Formel, die durch ihre Genauigkeit und Richtigkeit bisher am meisten in Anwendung war.

Die Formel (1) gibt den Faßinhalt in Kubikzollen an, wenn D,

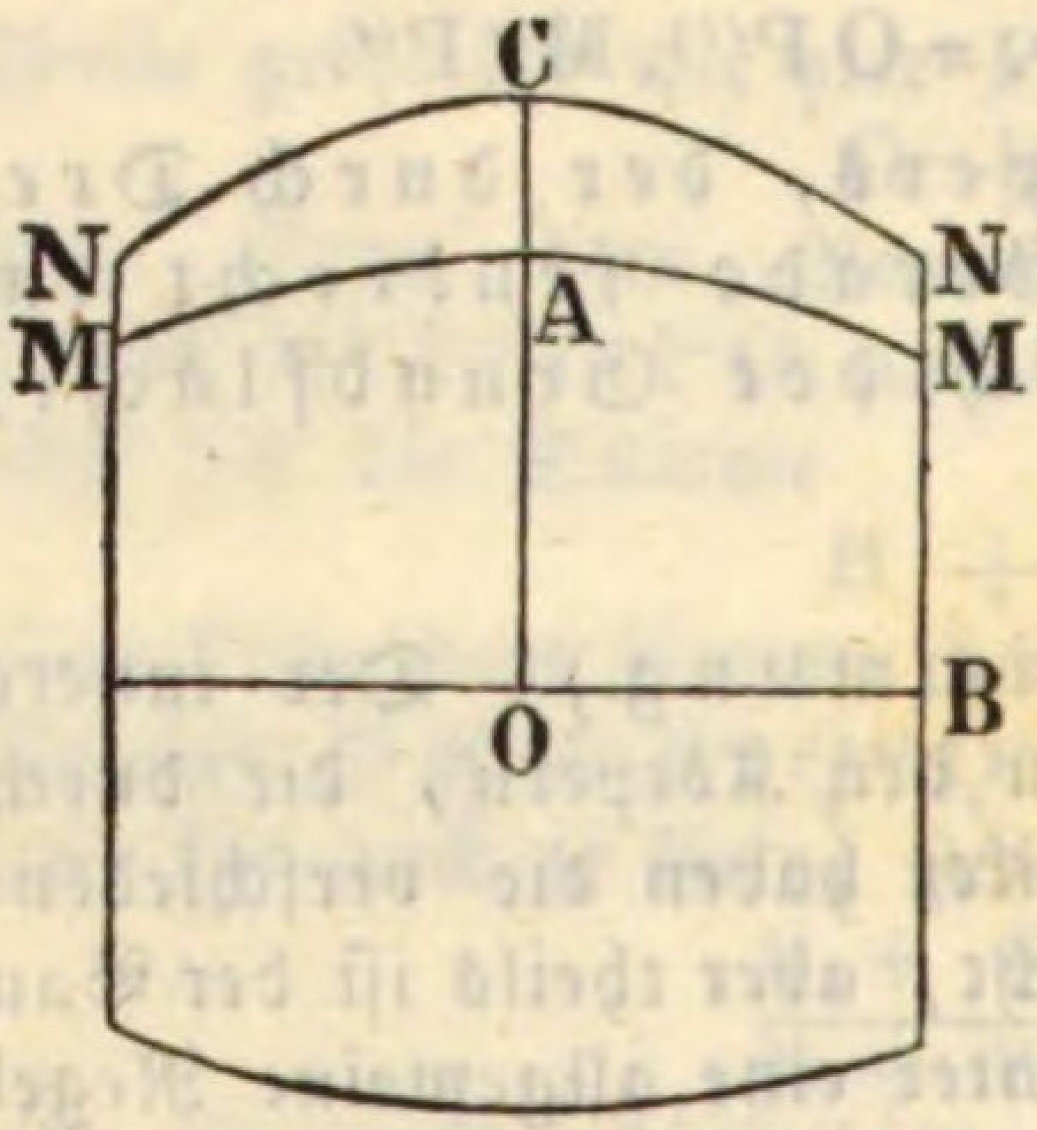
d und l, wie das gewöhnlich geschieht, in Zollen gemessen werden; man muß nun diese Kubikzolle in Maße oder Eimer verwandeln. Da nun 1 Eimer $= 1{\cdot}792^{c'}$, also 1 Maß $= \frac{1{\cdot}792 \,.\, 1728^{c''}}{40}$, also 1 Maß $= 77{\cdot}4144^{c''}$ und $1^{c''} = 0{\cdot}0129175$ Maß, so hat man

$$K = 0{\cdot}0101454 \,.\, l\left(\frac{2D + d}{3}\right)^2 \quad (2)$$

in Maßen Würde man die D und d in der Formel (1) mit den im Früheren beschriebenen Visirstäben messen, die sich auf einen gleichseitigen Cylinder beziehen, dessen Inhalt ein Eimer ist, so gibt dann die Formel (1) den Faßinhalt unmittelbar in Eimern.

Eine andere Formel für den Faßinhalt ergibt sich, wenn man das Faß als einen Körper betrachtet, der durch die Rotation eines elliptischen Bogens entsteht. Es sey so MAM′ ein elliptischer Bogen, O der Mittelpunkt, AO = b die kleine Halbachse; denken wir uns aus dem Punkte O mit OC = a = der halben großen Achse der Ellipse einen Kreisbogen NCN′ beschrieben, so daß die Punkte N und N′ senkrecht über M und M′ stehen. Dieses a müssen wir erst durch Berechnung finden, wozu uns die gegebene Größe MB den Anhalt geben wird.

Fig. 640.



Aus dem Früheren ist klar, daß der Körper F, durch die Drehung des elliptischen Bogens MM′ erzeugt, sich zum Körper K, durch den Kreisbogen NN′ erzeugt, wie $b^2 : a^2$ verhalte; nennen wir OB = x, MB = y. Der durch Rotation von COBN erzeugte Körper $\frac{K}{2}$ ist eine Kugelzone, und man hat:

$$\tfrac{1}{2}K = \tfrac{1}{2}\pi x (OC^2 + NB^2) + \frac{\pi}{6}x^3$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi x (a^2 + ON^2 - x^2) + \frac{\pi}{6}x^3$$

$$= \pi a^2 x - \frac{\pi x^3}{3} = \pi x\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right), \text{ daher}$$

$$F = \frac{2b^2}{a^2}\pi x\left(a^2 - \frac{x^2}{3}\right) = 2b^2\pi x\left(1 - \frac{1}{3}\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Da nun $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, so hat man $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}$, daher

$$F = 2\pi b^2 x\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Nun ist 2x = l die Faßlänge, 2y = d der Bodendurchmesser, 2b = D der Spunddurchmesser; führt man nun diese Bezeich-

nungen ein, so hat man die sogenannte elliptische Faßformel:

$$F = \frac{\pi D l}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{D^2}\right) \quad (3).$$

Bezeichnen wir das Verhältniß zwischen Boden und Spunddurchmesser durch n, so hat man:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 l \left(\frac{2 + n^2}{3}\right) \quad (4),$$

während die Lambert'sche Formel uns gibt:

$$F = \frac{\pi}{4} \cdot D^2 l \left(\frac{2 + n}{3}\right)^2 \quad (5).$$

So abweichend auf den ersten Blick die beiden Formeln scheinen, so ist zu bedenken, daß die Verhältnißzahl **n** nach vielen und scharfen Beobachtungen des Herrn Prof. Stampfer (dessen werthvolle Untersuchungen wir hier durchaus verfolgen wollen) im Mittel sehr nahe der Zahl 0·85 gleich kommt; nun hat man für $n = 0{\cdot}85$

$$\left(\frac{2 + n}{3}\right)^2 = 0{\cdot}9025, \quad \frac{2 + n^2}{3} = 0{\cdot}9075,$$

wo der Unterschied nicht so groß ist. Die Geometer haben die verschiedensten Krummen als Faßcurven probirt, die Parabel, Conchoide, Cycloide u. s. w. Da nun hier eine Curve durch die drei Punkte M, A, M′ durchzugehen hat, so können auch die verschiedensten Curven dieser Forderung Genüge leisten, und es läßt sich, wie aus dem Folgenden klar wird, immer durch aus der Erfahrung bestimmte Coefficienten dafür sorgen, daß die resultirende Formel nahe den wahren Faßinhalt geben wird. Geben wir der Formel (4) eine andere Gestalt, nämlich

$$F = \frac{\pi}{4} D^2 l \, . \, n^u,$$

wobei wir das n so bestimmen wollen, daß für den Durchschnittswerth $n = 0{\cdot}85$

$$n^u = \frac{2 + n^2}{3}, \quad \text{also} \quad u = \frac{\log(2 + 0{\cdot}85^2) - \log 3}{\log 0{\cdot}85},$$

$$u = \frac{-0{\cdot}0421534}{-0\ 0705811} = 0{\cdot}597,$$

also n nahe $= 0{\cdot}6$ wird; wir können daher statt der Formel (4) folgende nehmen:

$$F = \frac{\pi}{4} D^2 l \, n^{0{\cdot}6},$$

wo hier der Inhalt in Kubikzollen gegeben ist. Wollen wir aber den Inhalt in Maßen haben, so ist:

$$F = 0{\cdot}0101454 \, D^2 . l . n^{0{\cdot}6} \quad \text{oder}$$
$$F = 0{\cdot}0101454 \, l \, D^{1{\cdot}4} d^{0{\cdot}6} \quad (6).$$

Bei dieser Formel (6) sind l die innere Faßlänge, d der innere Bodendurchmesser, Stücke, die sich fast nie messen lassen, weil man

es meistens mit der Inhaltsbestimmung eines vollen Fasses zu thun hat. Um nun aus der von außen zu messenden Faßlänge l und dem äußern Bodendurchmesser d den Faßinhalt zu finden, und den in der Praxis am häufigsten vorkommenden Faßformen die Formel für den Faßinhalt so nahe, als es den Bedürfnissen des Lebens entspricht, anzupassen, wendete Herr Prof. Stampfer, der diesem Gegenstande eine große Aufmerksamkeit zuwendete, die Formel

$$F = A l D^{1\cdot4} d^{0\cdot6}$$

auf mehr als hundert der verschiedensten Fässer an, deren Gehalt auf andere Art genau ausgemittelt wurde, und bestimmte nach diesen Ergebnissen mittelst der sogenannten Theorie der kleinsten Quadrate die Constante $A = 0\cdot0094406$, wodurch die von ihm aufgestellte Formel folgende ist:

$$F = 0\cdot0094406\, l D^{1\cdot4} d^{0\cdot6},$$

wobei l, d, D von außen in W. Zollen gemessen, und das Resultat in W. Maßen angegeben wird.

Um nun logarithmische Skalen anzufertigen, mittelst welchen man den Faßinhalt bestimmen kann, hat man:

$$\log F = \log 0\cdot0094406 + \log l + 1\cdot4 \log D + 0\cdot6 \log d \quad (\dagger).$$

Bei einer logarithmischen Skala verlangt man, wie wir es aus dem Früheren wissen, daß wenn man eine Länge in einem bestimmten Maße daran leget, man auf dieser Skala die Zahl erhält, welche dem Logarithmus dieser Längenzahl entspricht; wir würden diesen Zweck erreichen, wenn wir eine Skala verzeichnen, deren Theilstriche die Werthe von $10^{\log l}$ darstellen, wenn wir dem l, welches in Zollen ausgedrückt gedacht wird, nach und nach die Werthe 1, 2, 3, ꝛc. geben. Es kommt hiebei nur darauf an, wie groß man die Einheit der Länge, auf welche sich die Logarithmen beziehen, d. h. wie groß man den Werth für 10^0, d. h. die Entfernung des Anfangspunktes bis zu dem Punkte, wo auf der Skala 0 stehet, annehmen will. Da nun die kleinste Länge eines Fasses nicht leicht unter 10″ seyn wird, so nimmt Professor Stampfer für die Länge von 10^0, d. h. für die Einheit, deren Bruchtheile die Logarithmen darstellen, = 10 Zoll an, es beziehen sich diesemnach alle Werthe

$$10^{0\cdot301} = 2,\quad 10^{0\cdot477} = 3,\quad 10^{0\cdot602} = 4,\quad 10^{0\cdot699} = 5$$

auf eine Einheit, die gleich 10″ ist, d. h. die Zahlen

0, 0·301, 0·477, 0·602, 0·699, 0·954, 1·000

kommen in eine Entfernung vom Anfange der Skala gleich

10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 90″ 100″.

Statt nun nach Tausendtel in der Logarithmenscala fortzugehen, wodurch die Theilstriche zu nahe an einander kämen, theilet Herr Prof. Stampfer den Raum von 0 bis 1·000 in 250 gleiche Theile, und drückt die Dezimalbrüche 0·301, 0·477 ꝛc. in Zahlen aus, die ein Vielfaches von $\frac{1}{250}$ des Abstandes von 0 bis 1·000 sind; man hat so

statt der Zahl 0·301 die Zahl $\frac{301}{1000} = \frac{75 \cdot 25}{250}$, d. h. 75·25, eben so statt $0 \cdot 477 = \frac{477}{1000} = \frac{119 \cdot 25}{250}$, d. h. 119·25. Man hat die Zeigerzahlen

0, 75·25, 119·25, 150·5, 174·75, . . . 238·50, 250

in den Entfernungen vom Anfange der Skala gleich

10″ 20″ 30″ 40″ 50″ 90″ 100″

Zeiger auf der Skala

0, 1, 2, 3,

entsprechende Entfernungen in Zollen

$10''$, $10''.10^{\frac{1}{250}} = 10.09$, $10''.10^{\frac{2}{250}} = 10.19$, $10''.10^{\frac{3}{250}} = 10.28$,

Zeiger auf der Skala λ, 250,

entsprechende Entfernungen in Zollen $10''.10^{\frac{\lambda}{250}}$, $100''$.

Nehme ich nun die Länge l auf dieser Skala, so treffe diese den Zeiger λ, d. h. es ist

$$l = 10''.10^{\frac{\lambda}{250}}, \text{ daher } \log l = 1 + \frac{\lambda}{250}.$$

Verfertigen wir nun eine zweite Skala für den Spunddurchmesser D, und zwar nach der Formel

$$D = 10''.10^{\frac{\Delta}{1 \cdot 4 \, . \, 250}}, = 10''.10^{\frac{\Delta}{350}},$$

wo hier auch für $B = 0$, $D = 10''$ ist; man kann hier für jeden Werth von D den entsprechenden Werth von Δ, und umgekehrt finden, und darnach die Skala verfertigen.

Eben so wollen wir eine dritte Skala nach der Formel

$$d = 10''.10^{\frac{\delta}{0 \cdot 6 \, . \, 250}} = 10''.10^{\frac{\delta}{150}}$$

uns verzeichnet denken, so daß in den drei Skalen

den Werthen von l, D, d

die Zeiger λ, Δ, δ entsprechen.

Man hat nun $\log l = 1 + \frac{\lambda}{250}$,

$$1 \cdot 4 \log D = 1 \cdot 4 + \frac{\Delta}{250},$$

$$0 \cdot 6 \log d = 0 \cdot 6 + \frac{\delta}{250}, \text{ daher}$$

$$\log l + 1 \cdot 4 \log D + 0 \cdot 6 \log d = 3 + \frac{\lambda + \Delta + \delta}{250},$$

daher mit Rücksicht auf die Gleichung (†)

$$\log F = \log 0{\cdot}0094406 + 3 + \frac{\lambda + \Delta + \delta}{250} \quad \text{II.}$$

Verfertiget man nun eine vierte logarithmische Skala nach der Formel II., und nennt der Kürze halber $\lambda + \Delta + \delta = s$, so gibt diese vierte Skala für jeden Werth von s den entsprechenden Werth von F.

Man hat also mit dem

ersten Stabe	die Länge l zu messen, und bekommt dafür den Zeiger λ,						
zweiten »	den Spunddurchmesser D	»	»	»	»	»	Δ,
dritten »	den Bodendurchmesser d	»	»	»	»	»	δ.

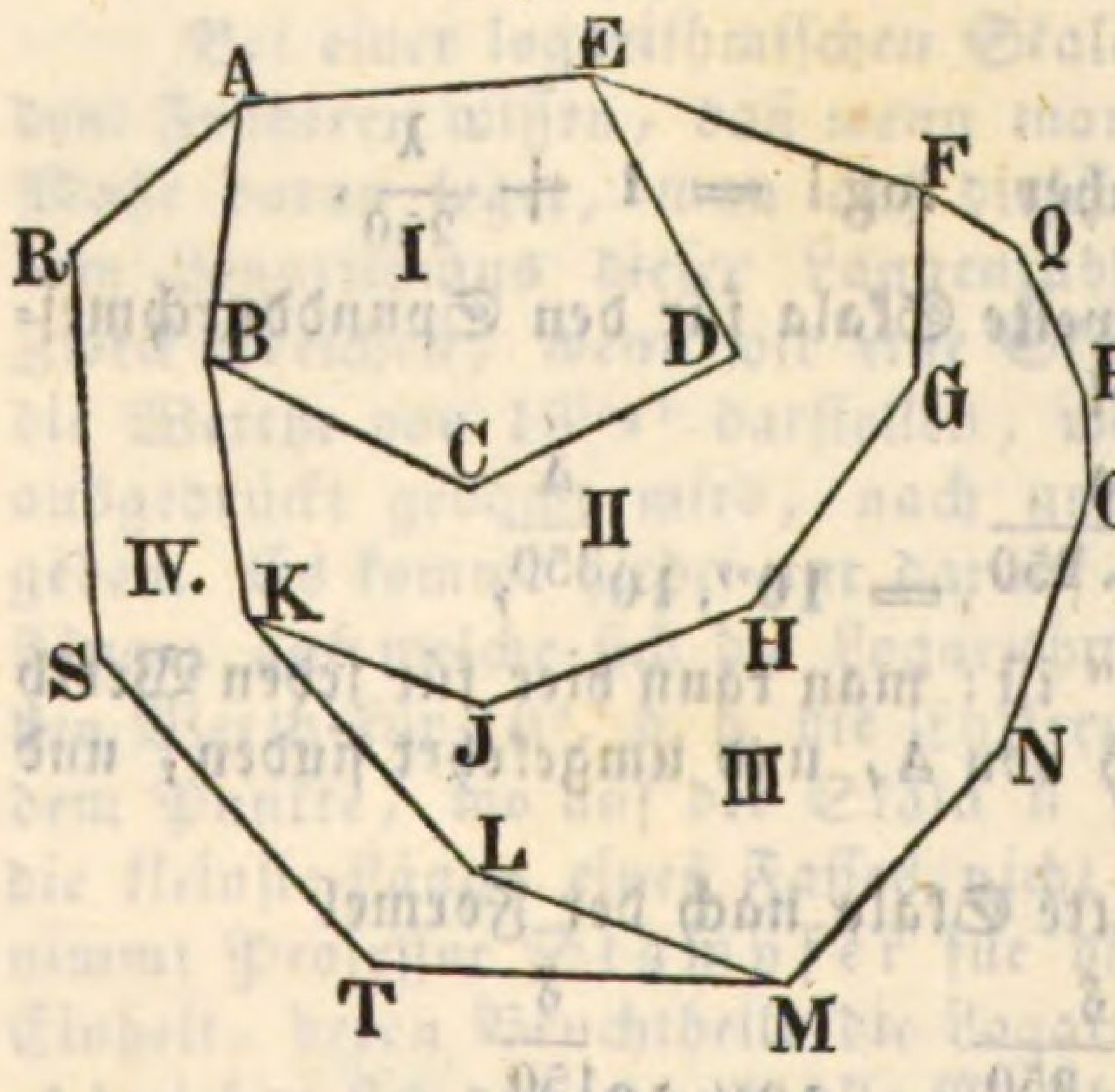
Addirt man diese drei Zahlen, so erhält man für diese Summe auf der vierten Skala den verlangten Faßinhalt F.

An Genauigkeit und praktischer Leichtigkeit läßt diese Stampfer'sche Visirmethode alles bisher Bekannte weit hinter sich.

IV. Vieleckige Körper.

§. 501. Alle eckigen Körper, die weder Prismen noch Pyramiden sind, umfasset man mit der allgemeinen Benennung Polyeder.

Fig. 641.



Wir wollen zuerst eine allgemeine Eigenschaft erweisen, die wenigstens einer sehr großen Anzahl von Polyedern zukommt. Denken wir uns ein Netz von vier an einander grenzenden Polygonen I, II, III und IV, die in einer Ebene liegen mögen oder nicht; bezeichnen wir die Anzahl der Eckpunkte mit e, die Anzahl der Seiten oder Kanten mit k, die Anzahl der Figuren, aus denen das System besteht, mit f, so hat man für das

System	I,	e= 5, f=1, k= 5,	daher	e+f= 6,	daher	e+f=k+1
»	I+II,	e=10, f=2, k=11,	»	e+f=12,	»	e+f=k+1
»	I+II+III,	e=16, f=3, k=18,	»	e+f=19,	»	e+f=k+1
»	I+II+III+IV,	e=19, f=4, k=22,	»	e+f=23,	»	e+f=k+1

Betrachten wir den Gegenstand ganz allgemein. Es seyen Polygone von a, b, c, d, e . . . Seiten an einander hängend, und es habe das aseitige Polygon mit dem bseitigen α Seiten gemein, also $a - \alpha$ Seiten nicht gemein, so hat das System dieser zwei Polygone I + II also $a - \alpha + b$ Seiten, d. h. $k = a + b - \alpha$. Hat nun I mit II α Seiten gemein, so hat es nothwendig $\alpha + 1$ Ecken gemein (haben zwei Polygone eine Seite gemein, so haben sie dann auch zwei Ecken gemein, eben so bei 2, 3, 4 . . . gemeinschaftlichen Seiten 3, 4,

5 . . . Ecken gemeinschaftlich), also da I a Ecke und II b Ecke; hat das System I + II also $a + b - \alpha - 1$ Ecke, also $e = a + b - \alpha - 1$, und da man hier zwei Figuren hat, also $f = 2$ ist, so hat man

$$e + f = a + b - \alpha + 1, \quad \text{also} \quad e + f = k + 1.$$

Kommt nun zum System I + II das cseitige Polygon III hinzu, welches β Seiten, also $\beta + 1$ Ecke mit I + II gemein, also $c - \beta$ Seiten und $c - \beta - 1$ Ecke nicht gemein hat, so hat man für das System I + II + III somit:

$$k = a + b + c - \alpha - \beta, \quad e = a + b + c - \alpha - \beta - 2, \quad f = 3,$$

also

$$e + f = a + b + c - \alpha - \beta + 1, \quad \text{daher} \quad e + f = k + 1.$$

Diese Betrachtungen lassen sich nun fortsetzen und auf ein System von Polygonen von jeder Anzahl von Seiten ausdehnen. Liegen diese Polygone nun nicht in einer Ebene, sondern in verschiedenen, so bildet das Gesammtnetz eine neue Figur, und alle diese Polygone umschließen einen Körper, für welchen man daher die Gleichung $e + f = k + 2$ hat, d. h. mit Worten ausgedrückt: die Anzahl der Ecken mehr der Anzahl der Seitenflächen ist um zwei größer als die Anzahl der Kanten. Man nennt diesen Satz nach seinem Entdecker den Euler'schen Satz.

Die ganze Kraft des Beweises vom Euler'schen Satze beruhet darauf, daß wenn zwei Polygone α Seiten mit einander gemein haben, sie auch $\alpha + 1$ Eckpunkte mit einander gemein haben; wie also zum Netze der Figuren ein neues Polygon hinzukommt, so wächst die Anzahl der Eckpunkte um eine Einheit mehr als die Anzahl der Kanten, daher wird bei dem neuen Netze $e - k$ um 1 größer seyn als beim alten; da aber beim neuen Netze f auch um 1 größer ist als beim alten, so wird stets $e - k + f = 2$ bleiben. Nun ist aber auch ein Netz von Polygonen denkbar, wo zwei Polyeder an einander stoßen, ohne eine ganze Seite mit einander gemein zu haben, wo also die Anzahl der Ecken um dieselbe Zahl zunimmt als die der Kanten, wo also $e - k$ gleich bleibt, während f durch den Zutritt der neuen Figur um eine Einheit zunimmt, daher dann $e - k + f$ zunimmt und gleich 2 bleibt. Betrachten wir zu diesem Behufe folgende zwei Figurennetze:

Fig. 642.

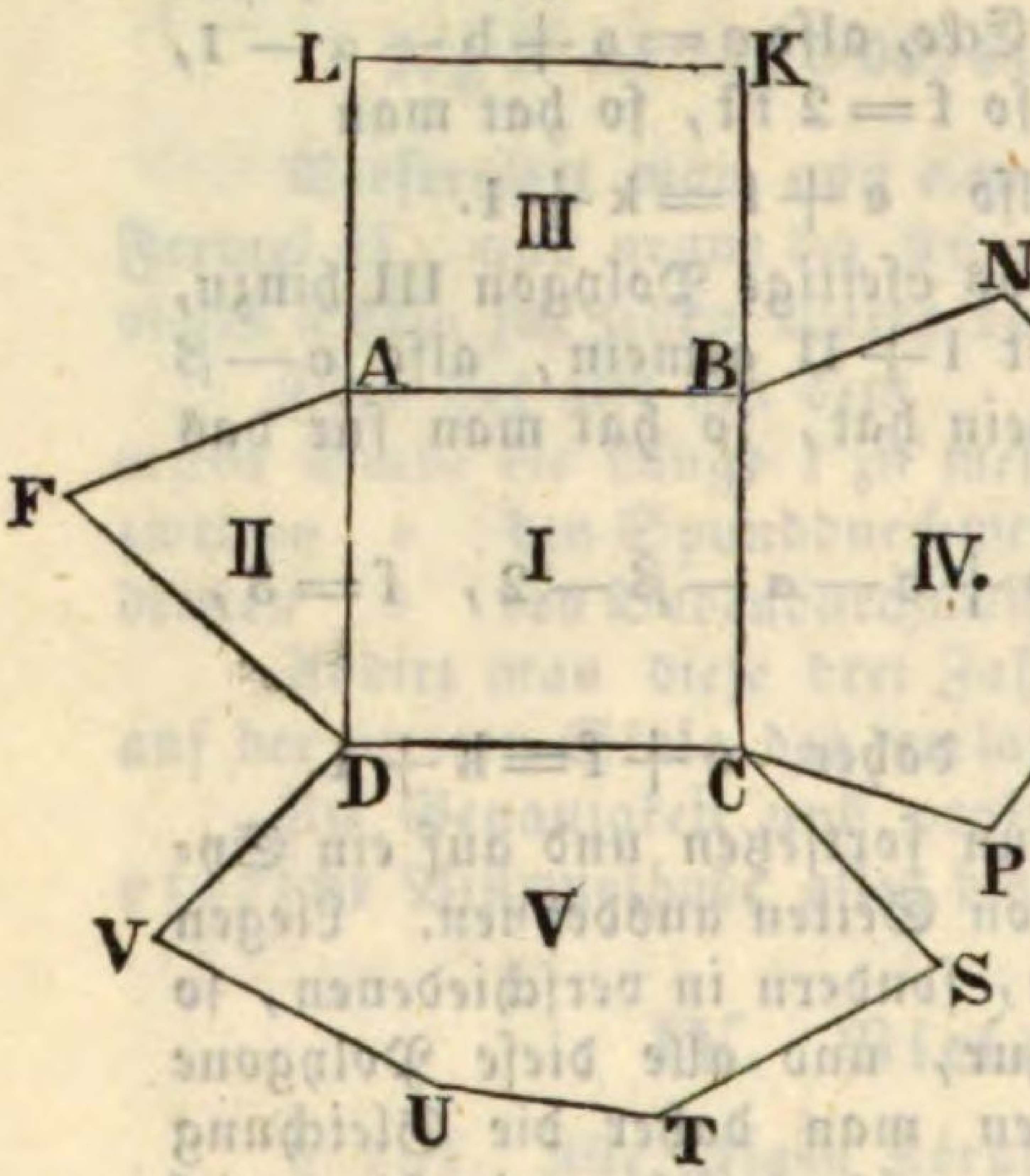
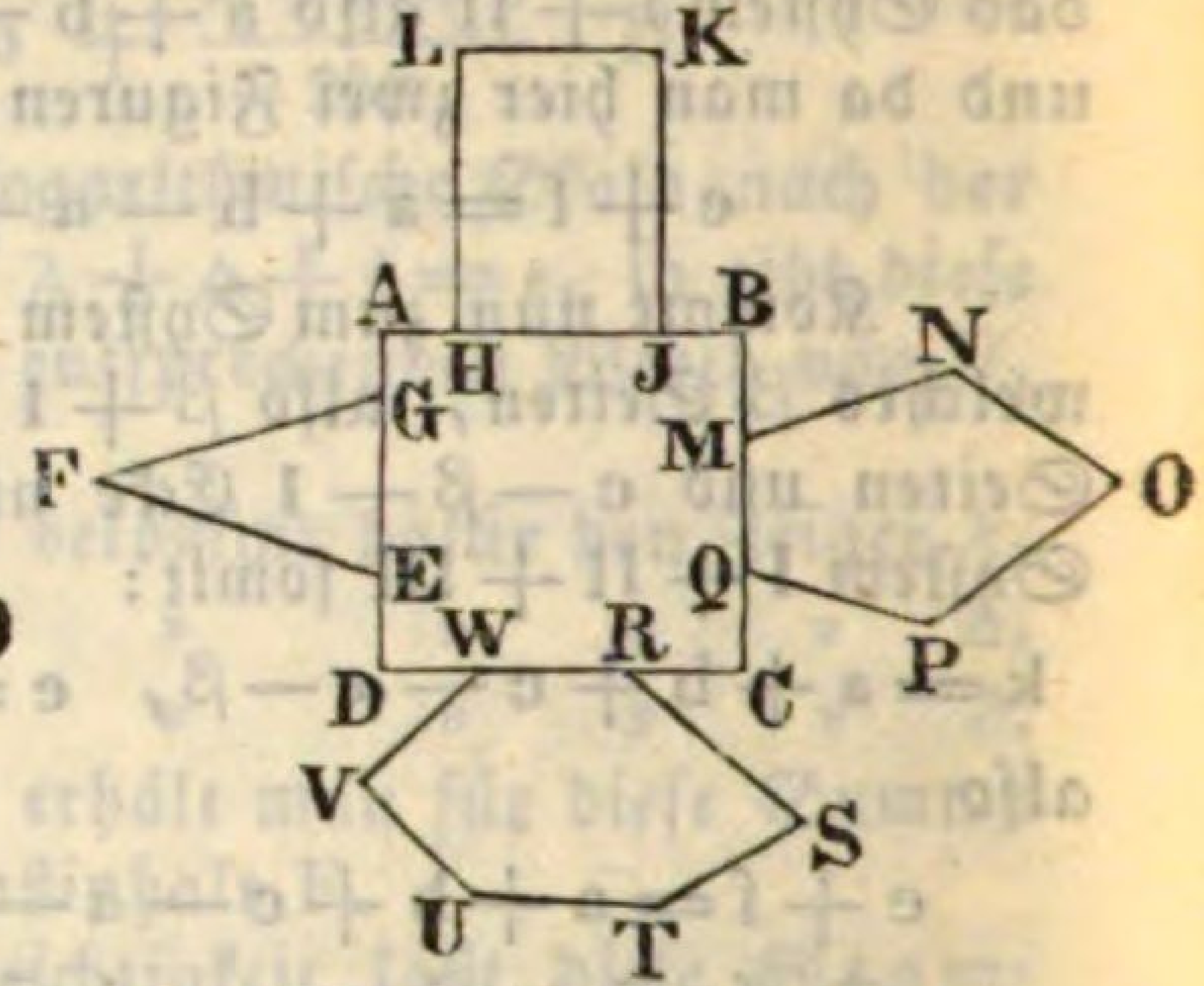


Fig. 643.



Bezeichnen wir immer die Anzahl der Ecken mit e, die Anzahl der Figuren mit f, die Anzahl der Kanten mit k, so hat

in der ersten Figur

System	I,	$e = 4$,	$k = 4$,	$f = 1$;	$e - k + f = 1$;
»	I+II,	$e = 5$,	$k = 6$,	$f = 2$;	$e - k + f = 1$;
»	I+II+III,	$e = 7$,	$k = 9$,	$f = 3$;	$e - k + f = 1$;
»	I+II+III+IV,	$e = 10$,	$k = 13$,	$f = 4$;	$e - k + f = 1$;
»	I+II+III+IV+V,	$e = 14$,	$k = 18$,	$f = 5$;	$e - k + f = 1$;

in der zweiten Figur

System	I,	$e = 4$,	$k = 4$,	$f = 1$;	$e - k + f = 1$.
»	I+II,	$e = 7$,	$k = 7$,	$f = 2$;	$e - k + f = 2$.
»	I+II+III,	$e = 11$,	$k = 11$,	$f = 3$;	$e - k + f = 3$.
»	I+II+III+IV,	$e = 16$,	$k = 16$,	$f = 4$;	$e - k + f = 4$.
»	I+II+III+IV+V,	$e = 22$,	$k = 22$,	$f = 5$;	$e - k + f = 5$.

Bei einem Figurennetze also, wo sich nicht alle Polygone so an einander schließen, daß sie ganze Seiten mit einander gemein haben, findet also der Satz $e + f = k + 1$ nicht Statt, wenigstens nicht in voller Allgemeinheit. Nennen wir nun solche eckige Körper, welche von Vielecken gebildet werden, die alle nur ganze Seiten mit einander gemein haben, einfache geometrische Körper, so können wir sagen: für alle geometrisch-einfachen Körper gilt der Euler'sche Satz, d. h. $e + f = k + 2$.

Wenn sich zwei einfache geometrische Körper, für welche einzeln also der Euler'sche Satz gilt, in einer Seitenfläche voll berühren, d. h. wenn die zwei auf einander treffenden Seitenflächen einerlei sind, und so zusammentreffen, daß die gleichen Seiten und gleichen Winkel dieser beiden Seitenflächen auf einan-

der kommen, so gilt für den dadurch entstehenden Körper ebenfalls das Euler'sche Gesetz. Denn es seyen e, e', f, f', k, k' die Anzahl der Ecken, Seitenflächen und Kanten der beiden einzelnen einfachen Körper, so ist $e + f - k = 2$, $e' + f' - k' = 2$, daher $e + e' + f + f' - k - k' = 4$. Es sey nun die gemeinschaftliche Berührungsseitenfläche beider Körper ein $m$seitiges Vieleck, so gehen durch das Aneinanderfügen derselben m Kanten und m Ecke verloren, wir haben nämlich statt den $2m$ Kanten und $2m$ Ecken der beiden $m$seitigen Vielecke, die auf einander kommen, nur m Kanten und m Ecke, die übrig bleiben; nennt man nun E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten, und F die Anzahl der Seitenflächen des aus beiden Körpern zusammengesetzten Ganzen, so hat man $E = e + e' - m$, $K = k + k' - m$, $F = f + f' - 2$, weil die beiden über einander liegenden Vielecke als Seitenflächen verloren gehen. Substituirt man nun $e + e' = E + m$, $k + k' = K + m$, $f + f' = F + 2$ in der Gleichung $e + e' + f + f' - k - k' = 4$, so hat man $E + F - K = 2$, also wieder das Euler'sche Gesetz bestätigt. Berühren sich aber die beiden einfachen Körper nicht vollflächig, so wird $F = f + f' - 1$, und es kann hier $E = e + e'$ oder $e + e' - 1$, $e + e' - 2$ u. s. w., und eben so $K = k + k'$ oder $k + k' - 1$, $k + k' - 2$ u. s. w. seyn, je nachdem kein Eck, oder ein Eck, oder zwei Ecke . . ., keine Kante, eine Kante, zwei Kanten . . . zusammen fallen, daher hört in solchen Fällen, d. h. wo sich zwei einfache Körper nicht vollständig berühren, die Allgemeingiltigkeit des Euler'schen Gesetzes auf. So zusammengefügte Körper tragen das Kennzeichen der Zusammensetzung offenbar an sich.

Als Beispiele führen wir folgende zwei Körper an:

Fig. 644.

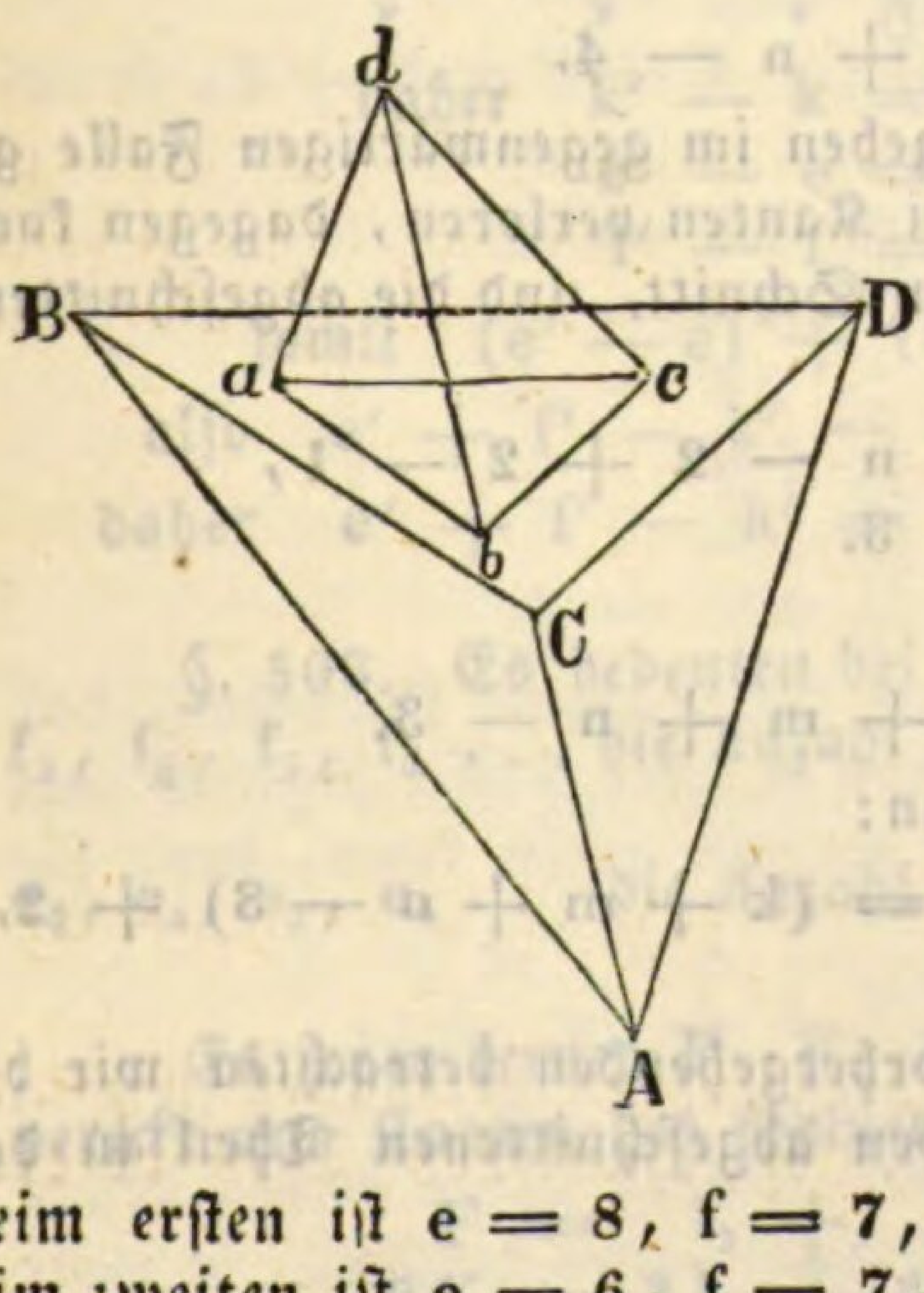
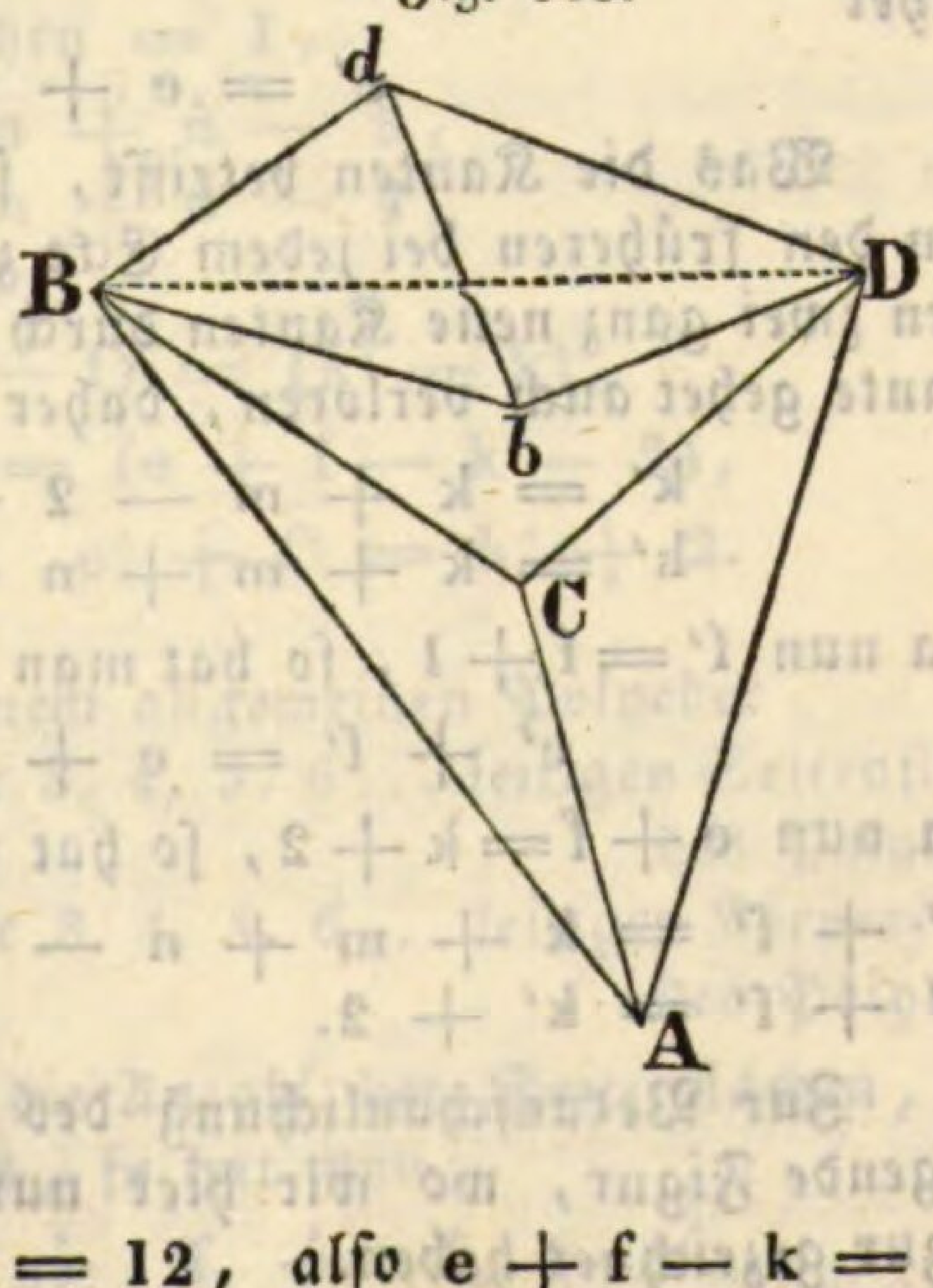


Fig. 645.



Beim ersten ist $e = 8$, $f = 7$, $k = 12$, also $e + f - k = 3$; beim zweiten ist $e = 6$, $f = 7$, $k = 11$, also $e + f - k = 2$.

Wir sehen also, beim ersten zusammengesetzten Körper gilt das Euler'sche Gesetz nicht, wohl aber beim zweiten.

Bei den nachfolgenden Untersuchungen wollen wir stets einfache Körper im Auge haben, für welche das Euler'sche Gesetz unbedingt gilt.

§. 502. Wenn man von einem Körper, für welchen das Euler'sche Gesetz $e + f = k + 2$ gilt, ein Eck durch eine Ebene abschneidet, so gilt für den neuen Körper ebenfalls das Euler'sche Gesetz. Nennt man e', f', k' die Anzahl der Ecken, Flächen und Kanten des übrig gebliebenen Körpers, und ist n die Anzahl der Kanten, die in dem weggeschnittenen Ecke zusammen kommen, so ist klar $f' = f + 1$; ein Eck geht verloren, dafür kommen n neue, daher $e' = e + n - 1$; Kanten gehet keine verloren, dagegen bekommt man n neue Kanten, daher $k' = k + n$. Man hat somit

$$e' + f' = e + f + n.$$

Da nun $e + f = k + 2$ ist, so hat man

$$e' + f' = k + n + 2;$$

da nun $k + n = k'$ ist, so hat man

$$e' + f' = k' + 2.$$

Schneidet man von einem Körper, für welchen das Euler'sche Gesetz gilt, eine Kante mit zwei Ecken ab, so gilt wieder für den übrig bleibenden Körper das Euler'sche Gesetz

Durch den Schnitt, wie wir ihn jetzt führen, gehet, wenn wir bei dem einen Ecke m beim andern n zusammenstoßende Kanten annehmen, um ein Eck bei jedem Ecke mehr verloren als im früheren Falle, nämlich das Eck, wo die abgeschnittene Kante geschnitten worden wäre, daher

$$e' = e + m + n - 4.$$

Was die Kanten betrifft, so gehen im gegenwärtigen Falle gegen den früheren bei jedem Ecke zwei Kanten verloren, dagegen kommen zwei ganz neue Kanten durch den Schnitt, und die abgeschnittene Kante gehet auch verloren, daher

$$k' = k + m - 2 + n - 2 + 2 - 1,$$
$$k' = k + m + n - 3.$$

Da nun $f' = f + 1$, so hat man:

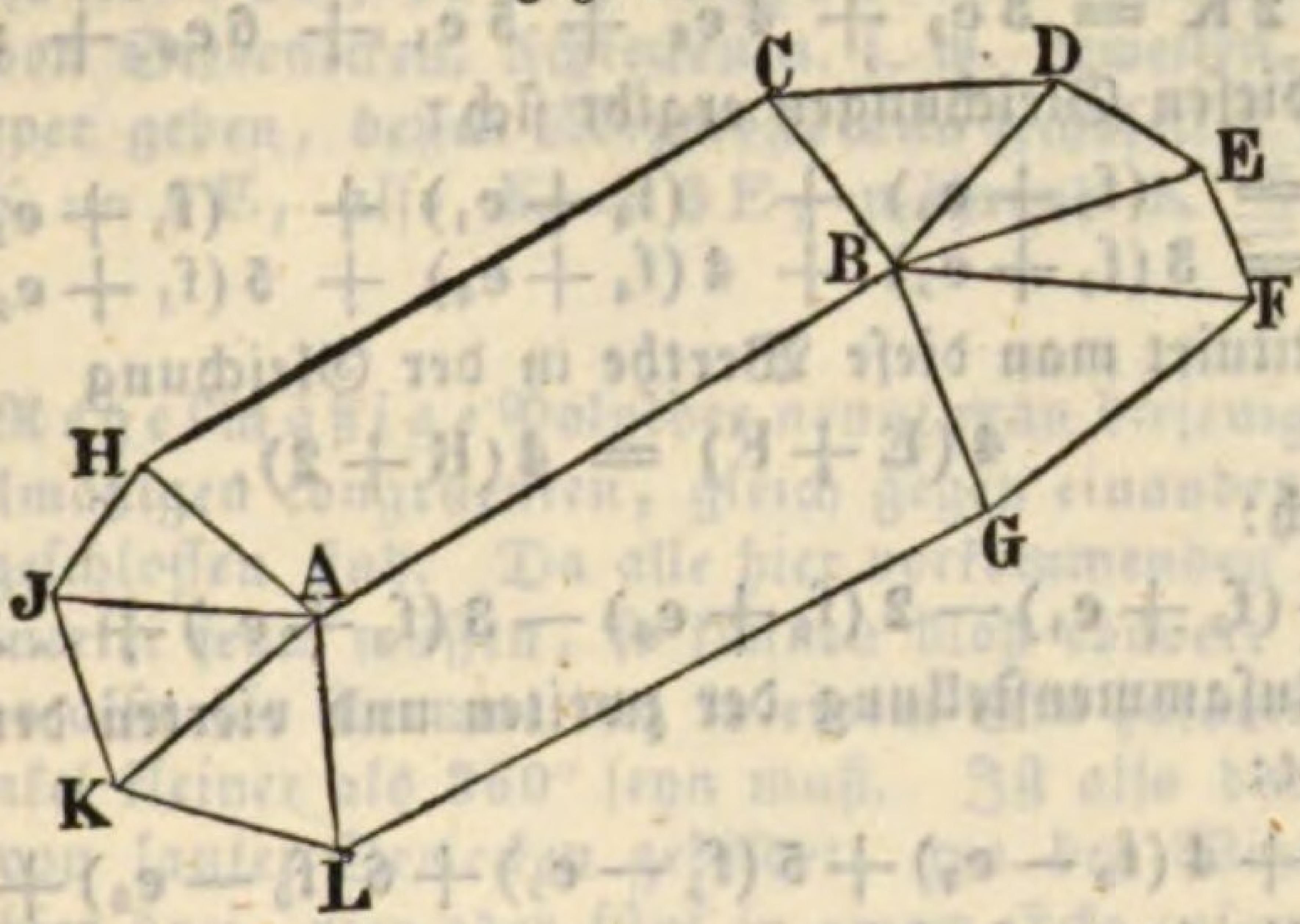
$$e' + f' = e + f + m + n - 3.$$

Da nun $e + f = k + 2$, so hat man:

$$e' + f' = k + m + n - 1 = (k + m + n - 3) + 2,$$
$$e' + f' = k' + 2.$$

Zur Veranschaulichung des Vorhergehenden betrachten wir die folgende Figur, wo wir hier nur den abgeschnittenen Theil in der Figur gezeichnet haben.

Fig. 646.



Statt dem Ecke B kommen nach der Abschneidung die Ecken C, D, E, F, G, d. h. statt einem Ecke hat man fünf Ecke $= m - 1$, also Zuwachs $m - 2$; bei dem Ecke A hat man statt A: H, J, K, L, also vier Ecke $= 5 - 1 = n - 1$, also Zuwachs $n - 2$; daher ist der Zuwachs an Ecken $= 7 = m + n - 4$.

Die neuen Kanten, die zu dem Körper hinzukommen, von dem wir nur den weggeschnittenen Theil gezeichnet, sind

bei B: CD, DE, EF, FG, also $m - 2 = 6 - 2 = 4$,
» A: HJ, JK, KL, » $n - 2 = 5 - 2 = 3$,

also sieben neue Kanten; dazu kommen noch HC und LG, und geht AB verloren, also Anzahl der neuen Kanten $= 8 = m + n - 3$, daher

der Zuwachs an Kanten $= m + n - 3$,
» » » Ecken $= m + n - 4$,
» » » Flächen $= 1$,

daher $k' - k = m + n - 3$,
$e' - e = m + n - 4$,
$f' - f = 1$,

somit $(e' - e) + (f' - f) = (k' - k)$,

also $e' + f' - k' - 2 = (e + f - k - 2)$,

daher $e' + f' - k' = 2$, $e' + f' = k' + 2$.

§. 503. Es bedeuten bei einem allgemeinen Polyeder

$f_3, f_4, f_5, f_6 \ldots$ die Anzahl der 3, 4, 5, 6 ... seitigen Seitenflächen des Polyeders,

$e_3, e_4, e_5, e_6 \ldots$ die Anzahl der 3, 4, 5, 6 ... seitigen Körperecke des Polyeders.

Es seyen ferner F, E, K die Anzahl der Seitenflächen, Körperecke und Kanten des Polyeders, so hat man:

$$F = f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + \text{2c.}$$
$$2K = 3f_3 + 4f_4 + 5f_5 + 6f_6 + \text{2c.}$$

$$E = e_3 + e_4 + e_5 + e_6 + \text{ꝛc.}$$
$$2K = 3e_3 + 4e_4 + 5e_5 + 6e_6 + \text{ꝛc.}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$E + F = (f_3 + e_3) + (f_4 + e_1) + (f_5 + e_5) + \ldots$$
$$4K = 3(f_3 + e_3) + 4(f_4 + e_4) + 5(f_5 + e_5) + \ldots$$

Substituirt man diese Werthe in der Gleichung

$$4(E + F) = 4(K + 2),$$

so ergibt sich:

$$f_3 + e_3 - (f_5 + e_5) - 2(f_6 + e_6) - 3(f_7 + e_7) + \ldots - 8 = 0 \quad \text{I.}$$

Die Zusammenstellung der zweiten und vierten der obigen Gleichungen gibt:

$$3(f_3 - e_3) + 4(f_4 - e_4) + 5(f_5 - e_5) + 6(f_6 - e_6) + \ldots = 0 \quad \text{II.}$$

Die Gleichung I. lehrt uns, daß f_3 und e_3 beide zugleich nie gleich Null seyn können, weil dann von f_4, f_5, ... e_4, e_5, ... einige negativ seyn müßten, was widersinnig wäre, d. h. es kann keinen Körper geben, bei welchem weder dreieckige Seitenflächen noch dreiseitige Körperecke vorkommen; $f_3 + e_3 > 8$, und je kleiner die Anzahl der Dreiecke, desto größer muß die Anzahl der dreiseitigen Körperecke seyn.

Aus obigen vier Gleichungen erhält man:

$$2K - 3F = f_4 + 2f_5 + 3f_6 + \text{ꝛc.}$$
$$2K - 3E = e_4 + 2e_5 + 3e_6 + \text{ꝛc.}$$

Da nun die Größen hinter dem Gleichheitszeichen zwar Null (wenn nämlich keine vier- und mehreckigen Seitenflächen, und keine vier- und mehrseitigen Körperecke vorkommen), aber nie negativ seyn können, so hat man

$$2K \geqq 3F \quad \text{und} \quad 2K \geqq 3E.$$

Verbindet man damit das Euler'sche Gesetz $E + F = K + 2$, so ergeben sich folgende Beziehungen:

$$K \geqq \tfrac{3}{2}F; \qquad K \leqq 3F - 6.$$
$$K \geqq \tfrac{3}{2}E; \qquad K \leqq 3E - 6.$$
$$E \geqq \tfrac{1}{2}F + 2; \qquad E \leqq 2F - 4.$$
$$E \geqq \tfrac{1}{3}K + 2; \qquad E \leqq \tfrac{2}{3}K.$$
$$F \geqq \tfrac{1}{3}K + 2; \qquad F \leqq \tfrac{2}{3}K.$$
$$F \geqq \tfrac{1}{2}E + 2; \qquad F \leqq 2E - 4.$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man die bekannte Wahrheit, daß der geringste Werth von E und F 4, von K aber 6 ist; zugleich sieht man, daß es keinen Körper mit sieben Kanten geben kann, denn für $K = 7$ hätte man:

$$E \geqq 4 + \tfrac{1}{3}, \quad E \leqq 4 + \tfrac{2}{3},$$

wo für E keine ganze Zahl möglich ist.

Zugleich sieht man, daß es keinen Körper geben kann, dessen Seitenflächen alle Sechsecke sind; denn wenn dieses der Fall, so wäre

$2K = 6F$, also $K = 3F$, da doch $K \leqq 3F - 6$ seyn muß. Dasselbe ließe sich von Siebenecken, Achtecken u. s. w. beweisen. Es kann auch keinen Körper geben, dessen Körperecke alle sechsseitig sind, denn dann wäre $2K = 6E$, also $K = 3E$, während $K \leqq 3E - 6$ seyn muß.

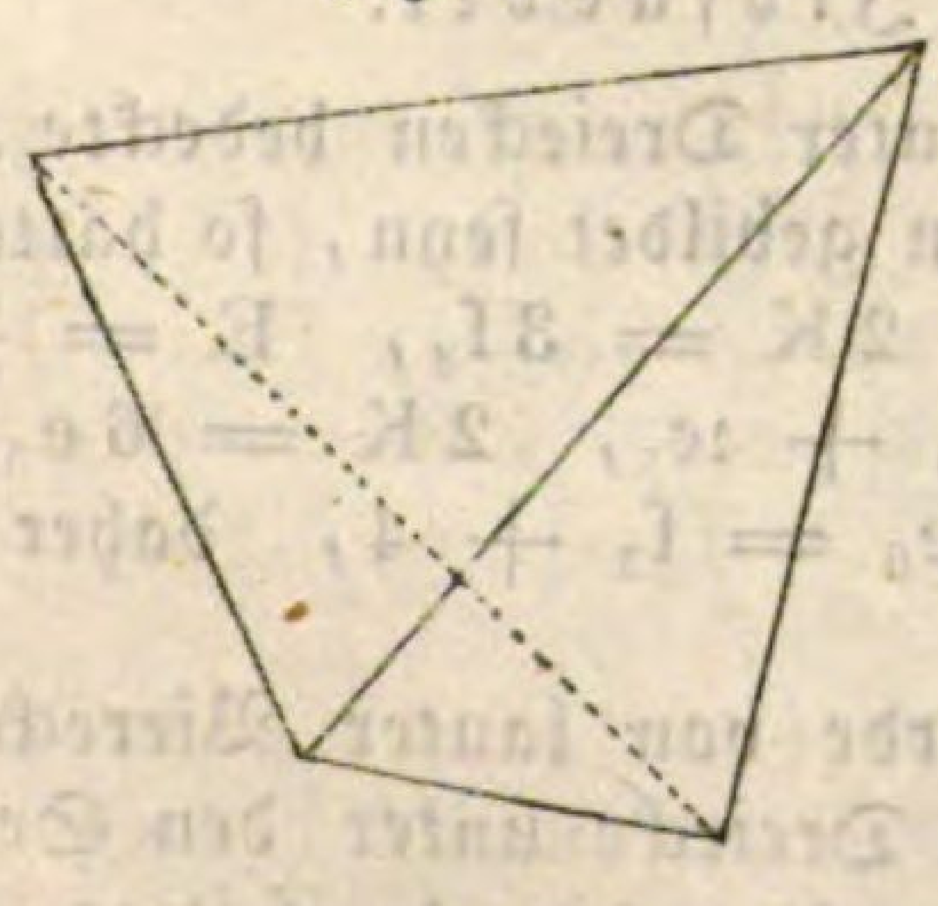
§. 504. **Regelmäßige** Polyeder nennt man diejenigen, welche von lauter regelmäßigen congruenten, gleich gegen einander geneigten Polygonen eingeschlossen sind. Da alle hier vorkommenden Körperecke mit einander einerlei seyn müssen, so können bloß convexe Körperecke vorkommen, wo also die Summe der in einem Ecke zusammenstoßenden ebenen Winkel kleiner als 360° seyn muß. Ist also das regelmäßige Polyeder von lauter Dreiecken gebildet, wo der Winkel $= 60°$ ist, so können hier drei, vier oder fünf in einem Ecke zusammen kommen; ist das Polyeder von lauter Quadraten gebildet, so können bloß drei, und ist es von lauter Fünfecken gebildet, ebenfalls nur drei in einem Ecke zusammentreffen. Es kann daher nur fünf regelmäßige Polyeder geben.

Soll ein Körper durchaus mit Dreiecken bedeckt seyn, so hat man unsern früheren Bezeichnungen gemäß:

$$F = f_3, \quad 2K = 3f_3, \quad \text{daher} \quad E = \tfrac{3}{2}f_3 + 2 - f_3 = \frac{f_3}{2} + 2;$$

f_3, d. i. die Anzahl der Dreiecke, muß eine gerade seyn. Damit das Polyeder regelmäßig sey, müssen auch alle Körperecke einerlei seyn. Es seyen also erstens alle Körperecke dreiseitig, also $2K = 3e_3$, $E = e_3$, daher muß $e_3 = f_3$, daher $f_3 = e_3 = 4$ seyn. Dieser regelmäßige Körper heißt **Tetraeder**.

Fig. 647.



Nehmen wir zweitens an, der von lauter Dreiecken bedeckte Körper habe bloß vierseitige Körperecke, so haben wir nebst den früheren Gleichungen

$$F = f_3, \quad 2K = 3f_3, E = \tfrac{1}{2}f_3 + 2$$
$$\text{noch} \quad E = e_4, \quad 2K = 4e_4;$$

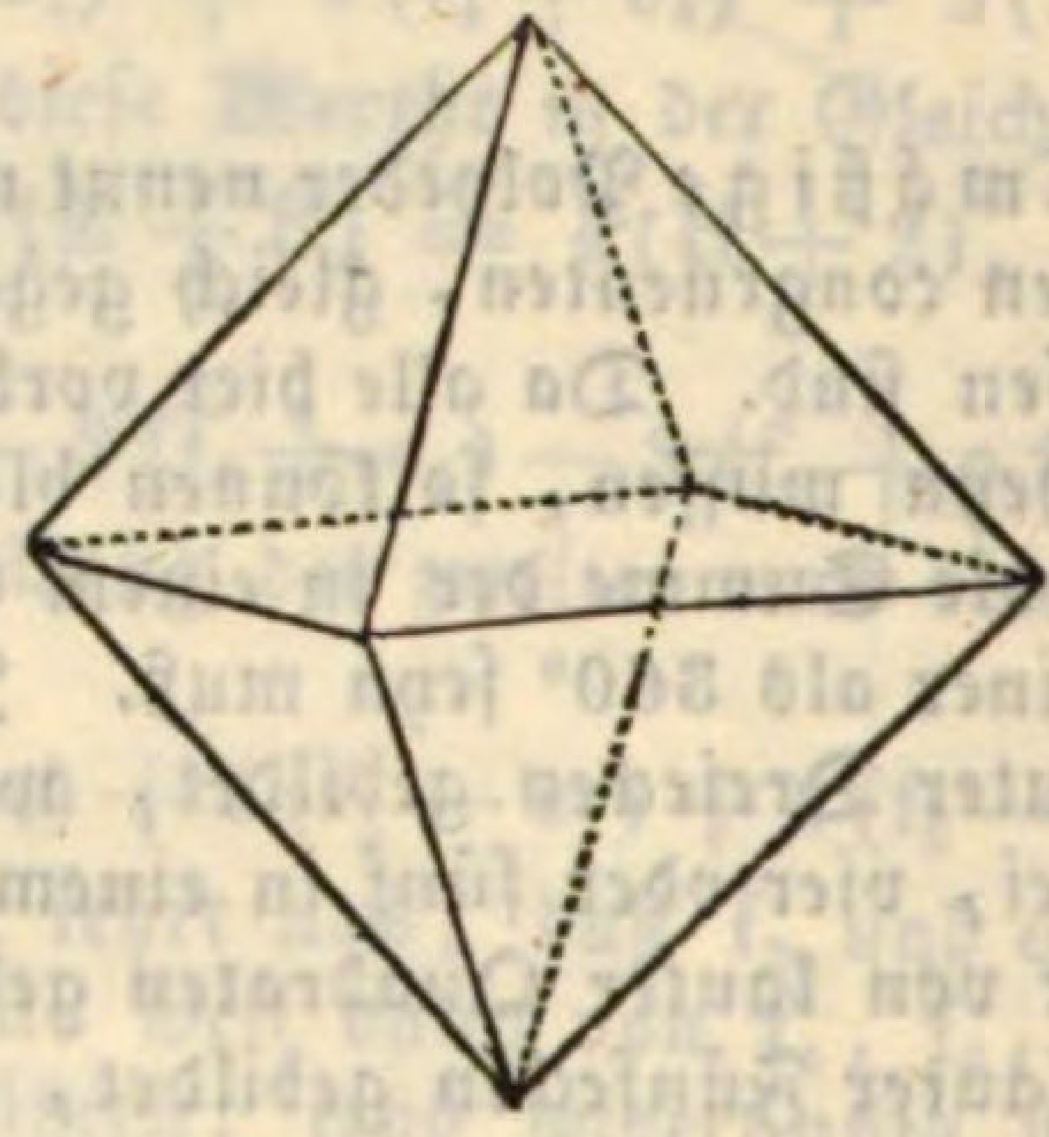
die daraus hervorgehenden Gleichungen

$$4e_4 = 3f_3, \quad 2e_4 = f_3 + 4$$
$$\text{geben} \quad f_3 = 8, \quad e_4 = 6,$$

d. h. der Körper ist von acht Dreiecken bedeckt, die in sechs vierseitigen Körperecken zusammenstoßen; die Anzahl der Kanten ist 12.

Ist dieser Körper regelmäßig, so heißt er Octaeder.

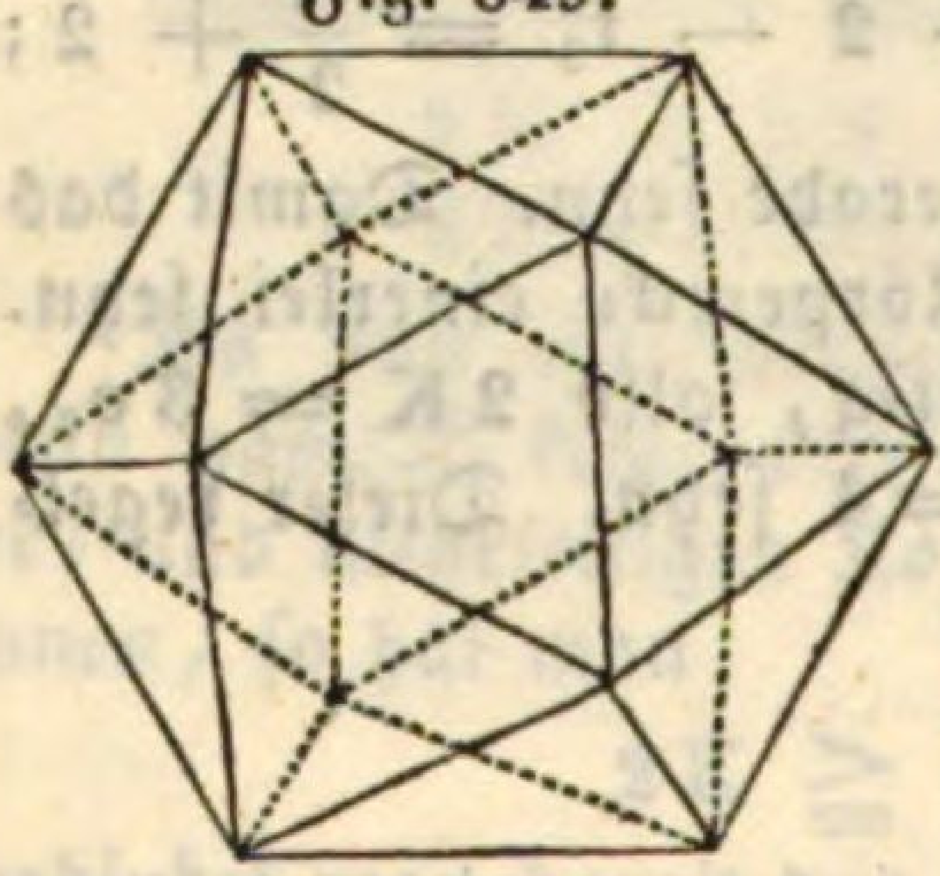
Fig. 648.



Nehmen wir nun drittens an, der von lauter Dreiecken begrenzte Körper sey bloß von fünfseitigen Körperecken gebildet, so hat man:

$$F = f_3, \quad 2K = 3f_3, \quad E = \tfrac{1}{2}f_3 + 2,$$
$$E = e_5, \quad 2K = 5e_5.$$

Fig. 649.



Die Gleichungen

$$3f_3 = 5e_5, \quad 2e_5 = f_3 + 4$$

geben

$$f_3 = 20, \quad e_5 = 12,$$

d. h, ein derlei Körper hat zwanzig Dreiecke in zwölf fünfseitigen Körperecken und dreißig Kanten; ist dieser Körper regelmäßig, so heißt er Ikosaeder.

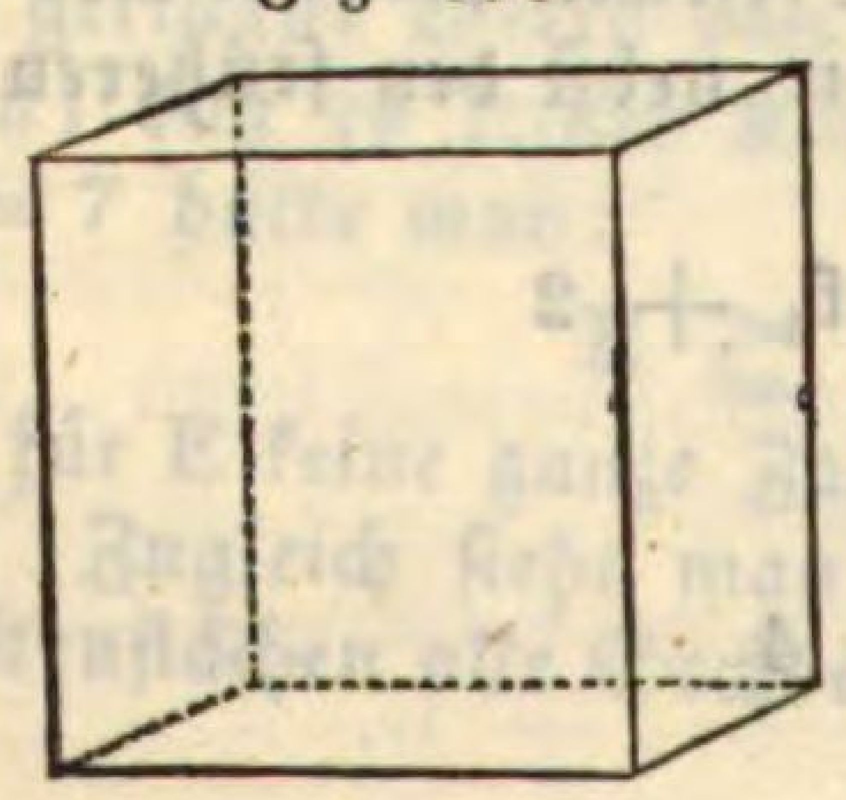
Sollte der von lauter Dreiecken bedeckte Körper von sechs- oder mehrseitigen Körperecken gebildet seyn, so hätte man:

$$F = f_3, \quad 2K = 3f_3, \quad E = \tfrac{1}{2}f_3 + 2,$$
$$E = e_6 + \text{ꝛc.}, \quad 2K = 6e_6 + \text{ꝛc.}, \quad \text{daher}$$
$$6e_6 = 3f_3, \quad 2e_6 = f_3 + 4, \quad \text{daher} \quad f_3 = f_3 + 4,$$

was nicht möglich ist.

Ein Polyeder werde von lauter Vierecken begrenzt, so wissen wir, daß, wenn keine Dreiecke unter den Seitenflächen vorkommen, nothwendig dreiseitige Körperecke vorkommen müssen; soll also der Körper regelmäßig seyn, so müssen alle Körperecke dreiseitig seyn; daher

Fig 650.

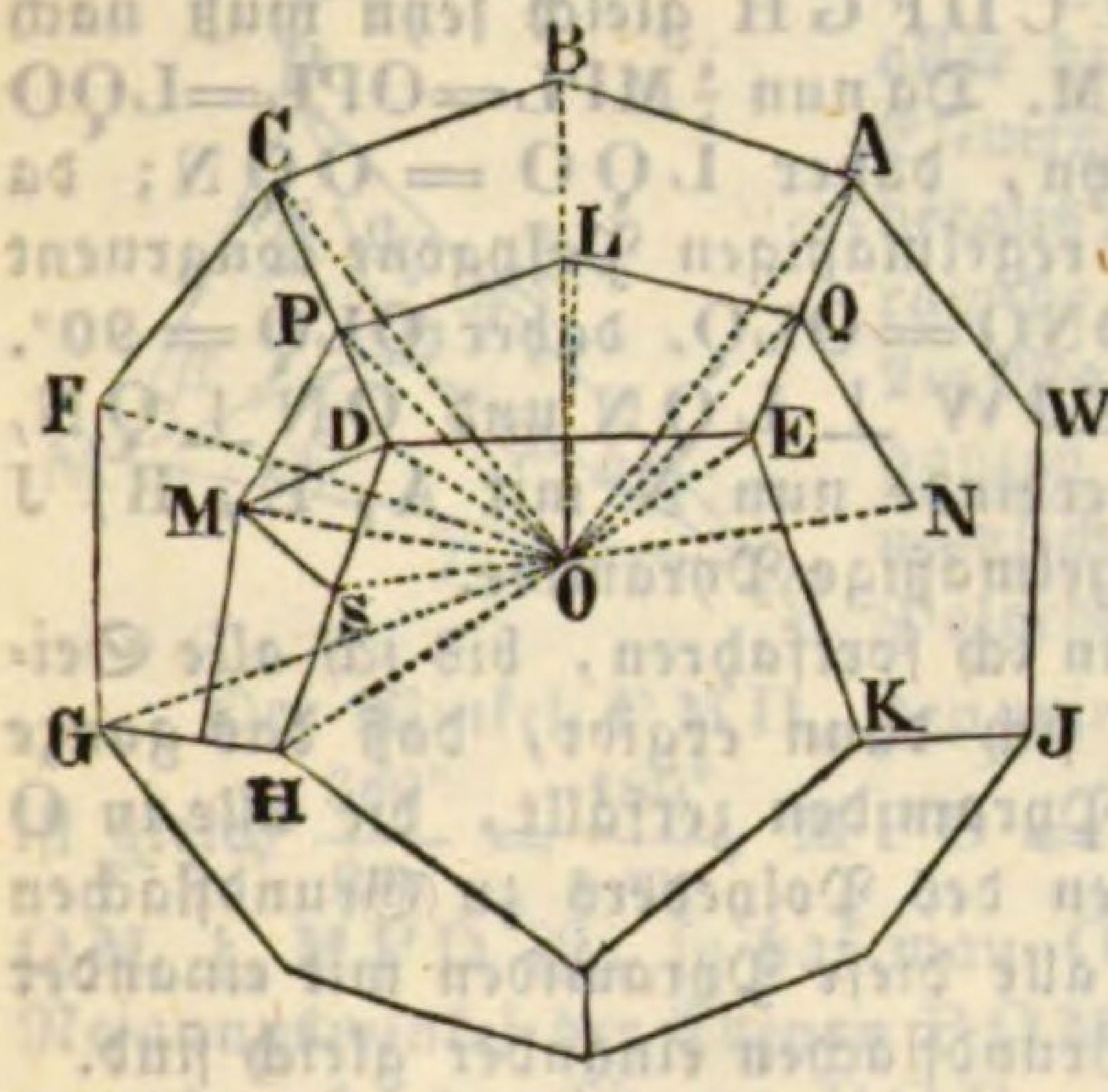


$$F = f_4, \quad 2K = 4f_4, \quad E = e_3, \quad 2K = 3e_3,$$
$$e_3 = f_4 + 2, \quad 4f_4 = 3e_3$$

geben uns $e_3 = 8$, $f_4 = 6$.

Also sechs Quadrate in acht dreiseitigen Körperecken mit zwölf Kanten schließen diesen Körper ein, der, wenn er regelmäßig ist, ein Würfel ist, häufig aber auch Hexaeder heißt.

Fig. 651.



Soll endlich der Körper bloß von Fünfecken bedeckt seyn, so müssen die Körperecke, wenn das Polyeder regelmäßig seyn soll, alle dreiseitig seyn, daher hat man:

$$F = f_5,\ 2K = 5f_5,\ E = e_3,$$
$$2K = 3e_3,$$
$$e_3 = \tfrac{5}{2} f_5 - f_5 + 2,\ 5f_5 = 3e_3,$$

woraus $f_5 = 12$, $e_3 = 20$.

Der Körper hat zwölf Fünfecke, die in zwanzig dreiseitigen Ecken zusammen stoßen, die Anzahl der Kanten ist 30. Ist dieser Körper regelmäßig, so heißt er Dodekaeder.

Die Uebereinstimmung dieser Untersuchungen mit dem Seite 509 Gefundenen liegt auf der Hand.

§. 505. Es sey nun dieser hier verzeichnete Körper ein regelmäßiges Polyeder, daher alle seine Seitenflächen regelmäßige congruente Polygone, alle unter gleichen Neigungswinkeln neben einander gestellt. Es seyen M, L, N die Mittelpunkte der Polygone CDFGH, ABCDE und AEJKW. Ich fälle von M und L die Lothe MP und PL auf die Kante CD, beide Lothe müssen im Halbirungspunkte P der Kante CD anlangen, weil die beiden Polygone congruent und regelmäßig sind. Es ist nun CD senkrecht auf der Ebene MPL, also ist auch jede durch CD gelegte Ebene, also auch die Ebene CDFGH senkrecht auf MPL, eben so ist ABCDE senkrecht auf MPL; errichte ich nun in M in der Ebene MPL die MO lothrecht auf MP, so ist MO auch lothrecht auf der Ebene CDFGH. Errichte ich eben so in L die LO senkrecht auf PL, so ist die LO senkrecht auf ABCDE. Da nun LO und MO in derselben Ebene MPL liegend, auf zwei sich schneidenden Geraden PL und PM senkrecht stehen, so müssen sich diese Geraden LO und MO in einem Punkte, den wir O nennen, schneiden. Wir werden nun beweisen, daß alle Eckpunkte, Kanten und Seitenflächen des regelmäßigen Polyeders gegen diesen Mittelpunkt O gleichförmig liegen.

Wir haben nämlich a) $MP = PL$, $PMO = PLO = 90°$, $PO = PO$, also $MPO \equiv LPO$, daher $MO = LO$, $MPO = LPO$. Verbinde ich nun O mit den Punkten C, D, F, G und H, so ist OCDFGH eine regelmäßige Pyramide; dasselbe folgt von OABCDE.

b) Ich fälle $LQ \perp AE$, so ist $PL = LQ$, $LO = LO$, $PLO = QLO = 90°$, daher $OP = OQ$, $LPO = LQO$.

c) Ich verbinde Q mit dem Mittelpunkte N des Polygons AEKJW, so ist $QN \perp AE$, daher LQN der Neigungswinkel

der Ebenen AEKJW und ABCDE; da nun dieser dem Neigungswinkel der Ebenen ABCDE und CDFGH gleich seyn muß nach der Voraussetzung, so ist LQN=LPM. Da nun $\frac{1}{2}$MPL=OPL=LQO ist, so muß LQO = $\frac{1}{2}$LQN seyn, daher LQO = OQN; da nun LQ = QN (weil diese beiden regelmäßigen Polygone congruent sind), OQ = OQ, so hat man ONQ = OLQ, daher OLQ = 90°. Da nun AE $\perp$ LQN, also AEKJW $\perp$ LQN und ON $\perp$ QN, so ist ON $\perp$ AEKJW. Ich verbinde nun N mit A, E, K, J und W, so entsteht wieder eine regelmäßige Pyramide.

In dieser Beweisführung kann ich fortfahren, bis ich alle Seitenflächen erschöpft habe, woraus sich dann ergibt, daß das ganze Polyeder durchaus in regelmäßige Pyramiden zerfällt, die alle in O ihren Scheitel und die Seitenflächen des Polyeders zu Grundflächen haben. Wie man nun sieht, sind alle diese Pyramiden mit einander congruent, da die Lothe auf alle Grundflächen einander gleich sind.

1) Es läßt sich also jedem regelmäßigen Polyeder eine Kugel einschreiben, deren Halbmesser eben dieses Loth ist von O auf die Grundflächen, z. B. OM = OL = etc.

2) Da O von allen Eckpunkten der Pyramiden gleich weit absteht, so läßt sich jedem regelmäßigen Polyeder eine Kugel umschreiben, deren Halbmesser die Entfernung des O von einem Eckpunkte ist, z. B. OA = OC = OD = etc.

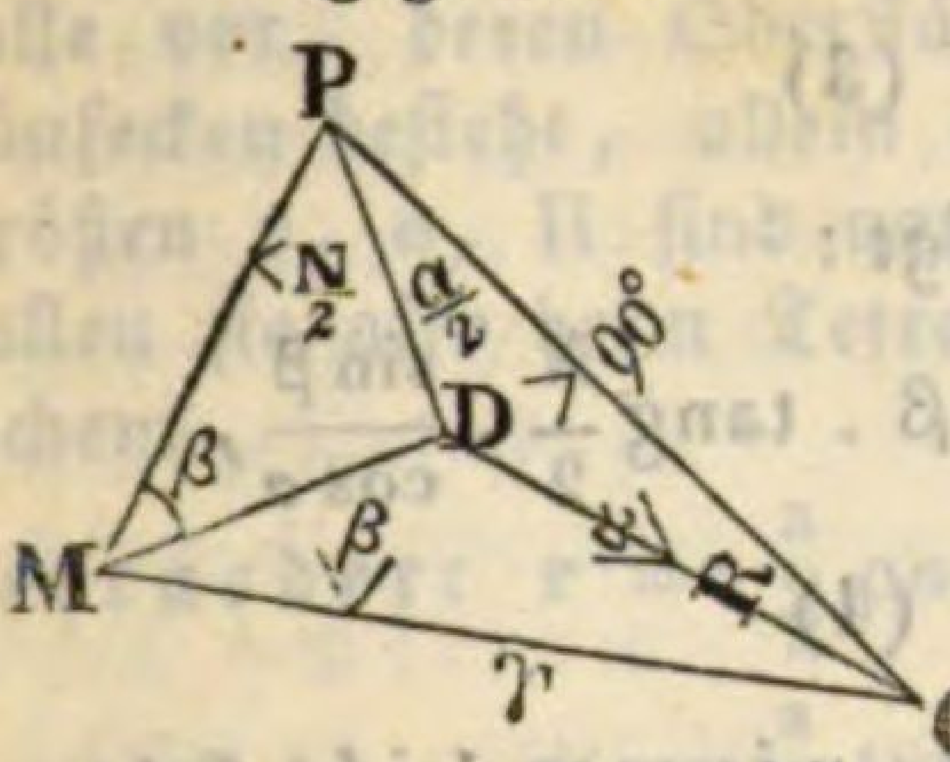
3) Jedes Loth von O auf eine Seitenfläche trifft diese in ihrem Mittelpunkte.

4) Der Halbmesser des umschriebenen Kreises, z. B. DO, bildet mit den Kanten eines Eckpunktes CD, DE, DH gleiche Winkel, da ja CDO = DOH = DOE ist.

5) Die Lothe vom Mittelpunkte O auf die Kanten halbiren diese und sind einander gleich, wie man dieß leicht sieht.

§. 506. Um nun alle Stücke eines regelmäßigen Polyeders allgemein durch Rechnung zu bestimmen, nehmen wir an, die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders sey m, und je n Seitenflächen stoßen in einem Ecke zusammen. Der Winkel, den die Ebenen POD und f. Fig. 651 DOS mit einander bilden, ist gleich $\frac{4R}{n}$, weil alle n Winkel, die die in D zusammentreffenden Ebenen mit einander bilden, einander gleich seyn müssen; der Winkel PMD ist gleich $\frac{4R}{2m}$. Es sey nun ferners der Neigungswinkel je zweier Seitenflächen z. B. MPL = N, daher MPO = $\frac{1}{2}$N, der Halbmesser der umschriebenen Kugel z. B. DO = R, der Halbmesser der eingeschriebenen Kugel z. B. MO = r, die Entfernung des Mittelpunktes von einer Kante z. B. OP = e, die Größe einer Kante z. B. CD = a, die Gesammtoberfläche des Polyeders = O, der Gesammtkörperinhalt desselben K.

Fig. 652.



Zur Berechnung der Beziehungen aller dieser Größen zeichnen wir uns die Elementar-Pyramide OPMD besonders heraus, und erinnern uns, daß diese Pyramide OPMD in der Pyramide OCDFGH 2m Mal, und die Pyramide OCDFGH im ganzen Polyeder p Mal enthalten ist, wenn nämlich p die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders darstellt.

Der Winkel PMD, den wir der Kürze halber β nennen wollen, ist gleich $\frac{360^\circ}{2m} = \frac{180^\circ}{m}$, $MPD = 90^\circ$, $MDP = 90^\circ - \frac{180^\circ}{m}$. Da $OM \perp MPD$ ist, so hat man $OMP = OMD = 90^\circ$, daher der Neigungswinkel der Ebenen POM und DOM gleich β ist. Der Neigungswinkel der Ebenen POD und DOM, den wir der Kürze halber α nennen wollen, ist die Hälfte des Winkels der Ebenen POD und DOS. Da nun n solche Winkel in D zusammentreffen, die alle einander gleich sind, so hat man $\alpha = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$. Der Winkel der Ebenen POD und POM ist gleich 90°, weil $OP \perp PD$ und $OMP \perp PD$, und daher $PD \perp POM$, und daher die durch PD gelegte Ebene $POD \perp POM$ ist.

Wir haben nun nach den Formeln der sphärischen Trigonometrie für das Körpereck O:

$$\cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos 90^\circ + \sin\beta \,.\, \sin 90^\circ \,.\, \cos POM,$$
$$\cos\beta = -\cos\alpha \,.\, \cos 90^\circ + \sin\alpha \,.\, \sin 90^\circ \,.\, \cos POD,$$
$$\cos DOM = \cos POD \,.\, \cos POM + \sin POD \,.\, \sin POM \,.\, \cos 90^\circ,$$

daher $\cos POM = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$, $\cos POD = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$,

$$\cos DOM = \text{cotang}\,\alpha \,.\, \text{cotang}\,\beta.$$

Da $MPO = \frac{N}{2}$, so hat man aus dem rechtwinklichten Dreiecke MPO den Winkel $MOP = 90^\circ - \frac{N}{2}$, daher $\cos POM = \sin\frac{N}{2}$, somit

$$\sin\frac{N}{2} = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad (1).$$

Aus dem rechtwinklichten Dreiecke PMD ergibt sich:

$$MP = \frac{a}{2} \,.\, \text{cotang}\,\beta, \quad MD = \frac{a}{2} \,.\, \frac{1}{\sin\beta}.$$

Aus dem rechtwinklichten Dreiecke POM hat man:

$$r = MP \,.\, \text{tang}\,\frac{N}{2}, \quad \text{also} \quad r = \frac{a}{2}\,\text{cotang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\frac{N}{2} \quad (2)$$

Aus dem Dreiecke MOD folgt:

$$R = \frac{r}{\cos MOD}, \quad \text{also} \quad R = \frac{a}{2}\,\text{cotang}\,\beta \,.\, \text{tang}\,\frac{N}{2} \,.\, \text{tang}\,\alpha \,.\, \text{tang}\,\beta,$$

daher

$$R = \frac{a}{2} \tan g\, \alpha \,.\, \tan g \frac{N}{2} \quad (3)$$

Aus dem rechtwinklichten Dreiecke POM folgt:

$$e = \frac{r}{\cos POM}, \text{ also } e = \frac{a}{2} \operatorname{cotang} \beta \,.\, \tan g \frac{N}{2} \,.\, \frac{\sin \beta}{\cos \alpha},$$

$$\text{daher } e = \frac{a}{2} \,.\, \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \,.\, \tan g \frac{N}{2} \quad (4)$$

Für die Oberfläche des Polyeders O hat man, wie man leicht sieht:

$$O = \frac{m\,p}{4} \operatorname{cotang} \beta \,.\, a^2 \quad (5)$$

Multiplicirt man diese Oberfläche mit $\frac{1}{3}$ von r, so hat man:

$$K = \frac{m\,p\,a^3}{24} \,.\, \operatorname{cotang}^2 \beta \,.\, \tan g \frac{N}{2} \quad (6)$$

Man hat daher für die Auflösung aller regelmäßigen Polyeder folgende sechs Formeln:

$$\sin \frac{N}{2} = \frac{\cos \frac{180^\circ}{n}}{\sin \frac{180^\circ}{m}},$$

$$r = \frac{a}{2} \operatorname{cotang} \frac{180^\circ}{m} \tan g \frac{N}{2},$$

$$R = \frac{a}{2} \tan g \frac{180^\circ}{n} \tan g \frac{N}{2},$$

$$e = \frac{a}{2} \,.\, \frac{\cos \frac{180^\circ}{m}}{\cos \frac{180^\circ}{n}} \,.\, \tan g \frac{N}{2},$$

$$O = \frac{m\,p\,a^2}{4} \operatorname{cotang} \frac{180^\circ}{m},$$

$$K = \frac{m\,p\,a^3}{24} \operatorname{cotang}^2 \frac{180^\circ}{m} \,.\, \tan g \frac{N}{2}.$$

Setzt man hier nach und nach

	I,	II,	III,	IV,	V,
m =	3,	3,	3,	4,	5,
n =	3,	4,	5,	3,	3,
p =	4,	8,	20,	6,	12,

so erhält man die gesuchten Stücke aller fünf regelmäßigen Polyeder. Diese fünf regelmäßigen Körper werden wir, wie schon früher bemerkt, nach der Anzahl ihrer Seitenflächen benennen: I. Tetraeder (vom griechischen tetra, vier, und hedra, Seitenfläche); II. Octaeder (octo, acht); III. Ikosaeder (ikosi, zwanzig); IV. Hexaeder (hexa, sechs); V. Dodekaeder (dodeka, zwölf).

Die Gestalten I, II und IV kommen in der Natur sehr häufig

als Krystallgestalten vor, III und V aber nie; es kommen zwar Krystalle vor, deren Oberfläche aus zwölf congruenten und ähnlichen Fünfecken besteht, allein diese Fünfecke sind nicht regelmäßig. Die Größen r, e, R sind namentlich bei den Krystallen sehr wichtig, wir wollen sie also beim Tetraeder, Octaeder und Hexaeder näher untersuchen.

Tetraeder: $r = \frac{a}{2} \operatorname{cotang} 60^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2}$,

$$e = \frac{a}{2} \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tang} 60^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

daher $r : e : R = \frac{1}{\sqrt{3}} : 1 : \sqrt{3}$

$$= 1 : \sqrt{3} : 3,$$

daher $r^2 : e^2 : R^2 = 1 : 3 : 9.$

Octaeder: $r = \frac{a}{2} \operatorname{cotang} 60^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2}$,

$$e = \frac{a}{2} . \frac{\cos 60^\circ}{\cos 45^\circ} \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tang} 45^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

daher $r : e : R = \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1,$

$$r^2 : e^2 : R^2 = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{2} : 1.$$

Hexaeder: $r = \frac{a}{2} \operatorname{cotang} 45^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2}$,

$$e = \frac{a}{2} . \frac{\cos 45^\circ}{\text{cg so0}^\circ} \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

$$R = \frac{a}{2} \operatorname{tang} 60^\circ . \operatorname{tang} \frac{N}{2},$$

daher $r : e : R = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3},$

$$r^2 : e^2 : R^2 = 1 : 2 : 3.$$

Die Größen 2r, 2e, 2R sind das, was die Krystallographen pyramidale, prismatische und rhomboedrische Achsen dieser Körper nennen.

Nennt man die Neigungswinkel bei Tetraeder, Octaeder, Hexaeder t, o und h, so hat man:

$$\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \sin \frac{o}{2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \sin \frac{h}{2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

daher $h = 90^\circ$, $\frac{o}{2} = 90^\circ - \frac{t}{2}$, daher $o = 180^\circ - t$;

für t findet man: 70° 31′ 43″·6.

§. 507. Diejenigen Krystallgestalten, die von lauter gleichen und ähnlichen Figuren eingeschlossen sind, nennen die Mineralogen

einfache Gestalten, und nennen Axen solche Linien, welche durch den Mittelpunkt der Körper gehen und gegen die Schnitte desselben eine möglichst regelmäßige und gleichförmige Lage haben; sie unterscheiden vorzüglich dreierlei Arten von Achsen: 1) Rhomboedrische; sie stehen senkrecht im Mittelpunkte gegen solche Schnitte, in welchen gleichseitige Dreiecke verzeichnet werden können. 2) Pyramidale Achsen stehen im Mittelpunkte auf solche Schnitte senkrecht, in welchen Quadrate verzeichnet werden können. 3) Prismatische Achsen stehen im Mittelpunkte senkrecht auf solche Schnitte, in welchen Rhomben (Rauten, gleichseitige Parallelogramme) verzeichnet werden können.

Fig. 653.

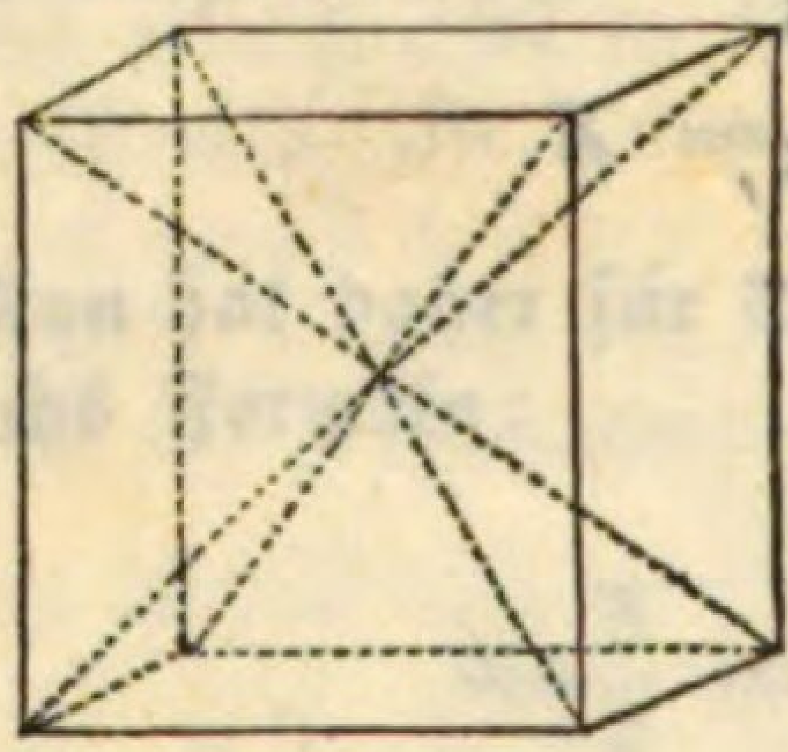


Fig 654.

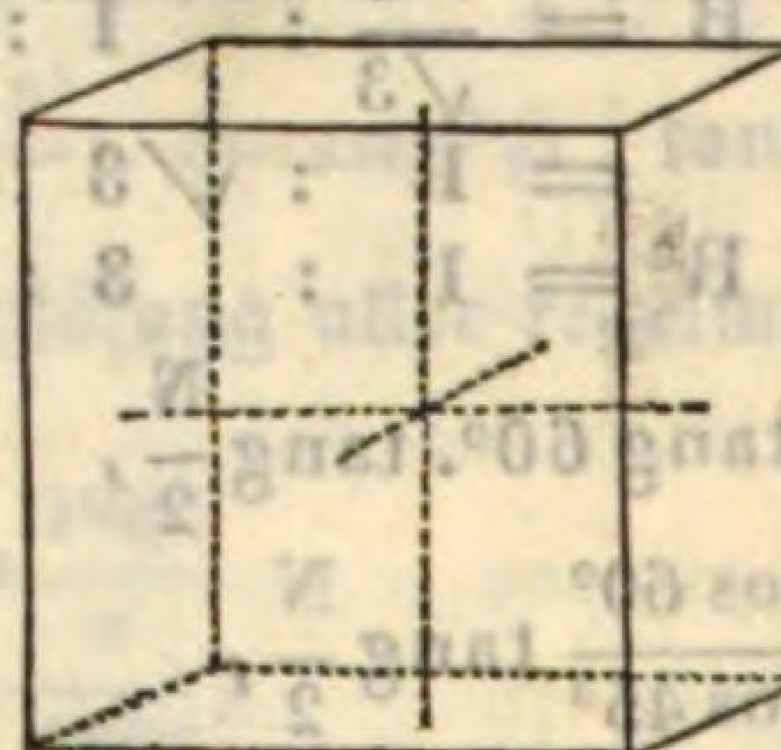
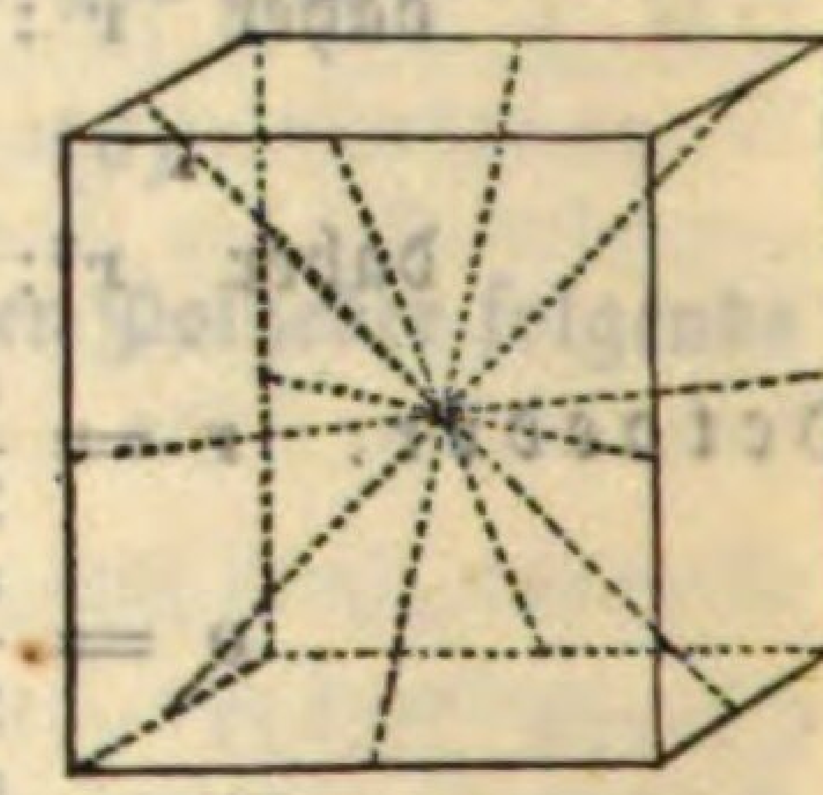


Fig 655.



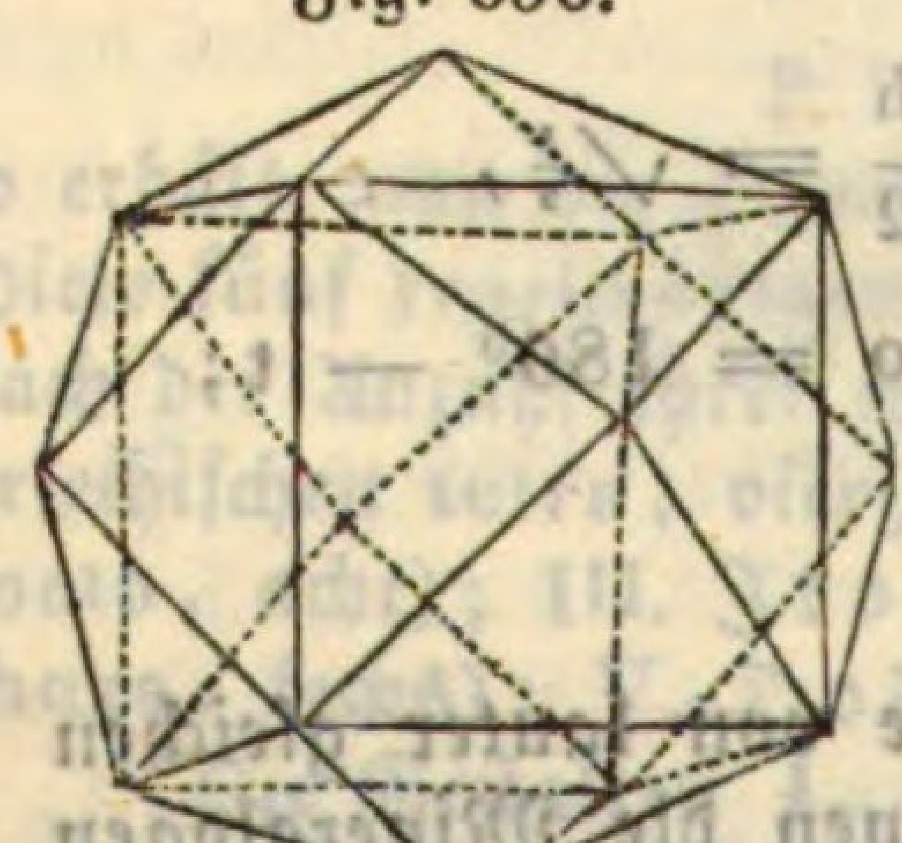
In der ersten Figur hier sind die rhomboedrischen, in der zweiten die pyramidalen, in der dritten die prismatischen Achsen verzeichnet.

Die einfachen Gestalten besitzen entweder mehrere Achsen, oder sie besitzen nur eine derselben, und werden demnach in vielachsige und einachsige eingetheilt.

Es ist hier nicht der Ort, in das eigentliche Gebiet der Krystallographie überzugehen, allein es liegt der Geometrie sehr nahe, von den vielen Bereicherungen der Körperlehre durch die Krystallographen die wesentlichsten und rein geometrischen Begriffe wenigstens vorbereitend zu erwähnen.

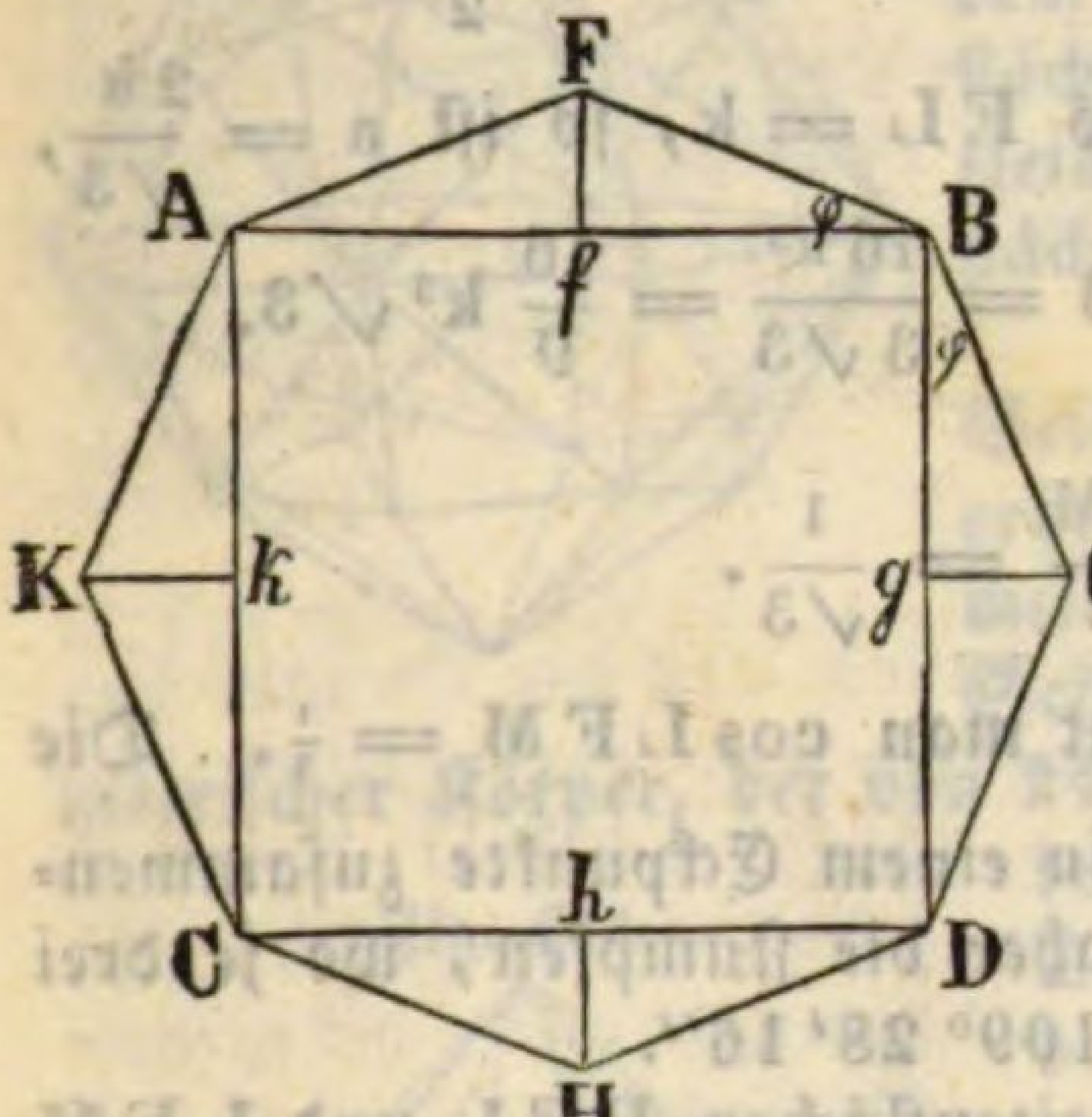
§. 508. Um unsern Lehrern zur Vorstellung der vielachsigen einfachen Gestalten zu verhelfen, wollen wir uns dieselben aus dem Hexaeder (Würfel), Octaeder und Tetraeder zu erzeugen suchen. Denken wir uns bei einem Würfel im Mittelpunkte jeder der sechs Seitenflächen ein gleich großes Loth erhaben, den Endpunkt desselben mit den vier Eckpunkten der Seitenfläche, auf der er senkrecht steht, verbunden, so haben wir den Körper, der von 24 gleichschenklichten mit einander congruenten Dreiecken bedeckt ist. Er hat sechs vierseitige gleiche Körperecke und acht sechsseitige gleiche Körperecke. Mohs nennt diesen Körper hexaedrischen Trigonal-Ikositetraeder, d. h. würfelartiger Dreiecks-Vierundzwanzigflächner.

Fig. 656.



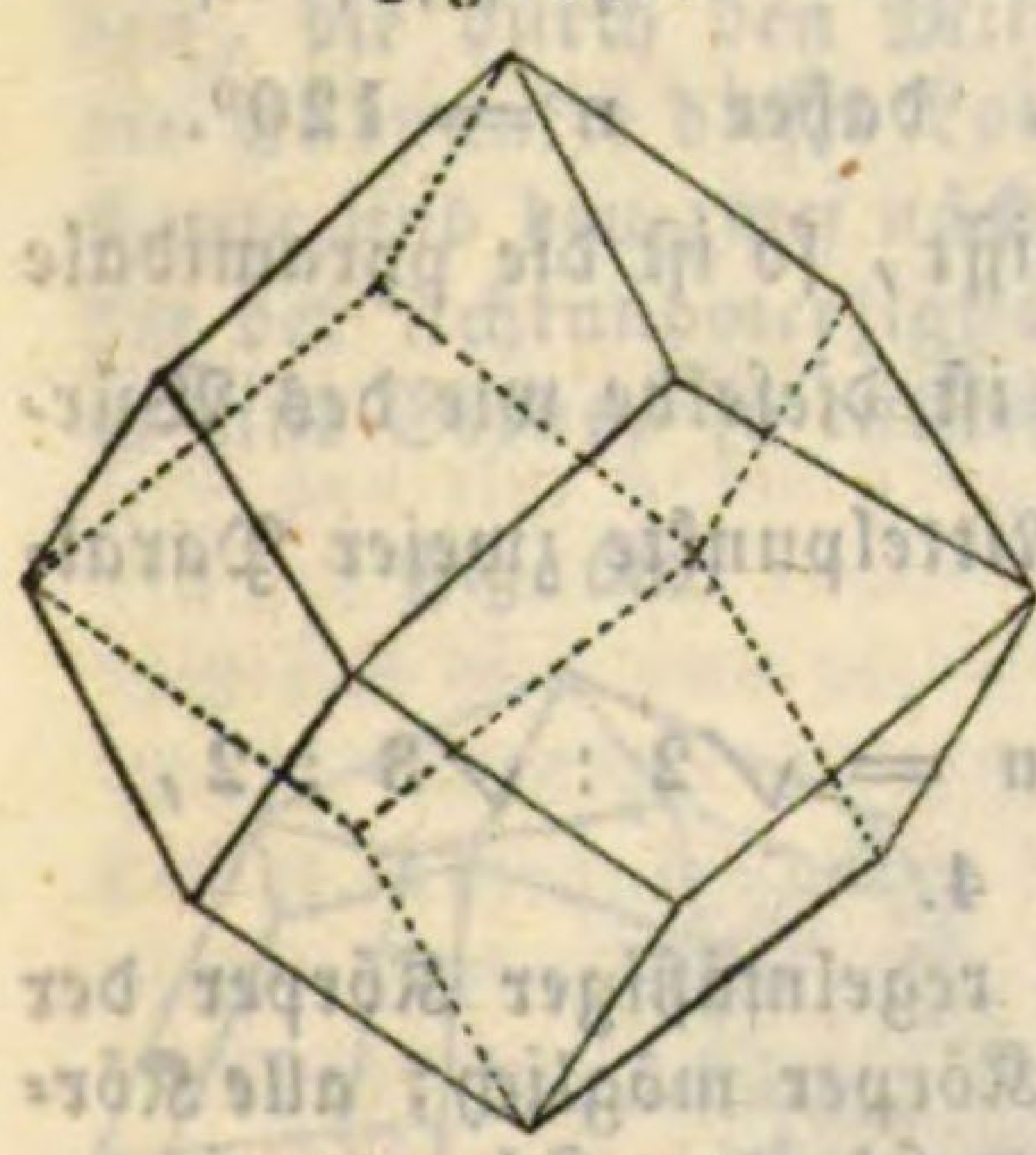
Zeichnen wir uns einen Durchschnitt, der durch vier vierseitige Körperecke geht.

Fig. 657.



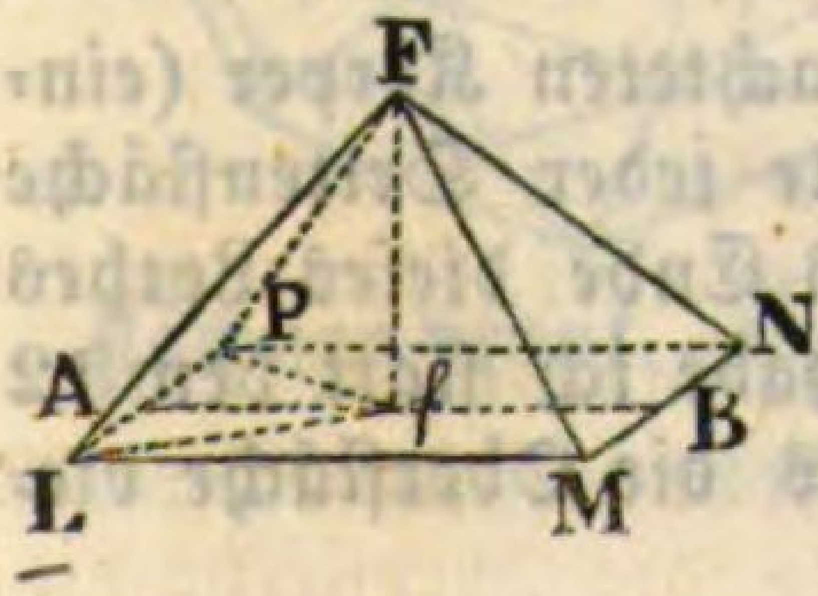
Hier sind AB, BD, CD, AC Gerade, die entstehen, wenn man in den zugehörigen Seitenflächen des Würfels die Halbirungspunkte der gegenüber stehenden Kanten verbindet, so daß, wenn $Ff \perp AB$, $Gg \perp BD$ u. s. w., f, g, h, k die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind. Die Geraden AF, FB, BG, GD . . . sind die Lothe, die von den Ecken des Körpers F, G, H . . . auf die Kanten des Würfels gefällt werden, so also, daß die Winkel FBG, GDH . . . die Neigungswinkel gegen Dreiecksflächen sind, die eine Hexaederkante mit einander gemein haben. Nach der Größe des Lothes $Ff = Gg = Hh =$ ꝛc. kann es mehrere hexaedrische Trigonal-Ikositetraeder geben; wird $\varphi = 45^\circ$, so werden FB und BG eine gerade Linie bilden, und da FBG der Neigungswinkel zweier Dreiecksflächen ist, die in einer Würfelkante sich schneiden, und nun $FBG = 180^\circ$ wird, so werden je zwei solche Dreiecksflächen in eine Ebene fallen, und wir werden statt 24 Dreiecken 12 Rhomben haben, nämlich folgenden Körper, den Mohs einkantiges Tetragonal-Dodekaeder nennt, also ein Körper, der von zwölf Vierecken bedeckt wird, wo alle Kanten gleich sind.

Fig. 658.



Wenn in der früheren Figur $\varphi = 45^\circ$ ist, so hat man $Ff = fB$, die Höhe gleich der halben Würfelkante. Man kann sich daher dieses Dodekaeder auch auf folgende Art entstehend denken. Verbindet man den Mittelpunkt eines Würfels mit allen seinen acht Eckpunkten, so entstehen sechs Pyramiden, die mit einander congruent sind; setzt man nun diese sechs Pyramiden mit ihren Grundflächen auf die Seitenfläche des Würfels, so hat man diesen von zwölf einerlei Rauten bedeckten Körper.

Fig. 659.



Ist a die Kante des Erzeugungswürfels, also a^3 sein Körperinhalt, so ist der Körperinhalt des so erzeugten Dodekaeders $= 2a^3$.

Es sey LN eine Seitenfläche des Hexaeders, $Ff = \frac{AB}{2} = \frac{LM}{2} = \frac{a}{2}$ die Höhe im Mittel-

punkte, so ist $Af = \frac{a}{2}$, daher $AF = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, daher

$$FL^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}, \text{ also } FL = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Nennt man die Kante des Dodekaeders $FL = k$, so ist $a = \frac{2k}{\sqrt{3}}$, daher der Körperinhalt des Dodekaeders $= \frac{16k^3}{3\sqrt{3}} = \frac{16}{9}k^3\sqrt{3}$.

Man findet ferners

$$\sin\tfrac{1}{2}LFM = \frac{\frac{1}{2}LM}{FL} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Da nun $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, so hat man $\cos LFM = \frac{1}{3}$. Die ebenen Winkel der Kanten, wo je vier in einem Eckpunkte zusammenstoßen, sind jeder gleich $70^\circ\,31'\,44''$, daher die stumpfen, wo je drei in einem Eckpunkte zusammenstoßen $= 109^\circ\,28'\,16''$.

Um den Neigungswinkel zweier Seitenflächen PFL und LFM zu bestimmen, nennen wir den Neigungswinkel dieser zwei Ebenen n, so hat man nach den Regeln der sphärischen Trigonometrie für das dreiseitige Körpereck von L

$$\cos ALM = \cos ALF \,.\, \cos FLM + \sin ALF \,.\, \sin FLM \,.\, \cos n.$$

Da nun $ALM = 90^\circ$, $ALF = FLM$ ist, so hat man

$$\cos n = -\operatorname{cotang}^2 FLM = -\operatorname{tang}^2(\tfrac{1}{2}LFM)$$
$$= -\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = -\tfrac{1}{2},$$

daher $\cos n = -\frac{1}{2}$. Da nun $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ist, so ist

$$-\tfrac{1}{2} = \cos(180^\circ - 60^\circ) = \cos 120^\circ, \quad \text{daher} \quad n = 120^\circ.$$

Was die Achsen des Dodekaeders betrifft, so ist die pyramidale $= \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a$, die rhomboedrische ist dieselbe wie des Würfels $a\sqrt{3}$, die prismatische, welche die Mittelpunkte zweier Parallelflächen verbindet $= a\sqrt{2}$, daher

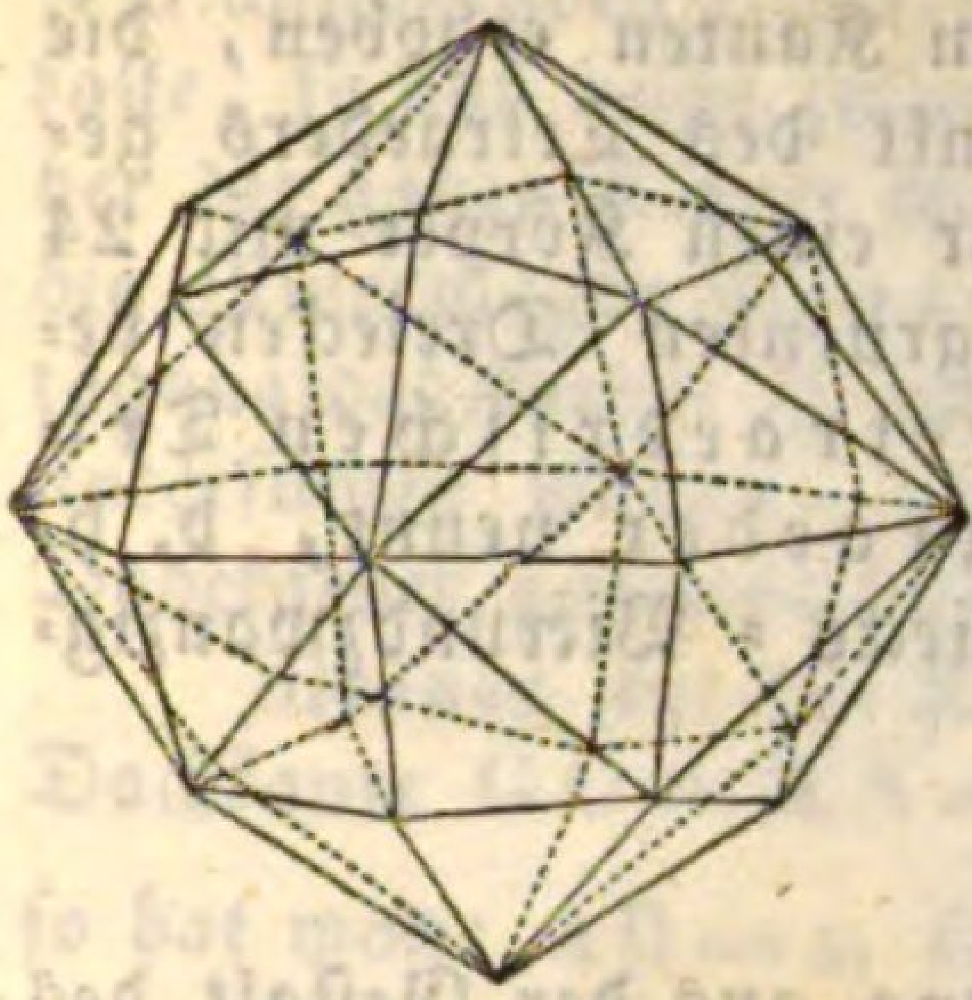
prismat.-rhomboedr.-pyramidale Achsen $= \sqrt{2} : \sqrt{3} : 2$,

und die Quadrate dieser Achsen $= 2 : 3 : 4$.

Obwohl der Rautenzwölfflächner kein regelmäßiger Körper der Geometrie ist, so ist doch nur eine Art dieser Körper möglich; alle Körper dieser Art sind einander ähnlich, und unterscheiden sich von einander nur durch die Größe der Kanten.

§. 509. Denkt man sich beim zuletzt betrachteten Körper (einkantiger Tetragonal-Dodekaeder) im Mittelpunkte jeder Seitenfläche ein gleiches Loth erhoben, und verbinde ich das Ende dieses Lothes mit den vier Eckpunkten dieser Seitenfläche, so habe ich statt den 12 Rauten 48 ungleichseitige congruente Dreiecke als die Oberfläche die-

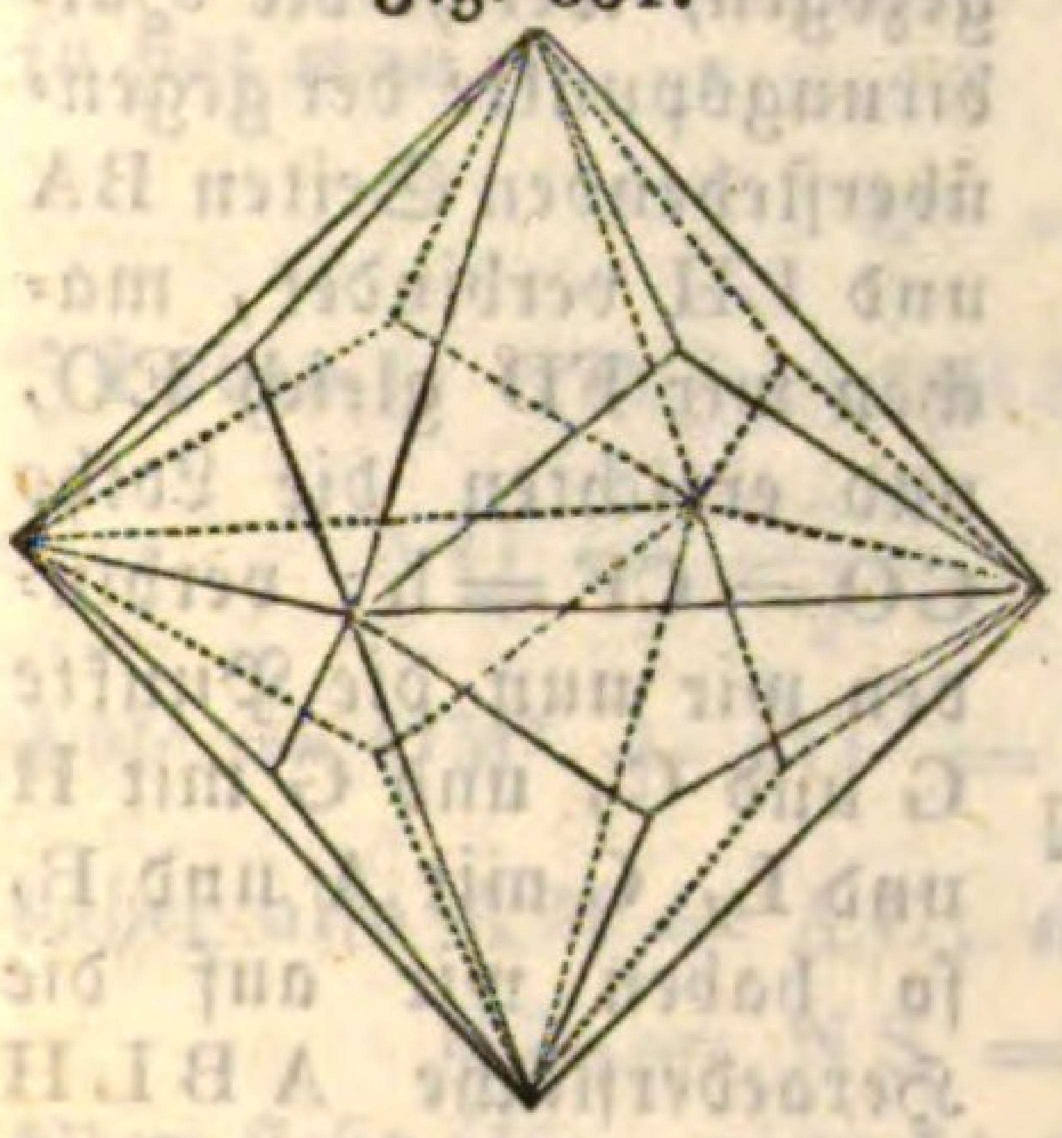
Fig. 660.



ses Körpers. Mohs nennt diesen Körper Tetrakontooctaeder, weil im Griechischen 48 tetra konto octo heißt. Je nachdem das Loth im Mittelpunkte der Seitenfläche des Rautenzwölfflächners größer oder kleiner ist, sind verschiedene Achtundvierzigflächner möglich.

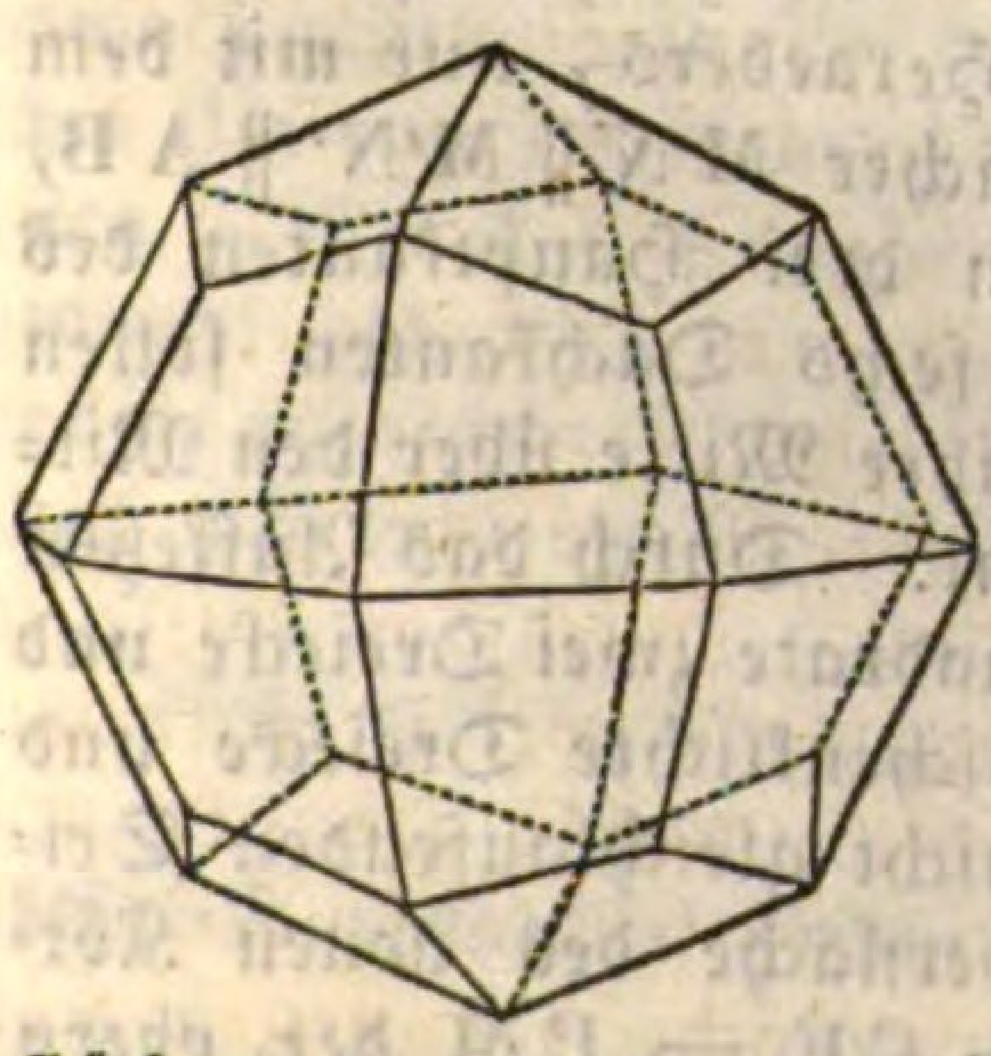
Denkt man sich im Mittelpunkte jeder Seitenfläche des Octaeders ein gleiches Loth erhoben, und den Endpunkt dieses Lothes mit den drei Eckpunkten der ihm zugehörigen Seitenfläche verbunden, so entsteht ein symmetrischer Körper, der von 24 congruenten gleichschenklichten Dreiecken bedeckt ist, den Mohs das octaedrische Trigonal-Ikositetraeder nennt, d. h. octaedrischer Dreiecks-Vierundzwanzigflächner. Es ist begreiflich, je nachdem diese Lothe größer oder kleiner sind, wird es verschiedene solche Dreiecks-Vierundzwanzigflächner geben. Hat das Loth gerade die Größe, daß zwei benachbarte Dreiecke ein ebenes Viereck geben, so geht dieser Körper in den früher betrachteten Rautenzwölfflächner über.

Fig. 661.



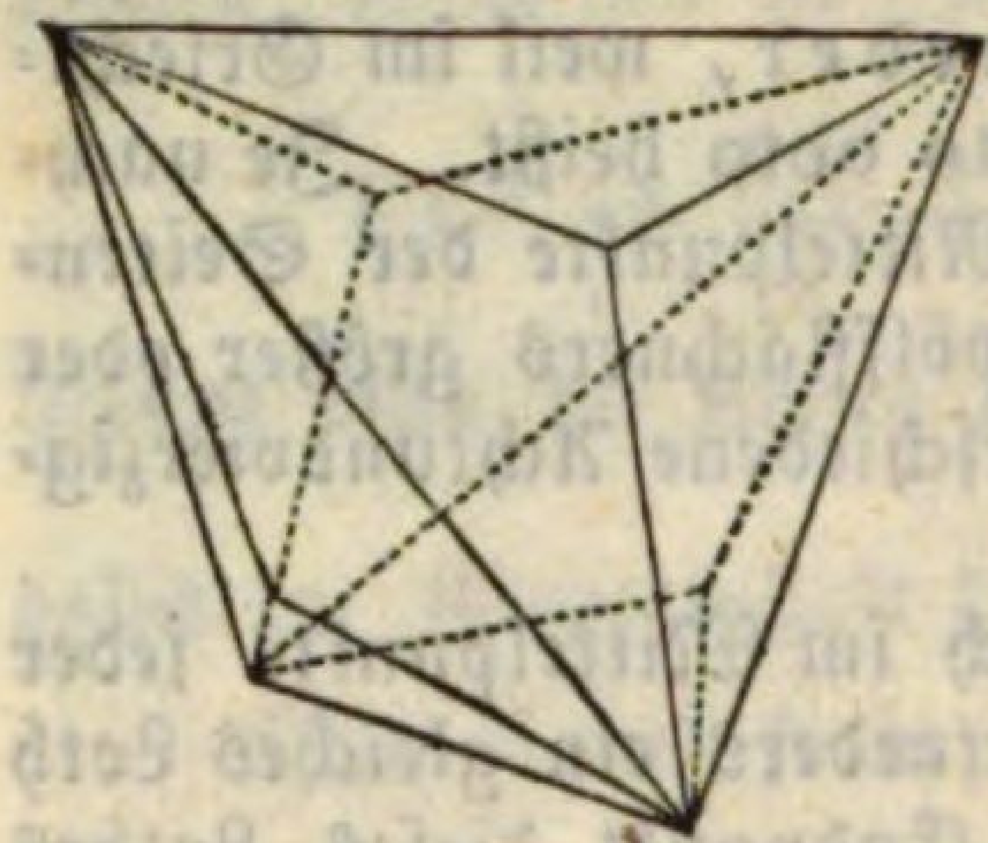
Denkt man sich bei dem zuletzt betrachteten Körper auf jede der zwölf Kanten, die zugleich Kanten des Erzeugungsoctaeders sind, gleiche Lothe erhoben, die durch den Mittelpunkt des Octaeders gehen, und verbindet die Endpunkte dieser Lothe mit den zwei Endpunkten der zugehörigen Kante und den zwei nächsten dreiseitigen Körperecken, so entsteht wieder der Achtundvierzigflächner; fallen hier zwei benachbarte Dreiecke in eine Ebene, so entsteht ein Körper, der von 24 Vierecken begrenzt ist, den Mohs zweikantiges Tetragonal-Ikositetraeder nennt, d. h zweikantiger Vierecks-Vierundzwanzigflächner.

Fig. 662.



§. 510. Ganz auf ähnliche Art kann man auch mit dem Tetraeder verfahren; errichtet man im Mittelpunkte jeder Seitenfläche gleiche Lothe, so erhält man einen Körper, der von zwölf gleichschenklichten congruenten Dreiecken begrenzt ist, den Mohs Trigonaldodekaeder, Dreiecks-Zwölfflächner nennt.

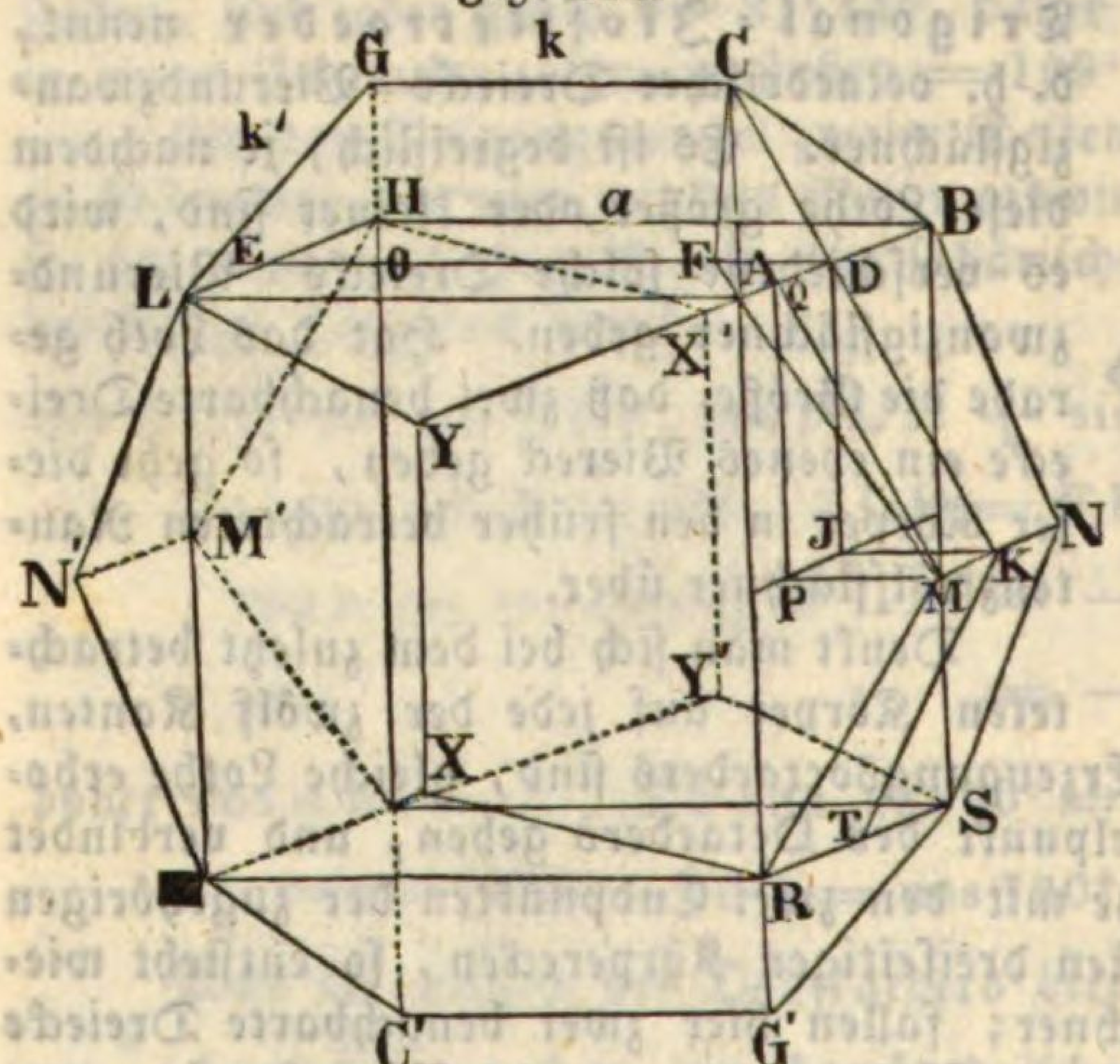
Fig. 663.



Denkt man sich hier gleiche Lothe auf jede der tetraedrischen Kanten erhoben, die durch den Mittelpunkt des Tetraeders gehen, so erhalten wir einen Körper mit 24 ungleichseitigen congruenten Dreiecken bedeckt, den Mohs tetraedrischen Trigonal-Ikositetraeder nennt, d. h. tetraedrischen Dreiecks-Vierundzwanzigflächner.

§. 511. Eine sehr merkwürdige Ableitung aus der Gestalt des Hexaeders (Würfels) ist folgende: Denken wir uns auf der Würfelfläche A B L H die D E gezogen, welche die Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten B A und L H verbindet, machen wir FD gleich EO, und errichten die Lothe GO = CF = h; verbinden wir nun die Punkte G und C, und G mit H und L, C mit A und B, so haben wir auf die Hexaederfläche A B L H gleichsam ein Dach CGABLH aufgesetzt, wo hier die Mitte von G C senkrecht über der Mitte von D E steht, und die schiefen Flächen A C B und G L H gleich geneigt sind gegen A B L H; dasselbe gilt von den schiefen Seitenflächen A C G L und B C G H. Ganz ähnliche Dächer setzen wir auf die übrigen Seitenflächen des Hexaeders, nur mit dem Unterschiede, daß die obern Kanten dieser Dächer M N ∥ M′N′ ∥ A B, X Y ∥ X′Y′ ∥ B S, C G ∥ C′G′ ∥ A L mit den drei Hauptkanten des Hexaeders gleichlaufend seyn sollen. Diese sechs Dachkanten sollen alle einander gleich seyn, und so stehen, daß ihre Mitte über den Mittelpunkt der zugehörigen Hexaederfläche kommt. Durch das Aufsetzen dieser sechs Dächer erhält man statt jedem Quadrate zwei Dreiecke und zwei Trapeze, daher im Ganzen zwölf gleichschenklichte Dreiecke und zwölf gleichseitige Trapeze (wo nämlich die nicht gleichlaufenden Seiten einander gleich sind) als die Gesammtoberfläche des neuen Körpers. Nun kann man aber die Höhe h = CF = PM der obern Kante des Daches über jeder Hexaederfläche so bestimmen, daß je eine dreieckige Seitenfläche, z. B. A B C, mit der an dieselbe Hexaederkante

Fig. 664.



AB anstoßenden trapezenförmigen Seitenfläche ABMN in eine Ebene falle, so daß beide zusammen das Fünfeck ACBMN bilden, und daher der ganze Körper mit zwölf congruenten Fünfecken bedeckt ist, den die Mineralogen Pentagonaldodekaeder nennen. Dieses Pentagonaldodekaeder ist nur unter gewissen Bedingungen, die wir näher untersuchen wollen, dasjenige regelmäßige Polyeder, welches wir Dodekaeder genannt haben.

Nennen wir die Kante des Hexaeders a, die Größe der obersten Dachkante $GC = MN = XY = k$, die Dachhöhe $CF = PM = h$, so hat man: $AB = a$, $GC = k$, $FD = \frac{a-k}{2}$, $CD^2 = h^2 + \frac{(a-k)^2}{4}$, $AC^2 = AD^2 + CD^2$, daher $AC^2 = \frac{a^2 + (a-k)^2}{4} + h^2$. Nennen wir die schiefen Dachkanten $AC = CB = GH = GL = \ldots = k'$, so hat man:

$$k'^2 = \frac{a^2 + (a-k)^2 + 4h^2}{4}.$$

Ist eben so $PM \perp ABRS$, $MK = KN$, $QM \perp AB$, so hat man:

$$AQ = \frac{a-k}{2}, \quad QP = \frac{a}{2}, \quad QM^2 = \frac{a^2}{4} + h^2,$$

$$AM^2 = QM^2 + AQ^2 = \frac{a^2 + (a-k)^2}{4} + h^2 = \frac{a^2 + (a-k)^2 + 4h^2}{4};$$

daher also $AM = AC$, und eben so

$$BN = NS = MR = AM = AC = k'.$$

Man sieht also, nicht bloß die mit den Hexaederflächen gleichlaufenden Dachkanten sind einander gleich, nach der Annahme alle gleich k, sondern auch die 24 schiefen Dachkanten sind alle gleich k'.

Untersuchen wir nun die Bedingungen, damit je ein Dreieck mit dem ihm zugehörigen Trapeze, d. h. z. B. ABC und ABMN in einer Ebene liege. Fällen wir von der Mitte der Kante MN, d. h. vom Punkte K ein Loth JK auf ABRS; es sey ferners $DK \perp AB$, so ist auch $JD \perp AB$, daher ist JDK der Neigungswinkel der Ebenen ABMN und ABRS, eben so ist CDF der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABLH, FDJ der Neigungswinkel der Ebenen ABLH und ABRS, daher ein rechter, CDK der Neigungswinkel der Ebenen ABC und ABMN; sollen diese zwei Ebenen eine Ebene bilden, so muß ihr Neigungswinkel $= 180^\circ$ werden, daher $CDF + JDK = 90^\circ$, daher $CDF = DKJ$ seyn. Nun ist

$$\tang CDF = \frac{CF}{FD} = \frac{2h}{a-k}, \quad \tang JKD = \frac{DJ}{JK} = \frac{a}{2h},$$

folglich muß zur Erfüllung dieser Bedingung $\frac{2h}{a-k} = \frac{a}{2h}$, d. h. $4h^2 = a(a-k)$ seyn.

Da nun $k'^2 = \frac{a^2 + (a-k)^2 + 4h^2}{4}$ ist nach dem Frühern, so hat

man

$$k'^2 = \frac{3a^2 - 3ak + k^2}{4}, \text{ oder auch } k'^2 = 3h^2 + \frac{k^2}{4}.$$

Nennen wir den Winkel $CDF = DKJ = \varphi$, so hat man nach dem Früheren

$$\tang \varphi = \frac{2h}{a-k}, \quad \tang \varphi = \frac{a}{2h}, \text{ daher } \tang^2 \varphi = \frac{a}{a-k}.$$

Nun ist der Neigungswinkel der zwei Ebenen CABMN und MNSG'R, der Winkel $DKT = 2\varphi$. Da nun $\cos 2\varphi = \frac{1 - \tang^2 \varphi}{1 + \tang^2 \varphi}$ ist, so hat man $\cos 2\varphi = -\frac{k}{2a-k}$.

Es ist ferners noch

$$\sin ACD = \sin \frac{ACB}{2} = \frac{a}{2k'}, \quad \cos AMN = -\frac{a-k}{2k'}.$$

Alle hier angeführten Betrachtungen und Berechnungen gelten für alle Pentagonaldodekaeder, welche alle von zwölf congruenten Fünfecken begrenzt werden, wobei jedem Fünfecke vier Kanten, z. B. AM, AC, BC und BN einander gleich sind; ferners sieht man, daß die Winkel MAC und NBC, AMN und MNB einander gleich sind.

Wir wollen nun die Bedingungen untersuchen, unter welchen die Fünfecke alle regelmäßig werden; dazu gehört, daß $k' = k$, und daß alle Polygonwinkel jeder gleich 108^0 werden. Zu diesem Behufe hat man:

$$k^2 = \frac{3a^2 - 3ak + k^2}{4} \text{ und } k^2 = 3h^2 + \frac{k^2}{4},$$

woraus $k^2 = a^2 - ak$, $\quad k = 2h$;

dieß gibt $k = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$, $\quad h = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Die Gleichung $k^2 = a^2 - ak$ oder die Proportion

$$(a-k) : k = k : a$$

zeigt, daß man a im äußern und mittleren Verhältnisse theilen müsse, um k zu erhalten, es verhält sich also $k : a$ wie die regelmäßige Zehneckseite zum Halbmesser des umschriebenen Kreises, d. h. wie

$$2r \sin 18^0 : r = 2 \sin 18^0 : 1;$$

es ist daher $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = 2 \sin 18^0$, folglich $\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin 18^0$, somit $h = a \cdot \sin 18^0$.

Man hat ferner

$$\sin \frac{ACB}{2} = \frac{a}{2k} = \frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Da $\sin 18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, so hat man $\sin^2 18^0 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$, daher $\cos^2 18^0 = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$, daher $\cos^2 18^0 - \sin^2 18^0 = \cos 36^0 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$,

somit $\sin\frac{ACB}{2} = \cos 36^\circ = \sin 54^\circ$, daher

$$\frac{ACB}{2} = 54^\circ,\quad ACB = 108^\circ,$$

$$\cos AMN = -\frac{a-k}{2k} = -\frac{a(a-k)}{2ak} = -\frac{k^2}{2ak}$$

$$= -\frac{k}{2a} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Da $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$, also $\cos^2 36^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$, $\sin^2 36^\circ = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$,

daher $\cos^2 36^\circ - \sin^2 36^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, daher

$$\cos AMN = -\cos 72^\circ = \cos 108^\circ,\quad \text{also}\quad AMN = 108^\circ.$$

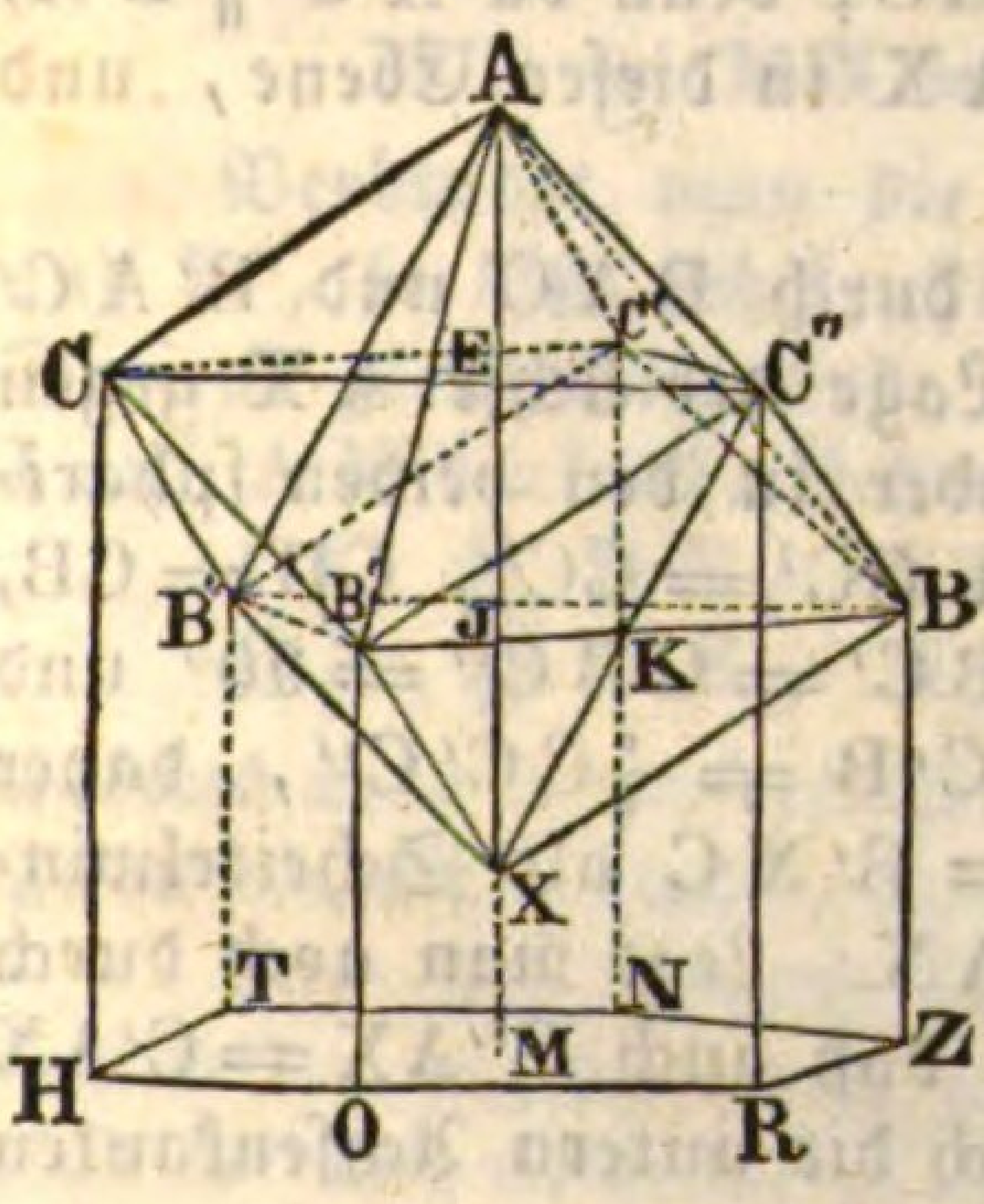
Ist also $h = a \cdot \sin 18^\circ$ oder $= a \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, so gehen alle zwölf Fünfecke in regelmäßige über, dann hat man auch für den Neigungswinkel

$$\cos 2\varphi = \frac{-k}{2a-k} = -\frac{\sqrt{5}-1}{5-\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

genau wie beim regelmäßigen Dodekaeder.

Dasjenige Pentagonaldodekaeder, wo alle Fünfecke regelmäßig sind, kommt in der Natur nicht vor.

Fig. 665.



§. 512. Um zu den einachsigen Gestalten überzugehen, betrachten wir zuerst das **Rhomboeder**, einen Körper, der von sechs congruenten Rhomben (Rauten, gleichseitigen Parallelogrammen) eingeschlossen ist. Die Kanten sind hier alle gleich. Da bei jedem Parallelogramme die gegenüber stehenden Winkel einander gleich sind, so sind unter den 24 ebenen Winkeln bei den acht Körperecken nur zwei verschiedene. Es sey der Punkt A derjenige, wo die drei ebenen Winkeln einander gleich sind; es sey $CAC' = CAC'' = C'AC'' = \varphi$, und es sey $ACB' = \psi$, daher $\varphi + \psi = 180^\circ$, so hat man für die übrigen Körperecke:

$$C\begin{cases} ACB' = \psi \\ ACB'' = \psi \\ B'CB'' = \varphi \end{cases}\qquad C'\begin{cases} AC'B = \psi \\ AC'B'' = \psi \\ BC'B'' = \varphi \end{cases}\qquad C''\begin{cases} AC''B = \psi \\ AC''B' = \psi \\ BC''B' = \varphi \end{cases}$$

$$B\begin{cases} XBC' = \psi \\ XBC'' = \psi \\ C'BC'' = \varphi \end{cases}\qquad B'\begin{cases} XB'C'' = \psi \\ XB'C = \psi \\ CB'C'' = \varphi \end{cases}\qquad B''\begin{cases} XB''C = \psi \\ XB''C' = \psi \\ CB''C' = \varphi \end{cases}$$

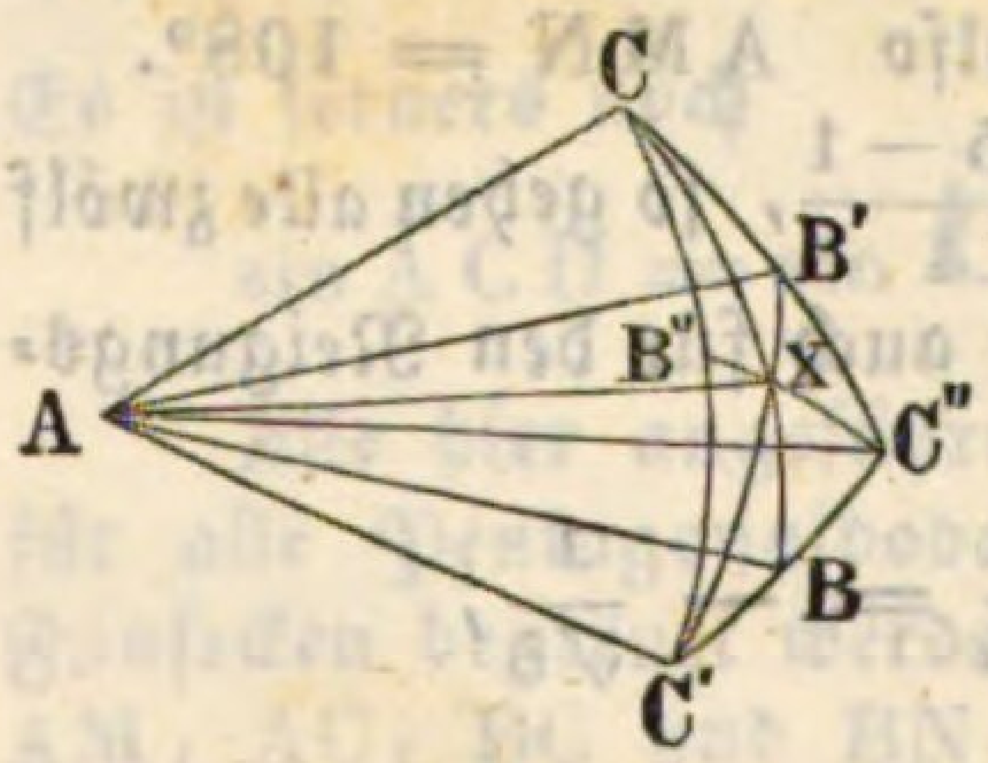
$$X\begin{cases} BXB' = \varphi \\ BXB'' = \varphi \\ B'XB'' = \varphi \end{cases}$$

so also, daß A und X die einzigen Körperecke sind, wo alle drei ebenen Winkel einander gleich sind; man nennt diese Ecken A und X die Spitzen des Rhomboeders, und die Linie AX heißt die Achse des Rhomboeders. Je nachdem der Winkel φ spitzig oder stumpf ist, heißt das Rhomboeder selbst ein spitzes oder stumpfes.

Die Kanten AC, AC′, AC″, BX, B′X, B″X heißen die Achsenkanten, hingegen CB′, CB″, C′B, C′B″, C″B, C″B′ die Seitenkanten.

Wir wollen zuerst nachweisen, daß die Achse AX mit den Achsenkanten durchaus gleiche Winkel bildet.

Fig. 666.



Zu diesem Behufe denken wir uns aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AC eine Kugel beschrieben, welche durch C′ und C″ durchgehen wird, und zeichnen wir uns dieses Kugelstück besonders heraus. Zieht man beim Rhomboeder die Winkellinien AB, AB′ und AB″, so werden die Winkel C′AC″, CAC″ und CAC′ dadurch halbirt, weil in jedem Rhombus die Diagonale den Winkel halbirt. Halbiren wir also in unserer besonders herausgezeichneten Figur die Seiten CC′, CC″ und C′C″ in den Punkten B″, B′ und B, so ist der Winkel CAB′, CAB″ u. s. w. in der einen und in der andern Figur derselbe. Die Achse AX liegt nun in jeder der drei Ebenen B′AC′, B″AC″ und BAC; denn da A′C′ ∥ B′X, also beide in einer Ebene, so liegt auch AX in dieser Ebene, und eben so bei den andern.

Legt man nun in unserm Kugelstück durch BAC und B′AC′ Ebenen, so muß ihr Durchschnitt AX die Lage der Achse AX gegen die Kanten AC, AC′, AC″ geben. Da aber in den beiden sphärischen Dreiecken BCC′ und BCC″ die Seiten CC′ = CC″, CB = CB, C′B = C″B sind, so müssen die Winkel CBC′ = CBC″ = 90° und $XCB' = \frac{1}{2} C'CC''$ seyn; eben so ist $XC'B = \frac{1}{2} CC'C''$, daher XCB′ = XC′B, CB′ = C′B; C′XB = B′XC als Scheitelwinkel, somit CX = C′X oder CAX = C′AX. Legt man noch durch B″A und C″ eine Ebene, so sieht man leicht, daß auch C″AX = C′AX ist. Eine weitere Folge ist ferners, daß auch die untern Achsenkanten mit der AX dieselben gleichen Winkel bilden. Nennt man einen der gleichen Winkel $CAC' = \alpha$, so erhält man aus dem sphärischen gleichseitigen Dreiecke CC′C″

$$\cos C'CC'' = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Benennt man also den Winkel der Ebenen an der Achsenkante AC mit x, so hat man

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad \text{daher} \quad \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

In dem rechtwinklichten Dreiecke BXC' sind die Katheten $BC' = \frac{\alpha}{2}$, der Winkel $XC'B = \frac{x}{2}$, Winkel $C'XB = 60^\circ$. Da nun der Sinus der Kathete gleich ist dem Sinus der Hypothenuse, multiplicirt mit dem Sinus des dieser Kathete gegenüber stehenden Winkels, so hat man: $\sin BC' = \sin XC' . \sin C'XB$, daher

$$\sin XC' = \frac{\sin BC'}{\sin C'XB} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 60^\circ}, \text{ daher } \sin XAC' = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Eben so ist $\sin BX = \sin C'X . \sin XC'B$, daher

$$\sin BX = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{\alpha}{2} . \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} . \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}.$$

Verlängert man nun die Achse AX bis M, legt durch M die Ebene HRZ senkrecht auf AM, und projicirt alle Eckpunkte des Rhomboeders auf diese Ebenen, so also, daß die Punkte M, T, N, Z, R, O und H die Projektionen der Punkte A, B'', C', B, C'', B' und C sind, so hat man:

$$MT = MN = MR = AC . \sin XAC = AC . \frac{2}{\sqrt{3}} . \sin\frac{\alpha}{2},$$

$$MZ = MO = MT = AB . \sin XAB = AB . \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ a ng}\frac{\alpha}{2}.$$

Da aber $AB = 2 AC . \cos\frac{\alpha}{2}$ ist, so hat man:

$$MT = MN = MR = MZ = MO = MT.$$

Verbindet man die Punkte C, C' und C'', und eben so B, B' und B'', so läßt sich leicht zeigen, daß die beiden dadurch entstehenden Dreiecke gleichseitig sind, und daß ihre Ebenen in den Punkten E und J auf AM senkrecht stehen; daraus ergibt sich ferners:

$CC' \# HN$, $CC'' \# HR$, $C'C'' \# NR$, und eben so
$BB' \# OZ$, $BB'' \# TZ$, $B'B'' \# TO$,

woraus man dann ersieht, daß die Punkte H, O, R, Z 2c. in den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks liegen.

Aus der Einerleiheit der beiden Pyramiden $ACC'C''$ und $XBB'B''$ ergibt sich $AE = JX$; da ferner die Ebenen $CC'C''$ und $BB'B''$ mit einander gleichlaufend sind, und durch die Ebene EXC'' in den Geraden EC'' und JK geschnitten werden, so hat man: $EJ : JX = C''K : KX$. Da aber $C''K = KX$, weil die Diagonalen XC'' und BB' des Rhombus $BB'C''X$ sich in K halbiren, so hat man: $EJ = JX$, daher die Theile $AE = EJ = JX$ der Achse AX einander gleich sind.

Setzt man nun nach Mohs die Seite HO der horizontalen Projektion gleich 1, so hat man, wenn man die Achsen $AX = a$, die Achsenkante $AC = A$, die schiefe Diagonale $AB = B$, die horizontale Diagonale $CC' = C$, den Winkel derselben an der Achsenkante gleich x, an der Seitenkante gleich z setzt, folgende Ausdrücke:

Aus dem Dreiecke CEA: $AC^2 = AE^2 + CE^2$,

daher $A^2 = \frac{a^2}{9} + 1$, also $a^2 = 9(A^2 - 1)$.

Aus dem Dreiecke ABJ: $AB^2 = AJ^2 + BJ^2$,

daher $B^2 = \left(\frac{2a}{3}\right)^2 + 1$, also $a^2 = \frac{9}{4}(B^2 - 1)$.

Dann ist $C = HR = \sqrt{3}$.

Da ferner $A = \frac{1}{\sin XAC} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$,

$$B = \frac{1}{\sin XAB} = \frac{\sqrt{3}}{\tan \frac{\alpha}{2}},$$

so hat man:

$$a^2 = 9 \cdot \frac{1 + 2\cos\alpha}{2(1 - \cos\alpha)}, \quad \text{woraus} \quad \cos\alpha = \frac{2a^2 - 9}{2(a^2 + 9)},$$

$$\text{woraus} \quad \cos x = \frac{2a^2 - 9}{4a^2 + 9}.$$

Um den Neigungswinkel der beiden Ebenen an der Kante B′C zu finden, bemerke man:

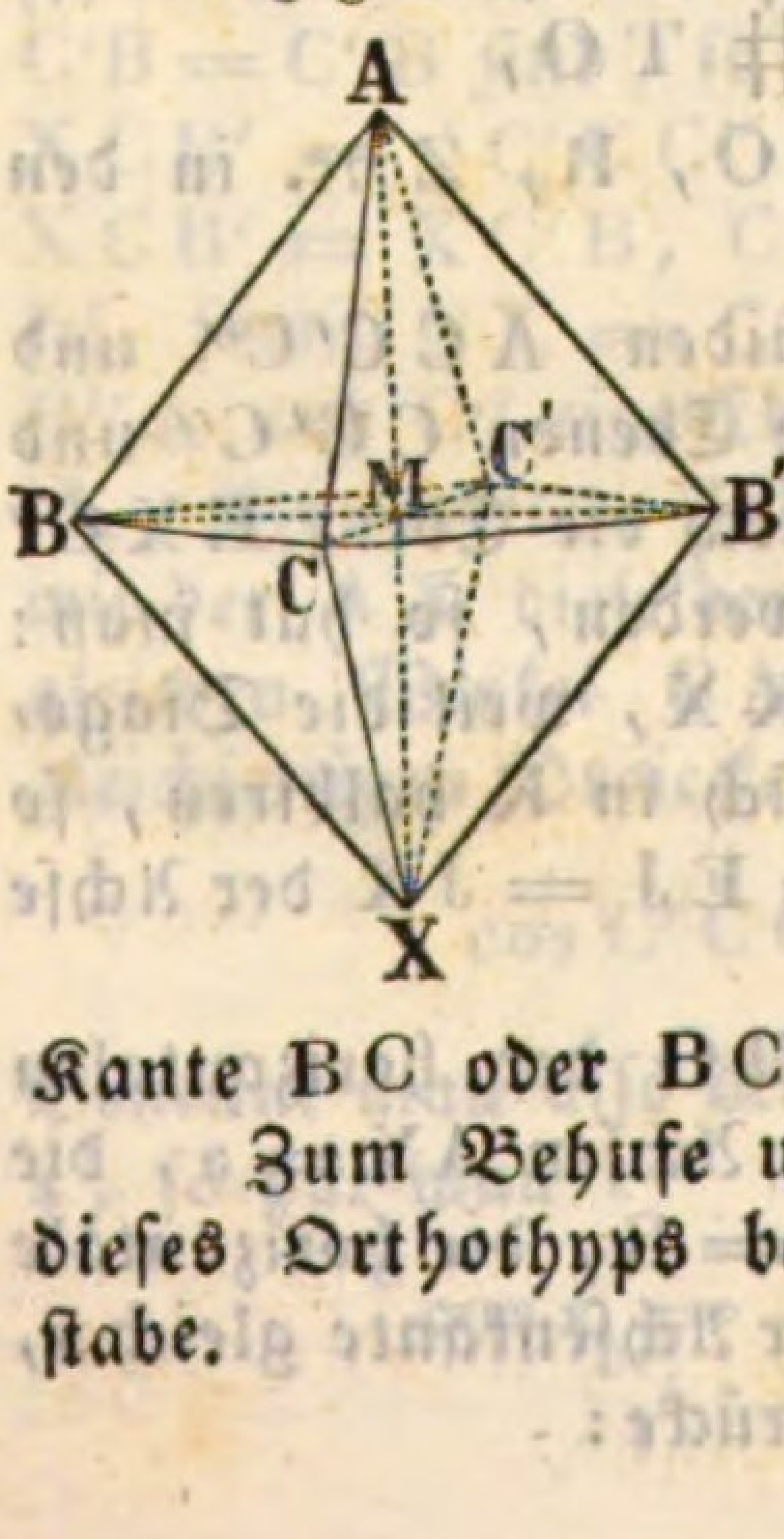
$CB'C'' = \alpha$, $C''B'X = 180^\circ - \alpha$, $XB'C = 180^\circ - \alpha$;

heißt der Neigungswinkel der Ebenen an der Kante CB′ nun z, so hat man:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ - \alpha)\cos\alpha + \sin(180^\circ - \alpha)\sin\alpha \cdot \cos z,$$

woraus $\cos z = \frac{-\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$, daher $\cos z = -\cos x$ folgt.

Fig. 667.

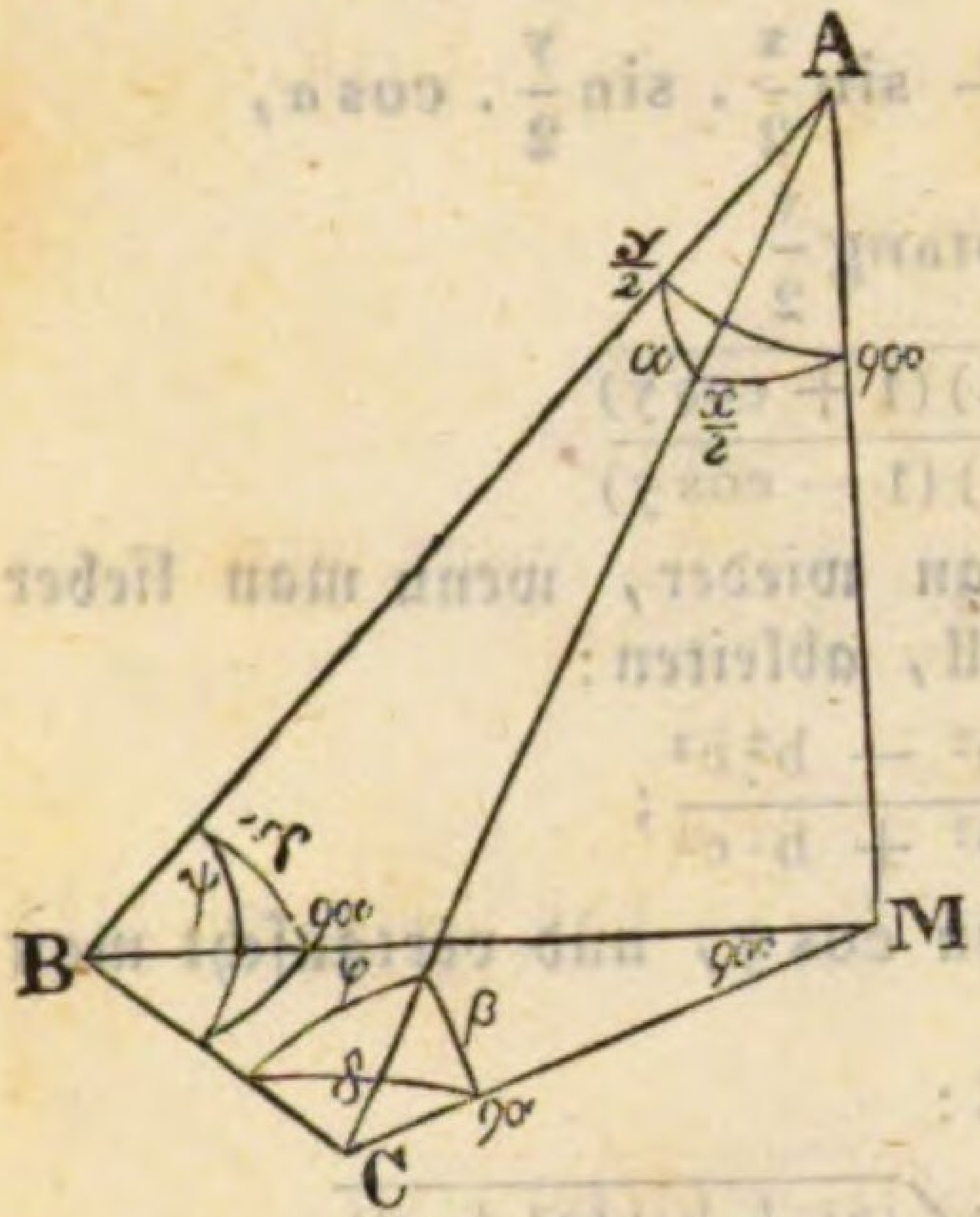


§. 513. Zum Beschlusse betrachten wir folgenden Körper, wo BB′CC′ ein Rhombus ist, AX ⊥ BB′CC′, und zwar so, daß AM = MX, BM = MB′, CM = C′M, so wird dieser Körper von acht ungleichseitigen congruenten Dreiecken begrenzt. Dieser Körper wird nach Mohs Orthothyp benannt.

Es sey die Achse AX = a, die Diagonale BB′ = b, die Diagonale CC′ = c; der Winkel der Ebenen an der Kante AC oder AC′ sey gleich x, der an der Kante AB oder AB′ aber y, endlich der Winkel der Ebenen an der Kante BC oder BC′ z, endlich der ebene Winkel an der Spitze x.

Zum Behufe unserer Untersuchung zeichnen wir uns das Achtel dieses Orthothyps besonders heraus, und zwar im größeren Maßstabe.

Fig. 668.



Es ist hier der Winkel der Ebenen ACB und ACM gleich $\frac{x}{2}$,

» » ACB » ABM » $\frac{y}{2}$,

» » ACB » BCM » $\frac{z}{2}$.

Nennen wir ferner der Kürze halber:

$$ACM = \beta,\quad BCM = \delta,$$
$$ACB = \varphi,\quad ABC = \psi,$$
$$ABM = \gamma.$$

Da in jedem Rhombus die Diagonalen sich senkrecht schneiden, so ist $BMC = 90^\circ$; da nun auch

$$AMB = 90^\circ,\quad AMC = 90^\circ$$

ist, so hat man:

$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}},\quad \cos\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}};$$
$$\sin\delta = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}},\quad \cos\delta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}};$$
$$\sin\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Aus dem sphärischen Dreiecke bei dem Ecke C hat man:

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{\cos\delta - \cos\varphi \cdot \cos\beta}{\sin\varphi \cdot \sin\beta},\quad \cos\frac{z}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\varphi \cdot \cos\delta}{\sin\varphi \cdot \sin\delta},$$
$$\cos\varphi = \cos\beta \cdot \cos\delta.$$

Aus dem sphärischen Dreiecke bei dem Ecke B hat man:

$$\cos\frac{z}{2} = \frac{\cos\gamma - \cos\psi \cdot \sin\delta}{\sin\psi \cdot \cos\delta},\quad \cos\frac{y}{2} = \frac{\sin\delta - \cos\psi \cdot \cos\gamma}{\sin\psi \cdot \sin\gamma},$$
$$\cos\psi = \cos\gamma \cdot \sin\delta.$$

Substituirt man hier die Werthe von β, δ, γ in denen von $\cos\varphi$ und $\cos\psi$, und setzt die dafür entsprechenden Werthe in die vorhergehenden Formeln, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{ac}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}\\ \cos\left(\frac{y}{2}\right) &= \frac{ab}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}\\ \cos\left(\frac{z}{2}\right) &= \frac{bc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}\end{aligned}\right\}\ (\dagger)$$

daher $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{y}{2} + \cos^2\frac{z}{2} = 1$,

woraus $\cos x + \cos y + \cos z + 1 = 0$.

Aus dem sphärischen Dreiecke am Ecke A hat man:

$$\cos 90^\circ = -\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{y}{2} + \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{y}{2} \cdot \cos\alpha,$$

woraus $\cos\alpha = \text{cotang}\,\frac{x}{2} \cdot \text{cotang}\,\frac{y}{2}$

oder $\cos\alpha = \sqrt{\frac{(1+\cos x)(1+\cos y)}{(1-\cos x)(1-\cos y)}}$.

Aus obigen Formeln (†) kann man wieder, wenn man lieber den ganzen als halben Winkel haben will, ableiten:

$$\cos x = \frac{a^2 c^2 - a^2 b^2 - b^2 c^2}{a^2 c^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2};$$

vertauscht man hier b mit c, so hat man cos y, und vertauscht man a mit b, dann cos z.

Schlüßlich gibt das Dreieck ABC:

$$\frac{b^2+c^2}{4} = \frac{a^2+b^2}{4} + \frac{a^2+c^2}{4} - 2\frac{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}{4}\cos\alpha,$$

woraus $\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}$.

Auch findet man noch leicht:

$$b = \frac{a\,c}{\sqrt{a^2+c^2}}\,\text{tang}\,\frac{x}{2},$$

$$c = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\text{tang}\,\frac{y}{2},$$

$$a = \frac{b\,c}{\sqrt{b^2+c^2}}\,\text{tang}\,\frac{z}{2}.$$

Setzt man hier b = c, so geht das Orthothyp in den Körper über, den die Mineralogen gleichkantige vierseitige Pyramide nennen; wird endlich auch a = b = c, so hat man das regelmäßige Octaeder.